Une nouvelle approche de l'enseignement des torseurs

G. DE SAXCE

Université Lille 1, Cité scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq,
gery.desaxce@univ-lille1.fr

Résumé :

Dans l'enseignememt de la mécanique, le torseur apparaît souvent sous la forme axiomatisée d'un objet composé d'un vecteur et de son moment, doué de la propriété d'équiprojectivité et obéissant à une règle de transport spécifique. Un point de vue fructueux et novateur est de considérer le torseur comme un tenseur affine et ainsi énoncer un principe unique que l'on décline, tant en statique qu'en dynamique, pour retrouver les théories classiques : solides rigides, corps 3D, milieux curvilignes. Cette notion offre ainsi une vision structurante des sciences mécaniques, de la mécanique générale à celle du milieu continu.

Abstract:

In the mechanics teaching, the torsor sometimes appears in the axiomatic form of an object composed of a vector and a moment, endowed with the property of equiprojectivity and obeying a specific transport law. A novel and fruitful viewpoint is to consider the torsor as an affine tensor and to claim a unique principle which is declined, in statics and dynamics, to recover the classical theories: rigid body, 3D and curvilinear continua. This concept offers a structuring of mechanical sciences, from the general mechanics to the one of continuous media.

Mots clefs : Mécanique générale ; mécanique des milieux continus ; résistance des matériaux ; torseur

1 Introduction

Le moment d'une force, du à Archimède, est un concept fondamental de la Mécanique. Sa modélisation à l'aide des outils mathématiques standard est bien connue. Dans l'enseignement de la mécanique, il apparaît souvent sous la forme axiomatisée du concept de torseur, objet composé d'un vecteur et de son moment, doué de la propriété d'équiprojectivité et obéissant à une règle de transport spécifique. Quoique celle-ci fasse appel à une translation de l'origine, personne ne semble s'être penché sérieusement sur la nature affine de cet objet. Ces notions peuvent être enseignées avec un bagage minimum de calcul vectoriel.

A un niveau mathématique plus élevé, un autre pilier non moins incontournable de la Mécanique est le concept de milieu continu, organisé notamment autour du calcul tensoriel qui plonge d'ailleurs ses racines dans les travaux de Cauchy sur les contraintes et déformations. Les règles générales de ce calcul ont été introduites par Ricci-Curbasto et Levi-Civita. Elles concernent les tenseurs que nous qualifierons de vectoriels dans la mesure où leurs composantes sont modifiées aux moyens de changements de base, donc de transformations linéaires régulières, éléments du groupe linéaire. L'usage de bases mobiles permet de dériver ces objets de manière covariante grâce à une connexion, connue par ses symboles de Christoffel.

C'est Élie Cartan qui attira le premier l'attention sur le fait que l'on pouvait remplacer les base mobiles par des repères affines mobiles, introduisant par la même les connexions affines [1]. Ses successeurs en retiendront surtout la notion de fibré principal et de connexion associée à un groupe quelconque : groupe linéaire, groupe affine, groupe projectif ou autre. C'est l'application au groupe orthogonal qui retiendra surtout l'attention pour ses applications à la géométrie riemannienne et aux tenseurs euclidiens. L'intérêt que Cartan portait originellement aux connexions du groupe affine passa au second plan. N'en subsiste peut-être que la dénomination de 'connexion affine', utilisée bizarrement d'ailleurs quelque soit le groupe (même s'il n'est pas affine !).

On pourra certes trouver dans l'approche des milieux continus un outil unificateur de la Mécanique, même si la dynamique des points matériels et des solides rigides reste un peu en marge et si l'objet torseur —si essentiel pour le mécanicien— semble échapper à toute tentative de le faire rentrer dans le moule des tenseurs. Les contemporains trouveront des réponses à ce souci d'unifier et de structurer la Mécanique plutôt dans la méthode des puissances et des travaux virtuels, initiée par Lagrange, et les techniques variationnelles. Sans nier la puissance de ces outils, il ne faut pas non plus sous-estimer leur caractère abstrait ni les pièges du calcul des variations.

Plus récemment, Souriau propose de revisiter la Mécanique en mettant l'accent sur son caractère affine [5]. C'est ce point de vue que nous adopterons ici en prenant comme point de départ une généralisation du concept de torseur sous la forme d'un objet affine [2-4]. Elle permet de structurer la mécanique grâce à un principe unique qui, en le déclinant pour chaque milieu, restitue les équations classiques de la statique et de la dynamique. Elle nous semble pertinente pour une nouvelle pédagogie de l'enseignement de la Mécanique dont nous allons esquisser des éléments de l'ossature. Le lecteur soucieux d'approfondir pourra consulter [2-4].

