Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA
Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 16 Mei 2009

SUATU CONTOH *INVERSE PROBLEMS* YANG BERKAITAN DENGAN HUKUM TORRICELLI

Suciati[1], Kuntjoro Adji Sidarto[2]

1. *Guru SMAN I Talegong Kab, Garut Jawa Barat*
2. *Prodi Matematika FMIPA, Institut Teknologi Bandung*

Abstrak

Makalah ini membahas tentang *inverse problems* yang berkaitan dengan hukum Torricelli. Jika suatu tangki berisi air yang pada bagian dasarnya terdapat sebuah lubang kecil, maka kecepatan air keluar dari lubang berubah sesuai dengan perubahan ketinggian air dalam tangki. Diberikan dua contoh *inverse problems* yang melibatkan hukum Torricelli. Berbeda dengan *direct problems* yang selalu menghasilkan solusi yang tunggal dan stabil, suatu *inverse problems* dapat mempunyai solusi yang tidak tunggal dan tidak stabil. Makalah ini tidak hanya membahas bagaimana menyelesaikan suatu *inverse problems* tetapi juga bagaimana sifat solusinya.

Kata kunci : hukum Torricelli, *inverse problems*

PENDAHULUAN

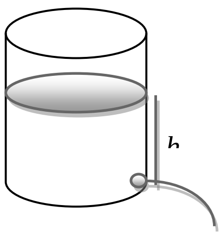
Materi perkuliahan matematika pada tingkat dasar biasanya didominasi oleh permasalahan *direct problems*. Misalkan *K* suatu operator yang memodelkan suatu proses, *u* adalah nilai suatu masukan dalam daerah definisi dari *K* dan *v* adalah hasil atau keluaran yang diperoleh. Dalam hal *K* merupakan suatu fungsi maka untuk setiap masukan *u* dalam daerah definisi dari *K* terdapat tepat satu hasil *v*. *Direct problems* merupakan permasalahan yang membahas proses untuk menghasilkan solusi yang tunggal tersebut. Untuk setiap *direct problem* terdapat dua *inverse problem* yang terkait. Pertama *causation problem* yaitu masalah menentukan nilai masukan *u* apabila diketahui hasil *v* dan model *K*. *Inverse problem* lainnya adalah model *identification problem*, yaitu menentukan operator *K*, apabila diketahui pasangan nilai masukan dan nilai hasil (*u*,*v*) .

Groetsch(1993) dalam tulisannya membahas mengenai *inverse problem* dan hukum Torricelli. Ada tiga hal yang berhubungan dengan *inverse problem*. Pertama adalah masalah eksistensi. Pada *causation problem*, diberikan model *K*, permasalahannya adalah apakah terdapat suatu masukan *u* yang menyebabkan munculnya *v*. Pada model *identification problem* permasalahannya adalah apabila diberikan pasangan nilai masukan dan nilai hasil, (*u*,*v*) adakah model yang dapat menjelasknanya. Hal yang kedua adalah masalah ketunggalan. Mungkinkah dua masukan yang berbeda menghasilkan suatu hasil yang sama. Hal yang terakhir adalah kestabilan, apakah solusi yang telah diperoleh merupakan solusi yang stabil. Makalah ini akan membahas dua contoh *inverse problems*.

PEMBAHASAN

Hukum Torricelli

Suatu tangki diisi oleh cairan yang bermassa *m*, Pada dinding dibagian dasar tangki dibuat suatu lubang yang relatif kecil, dibandingkan dengan ukuran tangki, seperti diilustrasikan oleh gambar 1 .



Gambar

Sesaat sebelum cairan keluar dari tangki pada ketinggian h ,cairan mempunyai energi potensial. Ketika air keluar dari lubang, energi potensial berubah menjadi energi kinetik. Energi potensial pada saat ketinggian air h adalah $m\,g\,h$, dengan g adalah gaya gravitasi bumi. Misalkan kecepatan cairan keluar dari lubang pada saat ketinggian cairan h adalah $v(h)$, maka energi kinetik yang dihasilkan adalah $\frac{1}{2} m\ v(h)^2$.

