

Une formulation mixte MES / BEM pour le calcul en acoustique interne

S. Besset^a, L. Jézéquel^b

a. LTDS / École Centrale de Lyon, sebastien.besset@ec-lyon.fr

b. LTDS / École Centrale de Lyon, louis.jezequel@ec-lyon.fr

Résumé : (16 gras)

La Méthode Énergétique Simplifiée (MES) développée au laboratoire LTDS se prête bien à la description énergétique de phénomènes acoustiques dans une cavité. Considérée sous sa forme différentielle discrétisée, elle est proche d'une méthode de tirs de rayons énergétique ; en cela, elle est relativement sensible à la formulation des réflexions aux parois, qui sont le plus souvent représentées au moyen d'une directivité lambertienne. Si cette directivité donne de bons résultats pour l'expression du champ réverbéré, elle occasionne en revanche des approximations importantes pour le champ direct. La méthode mixte proposée ici permet d'exprimer le champ direct au moyen d'une formulation par éléments de frontière (BEM), tout en gardant une formulation énergétique pour le champ réverbéré. On atteint ainsi un bon compromis entre le temps de calcul et la précision requise.

Abstract : (16 gras)

The Simplified Energy Method (MES in the french terminology) has been developed in the LTDS laboratory It is well adapted to the energy description of acoustic phenomena in a cavity. Viewed in its discretized differential form, it is close to an energy rays shooting method ; in this it is relatively sensitive to the formulation of the boundary conditions, which are most often represented by a lambertian directivity. If this directivity provides good results for expression of the reverberated field, however it causes significant approximations for the direct field. The proposed hybrid method allows to express the direct field using a boundary elements formulation (BEM), while keeping energy formulation for the reverberant field. It thus reached a good compromise between the computation time and the required accuracy.

Mots clefs : Interaction fluide-structure, méthodes énergétiques, BEM

1 Introduction

La modélisation du comportement des structures en moyennes et hautes fréquences est souvent réalisée au moyen de méthodes dites *énergétiques*, qui ne sont pas basées sur le champ de déplacement des structures mais sur des quantités énergétiques qui leur sont liées. L'utilisation de telles méthodes répond à des besoins en terme de coûts de calcul, mais se révèle également suffisante si le recouvrement modal, dans la bande de fréquence considérée, est trop important pour que soient mises à profit les informations fournies par une méthode cinématique.

Parmi les principales méthodes énergétiques, on ne peut échapper à la SEA (Statistical Energy Analysis) [3]. Cette méthode permet de calculer l'énergie de plusieurs sous-systèmes constituant un système plus important. Nefske et Sung [4] ont étendu cette approche et proposé une formulation qui considère l'*énergie locale* dans le système – la précision est donc accrue.

La méthode utilisée dans cet article, baptisée *Méthode Énergétique Simplifiée* (MES), découle de ces travaux. Elle a été longuement étudiée dans le cadre de plusieurs thèses au laboratoire LTDS et est arrivée à maturité avec les thèses de Pierre Hardy [1] et Thierry Schmitt [2]. Dans cet article, on s'intéresse à l'une des limitations de la MES, la présence de la directivité dans l'expression intégrale. Il n'est pas possible de connaître la forme de cette directivité *a priori* sans effectuer de calculs, et l'approximation qui est donc faite (le plus souvent on considère une directivité lambertienne) peut conduire à des résultats erronés.

On considère toutefois que dans le cas du champ réverbéré, la directivité induite par la réflexion aux parois est relativement proche d'une directivité lambertienne. La directivité des sources extérieures, qui intervient dans le champ direct, est en revanche très variable suivant le type d'excitation. Dans un premier temps, mieux évaluer la directivité du champ direct constitue une piste prometteuse pour une amélioration des résultats ne nécessitant pas trop de calculs supplémentaires. La technique adoptée ici consiste à évaluer le champ direct au moyen d'un calcul par éléments de frontière (BEM), le champ réverbéré restant modélisé par la MES "classique". Notons que certains auteurs [5] se sont déjà intéressés à l'élaboration de méthodes mixant approche énergétique et méthode cinématique, mais en considérant différents sous-systèmes. La technique proposée ici est illustrée à la figure 1.

