Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA
Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 16 Mei 2009

KAJIAN MODEL REGRESI *ASYMTOTIC*

Yuli Andriani, Dian Cahyawati, dan Novi Yantini

Jurusan Matematika FMIPA UNSRI

Abstrak
Model Regresi nonlinier memiliki sebaran data yang tidak linier, dugaan parameter yang menyimpang dari garis linier, berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan varian σ^2. Model Regresi *Asymtotic* berbeda dengan model Regresi nonlinier lainnya, dimana bentuk umumnya $y_i = \alpha - \beta\gamma^{x_i}$, mempunyai fungsi model yang terpisah antara parameter linier dan nonlinier. Karena itu, pendugaan parameternya dapat dipisah yaitu menggunakan Metode Kuadrat Terkecil (MKT) untuk parameter linier dan MKT linierisasi untuk parameter nonlinier. Disini akan dikaji cara menentukan dugaan parameter model Regresi *Asymtotic* dengan menggunakan MKT dan MKT linierisasi. Hasil kajian ini menunjukkan bahwa dugaan parameter yang mengalami bias adalah $\hat{\gamma}$. Untuk memperbaiki agar tidak bias dilakukan reparameterisasi terhadap $\hat{\gamma}$. Ukuran bias ini merupakan ukuran penyimpangan $\hat{\gamma}$ terhadap persamaan garis linier yang besarnya ditentukan oleh fungsi diferensial pertama dan kedua dan letak biasnya pada suku kedua deret Taylor.
Kata Kunci : regresi, asymtotic, nonlinier

PENDAHULUAN

Jenis hubungan antar peubah dalam model regresi terdiri atas hubungan linier dan hubungan nonlinier. Jika peubah bebas dan peubah terikat berhubungan secara linier maka dimodelkan dengan model regresi linier, sedangkan jika antar peubah menunjukkan hubungan secara nonlinier maka dimodelkan dengan regresi nonlinier. Pembentukan model regresi nonlinier digunakan saat asumsi kelinieran ditolak yang disebabkan oleh adanya data yang menyimpng dari pola garis linier.
Salah satu model regresi nonlinier adalah model regresi *asymptotic*. Model ini berbeda dengan model regresi nonlinier lain seperti model eksponen yaitu $y = ab^x$, model geometrik yaitu $y = ax^b$ dan model hyperbola yaitu $y = 1/a + bx$ (Sudjana, 1996), dimana antar parameter dalam satu model hanya memiliki satu parameter linier dan parameter nonlinier.
Bentuk model *asymptotic* adalah $y_i = \alpha - \beta\gamma^{x_i}$. *Asymptotic* adalah garis yang membentuk suatu kurva tetapi tidak memotong garis linier. Model regresi *asymptotic* memiliki parameter linier yaitu α dan β dan parameter nonlinier yaitu γ. Model regresi *asymptotic* mempunyai fungsi model yang terpisah antara satu parameter linier dan gabungan antara parameter linier dan parameter nonlinier sehingga penduga parameter dapat dipisahkan (Smith, 2002).
Model regresi *asymptotic* digunakan dalam pertanian, biologi dan dalam bidang sains lainnya. Model regresi *asymptotic* cocok digunakan untuk data pertumbuhan yang jumlah datanya sedikit (Ratkowsy, 1983).
Bentuk fungsi parameter model regresi *asymptotic* dapat dipisah, sehingga dalam pendugaan parameternya menggunakan Metode Kuadrat Terkecil (MKT) untuk parameter linier dan MKT melalui linierisasi untuk parameret nonlinier. Adapun kelebihan dari MKT dengan linierisasi yaitu memudahkan dalam pendugaan parameter karena fungsinya menjadi lebih sederhana.
Penggunaan MKT ini menyebabkan adanya bias, oleh karena itu model regresi nonlinier perlu diuji kelinierannya untuk menentukan terjadinya bias. Hal ini dikarenakan penggunaan MKT untuk penduga parameter model regresi linier tidak mengalami bias sedangkan untuk parameter model regresi nonlinier akan mengalami bias (Ratkowsy, 1983).

Pengujian kelinieran dugaan parameter dilakukan dengan uji t. Apabila pengujian kelinieran ditolak berarti dugaan parameter mengalami bias. Hal ini mengakibatkan ukuran bias dugaan dugaan parameter perlu dicari dan selanjutnya dicoba mencari dugaan parameter baru yaitu membentuk dugaan reparameter agar menyerupai dan linier dengan parameter sebelumnya melalui proses reparameterisasi, yang diharapkandapat menghilangkan terjadinya bias.

Rumusan Masalah

Perumusan masalah yang akan dibahas pada skripsi ini adalah menentukan dugaan parameter pada model regresi *asymptotic,* menentukan ukuran bias dan reparameterisasinya.

Batasan Masalah

Metode pendugaan parameter pada model regresi *asymptotic* dibatasi dengan menggunakan MKT untuk dugaan parameter linier dan MKT melalui linierisasi untuk parameter nonlinier. Penentuan ukuran bias dugaan parameter ukuran bias dugaan parameter melalui metode Maximum Likelihood. Pengujian kelinieran dugaan parameter menggunakan uji t. Penentukan letak bias dari dugaan parameter menggunakan deret Taylor.

