SEMIGRUP BENTUK BILINEAR TERURUT PARSIAL DALAM BATASAN SUBHIMPUNAN FUZZY

Karyati[1)], **Dhoriva UW**[2)]
1) Jurusan Pendidikan Matematika , FMIPA, UNY
Jl. Colombo No.1, Karangmalang, Yogyakarta, e-mail: yatiuny@yahoo.com

2) Jurusan Pendidikan Matematika , FMIPA, UNY
Jl. Colombo No.1, Karangmalang, Yogyakarta, e-mail: dhoriva@yahoo.com

Abstrak

Penelitian terkait dengan Semigrup Bentuk Bilinear telah dilakukan oleh Rajendran dan Nambooripad. Penelitian ini selanjutnya dikembangkan oleh Karyati dan Wahyuni. Karakteristik semigrup bentuk bilinear fuzzy juga telah dikembangkan oleh Karyati, dkk. Berbagai aspek penyelidikan juga telah dilakukan oleh Karyati, dkk terkait dengan ideal fuzzy, relasi fuzzy, relasi kongruensi fuzzy dan relasi Green fuzzy pada semigrup bentuk bilinear.

Diinspirasi oleh penelitian yang dilakukan oleh Kehayopulu dan Tsengelis yang bekerja pada srtuktur aljabar semigrup terurut parsial, maka dalam penelitian ini akan dibangun suatu urutan parsial pada semigrup bentuk bilinear fuzzy. Terkait dengan penambahan operasi urutan parsial pada semigrup bentuk bilinear dan sifat khusus dari semigrup bentuk bilinear ini diperoleh beberapa sifat semigrup bentuk bilinear dalam batasan subhimpunan fuzzy yang membentuk ideal (kiri/kanan) fuzzy dari semigrup bentuk bilinear tersebut.

Kata Kunci: *Semigrup bentuk bilinear, urutan parsial, semigrup terurut parsial, ideal*

PENDAHULUAN

Sejak teori subhimpunan *fuzzy* diperkenalkan oleh Zadeh, perkembangan teori struktur aljabar *fuzzy* juga berkembang sangat pesat. Rosenfeld telah mengembangkan teori subgrupoid *fuzzy*. Zimmerman (1991) juga telah banyak menyelidiki aplikasi subhimpunan *fuzzy* ini. Mordeson & Malik (1998) telah banyak menyelidiki pengembangan teori *fuzzy* pada struktur semigrup. Karyati, dkk (2012) telah mengembangkan teori *fuzzy* ini pada semigrup khusus yang disebut dengan semigrup bentuk bilinear. Teori baru telah banyak dilahirkan terkait dengan semigrup ini, diantaranya adalah sifat regular *fuzzy* pada semigrup bentuk bilinear, ideal (kiri/ kanan) *fuzzy* , ideal utama (kiri/kanan) *fuzzy*, relasi *fuzzy* sampai dengan relasi Green *fuzzy* pada semigrup bentuk bilinear. Kehayopulu, dkk (2012) juga melakukan penelitian tentang teori subhimpunan *fuzzy* yang didasarkan pada grupoid terurut parsial dan semigrup terurut parsial.

Semigrup $(S,.)$ yang di dalamnya dilengkapi urutan parsial (*partial order*) $'\leq'$, sedemikian sehingga $(S,\leq)$ membentuk poset dan untuk setiap $x,y,z \in S$ dengan $x \leq y$ berlaku $zx \leq zy$ dan $xz \leq yz$, maka $(S,.)$ disebut semigrup terurut parsial.

Beberapa penelitian terkait dengan semigrup terurut parsial ini telah banyak dikembangkan oleh banyak peneliti. Pendefinisian urutan parsial ini sangat berpengaruh pada definisi-definisi ideal (kiri/kanan), quasi ideal (kiri/kanan), relasi, ideal (kiri/kanan) *fuzzy*, quasi ideal (kiri/kanan) *fuzzy* yang selanjutnya akan memunculkan sifat-sifat dan teori-teori yang baru.

Aplikasi teknologi *fuzzy* dalam teknologi informasi sangat penting dan telah berkembang dengan cepat. Dalam penelitian ini akan diperkenalkan dan dikembangkan **teori baru** tentang struktur aljabar *fuzzy* yang dilengkapi dengan urutan parsial sebagai dasar dalam mengembangkan penyelidikan selanjutnya pada bidang teknologi *fuzzy* seperti teknologi informasi (khususnya automata), (Kehayopulu; 2012). Dalam hal ini khususnya dalam mengkarakterisasi semigrup bentuk bilinear terurut parsial dalam batasan subhimpunan *fuzzy*.

Semigrup bentuk bilinear merupakan semigrup yang mempunyai elemen-elemen berupa pasangan adjoin relative terhadap bentuk bilinear. Selama ini Karyati, baik secara individu maupun berkelompok telah melakukan penelitian terkait dengan semigrup ini dalam versi *fuzzy*. Hasil penelitian dari Kehayopulu, dkk melahirkan teori yang dapat diaplikasikan pada teknologi informasi. Sedangkan hasil penelitian yang telah dilakukan oleh Karyati dkk mempunyai aplikasi pada automata yang menjadi teori mendasar pada ilmu komputer. Melihat kondisi demikian, maka sangat perlu dikembangkan teori baru tentang semigrup bentuk bilinear dan semigrup terurut parsial ini. Dalam hal ini, pada semigrup bentuk bilinear akan ditambahkan operasi urutan parsial '$\leq$' sedemikian sehingga membentuk semigrup terurut parsial. Selanjutnya akan diselidiki karakteristik dari semigrup bentuk bilinier terurut parsial ini berdasarkan subhimpunan *fuzzy* yang membentuk ideal (kiri/kanan) *fuzzy* .

