

Contribution à l'analyse du flambement et post-flambement de poutres sandwich élastoplastiques

K. SAD SAOUD^a, P. LE GROGNEC^a

^a Mines Douai,

Département Technologie des Polymères et Composites & Ingénierie Mécanique,
941 rue Charles Bourseul - CS 10838,
59508 Douai Cedex, France

kahina.sad.saoud@mines-douai.fr

philippe.le.grogneec@mines-douai.fr

Résumé :

Les structures sandwich connaissent actuellement un essor sans précédent dans un large panel d'applications industrielles, du fait du compromis réalisé entre rigidité et légèreté. La présence d'éléments minces ou élancés tels que les peaux rend cependant ces matériaux très vulnérables face à des chargements de compression prédominante, et les instabilités géométriques dont ils font l'objet représentent même leur principale source de ruine.

Ce travail est donc voué à l'étude analytique et numérique du flambement et du post-flambement de poutres sandwich sous compression longitudinale. L'approche analytique développée vise à formuler des expressions explicites et précises des différents modes de flambement (globaux/locaux) observés en pratique et des chargements critiques associés. Un élément fini 1D enrichi est ensuite mis en œuvre, dont la formulation s'inspire des prédictions modales analytiques. Le programme numérique qui en découle est pourvu de techniques robustes de longueur d'arc et de branchement pour assurer un suivi de courbe incrémental efficace en présence de fortes non-linéarités et une gestion automatique de la bifurcation (sans l'introduction de défauts). À des fins de validation, des calculs EF 2D sont enfin réalisés en utilisant un code de calcul spécifique mettant en jeu les méthodes numériques sus-citées. Ces outils permettent l'analyse du post-flambement et la mise en valeur de divers phénomènes de localisation et d'interaction modale, tant en élasticité qu'en plasticité.

Abstract:

Sandwich structures are increasingly employed in a wide range of industrial applications, especially thanks to the excellent compromise reached between stiffness and lightness. However, the presence of thin or slender elements such as the skins makes these materials vulnerable to predominant compressive loadings, and buckling-type instabilities are mainly responsible for their final collapse.

This work is thus devoted to the analytical and numerical study of the buckling and post-buckling behavior of sandwich columns. The analytical approach aims to provide closed-form expressions enabling accurate predictions of the buckling/wrinkling modes and associated critical loadings. A 1D enriched finite element model is then developed, whose formulation is based on the previous analytical solutions. The resulting numerical program includes robust arc-length/path-following and branch-switching techniques, which allow one to deal efficiently with the possible strong non-linearities encountered during the incremental calculations and handle the possible bifurcation points in a

systematic way (without introducing any imperfection). For validation purposes, use is also made of a specific 2D FE software including the same numerical methods. Such numerical tools provide the post-buckling response which reveals several localization and modal interaction phenomena, both in elasticity and plasticity.

Mots clefs : structures sandwich, flambement global/local, élastoplasticité, post-flambement, interaction modale

1 Introduction

Les matériaux sandwich sont des composites particuliers, généralement formés d'une âme souple et épaisse enveloppée entre deux peaux beaucoup plus minces et rigides. Les structures résultantes concilient à la fois une extrême légèreté et de bonnes propriétés mécaniques, et sont de ce fait de plus en plus employées dans des secteurs industriels de pointe tels que le domaine des transports où l'allègement des structures constitue un enjeu majeur. Cependant, de tels matériaux sont sensibles aux chargements de compression prédominante, du fait en particulier de la minceur des peaux, au point que le flambement par instabilité géométrique, conduisant dans la plupart des cas à la ruine, s'avère être leur principale faiblesse.