Tujuan

Tujuan yang akan dicapai dalam skripsi ini adalah :

1. Menentukan dugaan parameter-parameter model regresi *asymptotic*.
2. Menguji kelinieran dari parameter-parameter model regresi *asymptotic* menggunakan uji t.
3. Menentukan ukuran bias dari dugaan parameter.
4. Menentukan reparameterisasi model.

Manfaat

Manfaat yang diperoleh dari penulisan skripsi ini diharapkan dapat :

1. Memberikan bahan rujukan untuk menambah wawasan dan pengetahuan tentang regresi nonlinier, khususnya model regresi *asymptotic*.
2. Memberikan tambahan ilmu yang dapat digunakan oleh mahasiswa atau praktisi dalam bidang sains lain selain Matematika, misalnya bidang pertanian, biologi atau bidang lain yang sering mempergunakan model-model pertumbuhan.

Metodologi

Metode yang digunakan dalam Studi Literatur ini, yaitu :

1. Melakukan pendugaan parameter model menggunakan MKT dan MKT melalui linierisasi.
2. Menguji kelinieran dugaan parameter menggunakan uji *t*.
3. Menentukan ukuran bias dari dugaan parameter melalui metode Maximum Likelihood.
4. Mencari bentuk reparameterisasi model.
5. Menguji kelinieran dugaan reparameter hasil reparameterisasi.

PEMBAHASAN

Dalam Hasil dan Pembahasan akan dibahas tentang model regresi *asymtotic* yang dimulai dari pendugaan parameter, bias (penyimpangan) dugaan parameter, uji hipotesis kelinearan dugaaan parameter, dugaan reparameterisasi, dan bias dugaan reparameterisasi. Selanjutnya akan diaplikasikan terhadap contoh data yang sesuai.

1. Bentuk Umum Model Regresi *Asymtotic*

Model regresi *asymtotic* diasumsikan berbentuk (Draper&Smith, 1992);

$$y_i = f(x_i;\alpha,\beta,\gamma) + \varepsilon_i$$

$$y = \alpha - \beta\gamma^X + \varepsilon \tag{4.1}$$

dimana : $f(x_i;\alpha,\beta,\gamma) = \alpha - \beta\gamma^X$ dengan y adalah peubah terikat, $f(x_i;\alpha,\beta,\gamma)$ adalah fungsi nonlinier model Regresi *Asymtotic* sedangkan α,β dan γ adalah parameter-parameter yang ada pada model Regresi *Asymtotic*. Model (4.1) diatas menunjukkan bahwa pada model Regresi *Asymtotic* terdapat parameter linier dan parameter nonlinier. Parameter linier adalah α dan β sedangkan parameter nonlinier adalah γ (Draper&Smith, 1992).

2. Pendugaan Parameter

Pendugaan parameter dalam regresi *asymtotic* dilakukan melalui proses pemisahan antara parameter linier dan parameter nonliner. MKT merupakan salah satu metode pendugaan parameter yang meminimumkan Jumlah Kuadrat Galat (JKG). Galat merupakan selisih antara harga y_i dan harga dugaannya $\hat{y}_i$, dinyatakan dengan rumus :

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i \tag{4.2}$$

JKG dinyatakan dengan rumus :

$$JKG = \sum (\varepsilon_i)^2 \tag{4.3}$$

MKT digunakan untuk menduga nilai-nilai parameter pada model (4.1) sehingga akan diperoleh nilai dugaan α, β dan γ. Persamaan (4.1) apabila ditulis dalam bentuk lain menjadi :

$$\varepsilon_i = y - \alpha + \beta\gamma^X \tag{4.4}$$

Apabila Persamaan (4.4) masing-masing ruas dijumlahkan lalu dikuadratkan akan menghasilkan

$$\sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y - \alpha + \beta\gamma^X\right)^2$$

dimana $\sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i)^2 = JKG$. Sehingga apabila dituliskan kembali menjadi

$$JKG = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \alpha + \beta\gamma^{X_i}\right)^2 \tag{4.5}$$

Untuk mendapatkan nilai dugaan parameter α, β , maka Persamaan (4.5) dideferensialkan terhadap parameter α, β . Selanjutnya untuk mendapatkan nilai yang minimum, hasil pendiferensialan harus sama dengan nol, yaitu

$$\frac{\partial JKG}{\partial \alpha} = 0 \ ; \ \frac{\partial JKG}{\partial \beta} = 0$$

a. Pendugaan parameter α

Nilai penduga α akan diperoleh dari Persamaan (4.5) dengan mendiferensialkannya terhadap α yaitu :

$$\frac{\partial JKG}{\partial \alpha} = -2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \alpha + \beta\gamma^{X_i}\right) = 0 \tag{4.6}$$

Persamaan (4.6) diselesaikan, akan diperoleh persamaan berikut :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - n\alpha + \beta\sum_{i=1}^{n} \gamma^{X_i} = 0 \tag{4.6.a}$$

Apabila Persamaan (4.6.a) diselesaikan akan diperoleh persamaan berikut yaitu ,

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i + \beta\sum_{i=1}^{n} \gamma^{X_i}\right) \tag{4.7}$$

b. Pendugaan parameter β

Nilai penduga parameter β akan diperoleh dari Persamaan (4.5) dengan mendiferensialkan terhadap β yaitu sebagai berikut :

$$\frac{\partial JKG}{\partial \beta} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \alpha + \beta\gamma^{X_i}\right)\gamma^{X_i} = 0 \tag{4.8}$$

