

# Une stabilisation efficace de l'élément fini P1/P1 en grandes transformations

E. Feulvarch, J.-C. Roux, R. Chatelin, J.-M. Bergheau

Univ. Lyon, ENISE, LTDS UMR 5513 CNRS

58 rue Jean Parot, 42023 Saint-Etienne cedex 2, France

{eric.feulvarch, jean-christophe.roux, robin.chatelin, jean-michel.bergheau}@enise.fr

## Résumé :

*L'objectif de ce travail est de proposer une stabilisation robuste de l'élément fini P1/P1 en grandes transformations. La première partie est consacrée à l'étude des propriétés de l'élément fini P1/P1 connu pour ne pas être LBB-stable. Ensuite, une nouvelle formulation stabilisée simple et robuste est proposée afin d'éviter les modes de pression parasites pour l'analyse de structures métalliques élasto-plastiques ou élasto-visco-plastiques. Enfin, des exemples sont présentés pour illustrer l'efficacité de l'approche développée.*

**Mots clefs : Éléments finis, formulation mixte, stabilisation**

## 1 Introduction

L'objectif de ce travail est de proposer une stabilisation robuste de l'élément fini  $P1/P1$ . En grandes transformations, les structures élasto-plastiques ou élasto-visco-plastiques avec critère de von Mises peuvent présenter un comportement "quasi-incompressible". En effet, le taux de déformation plastique purement déviatoire peut être bien plus important que le taux de déformation volumique élastique. De fait, la déformation volumique peut être faible au regard de la déformation déviatoire d'où un comportement quasi-incompressible. Dans ce cas, la discrétisation à mettre en œuvre doit être choisie de manière judicieuse pour ne pas faire apparaître de phénomène de verrouillage (« locking ») se traduisant par une solution non-réaliste. D'un point de vue mathématique, ceci peut s'expliquer par le fait que le champ des vitesses doit être suffisamment « riche » pour satisfaire à la fois les équations éléments finis issues du bilan de quantité de mouvement et celles portant sur le calcul de la pression.

Depuis le début des années 60, beaucoup de travaux ont été consacrés à ce problème. Il est possible d'utiliser des méthodes de projection. Une méthode de pénalisation peut également être employée pour traiter le cas de matériaux incompressibles mais elle nécessite la mise en œuvre de techniques numériques de type intégration réduite ou sélective [1, 2, 3, 4]. Le principe est d'avoir moins d'équations numériques à traiter pour le calcul de la pression que d'inconnues en vitesse. Ainsi, l'unicité du champ des vitesses n'est pas imposée par le problème sur la pression mais par l'équilibre des contraintes. Par exemple, pour les éléments hexaédriques de type Q1, l'intégration numérique standard se fait avec 8 points de Gauss. L'intégration sélective consiste à calculer la pression à partir de la déformation moyenne au centre de l'élément et non pas aux 8 points. La pression est alors considérée comme étant constante dans tout

l'élément. De cette manière, le nombre d'équations numériques pour la pression est égal au nombre d'éléments finis qui est inférieur au nombre d'inconnues du problème (3 composantes de vitesse par nœud). Notons qu'un tel élément devient alors tout à fait similaire à un élément fini mixte Q1 sur la cinématique et P0 sur la pression. Il existe des variantes comme la méthode B-bar où la déformation moyenne est calculée à partir de la moyenne des valeurs calculées aux 8 points.

Le phénomène de verrouillage peut également être traité par la méthode des multiplicateurs de Lagrange en introduisant des inconnues supplémentaires comme, par exemple, la pression [5]. Dans ce cas, une attention particulière doit être apportée au choix de la discrétisation qui doit satisfaire la condition LBB dans le cas incompressible. Plusieurs éléments finis permettent de satisfaire cette condition comme, par exemple, les éléments P1+/P1 ou P2/P1. Ces éléments présentent un grand intérêt du point de vue de l'ingénierie car des maillages tétraédriques peuvent être générés pour des géométries complexes grâce aux techniques de Delaunay en 2D et 3D ou encore à des méthodes frontales. Cependant, des nœuds supplémentaires sont nécessaires pour l'approximation de la cinématique contrairement à l'élément fini P1/P1 connu par ailleurs pour ne pas être LBB-stable. En effet, cet élément n'est pas sensible au phénomène de « locking » et n'est pas capable d'assurer l'unicité du champ de pression pour un matériau parfaitement incompressible. Du point de vue continu, les travaux de Brezzi et Fortin [6] montrent qu'en élasto-statique, l'existence et l'unicité de la solution est assurée par la compressibilité. D'autre part, du point de vue numérique, les travaux récents de d'Al Akhrass et al. [7] montrent que la même interpolation peut être utilisée pour la cinématique et la pression en élasto-plasticité avec critère de von Mises. Malheureusement, l'expérimentation numérique conduit à l'apparition de modes de pression parasites dus au fait que le champ de pression est trop riche [8]. Par exemple, la figure 1 présente l'écrasement d'un cube élasto-visco-plastique pour lequel les oscillations de pression sont clairement visibles dans la zone fortement sollicitée.

