

# Modélisation d'un système roue et vis sans fin pour déterminer un processus de conception et de fabrication

Y. BENABID<sup>a</sup>, B. MAHIDDINI<sup>b</sup>, O. ADJOUL<sup>a</sup>, A. BOUSNANE<sup>a</sup>, K. BENFRIHA<sup>c</sup>, A. AOUSSAT<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire Systèmes Mécanique, Ecole Militaire Polytechnique, BP 17BEB Alger, Algérie

<sup>b</sup> Laboratoire Procédés de Fabrication, Ecole Militaire Polytechnique, BP 17BEB Alger, Algérie

<sup>c</sup> Laboratoire Conception de Produits & Innovation, Arts & Métiers ParisTech, 151 Bd de l'hôpital Paris, France

## Résumé :

*La transmission de puissance par roue et vis sans fin est très importante sur plusieurs plans. Elle donne un rapport de réduction important, elle assure une sécurité de fonctionnement par les notions: d'irréversibilité, de silence et d'un engrènement doux. L'objectif à travers notre travail est de traité le comportement dynamique des engrenages à roue et vis sans fin. Nous allons développer un modèle à huit degrés de liberté, en introduisant des éléments discrets de masse, d'inertie, de rigidité et d'amortissement. L'obtention des réponses vibratoires à partir de notre modèle revient à la résolution d'un système d'équation par une méthode d'intégration numérique (Runge-Kutta). Un calcul de l'erreur de transmission sur la base des résultats obtenus par la modélisation dynamique nous permettra de mieux comprendre le comportement dynamique des engrenages à roue et vis sans fin tout en variant le matériau de la roue (bronze, aluminium et POM). Le résultat obtenu constitue une base pour réaliser un banc d'essai pour déterminer le comportement dans un stade avancé de nos travaux de recherche.*

## Abstract:

*The power transmission through worm and wheel is very important on many levels. It gives a large reduction ratio, it ensures a safe operation by the concepts of irreversibility, silence and a soft gearing. The objective through our work is treated the dynamic behavior of the gears with worm and wheel. We will develop a model with eight degrees of freedom, by introducing discrete elements of mass, inertia, rigidity and damping. Obtaining the vibratory answers starting from our model returns to the resolution of an equation system by numerical method integration (Runge-Kutta). A calculation of transmission error based on the results of dynamic modeling will allow us to better understand the dynamic behavior of wheel gears and worm while vary the wheel material (bronze, aluminum and POM). The results obtained provide a basis for achieving a benchmark to determine the behavior in an advanced stage of our research.*

**Mots clefs : roue et vis sans fin, degrés de liberté, éléments discrets, réponse vibratoires, systèmes d'équations, intégration numérique (Runge-Kutta).**

# 1 Introduction

Il est bien connu que la transmission par engrenage constitue une liaison excitatrice, qui peut être une source de nuisance acoustique. Le bruit proliféré, résulte des vibrations générées par l'engrènement, qui se manifeste à travers les surcharges dynamiques sur le flanc des dentures. Ces vibrations vont se propager vers le carter, à travers les lignes d'arbres et les roulements. Les sources principales des vibrations et du bruit, résident dans la variation de la raideur d'engrènement du couple de dents en prise, due à la variation de la longueur de contact au cours du temps et par les écarts géométriques. A cause de besoin de ces systèmes de transmission par engrenages, il est nécessaire de bien comprendre leur comportement dynamique. Pour cela, il existe des modèles linéaires et non linéaires qui permettent d'analyser la réponse dynamique des engrenages [1].