KAJIAN TEORI

Pada bagian ini akan diberikan beberapa pengertian dan sifat yang mendasari dalam pembahasan makalah ini.

2.1 Semigrup Terurut Parsial (*po_semigrup*)

Semigrup merupakan struktur aljabar yang melibatkan satu operasi biner dan bersifat asosiatif. Definisi semigrup secara eksplisit diberikan sebagai berikut:

Definisi 2.1. *Misalkan S suatu himpunan tak kosong. Himpunan S bersama operasi biner $'.'$ disebut semigrup jika:*

i. $(\forall x, y \in S)\ x.y \in S$
ii. $(\forall x, y, z \in S)\ (x.y).z = x.(y.z)$

Misalkan S adalah semigrup dan $a \in S$. Elemen a disebut elemen regular jika terdapat $a' \in S$ sedemikian sehingga $a = aa'a$. Semigrup S disebut semigrup regular jika setiap elemen S merupakan elemen regular. Elemen a disebut regular lengkap jika terdapat elemen $a' \in S$ sedemikian sehingga $a = aa'a$ dan $aa^{'} = a'a$. Semigrup S disebut semigrup regular lengkap jika setiap elemen S adalah regular lengkap.

Sebelum diberikan definisi tentang semigrup terurut parsial, maka diberikan definisi suatu himpunan terurut parsial sebagai berikut:

Definisi 2.2. *Himpunan tak kosong P disebut himpunan terurut parsial* $' \leq '$ *jika memenuhi:*
i. Refleksif : $(\forall x \in P) x \leq x$
ii. Antisimetri : $(\forall x, y \in P)\ x \leq y$ *dan* $y \leq x \Longrightarrow x = y$
iii. *Transitif* : $(\forall x, y, z \in P)\ x \leq y$ dan $y \leq z \Longrightarrow y \leq z$

Himpunan terurut parsial biasa disebut juga sebagai poset, yaitu singkatan dari *Partial Ordered Set.*. Berikut diberikan definisi selengkapnya.

Definisi 2.3 . *Misalkan S suatu himpunan tak kosong. Himpunan S bersama operasi biner* $'.'$ *dan* $' \leq '$ *disebut semigrup terurut parsial jika:*
i. $(S, .)$ *membentuk semigrup*
ii. $(S, \leq)$ *membentuk himpunan terurut parsial (poset)*
iii. $(\forall a, b, x \in S) a \leq b \Longrightarrow xa \leq xb$ *dan* $ax \leq bx$

Berdasarkan definisi semigrup terurut parsial tersebut, maka definisi ideal dalam semigrup terurut parsial juga bertambah aksioma. Definisi selengkapnya adalah:

Definisi 2.4. *Misalkan* $(S, ., \leq)$ *semigrup terurut parsial, maka subhimpunan tak kosong* I *disebut ideal dari semigrup S jika:*
i. $(\forall a \in S)(\forall b \in I)\ a \leq b \Longrightarrow a \in I$
ii. $IS \subseteq I$ *dan* $SI \subseteq I$

2.2. Semigrup Bentuk Bilinear

Semigrup bentuk bilinear merupakan semigrup yang mempunyai elemen-elemen khusus. Secara lengkap, pembentukan semigrup bentuk bilinear ini dijelaskan sebagai berikut:

Himpunan $\mathcal{L}(X)$ dan $\mathcal{L}(Y)$ adalah himpunan semua operator linear X dan Y. Jika $f \in \mathcal{L}(X)$, maka diperoleh subruang vektor X:

$$N(f) = \{u \in X \mid f(u) = 0\} \text{ dan } R(f) = \{v \in X | f(x) = v, \text{ untuk suatu } x \in X\}$$

Elemen $f \in \mathcal{L}(X)$ dikatakan pasangan adjoin dari $g \in \mathcal{L}(Y)$ relatif terhadap bentuk bilinear B dan sebaliknya jika $B(x, g(y)) = B(f(x), y)$ untuk semua $x \in X$ dan $y \in Y$. Selanjutnya dinotasikan himpunan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}'(X) = \{f \in \mathcal{L}(X) \mid N(B_*) \subseteq N(f),\ \ R(f) \cap N(B_*) = \{0\}\}$$

$$\mathcal{L}'(Y) = \{g \in \mathcal{L}(Y) \mid N(B^*) \subseteq N(g),\ \ R(g) \cap N(B^*) = \{0\}\}$$

$$S(B) = \{(f, g) \in \mathcal{L}'(X) \times \mathcal{L}'(Y)^{op} \mid (f, g) \text{ pasangan adjoin } \}$$

Karyati, dkk (2002) mebuktikan bahwa himpunan tersebut membentuk semigrup terhadap operasi biner berikut: $(f, g)(f', g') = (ff', g'g)$. Semigrup $S(B)$ ini selanjutnya disebut semigrup bentuk bilinear.