2 Champ réverbéré : Méthode Énergétique Simplifiée (MES)

C'est la MES intégrale qui est utilisée ici. Cette formulation de la MES est décrite dans plusieurs publications et thèses [1, 2]. Les quantités énergétiques considérées sont la densité de puissance \mathbf{W} et l'intensité \mathbf{I} . La formulation discrétisée sur laquelle se base notre approche est la suivante :

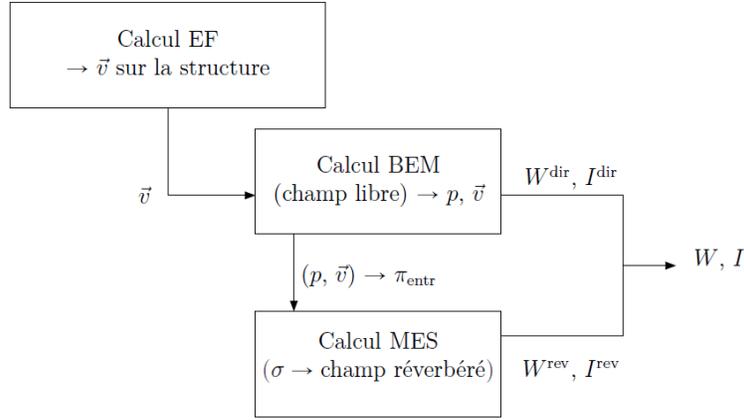


FIGURE 1 – Schéma récapitulatif de la méthode proposée

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \mathbf{B}\mathbf{\Pi}_{\text{entr}} + \mathbf{B}\mathbf{\Sigma} \\ &= \mathbf{Z}_w \mathbf{\Pi}_{\text{entr}} \end{aligned} \quad (1)$$

Où $\mathbf{\Pi}_{\text{entr}}$ est la puissance entrante, et $\mathbf{\Sigma}$ les *sources fictives* provenant des réflexions aux parois. Une équation similaire existe pour l'intensité acoustique :

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}_i \mathbf{\Pi}_{\text{entr}} \quad (2)$$

3 Champ direct : Éléments de frontière

La puissance entrante $\mathbf{\Pi}$ est située sur la surface de la structure modélisée par éléments finis. Le calcul par éléments finis permet d'obtenir un champ de vitesse pariétal qui constitue la donnée d'entrée pour la méthode des éléments de frontière. Un calcul BEM est alors effectué sous l'hypothèse de conditions de Sommerfeld, ce qui permet de s'affranchir de la modélisation de l'ensemble de la structure. Il est alors possible d'évaluer la contribution du champ direct par calcul de la pression interne.

Soit (p_I, \vec{v}_I) la pression et la vitesse pariétale. Un calcul BEM permet d'obtenir la pression $p(M)$ dans la cavité :

$$cp(M) = \int_S \left(p_I(P) \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g(\vec{MP}) \frac{\partial p_I}{\partial \vec{n}} \right) dS \quad (3)$$

On peut noter que $\frac{\partial p_I}{\partial \vec{n}} = -\rho\omega\vec{v}_I \cdot \vec{n}$, où ρ est la masse volumique du fluide. \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface S et c est défini comme suit :

$$c = \begin{cases} 1 & \text{si } M \in \Omega \\ \frac{1}{2}, & \text{si } M \text{ is on a smooth boundary of } \Omega \\ \frac{S}{4\pi}, & \text{si } M \text{ is on a nonsmooth boundary of } \Omega \end{cases} \quad (4)$$

S est l'angle solide. g est la fonction de Green en espace libre :

$$g(\vec{MP}) = \frac{e^{-ik\|\vec{MP}\|}}{4\pi\|\vec{MP}\|} \quad (5)$$

Le champ direct peut alors être exprimé avec les notation de la MES :

$$W^{\text{dir}}(M) = \frac{1}{2\rho c^2} p(M) p^*(M) \quad (6)$$

$$I^{\text{dir}}(M) = \frac{1}{2} \Re(p(M) v^*(M)) \quad (7)$$

$v = \vec{v} \cdot \vec{n}_p$ (et v^*) est obtenu à partir de p au moyen de l'équation $\frac{\partial p}{\partial \vec{n}_p} = -\rho\omega\vec{v} \cdot \vec{n}_p$ où \vec{n}_p est un vecteur unitaire. Ainsi, I correspond à la projection de \vec{I} sur le vecteur \vec{n}_p .

4 Formulation couplée

La pression calculée par BEM peut s'écrire sous forme matricielle :

$$p_I = \mathbf{H}_p \mathbf{p}_{str} + \mathbf{G}_p \mathbf{v}_{str} \quad (8)$$

où \mathbf{H}_p et \mathbf{G}_p sont les matrices issues de la discrétisation de la formulation intégrale. \mathbf{p}_{str} et \mathbf{v}_{str} sont la pression et la vitesse pariétale de la structure, obtenue au moyen d'un code de calcul par éléments finis. Une expression similaire décrit le champ de vitesse :

$$v_I = \mathbf{H}_v \mathbf{p}_{str} + \mathbf{G}_v \mathbf{v}_{str} \quad (9)$$