Menurut hukum kekekalan energi, energi potensial yang dihasilkan dalam keadaan diam dikonversi menjadi energi kinetik, sehingga diperoleh suatu kesamaan (gesekan antara air dengan tangki diabaikan)

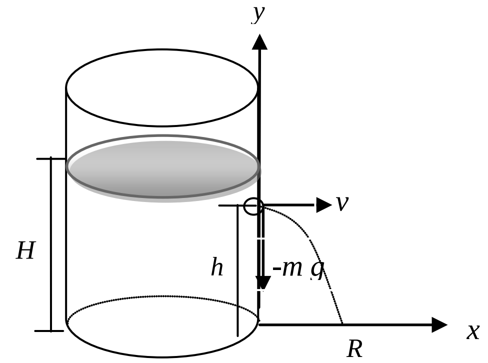
$$m\,g\,h = \frac{1}{2} m\ v(h)^2$$

Dengan menyederhanakan kesamaan tersebut diperoleh rumus untuk kecepatan,$v(h)$ yaitu

$$v(h) = \sqrt{2\,g\,h}$$

Artinya kecepatan cairan keluar dari lubang dipengaruhi oleh ketinggian cairan. Semakin lama, kecepatan cairan keluar semakin kecil sesuai dengan ketinggian cairan yang semakin menurun. Rumus ini ditemukan oleh Evangelista Torricelli (1608-1647) dan dikenal sebagai hukum Torricelli.

Misalkan lubang dibuat pada ketinggian h, seperti diilustrasikan oleh gambar 2



Gambar 2

Menurut hukum Torricelli kecepatan cairan keluar dari lubang adalah

$$v = \sqrt{2\,g\left(H - h\right)}$$

dengan arah mendatar sejajar sumbu x (perhatikan gambar).
Ketika cairan keluar dari lubang, partikel cairan juga mendapat gaya gravitasi sebesar **-** $m\,g$, dengan arah vertikal kebawah sejajar sumbu y.

Hukum Newton kedua menyatakan

$$\mathrm{F} = m\,\mathbf{a}$$

Dalam persamaan tersebut **F** menyatakan jumlah (vektor) semua gaya yang bekerja pada benda (dalam hal ini cairan), m adalah massa benda, dan **a** menyatakan (vektor) percepatannya. Dengan mensubstitusi **F** oleh gaya gravitasi maka diperoleh

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = -g$$

Setelah diselesaikan diperoleh

$$v(t) = -g\,t + c$$

Karena pada saat t = 0, v(0) = 0 maka diperoleh kecepatan vertical

$$v(t) = -g\,t$$

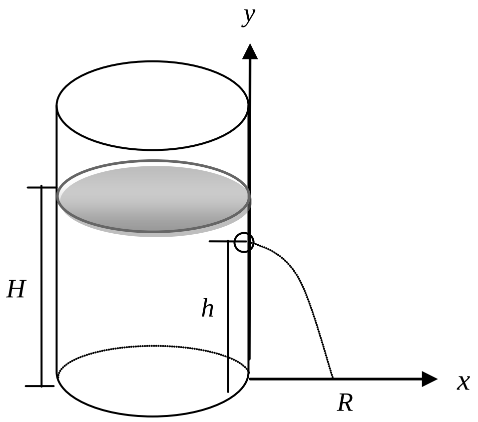
Berdasarkan hukum Torricelli dan hukum Newton, vektor kecepatan cairan pada saat *t* dinyatakan oleh

$$\mathbf{v}(t) = \sqrt{2\,g\left(H-h\right)}\;\mathbf{i} - g\,t\,\mathbf{j}$$

Menentukan Ketinggian Lubang Saluran Air

Sebuah tabung diisi air sampai ketinggian *H*. Kemudian pada ketinggian *h*, pada sisi tabung diberi lubang kecil. Sebuah *direct problem* yang umum adalah menentukan nilai *R* yang merupakan jangkauan dari awal semburan. Permasalahan ini mempunyai solusi *R* yang tunggal untuk setiap $h \in [0.H]$.

Inverse problems yang bersesuaian adalah menentukan nilai *h* apabila *R* dan *H* diketahui. Apabila jarak semburan dan ketinggian awal air diketahui, pada ketinggian berapakah lubang berada ? Untuk menganalisisnya dibuat sebuah sistem koordinat seperti dijelaskan oleh gambar 3.



Gambar 3

Kecepatan air pada saat *t* menurut hukum Torricelli dan Newton diberikan oleh

$$\mathbf{v}(t) = \sqrt{2\,g\left(H-h\right)}\;\mathbf{i} - g\,t\,\mathbf{j} \qquad (1)$$

Misalkan $\mathbf{r}(t)$ adalah vektor posisi pada setiap saat *t*, karena pada saat *t* = 0 diketahui $\mathbf{r}(0) = h$ maka dari persamaan (1) diperoleh:

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{2\,g\left(H-h\right)}\;t\,\mathbf{i} + \left(h - \frac{1}{2}g\,t^2\right)\mathbf{j} \qquad (2)$$

Waktu yang diperlukan oleh air untuk menyentuh dasar (lantai) dapat diperoleh dari hubungan $h - \frac{1}{2}g\,t^2 = 0$ yang menghasilkan $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Substitusikan hasil ini ke persamaan (2), diperoleh

