

Compétition entre instabilités micro et macro dans une bi-plaque

C. Lestringant^a, B. Audoly^a

a. Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS, UMR 7190 ∂ 'Alembert, F-75005 Paris, claire.lestringant@dalembert.upmc.fr

Résumé

Une transition micro-macro inédite est mise en évidence au seuil de stabilité dans un système expérimental constitué d'élastomères assemblés avec pré-contrainte (caractérisé dans [1]). Une analyse de cette transition est proposée à travers l'étude de stabilité de deux modèles réduits fondés respectivement sur une cinématique de poutres planes et de plaque mince non-linéaire. Le second modèle correspond à la réduction directe du système expérimental dans la limite des faibles rapports d'aspect. Une analyse par éléments finis permet enfin d'effectuer une comparaison quantitative entre le comportement des modèles réduits et celui de la structure réelle.

Abstract

An unprecedented micro-macro transition is observed at stability threshold in an experimental setup made of an elastomeric bistrup with pre-strain (experimentally studied in [1]). A similar transition appears from linear stability analysis of two reduced models including pre-stress : a 1D bi-rod and a 2D non-linear bi-plate. The bi-plate model is a direct reduction of the experimental setup in the limit of a small aspect ratio. Finally, a finite element analysis is driven in order to propose quantitative comparison between the reduced models and the real structure.

flambement, instabilité micro/macro, non linéarités géométriques, stabilité linéaire, réduction dimensionnelle, modèle de plaque

1 Introduction

Des expériences récentes [1] ont mis en évidence une compétition entre plusieurs modes de flambage dans un système expérimental constitué par deux rubans d'élastomère assemblés avec pré-contrainte. Les auteurs analysent cette compétition en la rapprochant de l'étude de stabilité d'une poutre mince à courbure naturelle, modélisée par les équations de Kirchhoff. Cette analyse ne donne pas d'argument permettant

d'expliquer la sélection des modes, et en particulier de la longueur d'onde, au seuil de flambement.

Nous montrons que l'un de ces modes (semi-hélice) est une version fortement post-flambée du mode de flambage sinusoïdal d'une plaque à bord précontraint. L'autre mode est un mode en hélice de grande longueur d'onde. Ce système modèle produit une compétition entre modes de flambage inédite pour les structures élancées.

Dans une première partie, nous en proposons une analyse simplifiée fondée sur des modèles réduits avec précontrainte : un modèle de poutres 1D et un modèle de plaque en 2D. Une formulation en élasticité finie 3D discrétisée par éléments finis nous permet ensuite de raccorder nos modèles simplifiés aux observations effectuées par [1] sur le système expérimental.

2 Modèles simplifiés

Un comportement analogue est obtenu dans deux systèmes modèles faisant intervenir une pré-contrainte, comme dans le système expérimental : un assemblage de deux poutres planes pouvant se déformer en flexion (modèle 1D) et un modèle de bi-plaque (modèle 2D).

2.1 Modèle 1D : bi-poutre

L'étude de la stabilité d'un modèle 1D combinant deux poutres planes soumises respectivement à une contrainte compressive P_1 et une contrainte extensive P_2 , et assemblées par une raideur de liaison k (voir Figure 1) fait apparaître un comportement qui rappelle celui du dispositif expérimental.

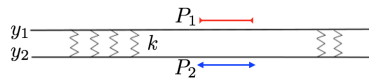


FIGURE 1 – Modèle de bi-poutre

Une sélection de la longueur d'onde s'effectue en effet au seuil de flambement : quand le paramètre de couplage est faible et que la précontrainte $\delta P = P_2 - P_1$ est grande, une des deux poutres reste en traction, se déforme peu et joue un rôle d'ancrage, le paramètre k s'assimile alors à la raideur d'une fondation et le mode de flambement sinusoïdal en semi-hélice (mode "micro") apparaît. Quand la précontrainte est faible et le paramètre de liaison plus élevé, les deux poutres restent solidaires et sont équivalentes à une poutre 'simple' avec courbure naturelle, qui exprime un mode de flambage macro (i.e. de longueur d'onde fixée par la taille du système), voir Figure 2.