Dans la majorité des cas, le problème vibratoire de la transmission par engrenages est traité en considérant une raideur constante [2]. Dans notre travail, on va étudier un modèle dynamique d'une transmission par des engrenages à roue et vis sans fin, en introduisant une raideur d'engrènement constante. Pour ce faire, ce travail sera divisé en trois parties, la première partie sera consacrée à la modélisation du système de transmission, où nous décrivons les différentes étapes pour la détermination des équations de mouvement. Dans la deuxième partie nous déterminons les différentes grandeurs physiques du modèle tel que la rigidité est l'amortissement des paliers et de l'arbre. A la fin, nous allons simuler le système de transmission avec et sans défaut d'excentricité, et écrire les équations qui régissent le mouvement de la roue et la vis sans fin. Les calculs des réponses vibratoires sont ensuite abordés en résolvant les équations de mouvement, à l'aide d'un schéma d'intégration pas-à-pas dans le temps (Runge-Kutta 4).

Cette tendance de modélisation dynamique est une stratégie qui vise à installer un processus de maintenance basé sur l'identification des paramètres de correction des dentures pour un système roue et vis sans fin. Cette stratégie va répondre à un besoin de réaliser un système unique non disponible sur le marché, d'où la nécessité d'une modélisation dynamique dans la phase amont. Cette modélisation constitue une base riche de données pour réaliser un banc d'essai et déterminer ainsi que valider un processus de fabrication.

## 2 Modélisation du système de transmission roue et vis sans fin

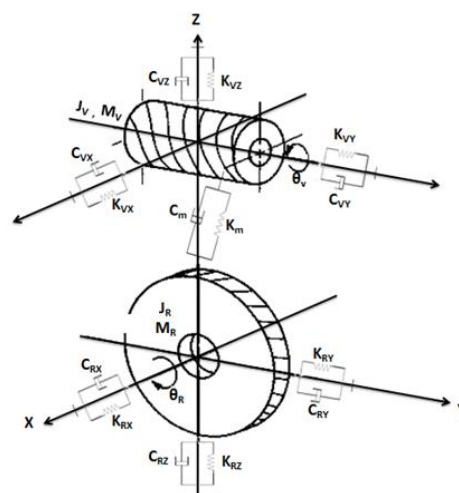
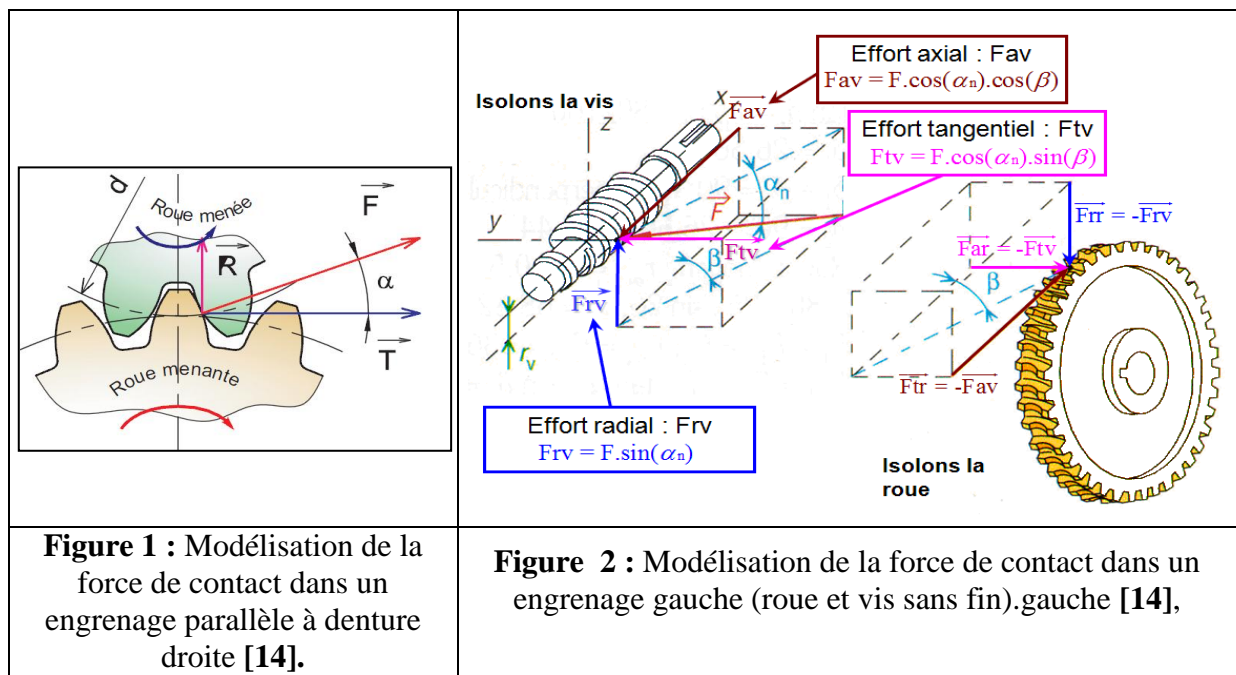
### 2.1 Approche