Berbagai sifat terkait dengan semigrup bentuk bilinear ini telah diselidiki oleh Nambboripad dkk , yang dilanjutkan oleh Karyati dkk. Penelitian dilanjutkan dalam versi *fuzzy* pada semigrup bentuk bilinear juga telah banyak dilakukan oleh Karyati, dkk. Penelitian tersebut meliputi sifat keregularan *fuzzy* dari semigrup bentuk bilinear maupun pendefinisian relasi Green *fuzzy* pada semigrup bentuk bilinear ini.

2.3. Semigrup *Fuzzy*

Merujuk pada tulisan Asaad (1991), Kandasamy (2003), Mordeson & Malik (1998), Ajmal (1994), Shabir (2005), maka yang dimaksud subhimpunan *fuzzy* α pada himpunan S adalah suatu pemetaan dari S ke $[0,1]$, yaitu $\alpha: S \to [0,1]$. Berikut diberikan definisi subsemigrup *fuzzy*.

Definisi 2.5. *Misalkan S adalah semigrup. Pemetaan $\alpha: S \to [0,1]$ disebut subsemigrup fuzzy jika berlaku $\alpha(xy) \geq min\{\alpha(x), \alpha(y)\}$ untuk setiap $x, y \in S$.*

Definisi 2.6. [Mohanraj dkk, 2011] *Misal α adalah subsemigrup fuzzy pada semigrup S, maka:*
(i) α disebut ideal kiri fuzzy jika $(\forall x, y \in S)\ \alpha(xy) \geq \alpha(y)$
(ii) α disebut ideal kanan fuzzy jika $(\forall x, y \in S) \alpha(xy) \geq \alpha(x)$
(iii) α disebut ideal fuzzy jika merupakan ideal kiri fuzzy sekaligus ideal kanan fuzzy, yaitu: $(\forall x, y \in S)\ \alpha(xy) \geq maks\ \{\alpha(x), \alpha(y)\}$

Apabila S merupakan semigrup terurut parsial, maka definisi ideal kiri *fuzzy*, ideal kanan *fuzzy* dan ideal (dua sisi) *fuzzy* dari S didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.7. [Kehayopulu, Tsingelis, 2007] *Misalkan $(S, ., \leq)$ semigrup* ***terurut parsial****. Subhimpunan fuzzy α dari S disebut* ***ideal kiri fuzzy*** *jika :*
i. $(\forall x, y \in S)\ \alpha(xy) \geq \alpha(y)$
ii. $(\forall x, y \in S)\ x \leq y \Longrightarrow \alpha(x) \geq \alpha(y)$

Definisi 2.8. [Kehayopulu, Tsingelis, 2007] *Misalkan* $(S,.,\leq)$ *semigrup* ***terurut parsial****. Subhimpunan fuzzy* α *dari* S *disebut* ***ideal kanan fuzzy*** *jika :*
i. $(\forall x, y \in S)\ \alpha(xy) \geq \alpha(x)$
ii. $(\forall x, y \in S)\ x \leq y \Longrightarrow \alpha(x) \geq \alpha(y)$

Dalam tulisan ini notasi $\langle a \rangle_R$ dan $\langle a \rangle_L$ masing-masing menotasikan ideal kanan dan ideal kiri dari semigrup S yang dibangun oleh elemen $a \in S$. Selalu dipenuhi hunbungan bahwa $\langle a \rangle_R = (a \cup aS]$ dan $\langle a \rangle_L = \{a\} \cup \{Sa\}$. Semigrup terurut parsial $(S, \leq)$ disebut regular jika untuk setiap elemen $a \in S$ terdapat $x \in S$ sedemikian sehingga berlaku $a \leq axa$. Semigrup terurut parsial S disebut *poe*-semigrup jika S memuat elemen terbesar e. Dengan demikian berlaku semigrup S merupakan semigrup regular jika dan hanya jika $x \leq xex$, untuk setiap $x \in S$. Untuk suatu $A \subseteq S$, maka dinotasikan $(A] = \{t \in S | t \leq h\ untuk\ \ suatu\ \ h \in A\}$. Dari definisi tersebut diperoleh $A \subseteq (A]$. Jika $A \subseteq B$, maka $(A] \subseteq (B]$. Berlaku juga $(A](B] \subseteq (AB]$ dan $\big((A]\big] = (A]$. Dengan demikian dipenuhi $\langle a \rangle_R = \{a\} \cup \{aS\} = (a \cup aS]$ dan $\langle a \rangle_L = \{a\} \cup \{Sa\} = (a \cup Sa]$. Untuk suatu himpunan fuzzy α pada semigrup terurut parsial $(S, \leq)$, didefinisikan suatu himpunan: $A_a = \{(y,z) \in S \times S | a \leq yz\}$. Misalkan α, β adalah subhimpuna fuzzy dari semigrup S, sehingga $\alpha \preccurlyeq \beta$ jika dan hanya jika berlaku $\alpha(x) \leq \beta(x)$ untuk setiap $x \in S$.

Proposisi 3.1. *Jika* $(S(B), \leq)$ *semigrup terurut parsial yang memuat elemen satuan dan* $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ *subhimpunan fuzzy dari semigrup* $S(B)$ *yang memenuhi sifat* $\alpha_1 \preccurlyeq \beta_1$ *dan* $\alpha_2 \preccurlyeq \beta_2$ *maka* $\alpha_1 \circ \alpha_2 \preccurlyeq \beta_1 \circ \beta_2$.

