

Comparaison de deux formulations du modèle d'Armstrong-Frederick : Application à l'adaptation élastoplastique

C. BOUBY^a, D. KONDO^b, G. DE SAXCÉ^c

a. LEMTA, UMR 7563 CNRS, Université de Lorraine, Vandoeuvre-lès-Nancy, F-54500, France,
celine.bouby@univ-lorraine.fr

b. Institut D'Alembert, UMR 7190 CNRS, UPMC (Paris 6), Paris, F-75005, France,
djimedo.kondo@upmc.fr

c. LML, UMR CNRS 8107, Université des Sciences et Technologies de Lille, Cité Scientifique,
Villeneuve d'Ascq cedex, F-59655, France, gery.desaxce@univ-lille1.fr

Résumé :

Dans cette communication, une analyse comparative de deux modèles de plasticité pour une loi d'écrouissage non linéaire est réalisée pour le modèle développé initialement par Armstrong et Frederick et une réécriture de celui-ci dans le cadre des Matériaux Standards Généralisés (MSG). Une analyse mathématique de ces deux modèles est d'abord effectuée à l'aide du concept de Matériaux Standards Implicites (MSI), ce qui permet d'obtenir un bipotentiel pour le modèle de type MSG. Pour ce modèle modifié, en utilisant le cadre des MSI, l'adaptation élastoplastique d'un tube mince sous traction constante et torsion alternée est étudiée. Les résultats analytiques obtenus sont comparés à ceux calculés par résolution numérique des problèmes de bornes d'adaptation par optimisation. Finalement, les prédictions des deux modèles sont comparés ce qui permet d'illustrer leurs différences.

Abstract :

The communication is mainly devoted to a comparative analysis of two plasticity models with a nonlinear hardening law, namely the Armstrong and Frederick model, and a recent modification proposed in literature in the framework of Generalized Standard Materials (GSM). We first provide a detailed mathematical analysis of the two models by appropriately resorting to the bipotential theory. Then, for the modified model, making use of the above bipotential-based tools, we carry out a shakedown analysis of a thin walled tube under constant tension and alternating cyclic torsion. The accuracy of the obtained results is checked by comparing them to data obtained by numerical solving the corresponding shakedown bounds problems. Finally, the predictions of the two models are compared and illustrated their differences.

Mots clefs : Plasticité non associée, Matériaux Standards Généralisés, Matériaux Standards Implicites, Adaptation élastoplastique, Bipotentiel.

Une représentation réaliste de la plasticité cyclique pour les métaux est donnée par les règles dites d'érouissage cinématique non linéaires. Les premiers auteurs à proposer une telle règle d'érouissage cinématique non linéaire sont Armstrong et Frederick dans [1], avec un domaine élastique défini par

$$K = \{(\boldsymbol{\sigma}'', \mathbf{X}, R) \quad \text{s.t.} \quad \sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma}'' - \mathbf{X}) \leq R\}$$

où $\boldsymbol{\sigma}''$ désigne le déviateur du tenseur des contraintes, \mathbf{X} les contraintes internes et R le seuil d'écoulement. Avec les variables primales $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}, -\dot{p})$, respectivement le taux de déformation plastique, les variables d'érouissage cinématiques et celles d'érouissage isotrope, la règle d'érouissage cinématique non linéaire s'écrit

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{X}}{X_\infty} \dot{p}$$

où $X_\infty > 0$ est un paramètre matériau constant. Pour ce modèle, nous avons récemment démontré dans [5] que cette formulation de la règle d'érouissage cinématique non linéaire n'admet pas de potentiel. La conséquence principale de ce résultat est que le cadre des Matériaux Standards Généralisés (MSG) n'est plus adapté pour ce modèle. Les Matériaux Standards Implicites (MSI), introduits par de Saxcé, fournissent alors une alternative. Ce concept permet en effet de retrouver la loi d'écoulement normale, sous la forme faible d'une relation implicite. En particulier, il est alors possible d'écrire les problèmes de bornes de l'adaptation, sous une forme implicite et de calculer la charge d'adaptation analytique pour des cas simples.