Dans un but de simplicité, la plupart des travaux de modélisation du comportement dynamique d'engrenages se sont orientés vers des modélisations discrètes de type masses-ressorts-amortisseurs. Les engrenages sont alors assimilés à des cylindres rigides liés par une raideur qui représente la liaison élastique entre les dentures (raideur d'engrènement) [3-4]. Les premiers travaux considèrent une raideur d'engrènement constante, ce qui nécessite l'ajout de différentes excitations externes, telles que les erreurs de forme et de montage, dans les équations dynamiques [4-5]. Il est actuellement admis [6-7] que les deux sources d'excitation interne à considérer sont celles produites par la fluctuation de raideur d'engrènement et celles générées par les écarts de formes (excentricité) [8].

L'influence du nombre de degré de liberté est important et ne peut être négligé, en tenant compte des défauts de profil, cependant la prise en compte de défaut de profil est considéré de manière différente [9]. Ainsi, il est nécessaire de faire un compromis entre la simplicité et la précision du modèle. Or, l'objectif du modèle développé est d'être rapide et adaptable à un grand nombre de situation.

Les auteurs comparent aussi les amplitudes de l'accélération angulaire obtenues par les modèles à six et huit degrés de liberté avec des données expérimentales obtenues par Parey [10]. Cette validation montre une plus grande corrélation pour les résultats à six degrés de liberté [8].

**Comparant à notre cas (système roue et vis sans fin), on constate que la seule différence** c'est que dans les modèles développés, les dentures que ce soit de la roue ou du pignon, sont droites c'est-à-dire l'angle d'inclinaison est égale à zéro, donc la force de contact est sur le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, **Figure 1**. Mais dans le cas où les dents sont inclinées d'un angle  $\lambda$  (roue cylindrique à denture hélicoïdale), la force de contact est dans l'espace, c'est-à-dire elle a trois composantes (suivants x, y et z), comme est indiquée sur la **Figure 2**. Les trois composantes de la force de contact (force d'engrènement), va créer trois translations suivant x, y et z (trois degrés de libertés) pour la vis et trois pour la roue. Donc au totale, huit degrés de liberté, c'est le modèle qui sera employé pour notre étude, il est représenté dans la **Figure 3**.



**Figure 3 :** Modélisation à huit degrés de liberté.

Afin d'avoir ces informations, le modèle choisi sera donc basé sur un système au minimum huit degrés de liberté. Les modèles comprenant un nombre de degrés de liberté supérieur à huit nécessitent quant à eux de connaître plus de détails sur le bâti, le moteur et la charge. Ces données sont parfois difficiles à connaître et à modéliser efficacement. Ainsi pour ne pas surcharger inutilement le modèle.

Le modèle de la **Figure 3** peut donc être modélisé sous la forme de huit équations correspondantes chacune à un degré de liberté.