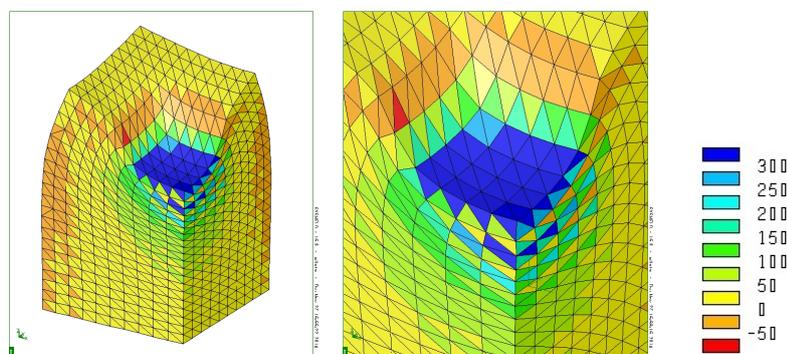


FIGURE 1 – Pression hydrostatique (MPa) lors de l'écrasement d'un cube élasto-visco-plastique [8].

## 2 Formulation stabilisée

L'idée qui consiste à ajouter un terme de diffusion pour éliminer les modes de pression parasites a été initialement introduite par Brezzi et Pitkaranta [9] pour le problème de Stokes dans le cas incompressible. Les auteurs ont proposé d'ajouter un terme de la forme  $\beta h^2 \int_{\Omega} \nabla q^h \cdot \nabla p^h dV$  dans la forme faible discrétisée relative à la contrainte d'incompressibilité. Cette approche présente une difficulté importante qui réside dans le choix de la constante positive  $\beta$ .

Dans ce travail, nous proposons d'ajouter un terme de diffusion anisotrope de manière à améliorer le conditionnement du problème mixte éléments finis en grandes transformations [8]. En appliquant la

discrétisation  $P1/P1$  standard, l'incrément de pression  $\Delta p_i$  est obtenu en chaque noeud  $i$  en résolvant l'équation suivante à chaque instant  $t + \Delta t$  :

$$\int_{\Omega_{t+\Delta t}} N_i \nabla \cdot \Delta \mathbf{x}^h dV + \frac{\Delta p_i}{\alpha_i} \int_{\Omega_{t+\Delta t}} N_i dV = 0 \quad (1)$$

où  $\Omega_{t+\Delta t}$  représente la configuration géométrique déformée à l'instant  $t + \Delta t$  ;  $N_i$  est la fonction de forme du noeud  $i$  ;  $\Delta \mathbf{x}^h$  est l'incrément de déplacement ;  $\alpha_i$  est la valeur du module de compressibilité  $\alpha$  au noeud  $i$ .

En se plaçant dans un cas compressible contrairement aux travaux de Brezzi et Pitkaranta [9], nous proposons d'ajouter un terme à l'équation (1) de la forme suivante :

$$\Delta t \int_{\Omega_{t+\Delta t}} G_i \mathbf{u}^h \cdot \nabla \Delta p^h dV \quad (2)$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps ;  $\mathbf{u}^h$  est la vitesse ;  $\Delta p^h$  est l'incrément de pression.

L'intérêt de cette approche est d'ajouter un terme qui est homogène aux équations éléments finis relatives à l'équilibre des contraintes, ce qui améliore le conditionnement des systèmes linéaires sous-jacents. La fonction nodale  $G_i$  est construite à partir de la méthode SUPG. Contrairement aux méthodes SU ou SUPG standard [10][11], le terme (1) n'est pas homogène aux autres termes de l'équation (2). D'autre part, il est directement ajouté au terme de compressibilité  $\frac{\Delta p_i}{\alpha_i} \int_{\Omega_{t+\Delta t}} N_i dV$  qui assure l'unicité de la pression indépendamment de la condition LBB. Enfin, cette approche ne nécessite pas l'ajout d'équations supplémentaires à résoudre comme c'est le cas pour les méthodes de sous-grille de type ASGS ou OSGS [12][13].

Les figures 2 et 3 présentent les résultats obtenus pour l'exemple de la figure 1 à partir d'un élément Q1 à intégration sélective et à partir de l'élément P1/P1 stabilisé avec un seul point d'intégration. Les calculs ont été réalisés à partir du code de calcul Sysweld<sup>®</sup>[14]. Les modes de pression parasites ont disparus et la comparaison des résultats est très satisfaisante.