Bukti:

Ambil sebarang $\tilde{a} \in S(B)$, dengan $\tilde{a} = (f, g)$, $f \in L'(X)$ dan $g \in L'(Y)$. Selanjutnya dibuktikan $(\alpha_1 \circ \alpha_2)(\tilde{a}) \leq (\beta_1 \circ \beta_2)(\tilde{a})$

a. Untuk kasus $A_{\tilde{a}} = \emptyset$, maka berlaku:

$$(\alpha_1 \circ \alpha_2)(\tilde{a}) = 0 \leq 0 = (\beta_1 \circ \beta_2)(\tilde{a})$$

Maka diperoleh $\alpha_1 \circ \alpha_2 \preccurlyeq \beta_1 \circ \beta_2$.

b. Untuk kasus $A_{\tilde{a}} \neq \emptyset$, maka berlaku:

$$(\alpha_1 \circ \alpha_2)(\tilde{a}) = \bigvee_{(\tilde{y},\tilde{z}) \in A_{\tilde{a}}} \min\{\alpha_1(\tilde{y}), \alpha_2(\tilde{z})\}$$

dan

$$(\beta_1 \circ \beta_2)(\tilde{a}) = \bigvee_{(\tilde{y},\tilde{z}) \in A_{\tilde{a}}} \min\{\beta_1(\tilde{y}), \beta_2(\tilde{z})\}$$

Akibatnya dimiliki:

$\min\{\alpha_1(\tilde{y}), \alpha_2(\tilde{z})\} \leq \min\{\beta_1(\tilde{y}), \beta_2(\tilde{z})\}$ untuk setiap $(\tilde{y}, \tilde{z}) \in A_{\tilde{a}}$ (1)

Selanjutnya, misalkan $(\tilde{y}, \tilde{z}) \in A_{\tilde{a}}$. Karena $\tilde{y}, \tilde{z} \in S(B)$, $\alpha_1 \preccurlyeq \beta_1$ dan $\alpha_2 \preccurlyeq \beta_2$ sehingga berlaku $\alpha_1(\tilde{y}) \leq \beta_1(\tilde{y})$ dan $\alpha_2(\tilde{z}) \leq \beta_2(\tilde{z})$, maka berlaku:

$$\min\{\alpha_1(\tilde{y}), \alpha_2(\tilde{z})\} \leq \min\{\beta_1(\tilde{y}), \beta_2(\tilde{z})\}$$

Berdasarkan Persamaan (1), berlaku:

$$\bigvee_{(\tilde{y},\tilde{z})\in A_{\tilde{a}}} \min\{\alpha_1(\tilde{y}), \alpha_2(\tilde{z})\} \leq \bigvee_{(\tilde{y},\tilde{z})\in A_{\tilde{a}}} \min\{\beta_1(\tilde{y}), \beta_2(\tilde{z})\}$$

Akibatnya berlaku:

$$(\alpha_1 \circ \alpha_2)(\tilde{a}) = (\beta_1 \circ \beta_2)(\tilde{a}) \text{ untuk setiap } \tilde{a} \in S(B)$$

Atau berlaku:

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 \preccurlyeq \beta_1 \circ \beta_2$$

■

Lemma 3.2. *Semigrup bentuk bilinear terurut parsial* $(S(B), \leq)$ *membentuk semigrup regular jika dan hanya jika untuk setiap* $\tilde{a} \in S(B)$ *berlaku* $\langle\tilde{a}\rangle_R \cap \langle\tilde{a}\rangle_L = (\langle\tilde{a}\rangle_R\langle\tilde{a}\rangle_L]$

Bukti:

$(\Rightarrow)$

Diketahui $S(B)$ semigrup reguler, menurut sifat dari ideal semigrup berlaku untuk setiap ideal kanan A dan setiap subhimpunan B pada semigrup $S(B)$, maka :

$$A \cap B \subseteq \big((A \cap B)S(A \cap B)\big) \subseteq \big((AS)B\big] \subseteq (AB]$$

Selanjutnya, misalkan $\tilde{a} \in S(B)$. Karena $\langle\tilde{a}\rangle_R$ ideal kanan dari $S(B)$, maka dipenuhi: $\langle\tilde{a}\rangle_R \cap \langle\tilde{a}\rangle_L \subseteq (\langle\tilde{a}\rangle_R\langle\tilde{a}\rangle_L]$.

$(\Leftarrow)$

Ambil sebarang $\tilde{a} \in S(B)$, maka diperoleh:

$\tilde{a} \in \langle\tilde{a}\rangle_R \cap \langle\tilde{a}\rangle_L \subseteq (\langle\tilde{a}\rangle_R\langle\tilde{a}\rangle_L] = ((\tilde{a} \cup \tilde{a}S](\tilde{a} \cup S\tilde{a}]] \subseteq (\big((\tilde{a} \cup \tilde{a}S)(\tilde{a} \cup S\tilde{a})\big]]$

$= \big((\tilde{a} \cup \tilde{a}S)(\tilde{a} \cup S\tilde{a})\big] = (\tilde{a}^2 \cup \tilde{a}S\tilde{a} \cup \tilde{a}S^2\tilde{a}] = (\tilde{a}^2 \cup \tilde{a}S\tilde{a}\,]$

Dengan demikian $\tilde{a} \leq \tilde{a}^2$ atau $\tilde{a}\tilde{x}\tilde{a}$ untuk suatu $\tilde{x} \in S(B)$. Jadi $S(B)$ semigrup reguler.