Les équations des mouvements :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_v \ddot{\theta}_v + C_{tv} \dot{\theta}_v + k_{tv} \theta_v = T_m - W_n [\cos(\varphi_n) \sin(\lambda) + \mu \cos(\lambda)] R_v \\ J_r \ddot{\theta}_r + C_{tr} \dot{\theta}_r + k_{tr} \theta_r = W_n [\cos(\varphi_n) \cos(\lambda) + \mu \sin(\lambda)] R_r - T_c \\ M_v \ddot{X}_v + C_{vx} \dot{X}_v + k_{vx} X_v = F_x \\ M_v \ddot{Y}_v + C_{vy} \dot{Y}_v + k_{vy} Y_v = F_y \\ M_v \ddot{Z}_v + C_{vz} \dot{Z}_v + k_{vz} Z_v = F_z \\ M_r \ddot{X}_r + C_{rx} \dot{X}_r + k_{rx} X_r = -F_x \\ M_r \ddot{Y}_r + C_{ry} \dot{Y}_r + k_{ry} Y_r = -F_y \\ M_r \ddot{Z}_r + C_{rz} \dot{Z}_r + k_{rz} Z_r = -F_z \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = W_n \cos(\varphi_n) \sin(\lambda) + W_f \cos(\lambda) \\ F_y = W_n \cos(\varphi_n) \cos(\lambda) - W_f \sin(\lambda) \\ F_z = W_n \sin(\varphi_n) \\ W_f = \mu W_n \end{array} \right.$$

Tel que :

$$W_n = C_m [(\dot{\theta}_v R_{bv} - \dot{\theta}_r R_{br}) + (\dot{X}_r - \dot{X}_v) \cos(\varphi_n) \sin(\lambda) + (\dot{Y}_r - \dot{Y}_v) \cos(\varphi_n) \cos(\lambda) + (\dot{Z}_r - \dot{Z}_v) \sin(\varphi_n)] + K_m \quad (2)$$

$$[(\theta_v R_{bv} - \theta_r R_{br}) + (X_r - X_v) \cos(\varphi_n) \sin(\lambda) + (Y_r - Y_v) \cos(\varphi_n) \cos(\lambda) + (Z_r - Z_v) \sin(\varphi_n)]$$

$\mu$  : Le coefficient de frottement.

$\lambda$  : L'angle d'inclinaison.

$R_v$  et  $R_r$  : Les rayons primitifs du pignon et de la roue.

$R_{bv}$  et  $R_{br}$  : Les rayons de base du pignon et de la roue.

$C_m$  : L'amortissement du contact.

$K_m$  : La rigidité du contact.

$\varphi$  : L'angle de pression de l'engrenage.

$J_v$  et  $J_r$  : Les inerties de la roue et de la vis.

$M_v$  et  $M_r$  : Les matrices de masse de la roue et de la vis.

$C_{vx}$ ,  $C_{vy}$  et  $C_{vz}$  : Les amortissements du support de la vis suivant x, y et z.

$C_{rx}$ ,  $C_{ry}$  et  $C_{rz}$  : Les amortissements du support de la roue suivant x, y et z.

$K_{vx}$ ,  $K_{vy}$  et  $K_{vz}$  : Les rigidités du support de la vis suivant x, y et z.

$K_{rx}$ ,  $K_{ry}$  et  $K_{rz}$  : Les rigidités du support de la roue suivant x, y et z.

$K_{tr}$  et  $K_{tv}$  : Les rigidités de la roue et de la vis.

$C_{tr}$  et  $C_{tv}$  : Les amortissements de la roue et de la vis.

### 3. Les grandeurs physiques du modèle

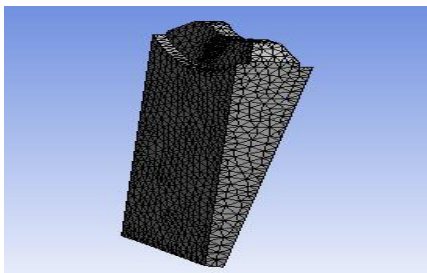
En utilisant le logiciel de calcul par élément finis ANSYS, on introduit les modèles CAO des grandeurs (dent, filet, les diamètres de base, les arbres et les paliers de la roue et la vis sans fin). Après avoir choisis le matériau, on construit le maillage du modèle.

La rigidité de la grandeur K est calculée en divisant la force appliquée F sur le déplacement associé  $\delta$  [8].