Les équations 6 et 7, combinées aux équations 8 et 9, conduisent aux relations suivantes pour le champ direct :

$$W_n^{\text{dir}} = \frac{1}{2\rho c^2} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{str}^* & \mathbf{v}_{str}^* \end{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{str} \\ \mathbf{v}_{str} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$I_n^{\text{dir}} = \frac{1}{2} \Re \left(\begin{pmatrix} \mathbf{p}_{str}^* & \mathbf{v}_{str}^* \end{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{str} \\ \mathbf{v}_{str} \end{pmatrix} \right) \quad (11)$$

où W_n^{dir} est la $n^{\text{ème}}$ composante du vecteur \mathbf{W}^{dir} et I_n^{dir} la $n^{\text{ème}}$ composante du vecteur \mathbf{I}^{dir} . Les matrices $\mathbf{\Lambda}_1$ et $\mathbf{\Lambda}_2$ sont définies comme suit :

$$\Lambda_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H}_p^* \mathbf{H}_p & \mathbf{H}_p^* \mathbf{G}_p \\ \mathbf{G}_p^* \mathbf{H}_p & \mathbf{G}_p^* \mathbf{G}_p \end{array} \right] \quad (12)$$

$$\Lambda_2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H}_p^* \mathbf{H}_v & \mathbf{H}_p^* \mathbf{G}_v \\ \mathbf{G}_p^* \mathbf{H}_v & \mathbf{G}_p^* \mathbf{G}_v \end{array} \right] \quad (13)$$

Pour ce qui est du champ réverbéré, \mathbf{W}^{rev} and \mathbf{I}^{rev} peuvent être obtenus à partir des équations 1 et 2 :

$$W_n^{\text{rev}} = \frac{1}{2} \mathbf{Z}_w^n \Re e((\mathbf{p}\mathbf{v}^*)_{str}) \quad (14)$$

$$I_n^{\text{rev}} = \frac{1}{2} \mathbf{S}_i^n \Re e((\mathbf{p}\mathbf{v}^*)_{str}) \quad (15)$$

où \mathbf{Z}_w^n est la n^{ème} ligne de la matrice \mathbf{Z}_w et \mathbf{Z}_i^n est la n^{ème} ligne de la matrice \mathbf{Z}_i . \mathbf{W} et \mathbf{I} s'écrivent alors :

$$W^n = (\mathbf{p}_{str}^* \quad \mathbf{v}_{str}^*) \tilde{\Lambda}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{str} \\ \mathbf{v}_{str} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$I^n = \Re e \left((\mathbf{p}_{str}^* \quad \mathbf{v}_{str}^*) \tilde{\Lambda}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{str} \\ \mathbf{v}_{str} \end{pmatrix} \right) \quad (17)$$

Les matrices $\tilde{\Lambda}_1$ et $\tilde{\Lambda}_2$ sont définies ainsi :

$$\tilde{\Lambda}_1 = \frac{1}{2\rho c^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H}_p^* \mathbf{H}_p & \mathbf{H}_p^* \mathbf{G}_p \\ \mathbf{G}_p^* \mathbf{H}_p & \mathbf{G}_p^* \mathbf{G}_p \end{array} \right] + \frac{1}{4} \left[\begin{array}{c|c} 0 & \text{diag} \{ \mathbf{S}_n^W \} \\ \text{diag} \{ \mathbf{S}_n^W \} & 0 \end{array} \right] \quad (18)$$

$$\tilde{\Lambda}_2 = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H}_p^* \mathbf{H}_v & \mathbf{H}_p^* \mathbf{G}_v \\ \mathbf{G}_p^* \mathbf{H}_v & \mathbf{G}_p^* \mathbf{G}_v \end{array} \right] + \frac{1}{4} \left[\begin{array}{c|c} 0 & \text{diag} \{ \mathbf{S}_n^I \} \\ \text{diag} \{ \mathbf{S}_n^I \} & 0 \end{array} \right] \quad (19)$$

5 Application

Dans cette partie, nous appliquons la méthode proposée à la cavité représentée à la figure 2. Cette cavité est constituée de 5 parois infiniment rigides (sur lesquelles on a donc $\overrightarrow{\text{grad}} p = \vec{0}$) et d'un panneau souple, appelé la "structure". Les calculs sont effectués sous MATLAB et OPENBEM [6].

Plusieurs calculs sont effectués, et plusieurs méthodes comparées. Le résultat du calcul "100% MES" est représenté à la figure 3. La méthode hybride proposée donne le résultat de la figure 4. Concernant le calcul BEM, un moyennage fréquentiel a été opéré afin de se trouver dans les hypothèses de la MES. Les données de calcul sont consignées dans le tableau 1.