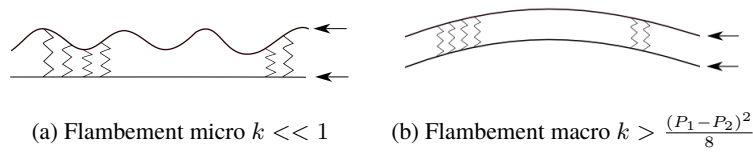


FIGURE 2 – Flambement micro et macro dans une bi-poutre

2.2 Modèle 2D : bi-plaque

Un comportement analogue apparaît lorsque nous étudions la stabilité linéaire au voisinage de la configuration plane d'une bi-plaque soumise à une pré-contrainte inhomogène $t_i = t_1, t_2$ (voir Figure 3). Ce modèle peut-être vu comme une réduction directe du système expérimental dans la limite des faibles rapports d'aspect du bi-ruban. Dans les analyses qui suivent, les grandeurs t_i sont adimensionnées par les caractéristiques géométriques et élastiques de la plaque.

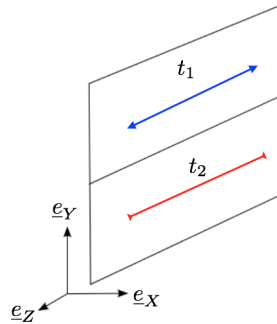


FIGURE 3 – Modèle de bi-plaque

Un flambage apparaît lorsque la valeur de la pré-contrainte compressive t_2 augmente. Pour un système homogène de longueur infinie ce flambage est caractérisé par un nombre d'onde axial au seuil : k_c , une transition micro-macro sera alors repérée par le passage de $k_c \neq 0$ à $k_c = 0$.

Les équations de Von-Karman [2] s'écrivent comme un problème aux limites linéaire pour la valeur propre k . Une résolution numérique par la méthode du tir permet de calculer un nombre d'onde k_c non nul au seuil de flambement (instabilité "micro") pour une précontrainte extensive t_1 suffisamment élevée. Des résultats comparatifs, incluant notamment la limite d'une extension t_1 infinie, sont représentés en Figure 4.

Nous observons ainsi une transition micro-macro en augmentant la précontrainte compressive $\delta t = t_1 - t_2$ à partir de 0. Le nombre d'onde critique k_c est tracé en Figure

5 pour différentes valeurs de δt .

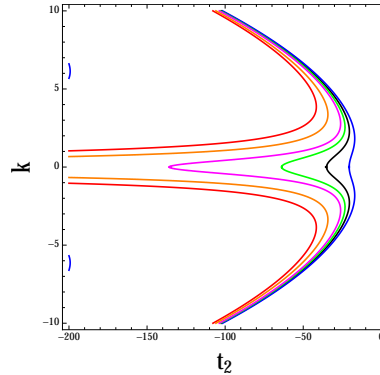


FIGURE 4 – Résultats numériques pour $t_1 = 200, 400, 800, 1800, 50000$ (en bleu, noir, vert, magenta, orange) et pour le cas où l'extension t_1 est infinie (en rouge)

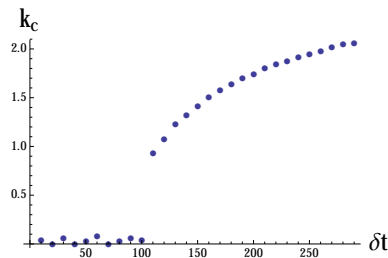


FIGURE 5 – Nombre d'onde au seuil en fonction de la précontrainte

3 Analyse par éléments finis

Nous avons mis en œuvre des calculs par éléments finis en élasticité finie 3D, implémentés avec le code FEniCS. Ceux-ci permettent d'analyser la stabilité d'un prisme droit (appelé par la suite "barreau") hyper-élastique de section quelconque soumis à une précontrainte uni-axiale parallèle à sa génératrice, éventuellement inhomogène dans la section.