Persamaan (4.8) diselesaikan, akan diperoleh persamaan berikut :

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma^{X_i}y_i = \alpha\sum_{i=1}^{n}\gamma^{X_i} - \beta\sum_{i=1}^{n}\gamma^{2X_i} \qquad (4.8.a)$$

Persamaan (4.6.a) juga digunakan untuk menduga parameter β. Persamaan normal (4.6.a) adalah sebagai berikut :

$$n\alpha - \beta\sum_{i=1}^{n}\gamma^{X_i} = \sum_{i=1}^{n}y_i \qquad (4.9)$$

Persamaan (4.9) dan Persamaan (4.8.a) merupakan persamaan normal yang digunakaan untuk mendapatkan nilai dugaan parameter β. Pendugaan parameter β dilakukan melalui proses eliminasi pada Persamaan (4.8.a) dan Persamaan (4.9). Pertama-tama, Persamaan (4.8.a) dikalikan degan n dan Persamaan (4.9) dikalikan dengan $\sum_{i=1}^{n}\gamma^{X_i}$, sehingga diperoleh persamaan berikut :

$$n\alpha\sum_{i=1}^{n}\gamma^{X_i} - n\beta\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma^{2X_i}\right) = n\sum_{i=1}^{n}\gamma^{X_i}y_i \qquad (4.10.a)$$

$$n\alpha\sum_{i=1}^{n}\gamma^{X_i} - \beta\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma^{X_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}\gamma^{X_i} \qquad (4.10.b)$$

Lalu memalui proses eliminasi diperoleh persamaan,

$$\beta = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\gamma^{X_i}y_i - \sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}\gamma^{X_i}}{\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma^{X_i}\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n}\gamma^{2X_i}},$$

Apabila $\hat{\beta}$ merupakan penduga dari β, maka nilai $\hat{\beta}$ adalah sebagai berikut :

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\gamma^{X_i}y_i - \sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}\gamma^{X_i}}{\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma^{X_i}\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n}\gamma^{2X_i}} \qquad (4.11)$$

c. Pendugaan parameter γ

Nilai penduga parameter γ diperoleh dengan melakukan proses pemisahan Persamaan (4.1), karena parameter γ adalah parameter nonlinier. Bentuk pemisahan model Regresi *Asymtotic* dengan dugaan parameter γ adalah

$$y = -\gamma^{X} + \varepsilon \qquad (4.12)$$

MKT digunakan untuk menduga harga parameter garis regresi $y = -\gamma^{X} + \varepsilon$ dengan meminimumkan JKG sehingga akan diperoleh harga dugaannya yaitu $y = -\gamma^{X} + \varepsilon$.

Persamaan (4.12) diubah kedalam bentuk linier yaitu menglogaritmakannya dengan logaritma natural (ln). Sehingga bentuk linier (4.9) adalah sebagai berikut :

ln y = -ln (γ^{X}) + ln ε

$$\ln y = - \ln (\gamma)^X + \ln \varepsilon$$

$$\ln \varepsilon = \ln y + x \ln(\gamma)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} (\ln y + \ln(\gamma) x)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\ln \varepsilon)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\ln y + \ln(\gamma) x)^2 \qquad (4.13)$$

Dari persamaan (4.3) maka Persamaan (4.13) menjadi sebagai berikut :

$$JKG = \sum_{i=1}^{n} (\ln y + \ln(\gamma) x)^2$$

$$\frac{\partial JKG}{\partial \gamma} = 2\left(\frac{1}{y}\ln\gamma\right) \sum_{i=1}^{n} x \left(\ln y + \ln(\gamma)\sum_{i=1}^{n} x\right) = 0$$

$$2\frac{1}{\gamma}\ln\gamma \left[\sum_{i=1}^{n} x \left(\ln y + \ln(\gamma)\sum_{i=1}^{n} x\right)\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x \ln y + \ln(\gamma)\left(\sum_{i=1}^{n} x\right)^2 = 0$$

$$\ln(\gamma)\left(\sum_{i=1}^{n} x\right)^2 = - \sum_{i=1}^{n} x \ln y$$

$$\ln(\gamma) = - \frac{\sum_{i=1}^{n} x \ln y}{\left(\sum_{i=1}^{n} x\right)^2} \qquad (4.14)$$

Selanjutnya akan diperoleh harga dugaannya dengan mengeksponenkan Persamaan (4.14) terhadap $\ln(\gamma)$, diperoleh sebagai berikut :

$$\exp \ln(\gamma) = \exp - \frac{\sum_{i=1}^{n} x \ln y}{\left(\sum_{i=1}^{n} x\right)^2}$$

$$\gamma = \text{ex} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x \ln y}{\left(\sum_{i=1}^{n} x\right)^2} \text{p}$$

Apabila $\hat{\gamma}$ merupakan parameter dugaan dari γ, sehingga nilai $\hat{\gamma}$ adalah sebagai berikut :

$$\hat{\gamma} = \exp - \frac{\sum_{i=1}^{n} x \ln y}{\left(\sum_{i=1}^{n} x\right)^2} \qquad (4.15)$$

4.3 Ukuran bias Dugaan Parameter

Dugaan parameter pada model regresi nonlinier yang memiliki diferensial akan mengalami bias dari garis kelinieran. Bias dari dugaan parameter disebabkan oleh daerah pendugaan dari suatu model regresi nonlinier membentuk suatu kurva, sehingga ukuran suatu kurva akan memberikan efek kenonlinieran (Ratkowsy,1983). Ukuran bias yang akan dicari adalah ukuran bias yang sudah di uji bahwa hipotesis kelinieran dugaan parameter ditolak yang berarti ada kaitannya dengan dugaan parameter tersebut nonlinier (Karolczak, 1995). Berdasarkan teori *asymtot* yang menyatakan bahwa dugaan varian baik sebagai Metode Kuadrat Terkecil maupun Maximum Likelihood adalah normal *asymtot* (Seber, 2003).