■

Jika $(S(B), \leq)$ suatu semigrup terurut parsial yang mempunyai elemen satuan dan $A \subseteq S(B)$, subhimpunan fuzzy C_A dari $S(B)$ adalah fungsi karakterik dari A didefinisikan sebqgqi berikut:

$$C_A : S \longrightarrow [0,1]$$

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Misalkan $(S(B), \leq)$ semigrup terurut parsial yang mempunyai elemen satuan. Subhimpunan fuzzy α pada semigrup S disebut ideal kanan fuzzy pada S jika: i) $\alpha(xy) \geq \alpha(x)$ untuk setiap $x, y \in S$, ii) Jika $x \leq y$, maka $\alpha(x) \geq \alpha(y)$. Subhimpunan fuzzy α pada semigrup S disebut ideal kiri fuzzy pada S jika:i) $\alpha(xy) \geq \alpha(y)$ untuk setiap $x, y \in S$, ii) Jika $x \leq y$, maka $\alpha(x) \geq \alpha(y)$. Subhimpunan fuzzy α pada semigrup S disebut ideal (dua sisi) fuzzy pada S jika α membentuk ideal kanan fuzzy sekaligus ideal kiri fuzzy pada S. Hal ini ekuivalen dengan mengatakan α pada semigrup S disebut ideal (dua sisi) fuzzy pada S jika dan hanya jika berlaku: i) $\alpha(xy) \geq \alpha(x)$ untuk setiap $x, y \in S$, ii) Jika $x \leq y$, maka $\alpha(x) \geq \alpha(y)$. Subhimpunan fuzzy α pada semigrup S disebut ideal kiri fuzzy pada S jika : i) $\alpha(xy) \geq \max\{\alpha(x), \alpha(y)\}$ untuk setiap $x, y \in S$, ii) Jika $x \leq y$, maka $\alpha(x) \geq \alpha(y)$. Berdasarkan definisi tersebut, berlaku sifat sebagai berikut: Misalkan S adalah semigrup dengan elemen satuan. Subhimpunan tak kosong L dari semigrup S merupakan ideal kiri dari S jika dan hanya jika fungsi karakteristik C_L ideal kiri fuzzy pada S. Secara sama juga dipenuhi sifat berikut: Misalkan S adalah semigrup dengan elemen satuan. Subhimpunan tak kosong R dari semigrup S merupakan ideal kanan dari S jika dan hanya jika fungsi karakteristik C_R ideal kanan fuzzy pada S.

Proposisi 3.3. *Misalkan $(S(B), \leq)$ semigrup bentuk bilinear terurut parsial dengan elemen satuan. Jika α adalah ideal kanan fuzzy pada $S(B)$ dan β adalah ideal kiri fuzzy pada $S(B)$, maka $\alpha \circ \beta \preccurlyeq \alpha \wedge \beta$*

Bukti:

Ambil sebarang elemen $\tilde{a} \in S(B)$ selanjutnya dibuktikan $(\alpha \circ \beta)(\tilde{a}) \leq (\alpha \wedge \beta)(\tilde{a})$.

Untuk kasus $A_{\tilde{a}} = \emptyset$:

$(\alpha \circ \beta)(\tilde{a}) = 0$. Karena $\tilde{a} \in S(B)$ dan $\alpha \wedge \beta$ merupakan subhimpunan fuzzy dari semigrup bentuk bilinear $S(B)$, sehingga $(\alpha \wedge \beta)(\tilde{a}) \geq 0$. Kondisi ini berakibat $(\alpha \circ \beta)(\tilde{a}) \leq (\alpha \wedge \beta)(\tilde{a})$.

Untuk kasus jika $A_{\tilde{a}} \neq \emptyset$,

$$(\alpha \circ \beta)(\tilde{a}) = \bigvee_{(\tilde{y}, \tilde{z}) \in A_{\tilde{a}}} \min\{\alpha(\tilde{y}), \beta(\tilde{z})\}$$

Selalu berlaku:

$$\min\{\alpha(\tilde{y}),\beta(\tilde{z})\} \leq (\alpha \wedge \beta)(\tilde{a}), \text{ untuk setiap } (\tilde{y},\tilde{z}) \in A_{\tilde{a}}$$

Sehingga dipenuhi:

$$\bigvee_{(\tilde{y},\tilde{z})\in A_{\tilde{a}}} \min\{\alpha(\tilde{y}),\beta(\tilde{z})\} \leq (\alpha \wedge \beta)(\tilde{a})$$

maka akibatnya:

$$(\alpha \circ \beta)(\tilde{a}) \leq (\alpha \wedge \beta)(\tilde{a})$$

Diketahui $(\tilde{y},\tilde{z}) \in A_{\tilde{a}}$, maka $\min\{\alpha(\tilde{y}),\beta(\tilde{z})\} \leq (\alpha \wedge \beta)(\tilde{a})$. Selanjutnya, karena $(\tilde{y},\tilde{z}) \in A_{\tilde{a}}$, dimiliki $\tilde{y},\tilde{z} \in S(B)$ dan $\tilde{a} \leq \tilde{y}\tilde{z}$. Diketahui α ideal kanan fuzzy pada $S(B)$, sehingga berlaku $\alpha(\tilde{a}) \geq \alpha(\tilde{y}\tilde{z})$, dan $\alpha(\tilde{y}\tilde{z}) \geq \alpha(\tilde{y})$. Karena β ideal kiri dari $S(B)$, sehingga berlaku: $\beta(\tilde{a}) \geq \beta(\tilde{y}\tilde{z})$ dan $\beta(\tilde{y}\tilde{z}) \geq \beta(\tilde{z})$. Akibatnya berlaku $\beta(\tilde{a}) \geq \beta(\tilde{z})$. Dengan demikian diperoleh hasil:

$$\min\{\alpha(\tilde{y}),\beta(\tilde{y})\} \geq \min\{\alpha(\tilde{z}),\beta(\tilde{z})\}$$