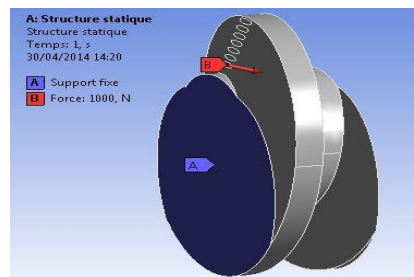
$$K = F / \delta \quad (3)$$

#### 3. 1. Détermination de la rigidité d'engrènement

Dans un premier cas on considère que la roue est soumise à l'action mécanique de la vis. Cette vis est représentée par un effort normal au profil actif de la dent, d'une valeur de 1000 N, appliqué sur chaque surface de contact, tracé sur le profil de la dent **Figure 4**. Dans le deuxième cas on considère le contraire c-à-d la vis est soumise à l'action mécanique de la roue. Les surfaces de contact tracées sur le profil du filet coïncident avec les surfaces qui ont été déjà tracées sur le profil de la dent **Figure 5**.



**Figure 4:** Maillage adopté sur la denture



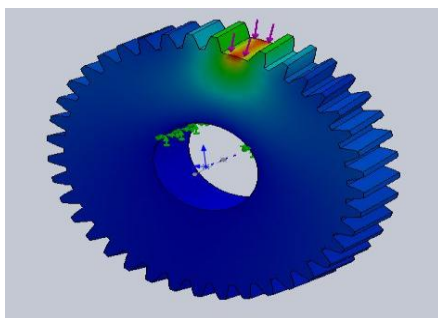
**Figure 5:** Déplacement du surface de contact.

Pour déterminer la flexibilité équivalente d'une paire de dent en prise, nous allons sommer ces flexibilités prise séparément (dent pour la roue et filet pour la vis) [11].

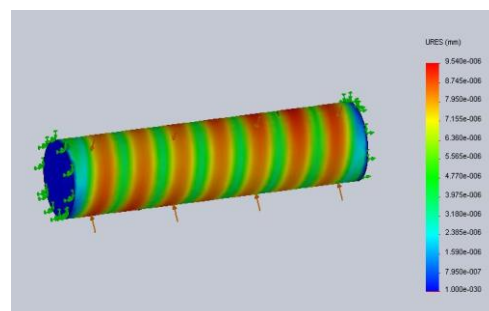
La raideur d'engrènement d'une paire de dent est déterminée en inversons la flexibilité équivalente.

#### 3.2 Calcul de la rigidité du diamètre de base

- Dans le cas de la roue, la force est appliquée sur une roue sans dent **Figure 6**.
- Dans le cas de la vis sans fin, la force est appliquée sur une vis sans fin sans filet **Figure 7**.



**Figure 6:** Chargement de la zone de coup.



**Figure 7:** Déplacement de la zone chargée.

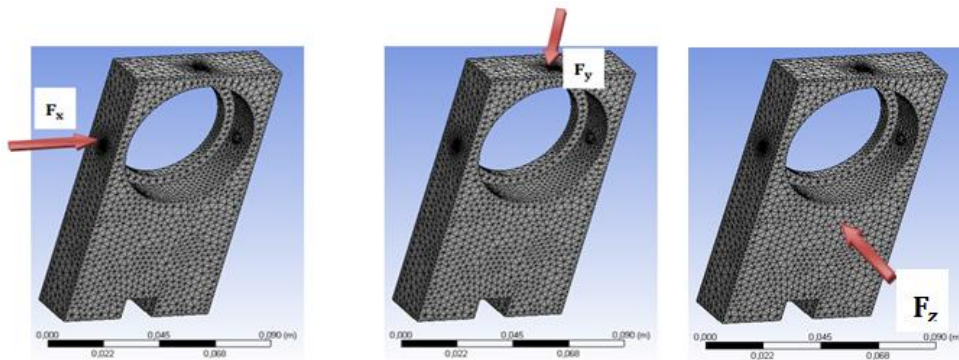
### 3.3 Détermination de la rigidité du support

#### 3.3.1 Calcul de la rigidité de l'arbre

La rigidité des arbres dans notre cas d'étude, n'intervient pas (infinie), car la longueur active de l'arbre de la roue ou bien de la vis sont très inférieure à dix fois son diamètre  $L \ll 10 D$  (théorie des poutres), donc on peut dire que la rigidité des arbres, [12].