Untuk menganalisis adanya bias dugaan parameter melalui ekspansi Deret Taylor. Berdasarkan persamaan (2.14), apabila diasumsikan bahwa bias dugaan parameter adalah kontinu pada diferensial pertama dan kedua maka ekspansi Deret Taylornya adalah sebagai berikut :

$$b\left(\hat{\theta}\right) \approx f(\theta) + \left[\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}\right]\left(\hat{\theta}-\theta\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta^2}\right]\left(\hat{\theta}-\theta\right)\left(\hat{\theta}-\theta\right) \qquad (4.16) \text{ (Seber, 2003)}$$

Untuk menentukan bahwa dugaan parameter adalah bias maka akan dibuktikan bahwa bias dugaan parameter memiliki sebaran normal dan saling bebas dengan rataan nol dan varian σ^2, memiliki diferensial pertama, dan kedua, dan memiliki varian covarian *asymtot*, yang akan diduga melalui dugaan Maximum Likelihood.

Bentuk umum model regresi nonlinier adalah y = $f(x;\theta) + \varepsilon$. Jika y = $y_1, y_2, ..., y_n$ merupakan peubah saling bebas yang masing-masing berdistribusi normal yaitu Y ~ $N\ (0, \sigma^2)$ maka $y_1, y_2, ..., y_n$ adalah sebagai berikut :

$y_1 \sim N\ (0, \sigma^2)$
$y_2 \sim N\ (0, \sigma^2)$
.
.
.
$y_n \sim N\ (0, \sigma^2)$

Sehingga jumlah dari y_i adalah sebagai berikut :

$$\sum Y = \text{var}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

$$\sum Y = \sum_{i=1}^{n} \text{var}(y_i)$$

$$\sum Y = \sigma^2 + \sigma^2 + ...$$

$$\sum Y = n\sigma^2 \qquad (4.17)$$

$f(x;\theta)$ adalah fungsi nonlinier dan θ adalah parameter yang tidak diketahui. Jika $x_1, x_2, ..., x_k$ adalah sampel acak dari sebaran $f(x;\theta)$ dan r = 1,2,...,p maka fungsi Likelihoodnya adalah :

$$L(\theta_1) = f(x_1;\theta_r) + f(x_2;\theta_r) + ... + f(x_k;\theta_r)$$
$$L(\theta_{21}) = f(x_1;\theta_r) + f(x_2;\theta_r) + ... + f(x_k;\theta_r)$$
$$\vdots$$
$$L(\theta_p) = f(x_1;\theta_r) + f(x_2;\theta_r) + ... + f(x_k;\theta_r)$$

Bentuk diferensial fungsi Maximum Likelihood adalah :

$$\frac{\partial \ln L(\theta_1)}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \ln Lf(x_2;\theta)}{\partial \theta_1} + ... + \frac{\partial \ln Lf(x_n;\theta)}{\partial \theta_1}$$
$$\frac{\partial \ln L(\theta_2)}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \ln Lf(x_2;\theta)}{\partial \theta_2} + ... + \frac{\partial \ln Lf(x_n;\theta)}{\partial \theta_2}$$
$$\vdots$$

Persamaan di atas adalah persamaan normal dari fungsi nonlinier pada diferensial pertama. Persamaan normal tersebut dinyatakan dalam bentuk matriks berukuran *p x p*, dimana *p* adalah banyaknya parameter. Apabila dimisalkan θ_r adalah $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_p$, Y adalah diferensial pertama daari $\ln L(\theta)$ terhadap θ, $F_i(\theta)$ adalah diferensial pertama dari ln $f(x_i;\theta)$ terhadap θ dan $F_i(\theta)^T$ adalah transpose diferensial pertama dari ln $f(x_i;\theta)$ terhadap θ maka bentuk matriks Persamaan (4.18) adalah :

$$\theta_r = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p) \tag{4.19}$$

$$Y = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \ln L(\theta_1)}{\partial \theta_1} \\ \dfrac{\partial \ln L(\theta_2)}{\partial \theta_2} \\ . \\ . \\ . \\ \dfrac{\partial \ln L(\theta_p)}{\partial \theta_p} \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

$$F_i(\theta) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial_2} & \cdots & \dfrac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial \theta_p} \\ \dfrac{\partial \ln f(x_2;\theta)}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial \ln f(x_2;\theta)}{\partial \theta_2} & \cdots & \dfrac{\partial \ln f(x_2;\theta)}{\partial \theta_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \ln f(x_k;\theta)}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial \ln f(x_k;\theta)}{\partial \theta_2} & \cdots & \dfrac{\partial \ln f(x_k;\theta)}{\partial \theta_p} \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