2 Groupe affine et groupe de Galilée

Soit un espace affine $A\mathcal{T}$ associé à un espace vectoriel $\mathcal{T}$ de dimension n. Tout repère affine est constitué d'une origine $\boldsymbol{Q} \in A\mathcal{T}$ et d'une base $(\vec{\boldsymbol{e}}_\alpha)$ de $\mathcal{T}$. Par la décomposition unique : $\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = V^\alpha \vec{\boldsymbol{e}}_\alpha$, il permet d'associer à chaque point $\boldsymbol{P}$ de $A\mathcal{T}$ un ensemble de coordonnées affines V^α, rangées dans le vecteur colonne $V \in \mathbb{R}^n$. A tout changement de repère affine correspond une transformation affine, constituée d'une translation C et d'une matrice de passage régulière P :

$$V = C + P\,V' \ .$$

Il est judicieux de la présenter formellement comme une transformation linéaire de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ V' \end{pmatrix} = \tilde{P}\,\tilde{V}' \ .$$

Cette remarque est importante car les règles du calcul affine se ramènent ainsi aisément à celle du calcul linéaire. L'ensemble des transformations affines $a = (C, P)$ forment le groupe affine $\mathbb{A}ff(n)$, à la base de la géométrie affine. Avec une règle graduée et un rapporteur, nous pouvons mesure les distances entre deux points, les angles entre deux droites et les volumes de l'espace physique $A\mathcal{T}$. Les transformations affines qui conservent ces quantités sont les isométries

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & R \end{pmatrix}, \qquad R \in \mathbb{SO}(3) \ ,$$

qui forment le groupe d'Euclide, sous-groupe de $\mathbb{A}ff(3)$. C'est le groupe de la géométrie euclidienne mais aussi, comme nous le verrons, celui de la statique. Si nous disposons d'une horloge, nous pouvons mesurer des durées. Rajoutons une dimension en travaillant dans l'espace-temps $A\mathcal{T}$. Dans un repère affine de $A\mathcal{T}$, tout événement survenant à la position x et à l'instant t sera représenté par :

$$X = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ ,$$

En l'absence de gravité, les particules matérielles se déplacent en mouvement rectiligne uniforme (M.R.U.). Les transformations affines qui conservent le M.R.U., les distances, les angles et les volumes sont de la forme :

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tau_0 & 1 & 0 \\ k & u & R \end{pmatrix} \ .$$

où $u \in \mathbb{R}^3$ est un boost galiléen, $k \in \mathbb{R}^3$ est une translation spatiale et $\tau_0 \in \mathbb{R}$ est un changement d'horloge. Elles forment le groupe de Galilée, sous-groupe de $\mathbb{A}ff(4)$. C'est le groupe de la dynamique classique.

3 Torseurs

A tout objet affine, nous pouvons associer un système de composantes affines. Considérons par exemple une fonction affine $\boldsymbol{\psi}$ de $A\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}$. On peut lui associer les composantes Φ_α de l'unique forme linéaire associée, rangées dans le vecteur ligne Φ, et la hauteur au-dessus de l'origine $\chi = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{Q})$. Dans un changement de repère affine, ces composantes affines se transforment suivant la règle simple :

$$\tilde{\Psi}' = (\chi' \quad \Phi'), = (\chi \quad \Phi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & P \end{pmatrix} = \tilde{\Psi}\,\tilde{P} \ .$$

Ces fonctions affines forment un espace vectoriel $A^*\mathcal{T}$ de dimension $(n+1)$. On invente un nouvel objet, le torseur. C'est une forme bilinéaire antisymétrique $\boldsymbol{\tau}$ sur cet espace :

$$\forall \boldsymbol{\psi}, \hat{\boldsymbol{\psi}}, \qquad \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\psi}, \hat{\boldsymbol{\psi}}) = -\boldsymbol{\tau}(\hat{\boldsymbol{\psi}}, \boldsymbol{\psi}) \ .$$

Dans un repère affine, le torseur est représenté par :

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\psi}, \hat{\boldsymbol{\psi}}) = \tau((\chi, \Phi_\alpha), (\hat{\chi}, \hat{\Phi}_\beta)) = J^{\alpha\beta}\Phi_\alpha\,\hat{\Phi}_\beta + T^\alpha(\chi\,\hat{\Phi}_\alpha - \hat{\chi}\,\Phi_\alpha) \ ,$$

avec $J^{\alpha\beta} = -J^{\beta\alpha}$. Les composantes affines $(T^\alpha, J^{\alpha\beta})$ se transforment suivant la règle :

$$\tilde{\tau}' = \begin{pmatrix} 0 & T'^T \\ -T' & J' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C' & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T^T \\ -T & J' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & C'^T \\ 0 & P^{-T} \end{pmatrix} = \tilde{P}^{-1}\tilde{\tau}\,\tilde{P}^{-T} \ , \tag{1}$$

avec $C' = -P^{-1}C$.