On distingue pour les sandwichs deux types de flambement. Le flambement dit global peut être assimilé au flambement classique de structures homogènes et les mêmes règles de calcul sont applicables pour la détermination des charges critiques de flambement, moyennant une homogénéisation préalable du comportement mécanique. Inversement, le flambement local (ou wrinkling), lié à la disparité significative entre les propriétés géométriques et matérielles des peaux et de l'âme, implique non seulement les peaux (de manière antisymétrique ou symétrique) mais aussi l'âme dont l'influence sur les chargements critiques n'est pas négligeable. Dans ce contexte, des solutions analytiques explicites ont été développées dans le cas de poutres sandwich (principalement sous compression axiale) à l'aide d'une formulation mixte poutre/2D originale, en élasticité [1] puis en plasticité [2].

La présence de ces deux types de modes (globaux/locaux) provoque des phénomènes d'interaction modale lors du post-flambement qui conduit fatalement à la ruine. L'analyse du comportement post-bifurqué (instable) des composites sandwich, caractérisé par l'apparition de modes secondaires, s'avère donc essentielle. A ce jour, la majorité des contributions s'appuient sur des outils numériques par éléments finis 2D/3D standard (codes commerciaux), très coûteux en temps de calcul et mettant en jeu des imperfections initiales, dégénéralant ainsi le problème de bifurcation [3]. De manière exceptionnelle, on peut citer un élément poutre qui a été spécifiquement développé pour ce type d'analyse mais avec une cinématique polynomiale simplifiée et une linéarisation de la formulation qui ne permet pas l'étude du post-flambement lointain [4]. Dans ce travail, un élément fini 1D enrichi a été également mis en œuvre, mais s'appuyant cinématiquement sur les prédictions précises obtenues préalablement de manière analytique, et développé dans un cadre non-linéaire général, incluant les méthodes de longueur d'arc et de branchement nécessaires au suivi de courbe et au traitement de la bifurcation [2].

Dans la suite, les principes généraux de la modélisation analytique sont tout d'abord présentés. La cinématique « naturelle » de l'âme est ensuite exploitée pour le développement d'un élément fini 1D enrichi incorporant des méthodes numériques efficaces de longueur d'arc et de branchement. Enfin, l'utilisation de ce modèle et d'un modèle 2D standard permet d'analyser et de valider les différents comportements post-critiques élastiques/plastiques observés jusqu'à des stades avancés.

2 Modélisation analytique

L'approche générale utilisée repose sur l'écriture tridimensionnelle de l'équation de bifurcation sous sa forme faible, dans le cadre d'un formalisme lagrangien total [5] :

$$\forall \delta \bar{u}, \int_{\Omega} \nabla^T \delta \bar{u} : \mathbf{K}^i(\lambda_c) : \nabla \bar{X} d\Omega = 0 \quad (2.1)$$

Dans l'équation (2.1), \mathbf{K}^i désigne le tenseur nominal tangent élastoplastique d'ordre quatre ($i = e$ ou p selon le comportement élastique ou plastique du matériau d'âme à l'instant critique). Sous l'hypothèse de faibles déformations pré-critiques, le tenseur \mathbf{K}^i peut s'écrire simplement en fonction du tenseur matériel \mathbf{D}^i et des pré-contraintes à l'origine du flambement de la structure :

$$\mathbf{K}^i = \mathbf{D}^i + (\mathcal{G} \cdot \Sigma)^T \quad (2.2)$$

Le problème de la poutre sandwich peut se ramener à une analyse bidimensionnelle où les peaux minces sont représentées par des poutres de Bernoulli tandis que l'âme est considérée comme un milieu continu 2D en contraintes planes, sans hypothèses cinématiques particulières.

L'équation de bifurcation peut s'exprimer de manière découplée pour les trois couches de la poutre sandwich en fonction du comportement, des hypothèses cinématiques et de l'état initial des contraintes retenus pour chacune d'entre elles. Ensuite, après intégrations par parties, on aboutit à un système d'équations aux dérivées partielles dont la résolution (après prise en compte des conditions de continuité et aux limites) donne lieu, dans le cas de la compression axiale, à deux expressions explicites pour les chargements critiques λ_c élastiques/plastiques (relativement aux modes \bar{X} symétriques et antisymétriques, respectivement).