$$F_i(\theta)^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial \ln f(x_2;\theta)}{\partial_1} & \cdots & \dfrac{\partial \ln f(x_k;\theta)}{\partial \theta_1} \\ \dfrac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial \theta_2} & \dfrac{\partial \ln f(x_2;\theta)}{\partial \theta_2} & \cdots & \dfrac{\partial \ln f(x_k;\theta)}{\partial \theta_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial \theta_p} & \dfrac{\partial \ln f(x_2;\theta)}{\partial \theta_p} & \cdots & \dfrac{\partial \ln f(x_k;\theta)}{\partial \theta_p} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Adapun diferensial kedua dugaan fungsi Maximum Likelihood adalah :

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 \ln f(x_1;\theta)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \ln f(x_2;\theta)}{\partial \theta^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \ln f(x_n;\theta)}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \ln f(x_k;\theta)}{\partial \theta^2} \tag{4.23}$$

Apabila menggunakan notasi-notasi matrik pada Persamaan (4.19),(4.20),(4.21),(4.22) dapat dituliskan menjadi :

$$\left(F_i(\theta)^T F_i(\theta)\right)\hat{\theta} = Y \tag{4.n24}$$

Persamaann (4.24) digunakan untuk menentukan adanya matrik varian covarian dari dugaan parameter model regresi *asymototic*. Proses untuk menentukan matrik varian covarian dari $\hat{\theta}$ adalah sebagai berikut :

$$\hat{\theta} = \left(F_i(\theta)^T F_i(\theta)\right)^{-1} Y$$

$$\sum \hat{\theta} = \sum \left(F_i(\theta)^T F_i(\theta)\right)^{-1} Y$$

$$\sum \hat{\theta} = \sum \left(F_i(\theta)^T F_i(\theta)\right)^{-1} \sum Y \tag{4.25}$$

Berdasarkan Persamaan (4.17) yaitu $\sum Y = n\sigma^2$, maka Persamaan (4.25) menjadi :

$$\sum \hat{\theta} = \sum \left(F_i(\theta)^T F_i(\theta)\right)^{-1} n\sigma^2$$

$$\sum \hat{\theta} = n\sigma^2 \sum \left(F_i(\theta)^T F_i(\theta)\right)^{-1} \tag{4.26}$$

Jika diambil dua parameter θ_1, θ_2 , maka bentuk matriknya adalah

$$\sum_{r=1}^{2} \hat{\theta} = \sigma^2 \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \ln f(x_2;\theta)}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial \ln f(x_p;\theta)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial_2} & \frac{\partial \ln f(x_2;\theta)}{\partial_2} & \cdots & \frac{\partial \ln f(x_p;\theta)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial_2} \\ \frac{\partial \ln f(x_2;\theta)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \ln f(x_2;\theta)}{\partial_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \ln f(x_p;\theta)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \ln f(x_p;\theta)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\sum_{r=1,s=1}^{2} \hat{\theta} = \sigma^2 \left(\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta_r} \right)^2 & \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta_r} \right)^T \left(\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta_s} \right) \\ \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta_r} \right)^T \left(\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta_s} \right)^T & \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta_s} \right)^2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \tag{4.27}$$

Jika unsur pada diagonal kiri adalah var (θ) dan diagonal kanan adalah cov (θ), sehingga :

$$Var\left(\hat{\theta}_r \hat{\theta}_s\right) = \sigma^2 \left(\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \ln f(x_i,\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1}$$

$$Cov\left(\hat{\theta}_r \hat{\theta}_s\right) = \sigma^2 \left(\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \ln f(x_i,\theta)}{\partial \theta} \right)^T \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \ln f(x_i,\theta)}{\partial \theta} \right) \right)^{-1}$$

Atau $$Var(\theta) = \sigma^2 \left(\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \ln f(x_i,\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1} \tag{4.28}$$

$$Cov(\theta) = \sigma^2 \left(\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \ln f(x_i,\theta)}{\partial \theta} \right)^T \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \ln f(x_i,\theta)}{\partial \theta} \right) \right)^{-1} \tag{4.29}$$

Asumsi 1,2,3,4 sebagai syarat adanya bias dugaan parameter terpenuhi.

Jika y_1, y_2, ..., y_n adalah peubah acak yang saling bebas dan masing-masing mempunyai rataan θ, dan simpangan baku σ, sehingga berdasarkan teorema Limit Pusat pada Persamaan (2.14), maka :

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - n\theta}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{Y} - \theta\right)}{\sigma}$$

mempunyai sebaran normal baku N (0,1) bila $n \to \infty$. Jika y_1, y_2, ..., y_n masing-masing adalah normal maka $\bar{Y}$ adalah sebagai berikut :

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

$$\bar{Y} = \text{var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \text{var }(y_i)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\left(n\sigma^2\right) = \sigma^2 \qquad (4.30)$$

Maka $\bar{Y} \sim N\,(0,\sigma^2)$ dan juga $Z \sim N\,(0,\ \sigma^2)$

sedangkan bila $y_1, y_2, ..., y_n$ normal $N\,(0,\ \sigma^2)$ maka,

$$\sqrt{n}\left(\bar{Y} - \theta\right) \rightarrow N\left(0,\sigma^2\right)$$

Untuk mencari penduga dari σ^2 menggunakan (4.30) adalah sebagai berikut :

$$S^2 = \left(\sqrt{n}\right)^2\left(\bar{Y} - \theta\right)^2 \qquad S^2 = n(\bar{Y}^2 - 2\theta\bar{Y} + \theta^2)$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n} - 2\theta\sum_{i=1}^{n} y_i + n\theta^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \theta\right)^2$$

dimana S^2 penduga dari varian σ^2 dengan derajat bebas n-1.