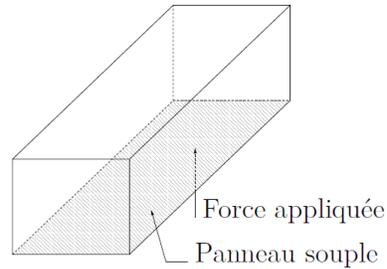


FIGURE 2 – Structure considérée pour l'exemple

Il est intéressant de mentionner que les dimensions de la cavité se prêtent à une description par MES de son comportement ; ainsi, selon la formule permettant de calculer

les fréquences propres d'une cavité parallélépipédique, $f_{(n_x, n_y, n_z)} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2}$, la densité modale autour de 2000 Hz peut être évaluée à $d = 30$ modes/Hz.

Le calcul qui sert ici de référence est un calcul "100% BEM" dont le résultat est donné à la figure 5. La comparaison des trois calculs permet d'affirmer que la méthode hybride proposée améliore sensiblement la précision de la MES. Les coûts de calcul des différentes méthodes sont consignés dans le tableau 2.

ρ	c	Dimensions	Frequency	α (absorption coefficient)
1,25 kgm ⁻³	340 ms ⁻¹	2 × 2 × 4 m ³	1500 – 2500 Hz	0,3

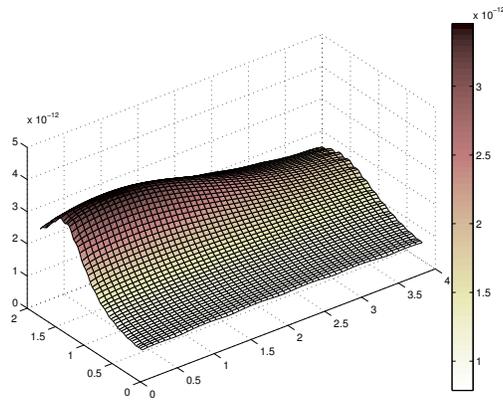
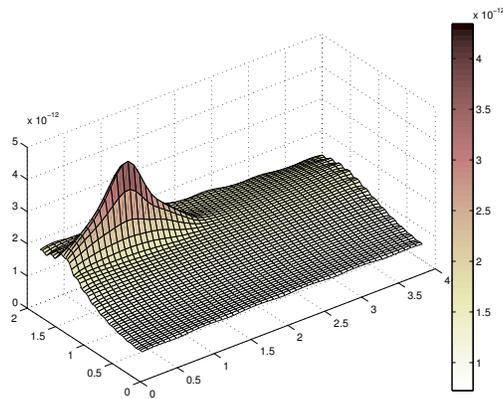
TABLE 1 – Données du problème

Méthode	Nombre d'éléments	Durée	Erreur (% par rapport au calcul "100% BEM")
MES	~ 100	~ 10 min.	~ 10% face à la source ~ 50-200 % loin de la source
BEM	> 5000	~ 2 jours	référence
Hybride	~ 500	~ 15 min.	~ 10% face à la source ~ 10-40 % loin de la source

TABLE 2 – Tableau comparatif des trois méthodes

5 Conclusion

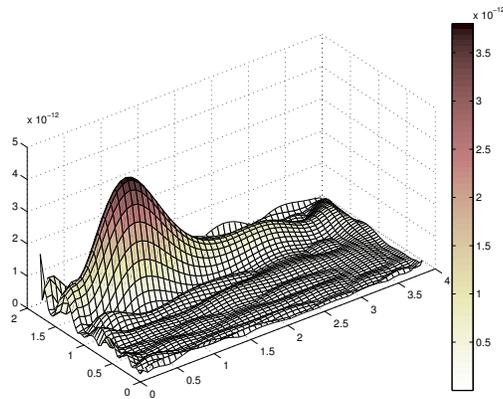
Les travaux présentés ici illustrent la mise en place d'une méthode "mixte" alliant

FIGURE 3 – W calculé par MESFIGURE 4 – W calculé par la méthode hybride

la précision d'un calcul BEM pour le champ direct à la rapidité d'un calcul énergétique pour le champ réverbéré. Le tableau 2 résume les avantages et inconvénients des différentes méthodes comparées.

Références

- [1] P. Hardy, Méthodes énergétiques simplifiées en moyennes et hautes fréquences : Théorie et applications industrielles. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2005.

FIGURE 5 – W calculé par BEM

- [2] T. Schmitt, Modélisation des transferts acoustiques en moyennes et hautes fréquences par méthode énergétique : application à l'encapsulation des compartiments moteurs. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2004.
- [3] R. H. Lyon, Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems : Theory and Application, Cambridge, Massachusetts, MIT Press, 1975.
- [4] D. Nefske, S. Sung, Power flow finite element analysis of dynamic systems : Basic theory and application to beams, NCA Publication 3.
- [5] P. Shorter, R. Langley, Vibro-acoustic analysis of complex systems. s., Journal of Sound and Vibration 288 (2005) 669–699.
- [6] P. Juhl, The boundary element method for sound field calculations, Ph.D. thesis, Technical University of Denmark (1993).