Sehingga berlaku:

$$(\alpha \wedge \beta)(\tilde{a}) = \min\{\alpha(\tilde{y}),\beta(\tilde{y})\} \geq \min\{\alpha(\tilde{z}),\beta(\tilde{z})\}$$

■

Proposisi 3.4 *Jika* $(S(B),\leq)$ *semigrup bentuk bilininear terurut parsial, maka untuk setiap ideal kanan fuzzy* α *dan setiap subhimpunan fuzzy* β *dari semigrup* $S(B)$*, berlaku* $\alpha \wedge \beta \preccurlyeq \alpha \circ \beta$.

Bukti:

Misalkan α ideal kanan fuzzy dan β subhimpunan fuzzy dari semigrup $S(B)$. Selanjutnya dibuktikan $(\alpha \wedge \beta)(\tilde{a}) \preccurlyeq (\alpha \circ \beta)(\tilde{a})$, untuk setiap $\tilde{a} \in S(B)$. Diketahui untuk setiap $\tilde{a} \in S(B)$ terdapat $\tilde{x} \in S(B)$ sedemikian sehinnga berlaku $\tilde{a} \leq \tilde{a}\tilde{x}\tilde{a} = (\tilde{a}\tilde{x})\tilde{a}$. Dengan demikian $(\tilde{a}\tilde{x},\tilde{a}) \in A_{\tilde{a}}$, yang berarti bahwa $A_{\tilde{a}} \neq \emptyset$, sehingga berlaku

$$(\alpha \circ \beta)(\tilde{a}) = \bigvee_{(\tilde{y},\tilde{z})\in A_{\tilde{a}}} \min\{\alpha(\tilde{y}),\beta(\tilde{z})\}$$

Disamping juga berlaku $(\alpha \wedge \beta)(\tilde{a}) = \min\{\alpha(\tilde{a}),\beta(\tilde{a})\}$. Diketahui α ideal kanan fuzzy dari $S(B)$, maka berlaku: $\alpha(\tilde{a}\tilde{x}) \geq \alpha(\tilde{a})$. Sehingga diperoleh hubungan $\min\{\alpha(\tilde{a}\tilde{x}),\beta(\tilde{a})\} \geq \min\{\alpha(\tilde{a}),\beta(\tilde{a})\}$. Dengan demikian berlaku : $(\alpha \wedge \beta)(\tilde{a}) \leq \min\{\alpha(\tilde{a}\tilde{x}),\beta(\tilde{a})\}$. Karena $(\tilde{a}\tilde{x},\tilde{a}) \in A_{\tilde{a}}$, sehingga berlaku:

$$\min\{\alpha(\tilde{a}\tilde{x}), \beta(\tilde{a})\} \leq \bigvee_{(\tilde{y},\tilde{z})\in A_{\tilde{a}}} \min\{\alpha(\tilde{y}), \beta(\tilde{z})\}$$

Sehingga dimiliki hubungan:

$(\alpha \circ \beta)(\tilde{a}) = \bigvee_{(\tilde{y},\tilde{z})\in A_{\tilde{a}}} \min\{\alpha(\tilde{y}), \beta(\tilde{z})\} \geq \min\{\alpha(\tilde{a}\tilde{x}), \beta(\tilde{a})\} \geq (\alpha \wedge \beta)(\tilde{a})$.

Dengan demikian diperoleh $\alpha \wedge \beta \preccurlyeq \alpha \circ \beta$.

■

Sebagai akibat dari Proposisi 3.4 tersebut, diperoleh proposisi sebagai berikut:

Proposisi 3.5. *Jika* $(S(B), \leq)$ *semigrup bentuk bilininear terurut parsial, maka untuk setiap subhimpunsn fuzzy* α *dan setiap ideal kiri fuzzy* β *dari semigrup* $S(B)$*, berlaku* $\alpha \wedge \beta \preccurlyeq \alpha \circ \beta$.

Bukti. Bukti dari proposisi ini sejalan dengan bukti pada Proposisi 3.4.

■

Theorem 3.1. *Semigrup bentuk bilinear terurut parsial* $(S(B), \leq)$ *membentuk semigrup reguler jika dan hanya jika setiap ideal kanan* α *dan setiap ideal kiri fuzzy* β *dari semigrup* $(S(B), \leq)$ *berlaku:*

$$\alpha \wedge \beta \preccurlyeq \alpha \circ \beta, \text{ \textit{ekuivalen dengan}, } \alpha \wedge \beta = \alpha \circ \beta$$

Bukti.

($\Longrightarrow$) Misalkan $(S(B), \leq)$ semigrup regular, α ideal kanan fuzzy dan β ideal kiri fuzzy dari semigrup $S(B)$. Berdasarkan Proposisi 3.4, Maka berlaku $\alpha \wedge \beta \preccurlyeq \alpha \circ \beta$. Di lain pihak berdasarkan Proposition 3.3 , berlaku $\alpha \circ \beta \preccurlyeq \alpha \wedge \beta$. Dengan demikian berlaku $\alpha \wedge \beta = \alpha \circ \beta$.