3.1 Statique d'un arc

Appliquons cette démarche générale à un exemple simple, la statique d'un arc. Faisons une coupe en un point. La section droite est soumise à un vecteur des efforts F et à un vecteur des moments M . On peut lui associer un torseur représenté par la matrice antisymétrique :

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & F^T \\ -F & -j(M) \end{pmatrix} \ , \tag{2}$$

où $j(u)$ est la matrice antisymétrique représentant le produit vectoriel : $j(u)\,v = u \wedge v$. Considérons un changement d'origine représenté par une translation C' (la matrice de passage R étant l'identité). Quel est l'effet de cette transformation euclidienne sur les composantes du torseur ? La règle (1) conduit à deux relations attendues : la conservation des efforts et la loi de transport des moments :

$$F' = F, \qquad M' = M + C' \wedge F \ .$$

3.2 Dynamique d'une particule matérielle

Quel est la structure de son torseur ? On peut le représenter par une matrice antisymétrique (1). Nous recherchons ses invariants par transformation de Galilée, ce qui nous amène à poser :

$$\tilde{\tau}' = \begin{pmatrix} 0 & m & 0 \\ -m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j(l_0) \end{pmatrix} . \tag{3}$$

On fait ainsi apparaître un scalaire m que nous identifierons à la masse, et un vecteur-colonne $l_0 \in \mathbb{R}^3$, de norme invariante, que nous identifierons au moment cinétique propre. On peut interpréter (3) comme l'expression du torseur d'une particule au repos dans le repère considéré. Pour connaître ces composantes dans un repère en mouvement, appliquons un boost galiléen de vitesse d'entraînement v . Grâce à la règle (1), les composantes du torseur dans le repère en mouvement sont :

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & m & p^T \\ -m & 0 & -q^T \\ -p & q & -j(l) \end{pmatrix} , \tag{4}$$

où on voit apparaître la quantité de mouvement $p = m\,v$ et le moment cinétique $l = l_0 + m\,x \wedge v$, incluant le terme de transport, mais aussi la quantité de position $q = m\,x$, produit de la masse par le vecteur position. Ces variables familières n'apparaissent pas de manière indépendante mais comme les composantes d'un objet structuré.

4 Gravité galiléenne

Elargissons notre cadre en considérant un espace $\mathcal{M}$ pouvant être doté d'une courbure mais que nous percevrions, au moins localement, de manière affine. Nous devons nous donner un moyen de le paralléliser en le munissant de la géométrie du groupe affine. En passant d'un point $\boldsymbol{X} \in \mathcal{M}$ à un autre infiniment voisin $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X} + \overrightarrow{d\boldsymbol{X}}$, nous devons donner, en fonction de $\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}$, les mouvements de la base locale, donc une matrice de passage infinitésimale dP, et le mouvement de l'origine, donc une translation infinitésimale dC. Nous définissons ainsi une matrice de connexion Γ (contenant les symboles de Christoffel) et un vecteur de connexion affine Γ_A :

$$d\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dC & dP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Gamma_A & \Gamma \end{pmatrix} = \tilde{\Gamma} .$$

En se restreignant au groupe de Galilée, nous définissons ainsi une connexion galiléenne qui, en l'absence d'effets de Coriolis (pour simplifier), est de la forme

$$\tilde{dP} = \tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ dt & 0 & 0 \\ 0 & -g\,dt & 0 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Les symboles de Christoffel s'interprètent comme la gravité g . On peut ainsi différentier un champs de torseur sur $\mathcal{M}$ de manière intrinsèque en tenant compte de la variation du repère affine : $d\tilde{\tau} = d(\tilde{P}\,\tilde{\mu}'\tilde{P}^T) = \tilde{P}\,d\tilde{\mu}'\tilde{P}^T + d\tilde{P}\,\tilde{\mu}'\tilde{P}^T + \tilde{P}\,\tilde{\mu}'d\tilde{P}^T$ En faisant tendre la transformation P vers l'identité, donc $\tilde{\tau}'$ vers $\tilde{\tau}$, on obtient la dérivée affine du torseur :

$$\nabla\tilde{\tau} = d\tilde{\tau}\mid_{\tilde{P}=Id} = d\tilde{\tau} + \tilde{\Gamma}\,\tilde{\tau} + \tilde{\tau}\,\tilde{\Gamma}^T \ .$$