3.1 Démarche

Une solution de base est d'abord calculée dans l'hypothèse de déplacements plans. L'analyse de stabilité de cette solution vis-à-vis d'une instabilité harmonique dans la

direction transverse permet ensuite de faire apparaître un seuil de flambement et de calculer la longueur d'onde à ce seuil ainsi que les modes propres associés.

Le calcul de la solution de base s'effectue en 2D (la dimension transverse apparaît via un paramètre t d'étirement axial) sur une section transverse du barreau : Ω appartenant au plan $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ dans la configuration de référence. Les coordonnées (X, Y, Z) repèrent la configuration de référence. Cette section est soumise à un chargement hors-plan en déplacement :

$z = tZ\underline{e}_z$ (ou (x, y, z) sont les coordonnées en configuration déformée pour la solution de base), ce chargement peut éventuellement être inhomogène dans la section. La formulation ainsi obtenue est un problème d'élasticité 2D non-linéaire où le paramètre t apparaît comme un paramètre de chargement. Elle peut être résolue après discrétisation par éléments finis par une méthode de Newton-Raphson.

Dans un second temps, nous effectuons l'analyse de stabilité de cette solution de base vis-à-vis d'une instabilité harmonique suivant la coordonnée transverse, c'est à dire d'un déplacement \underline{U}_1 de la forme :

$$(u_{1x}(X, Y), u_{1y}(X, Y), u_{1z}(X, Y))e^{ikZ}$$

Par symétrie $z \rightarrow -z$, le champ de déplacement \underline{U}_1 et le champ test associé \underline{W} (déplacement virtuel cinématiquement admissible) prennent la forme particulière suivante, sans perte de généralité :

$$\underline{U}_1 = (U_{1X}(X, Y), U_{1Y}(X, Y), iU_{1Z}(X, Y))e^{ikZ}$$

$$\underline{W} = (W_X(X, Y), W_Y(X, Y), iW_Z(X, Y))e^{ikZ}$$

avec $U_{1X}, U_{1Y}, U_{1Z}, W_X, W_Y, W_Z$ réels.

En formulation faible, l'analyse de stabilité s'écrit alors sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé pour le nombre d'onde axial k et le mode propre \underline{U}_1 (dépendance polynômiale en k) :

$$a(\mathcal{U}, \mathcal{W}) + kb(\mathcal{U}, \mathcal{W}) + k^2c(\mathcal{U}, \mathcal{W}) = 0$$

avec

$$\mathcal{U} = (U_{1X}(X, Y), U_{1Y}(X, Y), U_{1Z}(X, Y))$$

$$\mathcal{W} = (W_X(X, Y), W_Y(X, Y), W_Z(X, Y))$$

Les formes bilinéaires a, b et c sont réelles symétriques (hermitiennes) et dépendent de la précontrainte t et de la loi de comportement (modèle de Gent néo-Hookéen).

3.2 Résultats

Ce modèle numérique permet d'abord de valider la pertinence du modèle analytique de bi-plaque, en particulier en comparant les valeurs de pré-contrainte à la transition macro-micro prédites par les modèles 2D et 3D pour différents rapports d'aspect de la section. Nous pouvons par la suite effectuer une comparaison quantitative entre le comportement du système expérimental et les simulations numériques.

Références

- [1] J. HUANG, J. LIU, B. KROLL, K. BERTOLDI, AND D. R. CLARKE, Spontaneous and deterministic three-dimensional curling of pre-strained elastomeric bi-strips, *Soft Matter*, **8** (2012), 6291–6300
- [2] B. AUDOLY, Thin structures, *Editions de l'Ecole Polytechnique*, 152–154 (2014)