3 Élément fini 1D enrichi

Un modèle numérique efficace a été développé dans le but de généraliser les solutions analytiques précédentes à des chargements plus complexes et d'analyser le comportement post-critique de manière incrémentale jusqu'à un stade avancé. Le modèle retenu (de type poutre) est beaucoup moins demandeur en temps de calcul et ressources informatiques qu'un modèle 2D, mais s'avère aussi précis dans la description des instabilités à l'échelle locale du fait de l'enrichissement de la cinématique par les solutions analytiques obtenues précédemment.

Les deux peaux (a et b) sont modélisées par une cinématique de poutre de Timoshenko, qui s'exprime par les champs de déplacement suivants en rotations finies :

$$\begin{cases} U^i(x, y) = u^i(x) - y \sin(\theta^i) \\ W^i(x, y) = w^i(x) - y (\cos(\theta^i) - 1) \end{cases} \quad i = \{a, b\} \quad (3.1)$$

Le comportement de l'âme est représenté, quant à lui, par les champs de déplacement suivants, conformément aux solutions analytiques :

$$\begin{cases} U^C(x, y) = u_0^c(x) + u_1^c(x) \sinh(\alpha y) + \\ \quad \Psi_1(x) \cosh(\beta y) + \Psi_2(x) \sinh(\beta y) + \Psi_3(x) y \cosh(\beta y) + \Psi_4(x) y \sinh(\beta y) \\ W^C(x, y) = w_0^c(x) \cosh(\alpha y) + w_1^c(x) y + \\ \quad \Psi_5(x) \cosh(\beta y) + \Psi_6(x) \sinh(\beta y) + \Psi_7(x) y \cosh(\beta y) + \Psi_8(x) y \sinh(\beta y) \end{cases} \quad (3.2)$$

Les deux paramètres α et β intervenant dans la cinématique de l'âme permettent de reproduire respectivement les réponses globales et locales (antisymétriques et symétriques) de la poutre sandwich.

A partir de cette cinématique, un élément fini quadratique (à 3 nœuds) est construit, présentant un total de 14 degrés de liberté par nœud après considération de la continuité des déplacements aux interfaces peaux/âme. Le programme numérique développé comprend :

- la prise en compte de l'ensemble des non-linéarités géométriques (grandes transformations) et matérielles (plasticité) ;
- des solveurs de calcul de valeurs et vecteurs propres pour l'analyse de flambement linéarisée ;
- des méthodes de longueur d'arc afin de faire face à d'éventuelles courbes non-monotones ;
- des techniques de branchement permettant la détection *exacte* des points critiques (sans l'utilisation de défauts), et la bifurcation automatique sur la branche souhaitée.

4 Analyse des résultats et discussion

4.1 Cas du flambement élastique

Lorsque les deux constituants du matériau sandwich sont élastiques, les modes antisymétriques précèdent toujours les modes symétriques en termes de chargement critique. Le facteur prédominant est le rapport des épaisseurs entre les peaux et l'âme. Les poutres à âme mince font apparaître un mode global en premier lieu alors que le premier mode d'une poutre à âme épaisse est local.

L'étude incrémentale du post-flambement lointain montre généralement des réponses post-critiques instables (comportement de type snap-through) du fait de l'obtention de modes secondaires qui traduisent le phénomène d'interaction modale. Un mode primaire global est le plus souvent suivi d'un mode secondaire local, et vice versa.

4.2 Cas du flambement élastoplastique

Le cas d'une âme élastoplastique a été ensuite considéré. Dans ce cas, les modes de flambement symétriques peuvent précéder les modes antisymétriques. Par ailleurs, la réponse post-critique type met en jeu de plus fortes non-linéarités et s'identifie à un comportement de type snap-back (Figure 1). Ces réponses fortement critiques sont efficacement traitées grâce aux outils numériques développés et donnent des résultats très similaires pour les deux modèles 1D enrichi et 2D.