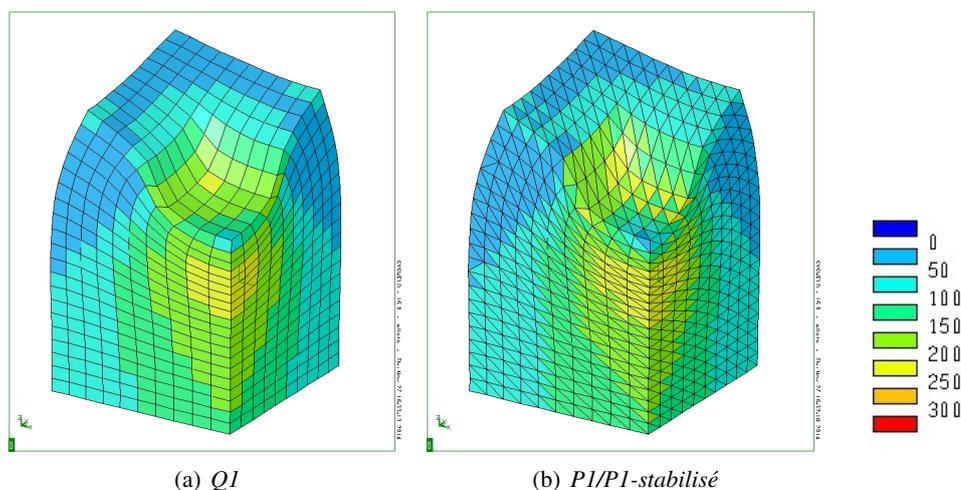


FIGURE 2 – Contrainte équivalente de von Mises (MPa) [8].

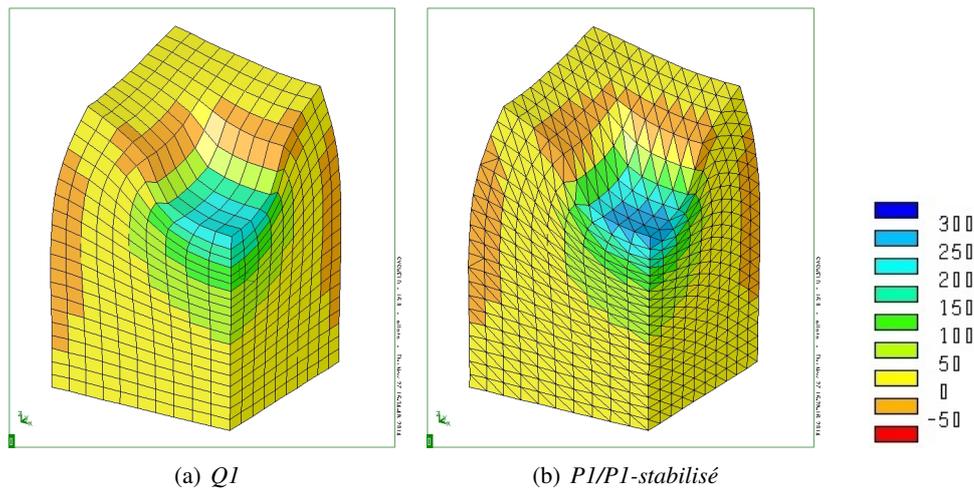


FIGURE 3 – Pression hydrostatique (MPa) [8].

## Références

- [1] Reddy J.N., Gartling D.K., *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, CRC Press, (2000).
- [2] Zienkiewicz Z. O., Taylor R. L., *La méthode des éléments finis*, AFNOR technique, (1990).
- [3] Hughes T.J.R., *The Finite Element Method*, Dover Publications, Inc. New York, (2000).
- [4] Belytschko T., Ong J.S.J., Liu W.K., Kennedy J.M., Hourglass control in linear and nonlinear problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (1984), 43 :251-276.
- [5] Bathe K.J., *Finite Element Procedure*. Prentice Hall, (1996).
- [6] Brezzi F., Fortin M., *Mixed and Hybrid Finite Elements Methods*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, New York, (1991).
- [7] Al Akhrass D., Bruchon J., Drapier S., Fayolle S., Integrating a logarithmic-strain based hyperelastic formulation into a three-field mixed finite element formulation to deal with incompressibility in finite-strain elastoplasticity, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 86, (2014), 61-70.
- [8] Feulvarch E., Amin El Sayed H., Roux J.-C., Bergheau J.-M., An efficient stabilized P1/P1 element for the mechanical analysis of solid metals, *International Journal of Material Forming*, submitted.
- [9] Brezzi F., Pitkaranta J., On the stabilization of finite element approximations of the stokes equations, in *Efficient solutions of elliptic systems*, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 10 (W. Hackbush, ed.), Braunschweig, Wiesbaden, (1984).
- [10] Marchal J.M., Crochet M.J., A new mixed finite element for calculating viscoelastic flow, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 26, (1987), 77-114.
- [11] Brooks A. N., Hughes T.J.R., Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 32, (1982), 199-259.
- [12] C. Agelet de Saracibar, M. Chiumenti, M. Cervera, N. Dialami, A. Seret, On the orthogonal subgrid scale pressure stabilization of finite deformation J2 plasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 195, (2006), 1224 ?1251.

- [13] C. Agelet de Saracibar, M. Chiumenti, M. Cervera, N. Dialami, A. Seret, Computational Modeling and Sub-Grid Scale Stabilization of Incompressibility and Convection in the Numerical Simulation of Friction Stir Welding Processes, Archives of Computational Methods in Engineering, Vol. 21, (2014), 3-37.
- [14] SYSWELD User's manual, ESI Group, (2015).