#### 3.3.2 La Rigidité des Paliers

Le palier est encastré au niveau de son base est soumis à l'action mécanique **Figure 8**, représentée par un effort  $F_x$  suivant l'axe X pour déterminer La rigidité de palier suivant x, et après un effort  $F_y$  suivant l'axe Y pour déterminer La rigidité de palier suivant y, en fin un effort  $F_z$  suivant l'axe Z pour déterminer La rigidité de palier suivant z.



**Figure 8** : Application des forces  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$  sur le palier

Les rigidités des supports d'engrènement dans notre cas d'étude est égale à la rigidité des paliers suivant les trois directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

### 3.4. Les Amortissements

L'amortissement est calculé à partir de la rigidité, en supposant un taux d'amortissement du contact dans un modèle visqueux à 1 degré de liberté [13].

$$C = 2\varepsilon \sqrt{k M} \quad (4)$$

Où  $C$  : l'amortissement.

$\varepsilon$  : Le taux d'amortissement.

$K$  : La rigidité.

$M$  : La masse.

### 3.5. L'erreur de Transmission

L'erreur de transmission c'est l'écart entre la position réelle occupée par la roue menée et sa position théorique. Elle est exprimée sous forme d'un écart angulaire [14].

$$ETD = R_r \cdot \Delta\theta_r \quad (\theta_v) \quad (5)$$



$R_p$  et  $R_r$  sont les rayons primitifs de la vis et de la roue.

$\theta_v$  et  $\theta_r$  : position angulaire de la vis et de la roue respectivement.

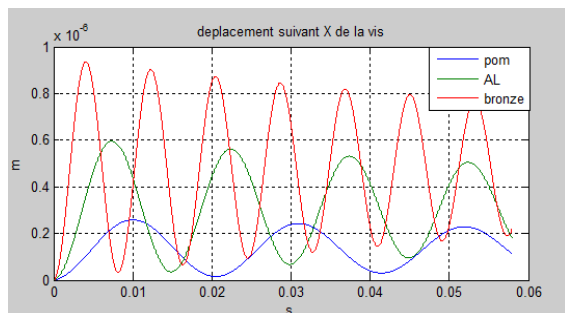
$\lambda$  : L'angle d'inclinaison.

## 4. Résultats et discussion

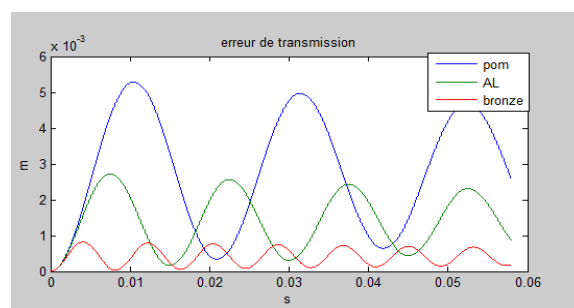
Le modèle développé est un système d'équations différentielles de second ordre, non linéaire. La résolution de système est effectuée en utilisant le logiciel «MATLAB».

### 4.1 Résultats de la simulation sans défauts d'excentricité

Les résultats numériques des réponses vibratoires du modèle à huit degré de liberté étudié, montrent que l'amplitude des vibrations dans les paliers est proportionnelle à la rigidité **Figure 9**. Par contre l'erreur de transmission se diminue **Figure 10**.