Cependant, une alternative à cette formulation de la loi non linéaire, a été examinée¹ dans l'ouvrage de Besson et al. [4] ; elle consiste à introduire une nouvelle formulation du domaine élastique sous la forme suivante :

$$K = \{\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\sigma}'', \mathbf{X}, R) \quad \text{s.t.} \quad \sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma}'' - \mathbf{X}) + \frac{1}{2X_\infty} \sigma_{eq}^2(\mathbf{X}) - R \leq 0\} \quad (1)$$

De plus, selon ces mêmes auteurs, la règle d'érouissage cinématique non linéaire peut être traitée comme appartenant aux MSG, la modification de la formulation du modèle nécessitant uniquement une nouvelle identification des paramètres matériaux pour comparer avec les prédictions du modèle classique. Pour vérifier cette affirmation, ce modèle a été appliqué à l'étude de l'adaptation pour un tube mince sous traction constante et torsion alternée. Nous avons établi pour cet exemple une expression analytique de la charge d'adaptation. Nous avons ensuite utilisé les problèmes de bornes de l'adaptation, dérivés de l'approche par bipotentiel, pour calculer les bornes cinématique et statiques par optimisation. Finalement, nous avons comparé (figure 1) la charge d'adaptation obtenue à l'aide du modèle associé avec celle calculée par de Saxcé dans [3] dans le cas de la version non associée du modèle et avec celle obtenue par le modèle à deux surfaces.

On peut constater une différence importante (jusqu'à 20%) entre la charge d'adaptation obtenue par le modèle non associé et celle calculée avec la version associée pour l'érouissage non linéaire. Finalement, l'effet de la calibration des paramètres matériaux est considérée sur la courbe d'interaction, figure 2. Même si les résultats semblent en bon accord, ils ne coïncident pas et des différences notables sont observées sur les valeurs de contraintes internes.

Finalement, la différence de structure mathématique de ces deux modèles semble avoir une influence importante sur les résultats. Cela peut d'ailleurs être expliqué par le rôle différent que joue la contrainte interne dans les deux modèles. En effet, dans la version associée du modèle, elle semble introduire un

1. On notera que cette formulation est initialement apparue dans Ladevèze et Rougée [2].

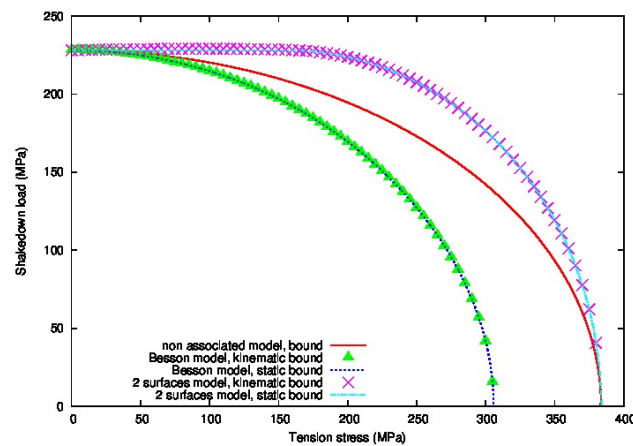


FIGURE 1 – Comparaison des charges d'adaptation obtenues avec les modèles associés et non associés.

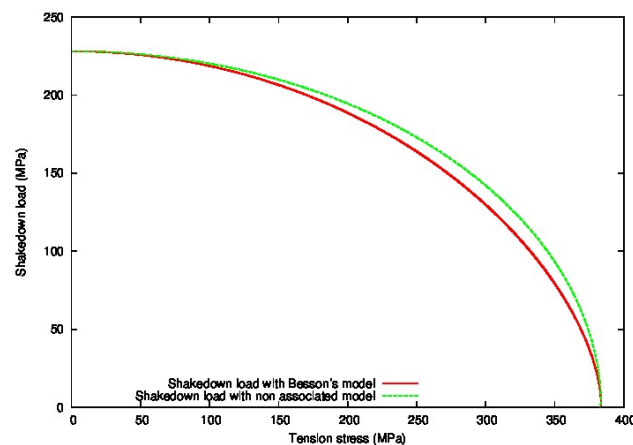


FIGURE 2 – Comparaison des charges d'adaptation obtenues avec les modèles associés et non associés avec une calibration des paramètres.

écrouissage isotrope additionnel, ce qui a forcément des conséquences non négligeables. Pour plus de détails, on pourra se référer à [5].

Références

- [1] P.-J. Armstrong, C.-O. Frederick, A Mathematical Representation of the Multiaxial Baushinger Effect, C.E.G.B., Report No. RD/B/N731.
- [2] P. Ladevèze, P. Rougée, Plasticité et viscoplasticité sous chargement cyclique : propriétés et calcul du cycle limite, CRAS, série II, 301(13), 891-894.
- [3] G. Maier, D. Weichert, Inelastic Behaviour of Structures under Variable Repeated Loads, CISM Courses and Lectures, No 432, Springer Wien, New-York, 2002.
- [4] J. Besson, G. Cailletaud, J.-L. Chaboche, S. Forest, M. Blétry, Non-Linear Mechanics of Materials, Series : Solid Mechanics and Its Applications, Springer, 2010.
- [5] C. Bouby, D. Kondo, G. de Saxcé, A comparative analysis of two formulations for non linear hardening plasticity models : Application to shakedown analysis, European Journal of Mechanics A/Solids, 53, 2015, 48-61.