($\Longleftarrow$) Misalkan berlaku $\alpha \wedge \beta \preccurlyeq \alpha \circ \beta$ untuk setiap ideal kanan fuzzy α dan setiap ideal kiri fuzzy β dari semigrup $(S(B), \leq)$, sehingga berdasarkan on Lemma 2.1, berlaku:

$$\langle\tilde{a}\rangle_R \cap \langle\tilde{a}\rangle_L \subseteq (\langle\tilde{a}\rangle_R \langle\tilde{a}\rangle_L], \forall \tilde{a} \in S(B)$$

Untuk $\tilde{a} \in S(B)$, $\tilde{b} \in \langle\tilde{a}\rangle_R \cap \langle\tilde{a}\rangle_L$, maka berlaku $\tilde{b} \in (\langle\tilde{a}\rangle_R \langle\tilde{a}\rangle_L]$. Diketahui $\langle\tilde{a}\rangle_R$ ideal kanan dari semigrup $S(B)$, berdasarkan Lemma 2.3, fungsi karakteristik $\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_R}$ membentuk ideal kanan dari semigrup $S(B)$. Berdasarka Lemma 2.2 fungsi karakteristik $\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_L}$ membentuk ideal kiri dari semigrup $S(B)$. Sehingga dengan mneggunakan hipotesanya, berlaku :

$$\left(\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_R} \wedge \alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_L}\right)(\tilde{b}) \leq \left(\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_R} \circ \alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_L}\right)(\tilde{b})$$

Diketahui $\left(\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_R} \wedge \alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_L}\right)(\tilde{b}) = \min\{\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_R}(\tilde{b}), \alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_L}(\tilde{b})\}$, sehingga diperoleh:

$$\min\{\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_R}(\tilde{b}), \alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_L}(\tilde{b})\} \leq \left(\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_R} \circ \alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_L}\right)(\tilde{b})$$

Diketahui juga $\tilde{b} \in \langle\tilde{a}\rangle_R$ dan $\tilde{b} \in \langle\tilde{a}\rangle_L$, maka diperoleh $\langle\tilde{a}\rangle_R(\tilde{b}) = 1$ dan $\langle\tilde{a}\rangle_L(\tilde{b}) = 1$. Dengan demikian berlaku $\min\{\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_R}(\tilde{b}), \alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_L}(\tilde{b})\} = 1$ dan

$$1 \leq \left(\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_R} \circ \alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_L}\right)(\tilde{b}) \qquad (1)$$

Jika $A_{\tilde{b}} = \emptyset$, maka $\left(\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_R} \circ \alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_L}\right)(\tilde{b}) = 0$, yang tidak mungkin berdasarkan persamaan (1). Sehingga diperoleh $A_{\tilde{b}} \neq \emptyset$.

Dibuktikan bahwa terdapat $(\tilde{y}, \tilde{z}) \in A_{\tilde{b}}$ sehingga berlaku $\tilde{y} \in \langle\tilde{a}\rangle_R$ dan $\tilde{z} \in \langle\tilde{a}\rangle_L$. Sehingga dipunyai $\tilde{b} \leq \tilde{y}\tilde{z} \in \langle\tilde{a}\rangle_R\langle\tilde{a}\rangle_L$ dan $\tilde{b} \in (\langle\tilde{a}\rangle_R\langle\tilde{a}\rangle_L]$.

Andaikan setiap $(\tilde{y}, \tilde{z}) \in A_{\tilde{b}}$ dipunyai $\tilde{y} \notin \langle\tilde{a}\rangle_R$ or $\tilde{z} \notin \langle\tilde{a}\rangle_L$, sehingga:

$$\min\{\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_R}(\tilde{y}), \alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_L}(\tilde{z})\} = 0, \forall(\tilde{y}, \tilde{z}) \in A_{\tilde{b}} \qquad (2)$$

Misalkan $(\tilde{y}, \tilde{z}) \in A_{\tilde{b}}$, jika $\tilde{y} \notin \langle\tilde{a}\rangle_R$ maka $\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_R}(\tilde{y}) = 0$. Karena $\tilde{z} \in S(B)$, maka dipunyai $\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_L}(\tilde{z}) \geq 0$. Dengan demikian diperoleh $\min\{\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_R}(\tilde{y}), \alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_L}(\tilde{z})\} = 0$. Berdasarkan pada Persamaan (2), berlaku $\bigvee_{(\tilde{y},\tilde{z})\in A_{\tilde{a}}} \min\{\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_R}(\tilde{y}), \alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_L}(\tilde{z})\} = 0$. Dengan $A_{\tilde{a}} \neq \emptyset$, maka berlaku:

$$\left(\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_R} \circ \alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_L}\right)(\tilde{b}) = \bigvee_{(\tilde{y},\tilde{z})\in A_{\tilde{a}}} \min\{\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_R}(\tilde{y}), \alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_L}(\tilde{z})\}$$

Sehingga berlaku $\left(\alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_R} \circ \alpha_{\langle\tilde{a}\rangle_L}\right)(\tilde{b}) = 0$. Berdasarkan persamaan (1) , suatu hal yamg tidak mungkin.

■

Akibat 3.1. *Semigrup bentuk bilinear terurut parsial* $(S(B), \leq)$ *membentuk semigrup reguler jika dan hanya jika setiap ideal kanan fuzzy* α *dan setiap subhimpunan fuzzy* β *dari semigrup* $(S(B), \leq)$ *berlaku* $\alpha \wedge \beta \preccurlyeq \alpha \circ \beta$.