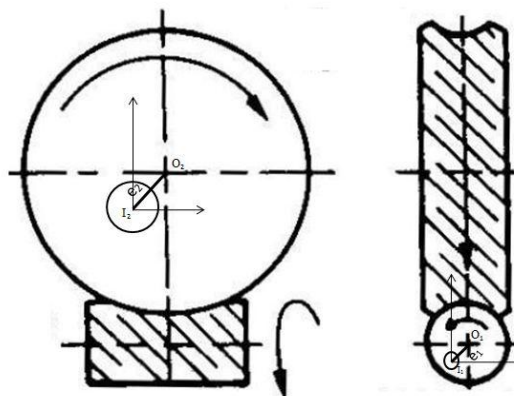
**Figure 9** : Amplitude de la réponse temporelle  $X_v(t)$  (Aciers-POM) (Aciers-AL) et (Aciers-Bronze).



**Figure 10** : Représentation temporelle Erreur de transmission (Aciers-POM) (Aciers-AL) et (Aciers-Bronze).

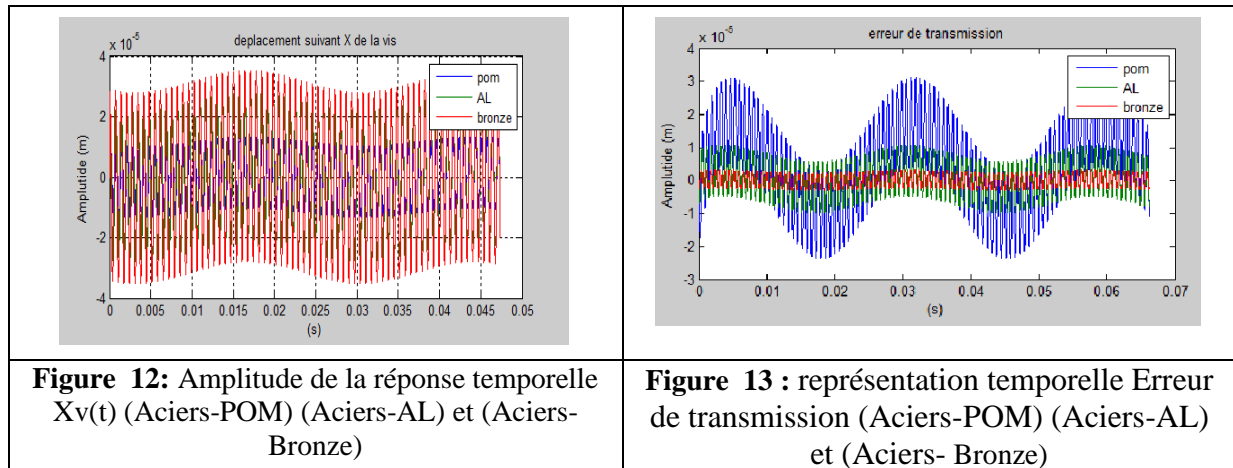
### 4.2 Résultats de la simulation associée aux défauts d'excentricité

Une roue excentrée est caractérisée par le paramètre  $e$ , qui représente la distance entre l'axe de rotation et l'axe d'inertie de cette roue (**Figure 11**) [11].



**Figure 11** : Engrènement en présence d'excentricité.

Les résultats numériques des réponses vibratoires avec défauts d'excentricité sont périodiques (de période  $T_e = 2\pi/\omega$ ) **Figure 12, 13**.



Dans ce travail, on a fait une modélisation de la transmission par engrenage à roue et vis sans fin, par un modèle à huit degrés de liberté. Les huit degrés de liberté sont les deux rotations de la vis sans fin et de la roue ( $\theta_v$  et  $\theta_r$ ) et les six translations (trois pour la vis sans fin [ $X_v$ ,  $Y_v$  et  $Z_v$ ] et trois pour la roue [ $X_r$ ,  $Y_r$  et  $Z_r$ ]).

Dans cette modélisation, on a pris en considération la rigidité et l'amortissement : d'engrènement, des diamètres de base de la vis et de la roue et des paliers.