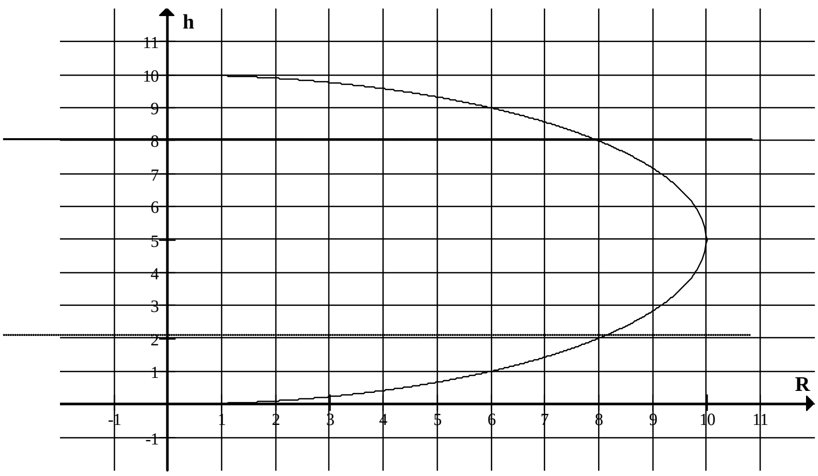
$$\mathbf{r}\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) = 2\sqrt{h\left(H-h\right)}\;\mathbf{i} = R\,\mathbf{i}$$

Sehingga diperoleh solusi untuk *h* yaitu

$$h = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - R^2}}{2}$$

Agar diperoleh solusi real, haruslah $R \in [0.H]$. Solusi akan tunggal jika dan hanya jika $R = H$, selain itu terdapat dua solusi. Nilai h yang lebih kecil menunjukan *hydraulic head* yang lebih besar yang akan menghasilkan kecepatan horizontal yang lebih besar. Sehingga walaupun ketinggiannya rendah dapat menjangkau titik R yang cukup jauh. Sebaliknya nilai h yang lebih besar akan menghasilkan kecepatan horizontal yang lebih kecil dan waktu yang dibutuhkan untuk menjangkau titik R akan lebih lama. Jadi kedua titik ini dapat menghasilkan semburan yang dapat menjangkau titik (R,0) tetapi dengan waktu tempuh yang berbeda $\left(t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)$. Sebagai contoh untuk nilai H = 10 dan R = 8 diperoleh h_1 = 2 dan h_2 = 8. Grafik hubungan antara nilai h dengan nilai R untuk nilai H = 10 diperlihatkan oleh gambar 4.

Grafik Hubungan *h* dengan *R*

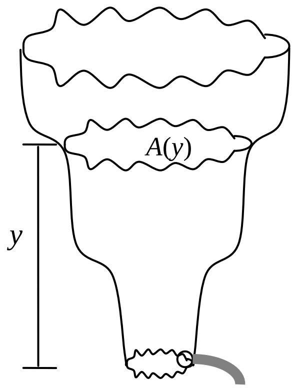


Gambar 4

Menentukan Luas Daerah Penampang Melintang Suatu Bejana tidak Beraturan

Misalkan terdapat suatu bejana yang bentuk penampang melintangnya tidak beraturan. Didasar bejana terdapat lubang sehingga air keluar melalui lubang tersebut. Permasalahannya adalah bagaimana menentukan luas daerah penampang melintang dari bejana yang tidak beraturan dengan cara mengamati laju aliran air yang keluar. Bagaimana bentuk sebuah bejana dapat mempengaruhi laju alirannya.

Bejana air tak beraturan dapat diilustrasikan oleh gambar 5 berikut



Gambar 5

Misalkan luas daerah penampang melintang bejana pada ketinggian y adalah $A(y)$ (asumsikan $A(y)$ kontinu). Air didalam bejana mengalir keluar melalui keran didasar bejana yang luas penampangnya a. Misalkan dalam selang waktu Δt ketinggian air turun sebesar Δy. Penurunan volume air selama selang waktu Δt sama dengan volume air yang keluar melalui keran selama selang waktu yang sama.
Berdasarkan hukum Torricelli

$$-A(y)\,\Delta y = a\sqrt{2\,g\,y}\;\Delta t$$

Apabila selang waktu mendekati nol diperoleh persamaan diferensial

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2\,g\,y} \qquad (3)$$

Sebuah *direct problem* yang biasa adalah menentukan ketinggian air $y(t)$, jika diketahui luas penampang melintangnya, $A(y)$. Model *identification problem* yang bersesuaian adalah *inverse problem* dari menentukan $A(y)$ apabila diketahui y, yang tidak lain adalah mengidentifikasi bentuk koefisien pada persamaan diferensial. Karena nilai $\frac{dy}{dt}$ tidak akan sama dengan nol, maka persamaan diferensial diatas akan selalu mempunyai solusi yang tunggal. Bagaimana dengan kestabilannya? Apakah perubahan kecil pada y akan mengakibatkan perubahan yang kecil pula pada nilai $A(y)$.