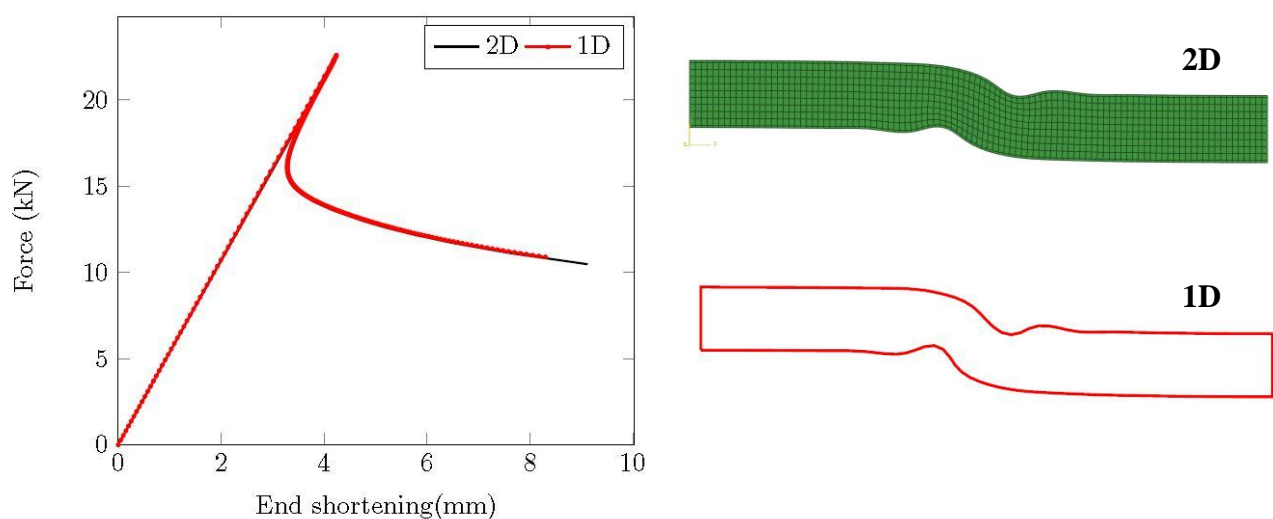


Figure 1 : Comparaison des courbes force-déplacement et des déformées post-critiques 1D/2D

5 Conclusion

Deux approches ont été présentées dans ce travail pour l'étude du flambement et post-flambement de poutres sandwich sous compression axiale. Une modélisation analytique permet dans un premier temps d'aboutir à des expressions explicites des chargements critiques pour les différents types de mode (global/local, antisymétrique/symétrique), avec une âme élastique ou plastique. Ensuite, un modèle EF original basé sur une formulation 1D enrichie, issue des solutions analytiques précédentes, permet de décrire le post-flambement en grandes transformations, en s'appuyant sur des méthodes numériques de longueur d'arc pour le suivi de courbe et de branchement pour le traitement des bifurcations. Ce modèle 1D est validé par des calculs EF 2D et illustre parfaitement les phénomènes d'interaction modale fréquemment rencontrés dans l'analyse des structures sandwich.

Références

- [1] M.A. Douville, P. Le Grogneq. Exact analytical solutions for the local and global buckling of sandwich beam-columns under various loadings, *International Journal of Solids and Structures* **50** (2013) 2597-2609
- [2] P. Le Grogneq, K. Sad Saoud. Elastoplastic buckling and post-buckling analysis of sandwich columns, *International Journal of Non-Linear Mechanics* **72** (2015) 67-79
- [3] L. Léotoing, S. Drapier, A. Vautrin. Nonlinear interaction of geometrical and material properties in sandwich beam instabilities, *International Journal of Solids and Structures* **39** (2002) 3717-3739
- [4] H. Hu, S. Belouettar, M. Potier-Ferry, A. Makradi. A novel finite element for global and local buckling analysis of sandwich beams, *Composite Structures* **90** (2009) 270-278
- [5] Q.S. Nguyen, *Stability and Non-Linear Solid Mechanics*, Wiley, Chichester, 2000

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier le CISIT (Campus International sur la Sécurité et l'Intermodalité dans les Transports) et le Conseil Régional Nord-Pas-de-Calais pour leur soutien financier.