Jika θ adalah parameter dari fungsi nonlinier dan p adalah banyaknya parameter, maka :

atau $$\sigma^2 = \frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f\,(x_i;\theta)\right)^2 \qquad (4.31)$$

Jika σ^2 meruapakan varian dari dugaan parameter θ yang mengalami bias, dengan demikian (4.27) menjadi sebagai berikut :

$$Var(\theta) = \frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f\,(x_i;\theta)\right)^2\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f\,(x_i;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right)^{-1}$$

$$Cov(\theta) = \frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f\,(x_i;\theta)\right)^2\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f\,(x_i;\theta)}{\partial\theta}\right)^T\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f\,(x_i;\theta)}{\partial\theta}\right)\right)^{-1} \qquad (4.32)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f\,(x_i;\theta)\right)^2$$

Berdasarkan ekspansi deret Taylor pada Persamaan (4.16) untuk dua parameter, maka bias dugaan parameternya adalah sebagai berikut :

$$b\left(\hat{\theta}\right) \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f_i(\theta)}{\partial\theta_r\partial\theta_s}\right]\left(\hat{\theta}_r - \theta_r\right)\left(\hat{\theta}_s - \theta_s\right) \qquad (4.33)$$

dengan $b\left(\hat{\theta}\right)$ adalah bias dugaan parameter memalui dugaan Maximum Likelihood,

$$\left(\hat{\theta}_r - \theta_r\right) = \sigma^2\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ \ln f_i(x_i;\theta)}{\partial\theta_r}\right)^T\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ \ln f_i(x_i;\theta)}{\partial\theta_r}\right)\right)^{-1} \qquad (4.34)$$

$$\left(\hat{\theta}_s-\theta_s\right)=\sigma^2\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ \ln f_i(x_i;\theta)}{\partial\theta_s}\right)^T\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ \ln f_i(x_i;\theta)}{\partial\theta_s}\right)\right)^{-1} \quad (4.35)$$

Persamaan (4.33) dan (4.34) adalah matrik varian-covarian $\hat{\theta}$ yang mengalami bias, dan diferensial kedua fungsi likelihood adalah sebagai berikut :

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 \ln f_i(x_i;\theta)}{\partial\theta_s\partial\theta_r}\right)\left(\frac{\partial\ \ln f_i(x_i;\theta)}{\partial\theta_r}\right) \quad (4.36)$$

dimana *r,s* = 1,2,...,*p*, u adalah fungsi likelihood dari model regresi $\left(u=\ln f(x_i;\theta)\right.$. Jika $\theta=\theta_r,\theta_s$ sehingga Persamaan (4.35) menjadi sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 \ln f_i(x_i;\theta)}{\partial\theta_s\partial\theta_r}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\ \ln f_i(x_i;\theta)}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial^2 \ln f_i(x_i;\theta)}{\partial\theta^2}\right) \quad (4.37)$$

Misalkan H_i adalah diferensial kedua dari fungsi Likelihood $\left(\ln f(x_i;\theta)\right.$ terhadap θ, berdasarkan Persamaan (4.26) sehingga

$$H_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 \ln f_i(x_i;\theta)}{\partial\theta^2}\right)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.34), (4.35) dan Persamaan (4.36) ke Persamaan (4.37), diperoleh sebagai berikut :

$$Bias\left(\hat{\theta}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f_i(\theta)}{\partial\theta_r\partial\theta_s}\right]\left(\hat{\theta}_r-\theta_r\right)\left(\hat{\theta}_s-\theta_s\right)$$

$$Bias\left(\hat{\theta}\right)=-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\ f_i(\theta)}{\partial\theta}\right)^T\left(\frac{\partial\ f_i(\theta)}{\partial\theta}\right)\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial\ f_i(\theta)}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial^2 f_i(\theta)}{\partial\theta^2}\right)\right)\right]\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\ f_i(\theta)}{\partial\theta}\right)^T\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ f_i(\theta)}{\partial\theta}\right)\right)\right]^{-1}$$

(4.38)

Jika F_i adalah diferensial pertama dari fungsi Likelihood dan H_i adalah diferensial kedua dari fungsi Likelihood, sehingga Persamaan (4.37) menjadi sebagai berikut :

$$Bias\left(\hat{\theta}\right)=-\frac{\sigma^2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}F_i^T F_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}FF_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}F_i^T F_i\right)^{-1} \quad (4.39)$$

4.4 Uji Kelinieran Dugaan Parameter

Uji kelinieran dugaan parameter dilakukan untuk melihat parameter dalam suatu model Regresi merupakan parameter linier atau parameter nonlinier. Jika parameter merupakan parameter linier artinya parameter tersebut tidak bias sedangkan apabila parameter nonlinier artinya parameter tersebut bias. Pengujian kelinieran dugaan parameter diuji dengan menggunakan uji *t* yaitu dengan menguji hipotesis kelinieran terhadap dugaan parameter tersebut. Jika hipotesis kelinieran diterima artinya dugaan parameter merupakan parameter linier dan tidak bias, sedangkan jika hipotesis kelinieran ditolak artinya dugaan parameter merupakan parameter nonlinier dan bias. Apabila hipotesis kelinieran ditolak maka perlu dilakukan reparameterisasi dari model tersebut untuk memperbaiki dugaan parameter sebelumnya agar hipotesis kelinieran diterima.