Cette dérivée affine est notée $\tilde{\nabla}$ pour la distinguer de la dérivée vectorielle usuelle ∇. Sur cette base, nous énonçons un principe affirmant que la dérivée covariante du champ de torseur est nulle, ce qui donne lieu, tenant compte de (1), à deux groupes d'équations :

$$\tilde{\nabla}T = dT + \Gamma\,T, \qquad \tilde{\nabla}J = dJ + \Gamma\,J + J\,\Gamma^T + \Gamma_A T^T - T\,\Gamma_A^T \ . \tag{6}$$

Vérifions sur deux exemples la pertinence de ce principe pour la Mécanique.

4.1 Equations d'équilibre d'un arc

Soit s la longueur courante le long de l'arc et $U = dx\,/\,ds$ le vecteur unitaire tangent. Pour le torseur (2), le principe précédent donne lieu aux équations d'équilibre en translation et rotation d'un arc sans charges réparties :

$$\frac{dF}{ds} = 0, \qquad \frac{dM}{ds} + U \times F = 0 \ .$$

4.2 Equations du mouvement d'une particule matérielle

Tenant compte de (4), (5) et (6), le principe de nullité de la dérivée du torseur conduit aux équations du mouvement : on retrouve donc la conservation de la masse, la loi de Newton, le théorème du moment cinétique et une équation méconnue mais élégante qui stipule que la dérivée de la quantité de position q est la quantité de mouvement p .

$$\dot{m} = 0, \qquad \dot{p} = m\,g, \qquad \dot{l} = x \wedge m\,g, \qquad \dot{q} = p \ .$$

5 Généralisation aux milieux continus de dimension arbitraire

Les exemples précédents peuvent être considérés comme des milieux continus de dimension 1 (l'arc, la trajectoire d'une particule). On généralise sans grosses difficultés aux milieux curvilignes de dimension p plongés dans un espace environnant de dimension n. Le torseur sera un tenseur affine à valeur dans un espace vectoriel cible de dimension p. Ces composantes affines $({}^{\gamma}T^{\alpha}, {}^{\gamma}J^{\alpha\beta})$ auront trois indices, celui de gauche étant relatif à l'espace cible, ceux de droite ayant la même fonction qu'à la section 3. Le principe énoncé à la section 4 se généralise aisément en affirmant que la divergence affine du champ de torseurs à valeur vectorielle s'annule :

$$_{\gamma}\tilde{\nabla}\,{}^{\gamma}T^{\alpha} = 0, \qquad _{\gamma}\tilde{\nabla}\,{}^{\gamma}J^{\alpha\beta} = 0 \ .$$

Ces équations sont très générales et peuvent se décliner en fonction du milieu curviligne choisi et de l'espace environnant. Pour la dynamique des corps 3D, on en déduit les équations d'Euler des milieux continus. Pour les coques, on retrouve les équations d'équilibres de la statique et les équations du mouvement de la dynamique.

6 Equations du mouvement d'une particule matérielle

En quelques pages, nous n'avons pu qu'esquisser à grand trait les idées clés de cette méthode d'exposition. La structure de la Mécanique y est révélée par l'étude d'un objet unique, le torseur, qui peut se décliner suivant le choix du groupe, du milieu continu et de l'espace environnant. Certains chapitres ont été oubliés, la méthode des puissances virtuelles par exemple qui pourrait trouver toute sa place dans cette Mécanique affine en inventant un nouvel objet, dual du torseur, le co-torseur. Le lecteur trouvera déjà quelques éléments de réflexion sur ce thème dans [5].

References

[1] É. Cartan, Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie), Annales de l'École Normale Supérieure, 40 (1923) 325-412

[2] G. de Saxcé, C. Vallée, Affine Tensors in Shell Theory, Journal of Theoretical and Applied Mechanics 41(3) (2003) 593-621

[3] G. de Saxcé, C. Vallée, Calcul tensoriel affine en théorie des coques, Actes du 13^{ieme} Congrès Français de Mécanique, Poitiers-Futuroscope (1997) 41-53

[4] G. de Saxcé, C. Vallée, Calcul tensoriel affine et dynamique des particules matérielles et des solides rigides, Actes du 17^{ieme} Congrès Français de Mécanique, Troyes (1997) 41-53

[5] J.-M. Souriau, Milieux continus de dimension 1, 2 ou 3 : statique et dynamique, Actes du 13^{ieme} Congrès Français de Mécanique, Poitiers-Futuroscope (1997) 41-53