Bukti :

Berdasarkan Proposisi 3.1. dan Teorema 3.1, maka terbukti Akkibat 3.1. ini.

■

Akibat3.2. *Semigrup bentuk bilinear terurut parsial* $(S(B), \leq)$ *membentuk semigrup reguler jika dan hanya jika setiap subhimpunan fuzzy* α *dan setiap ideal kiri fuzzy* β *dari semigrup* $(S(B), \leq)$ *berlaku* $\alpha \wedge \beta \preccurlyeq \alpha \circ \beta$.

Bukti :

Berdasarkan Proposisi 3.2. dan Teorema 3.1, maka terbukti Akkibat 3.2. ini.

■

SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil pembahasan di atas maka disimpulkan sifat-sifat semigrup bentuk bilinear terurut parsial sebagai berikut:

1. Jika $(S(B), \leq)$ semigrup terurut parsial yang memuat elemen satuan dan $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ subhimpunan fuzzy dari semigrup $S(B)$ yang memenuhi sifat $\alpha_1 \preccurlyeq \beta_1$ dan $\alpha_2 \preccurlyeq \beta_2$ maka $\alpha_1 \circ \alpha_2 \preccurlyeq \beta_1 \circ \beta_2$.
2. Semigrup bentuk bilinear $(S(\mathrm{B}), \leq)$ terurut parsial regular jika dan hanya jika untuk setiap $\tilde{a} \in S(\mathrm{B})$ berlaku $\langle\tilde{a}\rangle_R \cap \langle\tilde{a}\rangle_L = (\langle\tilde{a}\rangle_R \langle\tilde{a}\rangle_L]$
3. Misalkan $(S(\mathrm{B}), \leq)$ semigrup bentuk bilinear terurut parsial dengan elemen satuan. Jika α adalah ideal kanan fuzzy pada $S(B)$ dan β adalah ideal kiri fuzzy pada $S(B)$, maka $\alpha \circ \beta \preccurlyeq \alpha \wedge \beta$

DAFTAR PUSTAKA

Asaad,M. (1999). Group and *Fuzzy* Subgroup. *Fuzzy Sets and systems 39 , pp: 323 - 328.*

Howie, J.M. (1976). *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press. London

Kandasamy, W.B.V. (2003). *Smarandache Fuzzy Algebra*. American Research Press and W.B. Vasantha Kandasamy Rehoboth. USA

Karyati. 2002. *Semigrup yang Dikonstruksikan dari Bentuk Bilinear*. Tesis: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mad. Yogyakarta.

Karyati, Wahyuni, S. (2003). The Properties of Non-degenerate Bilinear Form. *Proceeding of SEAMS-GMU: International Conference on Mathematics and Its Applications.*

Karyati, Wahyuni, S, Surodjo, B, Setiadji, (2009). Beberapa Sifat Ideal *Fuzzy* Semigrup yang Dibangun oleh Subhimpunan *Fuzzy*, *Prosiding Seminar Nasional Matematika, Universitas Negeri Jember.*

Karyati, Wahyuni, S, Surodjo, B, Setiadji. (2009). Quotient Semigroups Induced by *Fuzzy* Congruence Relations, *Proceeding IndoMS International Conference on Mathematics and Its Application (IICMA) , GMU, Yogyakarta, pp: 102-111.*

Karyati, Wahyuni, S, Surodjo, B, Setiadji. (2009). Subsemigrup S(B) *Fuzzy*. *Prosiding Seminar Nasional PIPM, Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA, UNY.*

Karyati, Wahyuni, S, Surodjo, B, Setiadji. (2012). The *Fuzzy* Regularity of Bilinear Form Semigroups, *Proceedings of "The 6th SEAMS-UGM Conference 2011"*

Karyati, Wahyuni, S, Surodjo, B, Setiadji. (2013). Membangun Suatu Relasi *Fuzzy* pada Semigrup Bentuk Bilinear. *Prosiding Seminar Nasional Jurusan Matematika, Universitas Sebelas Maret.*

Kehayopulu, N. (2005). Ideals and Green Relations in Ordered Semigroups, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 26, pp: 1-8.*

Kehayopulu, N. (2012). Left Regular Ordered Semigroups in which the *Fuzzy* Left Ideals are Two-Sided, *International Journal of Algebra, Vol 6, no.10, pp:493-499*.

Klir, G.J, Clair, U.S, Yuan, B. (1997). *Fuzzy Set Theory: Foundation and Applications*. Prentice-Hall, Inc. USA

Mohanraj, G, Krishnaswamy, D and Hema, R. (2011). On Generalized Redefined *Fuzzy* Prime Ideals of Ordered Semigroups, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, Volume X, No 10, pp: 1- 9.*

Mordeson, J.N, Malik, D.S, (1998,) *Fuzzy Commutative Algebra.* World Scientifics Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore

Murali, V.,1998, *Fuzzy* Equivalence Relation. *Fuzzy Sets and System 30 , pp: 155-163*.

Rajendran, D, Nambooripad, K.S.S,(2000, Bilinear Form and a Semigroup of Linear Transformations. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics 24, p: 609-616*

Shabir, M, Khan, A, (2010), Characterizations of Ordered Semigroups by the Properties of Their *Fuzzy* Ideals, *Computers and Mathematics with Applications, Volume 59,* pp: *539 – 549.*

Zimmermann, H.J, (1991,) *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers. USA.