Menguji kelinieran $\hat{\theta}$ dilakukan dengan uji t untuk meilhat kelinieran setiap parameter yang terdapat dalam model Regresi. Nilai t hitung adalah perbandingan antara $\hat{\theta}$ dengan simpangan baku θ. Jika $\hat{\theta}$ merupakan dugaan dari parameter θ dan $S(\hat{\theta})$ merupakan simpangan baku dari $\hat{\theta}$. Mensubstitusikan Persamaan (4.32) ke Persamaan (2.12) diperoleh nilai t untuk $\hat{\theta}$ sebagai berikut :

$$t_{hitung}=\frac{\hat{\theta}}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\theta})}}$$

$$t_{hitung} = \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{\frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{k}(y_i - f(x_i;\theta))^2\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]^{-1}}} \tag{4.39}$$

Kriteria penolakan uji t berkaitan dengan kelinieran dugaan parameter. Apabila varian ($\hat{\theta}$) dalam nilai t hitung mempunyai turunan yang tidak berupa konstanta artinya $\hat{\theta}$ merupakan parameter nonlinier dan dapat dicari bias $\hat{\theta}$ sedangkan varian ($\hat{\theta}$) dalam t hitung mempunyai turunan yang berupa konstanta artinya $\hat{\theta}$ me rupakan parametar linier dan bias nya tidak perlu dicari.

4.5 Uji Kelinieran Parameter Model Regresi *Asymtotic*

Model regresi *Asymtotic* Persamaan (4.1) yaitu

$$f(x;\alpha,\beta,\gamma) = \alpha - \beta\gamma^X$$

Jika $x_1, x_2, ..., x_k$ adalah sampel acak dari sebaran $f(x;\alpha,\beta,\gamma)$ maka fungsi Likelihoodnya adalah :

$$L(\alpha,\beta,\gamma) = f(x_1;\alpha,\beta,\gamma) f(x_2;\alpha,\beta,\gamma)\ldots f(x_n;\alpha,\beta,\gamma)$$

$$L(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha-\beta\gamma^{X_1})(\alpha-\beta\gamma^{X_2})\ldots(\alpha-\beta\gamma^{X_n})$$

$$\ln L(\alpha,\beta,\gamma) = \ln(\alpha-\beta\gamma^{X_1}) + \ln(\alpha-\beta\gamma^{X_2}) + \ldots + (\alpha-\beta\gamma^{X_n}) \tag{4.40}$$

Diferensial fungsi Likelihood terhadap α,β,γ yaitu

$$\frac{\partial \ln L(\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f(x_i;\alpha\beta,\gamma)}{\partial\alpha} = \frac{n}{\alpha} \tag{4.41}$$

$$\frac{\partial \ln L(\beta)}{\partial\beta} = -\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} - \cdots - \frac{1}{\beta} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f(x_i;\alpha\beta,\gamma)}{\partial\beta} = -\frac{n}{\beta} \tag{4.42}$$

$$\frac{\partial \ln L(\gamma)}{\partial\gamma} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f(x_i;\alpha\beta,\gamma)}{\partial\beta} = -\frac{n}{\gamma}(\ln(\gamma))\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{4.43}$$

Pengujian kelinieran $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ menggunakan (4.38). Setelah dilakukan pengujian, dapat diketahui parameter linier atau nonlinier. Kriteria penolakkan uji t berkaitan dengan kelinieran parameter α,β,γ . Uji kelinieran dugaan parameter α,β,γ model regresi *asymtotic* adalah sebagai berikut :

4.5.1 Uji Kelinieran $\hat{\alpha}$

a. H_0 : $\hat{\alpha}$ =linier vs H_1 : $\hat{\alpha}$ = nonlinier

b. Pengujian t hitung adalah

$$Var(\hat{\alpha}) = \frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i;\alpha,\beta,\gamma))^2\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f(x_i;\alpha,\beta,\gamma)}{\partial\alpha}\right)^2\right)^{-1}$$

$$Var(\hat{\alpha}) = \frac{1}{(n-p)\left(\frac{n^2}{\alpha^2}\right)}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \left(\alpha-\beta\gamma^X\right)\right)^2 = \frac{\sigma^2\alpha^2}{n^2} \tag{4.45}$$

Sehingga dengan mensubstitusikan Persamaan (4.45) ke Persamaan (4.44) diperoleh sebagai berikut :

$$t_{hitung} = \frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{\frac{\sigma^2\alpha^2}{n^2}}} = \frac{n}{\alpha} = \frac{n}{\sqrt{\frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n}\left(y-\alpha+\beta\gamma^{X_I}\right)^2}}$$

c. Kesimpulan :

Karena *t* hitung berupa kontanta dan tidak ada penambahan hasil maka H_0 diterima artinya $\hat{\alpha}$ dalam model Regresi *asymtotic* adalah linier dan tidak bias.