Après le développement d'un système d'équations différentielles régissant le mouvement d'un réducteur à roue et vis sans fin, on a fait la résolution de ce système d'équation en utilisant « Matlab ».

Dans le cas où il n'y a pas des défauts d'excentricité, la seule source d'excitation interne est la raideur d'engrènement. Cette raideur est constante dans ce cas. L'analyse temporelle montre d'une part, que l'amplitude des vibrations enregistrées aux niveaux des paliers est plus importante dans le cas d'un engrenage en Aciers-Bronze. D'autre part, l'erreur de transmission dynamique est plus importante dans le cas d'un engrenage en Aciers-POM.

La simulation de l'excitation induite par un défaut d'excentricité, montre que les réponses temporelles aux niveaux des paliers, ainsi que l'erreur de transmission devient périodiques (de période  $T_e=2\pi/\omega$ ). Cette dernière résultat est très intéressante, car elle permet de diagnostiquer les défauts d'excentricité lors de la surveillance des engrenages à roue et vis sans fin, connaissant soit : l'erreur de transmission induite, ou alors le déplacement sur l'un des paliers concerné par la transmission.

## Références

- [1] **G. Dalpiaz, A. Fernández del Rincón, E. Mucchi, A. Rivola** « Model-based analysis of dynamic phenomena in gear pumps », Surveillance 5 CETIM Senlis, France, paper 44, 11 pages, 2004
- [2] **F. AMMOUR & M. KHEMACHE** « Contribution à l'étude du processus de conception et réalisation d'engrenages plastiques », PFE 2009 EMP.
- [3] **Gregory, R. W., Harris, S.L., Munro, R.G** « Torsional motion of a pair of spur gears », Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 178, Part3, p.166-173, 1963-64.
- [4] **Tulpin, W.A.** « Dynamic loads on gear teeth ». Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, International Conference on Gearing, London, 1958, p. 24-30.
- [5] **Pearce, W.J., Neilsen, M.A. et Rouverol, W.S.** Reducing Gear Noise Excitation. Proceedings of the 2nd World Congress on Gearing, Vol. 1, p.587-598, Paris 1986.



- 
- [6] **Kassaï, A., Mathieu, J.P. et Chahmirian, G.** Sirèment de denture : Composantes non harmoniques de l'engrènement liées à la rectification par génération. Proceedings of the 3<sup>rd</sup> World Congress on Gearing and Power Transmissions, Paris, 1992, Vol. 2, p. 853-864.
- [7] **Welbourn, D.B.** Gear errors and their resultant noise spectra. Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, 1969-70, Vol. 184, Part 30, p. 131-139.
- [8] **David PALAISI**, « Simulation numérique du comportement vibratoire d'engrenages endommagés ». Thèse de doctorat LE 27 JANVIER 2011 À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE.
- [9] **Sawalhi, N., Randall, R. B.** « Simulating gear and bearing interactions in the presence of faults ». Mechanical Systems and Signal Processing. Vancouver, CB, 16 p
- [10] **Parey A., El Badaoui M., Guillet F., Tandon N.** « Dynamic modelling of spur gear pair and application of empirical mode decomposition-based statistical analysis for early detection of localized tooth defect », Journal of sound and vibration, vol. 294, no3, p. 547-561, 2006.
- [11] **A.CHETIOUI & N.KHETTOU** « Modélisation du Comportement Mécanique des Engrenages Plastiques », PFE 2011 EMP
- [12] **Brahim ABDELKBIR & Abdelkader MADIHA** « Etude expérimentale du comportement Vibratoire des engrenages en Plastiques », PFE 2011 EMP.
- [13] **Christophe BARD** « Modélisation du comportement dynamique des transmissions par engrenages ». Thèse de doctorat. L'Institut National des Sciences appliquées de Lyon. N° d'ordre 95 ISAL 0031, 80-97 p, 1995.
- [14] **Cai, Y. and T. Hayashi** « Linear approximated equation of vibration of a pair of spur gears (theory and experiment) ». Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME. 116(2): p. 558-564, 1994.