Untuk melihat kestabilan solusi *inverse problems* yang dimaksud dapat diambil sebuah contoh sebagai berikut. Misalkan bejana berbentuk silinder dengan tinggi 1 satuan dan luas daerah penampang melintang tetap, $A(y) = C$. Persamaan (3) menjadi

$$C\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2\,g\,y}$$

Karena pada saat $t = 0$, $y = 1$, diperoleh

$$y = \left(1 - \frac{a\sqrt{2\,g}}{2C}\,t\right)^2$$

atau

$$y = (1 - bt)^2$$

dengan $b = \dfrac{a\sqrt{2\,g}}{2C}$ dan $0 \le t \le \dfrac{1}{b}$

Misalkan ε adalah suatu bilangan positif yang sangat kecil, dan untuk suatu bilangan positif yang besar M, buat suatu fungsi baru yang kontinu bagian demi bagian (*piecewise*) sebagai $\eta(t)$ yang didefinisikan sebagai

$$\eta(t)=\begin{cases} 0 & ,\ t\in\left[0,\dfrac{1}{2b}-\dfrac{\varepsilon}{2M}\right] \\ M\left(t-\left(\dfrac{1}{2b}-\dfrac{\varepsilon}{2M}\right)\right) & ,\ t\in\left(\dfrac{1}{2b}-\dfrac{\varepsilon}{2M},\dfrac{1}{2b}+\dfrac{\varepsilon}{2M}\right) \\ \varepsilon & ,\ t\in\left[\dfrac{1}{2b}+\dfrac{\varepsilon}{2M},\dfrac{1}{b}\right] \end{cases}$$

Maka η mempunyai gradien sebesar M pada $\left(\frac{1}{2b}-\frac{\varepsilon}{2M},\frac{1}{2b}+\frac{\varepsilon}{2M}\right)$ dan memenuhi $0 \le \eta(t) \le \varepsilon$. Kesalahan (galat) dalam pengamatan dapat dipertimbangkan dalam fungsi perturbasi berikut

$$y^{\varepsilon}(t)=y(t)+\eta(t)$$

Berdasarkan persamaan (3)

$$A(y^{\varepsilon})(-2b(1-bt)+\eta'(t))=-a\sqrt{2g((1-bt)^2+\eta(t))}$$

pada $\left(\frac{1}{2b}-\frac{\varepsilon}{2M},\frac{1}{2b}+\frac{\varepsilon}{2M}\right)$ dengan $\eta'(t)=M$. Karena pada saat $t=\frac{1}{2b}$, $\eta(t)=\dfrac{\varepsilon}{2}$ maka luas daerah penampang melintang untuk pengamatan y^{ε} memenuhi

$$A(y^{\varepsilon})=\frac{-a\sqrt{2g\left(\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{-b+M}$$

Dengan memilih nilai M yang cukup besar maka perbedaan fungsi $y^{\varepsilon}(t)$ dengan fungsi y (t) sangat kecil. Dengan memilih M yang cukup besar pula A (y^{ε}) menjadi sangat kecil mendekati nol padahal luas daerah penampang mendatar adalah tetap yaitu C. Dengan kalimat lain gangguan sedikit pada y menghasilkan perubahan yang besar terhadap $A(y)$. Jadi *inverse problems* pada kasus ini mempunyai solusi yang tidak stabil.

PENUTUP

Menurut hukum Torricelli kecepatan cairan keluar dari lubang berbanding lurus dengan akar ketinggian cairan. Lebih tepatnya apabila g menyatakan gaya gravitasi, maka kecepatan cairan keluar dari lubang pada saat ketinggian cairan h, $v(h)$ dinyatakan oleh $\sqrt{2gh}$

Pada bagian selanjutnya telah dibahas dua contoh *inverse problems.* Permasalahan pertama yaitu menentukan ketinggian lubang saluran air menghasilkan solusi yang tidak selalu tunggal. Sedangkan pada permasalahan kedua yaitu permasalahan menentukan luas penampang bejana tak beraturan, menghasilkan solusi yang tunggal, tetapi tidak stabil.. Pembahasan permasalahan ini memberikan justifikasi bahwa berbeda dengan *direct problems* yang selalu menghasilkan solusi yang tunggal dan stabil, *inverse problems* dapat menghasilkan solusi yang tidak tunggal dan tidak stabil.

DAFTAR PUSTAKA

Groetsch, C.W. (1993) : Inverse Problems and Torricelli's Law, *The College Mathematics Journal,* **24**, 210-217.