4.5.2 Uji Kelinieran $\hat{\beta}$

a. H_0 : $\hat{\beta}$ =linier vs H_1 : $\hat{\beta}$ = nonlinier

b. Pengujian t hitung adalah

$$Var(\hat{\beta})=\frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-f(x_i;\alpha,\beta,\gamma)\right)^2\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f(x_i;\alpha,\beta,\gamma)}{\partial\beta}\right)^2\right)^{-1}$$

$$Var(\hat{\alpha})=\frac{1}{(n-p)\left(\frac{n^2}{\alpha^2}\right)}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(\alpha-\beta\gamma^X\right)\right)^2=\frac{\sigma^2\alpha^2}{n^2} \quad (4.45)$$

Sehingga dengan mensubstitusikan Persamaan (4.45) ke Persamaan (4.44) diperoleh sebagai berikut :

$$t_{hitung}=\frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{\frac{\sigma^2\alpha^2}{n^2}}}=\frac{n}{\alpha}=\frac{n}{\sqrt{\frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n}\left(y-\alpha+\beta\gamma^{X_I}\right)^2}}$$

c. Kesimpulan :

Karena *t* hitung berupa kontanta dan tidak ada penambahan hasil maka H_0 diterima artinya $\hat{\alpha}$ dalam model Regresi *asymtotic* adalah linier dan tidak bias.

4.5.3 Uji Kelinieran $\hat{\gamma}$

a. H_0 : $\hat{\alpha}$ =linier vs H_1 : $\hat{\alpha}$ = nonlinier

b. Pengujian t hitung adalah

$$Var(\hat{\alpha})=\frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-f(x_i;\theta)\right)^2\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right)^{-1}$$

$$Var(\hat{\alpha})=\frac{1}{(n-p)\left(\frac{n^2}{\alpha^2}\right)}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(\alpha-\beta\gamma^X\right)\right)^2=\frac{\sigma^2\alpha^2}{n^2} \quad (4.45)$$

Sehingga dengan mensubstitusikan Persamaan (4.45) ke Persamaan (4.44) diperoleh sebagai berikut :

$$t_{hitung}=\frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{\frac{\sigma^2\alpha^2}{n^2}}}=\frac{n}{\alpha}=\frac{n}{\sqrt{\frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n}\left(y-\alpha+\beta\gamma^{X_I}\right)^2}}$$

c. Kesimpulan :

Karena *t* hitung berupa kontanta dan tidak ada penambahan hasil maka H_0 diterima artinya $\hat{\alpha}$ dalam model Regresi *asymtotic* adalah linier dan tidak bias.

$$Cov(\theta)=\frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-f(x_i;\theta)\right)^2\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial\theta}\right)^T\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial\theta}\right)\right)^{-1} \quad (4.32)$$

$$S^2=\frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-f(x_i;\theta)\right)^2$$

PENUTUP

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan ini sebagai berikut :

1. Parameter alpha dan betha dalam model Regresi *asymtotic* memiliki dugaan parameter linier sedangkan parameter gamma memiliki dugaan parameter nonlinier yang berbentuk eksponen.
2. Parameter-parameter dalam model Regresi *asymtotic* yang mengalami bias dan reparameterisasi hanya $\hat{\gamma}$.
3. Ukurun bias gamma topi merupakan ukuran penyimpangan estimator/ penaksir gamma terhadap persamaan garis linier. Besarnya ditentukan oleh fungsi diferensial pertama dan kedua terhadap gamma dari model Regresi *asymtotic* . Letak biasnya pada suku kedua Deret Taylor.
4. Reparameterisasi gamma topi pada model Regresi *asymtotic* memiliki dua bentuk umum yaitu dengan membentuk reparameterisasi linier dan reparameterisasi nonlinier.
5. Dengan data dosis pupuk dan hasil gandum menggunakan uji t untuk uji kelinieran $\hat{\gamma}$ = 0,658 diperoleh bahwa *t* hitung > *t* tabel sehingga hipotesis kelinieran $\hat{\gamma}$ = 0,658 ditolak. hal ini berarti tidak adanya hubungan linier antara dosis pupuk dan hasil produksi gandum dengan $\hat{\gamma}$ = 0,658 yang berarti juga dosis pupuk dan hasil produksi gandum berhubungan secara nonlinier. Ukuran bias ($\hat{\gamma}$) adalah 0,025 yang berarti bahwa $\hat{\gamma}$ mengalami penyimpangan terhadap garis linier sejauh 0,025. Dosis pupuk dan hasil produksi gandum berhubungan secara linier setelah dilakukan reparameterisasi dengan $\hat{\phi}$ =-0 ,419.

Saran

Model Regresi *Asymtotic* hanya memiliki satu parameter nonlinier sehingga pendugaan parameternya cukup sederhana yaitu menggunakan MKT dengan linierisasi. Bagi yang tertarik untuk melakukan kajian model regresi nonliner berikutnya disarankan untuk mengkaji model regresi nonlinier yang memiliki parameter nonlinier lebih dari satu dan pendugaan parameternya menggunakan metode iteratif dengan metode Newton Raphson.