PEMODELAN RESPON MULTINOMIAL MENGGUNAKAN MODEL MIXED LOGIT

Jaka Nugraha

Jurusan Statistika FMIPA-UII
email : jnugraha@fmipa.uii.ac.id

Abstrak

Model multinomial logit (MNL) disusun berdasarkan asumsi bahwa komponen errornya berdistribusi nilai ektreme tipe I (Gumbel) dan saling independen. Jika asumsi independen tidak terpenuhi akan mengakibatkan estimatornya menjadi bias. Model probit dapat digunakan untuk mengatasi adanya korelasi antar komponen errornya. Akan tetapi dalam implementasinya sangat jarang diaplikasikan karena keterbatasan komputasi. Dalam penelitian dibahas model Mixed logit sebagai alternatif model probit dalam mengatasi masalah korelasi. Estimasi dilakukan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimator* (MLE). Berdasarkan analisis pada data simulasi dapat disimpulakan bahwa model Mixed Logit dapat mengestimasi korelasi antar pilihan. Estimator yang dihasilkan dari model Mixed logit lebih baik (bias lebih kecil) dibanding model MNL.

Keywords : *Discrete Choice Model, Random Utility, Maximum Likelihood, Bias.*

PENDAHULUAN

Model pemilihan diskrit menggambarkan pembuat keputusan (responden) dalam menentukan sebuah pilihan diantara pilihan yang tersedia. Responden dapat berupa orang, rumah tangga, perusahaan atau unit pembuat keputusan yang lain. Tujuan dari analisis DCM adalah menghitung probabilitas responden dalam memilih sebuah pilihan. Persamaan probabilitas pada model logit berupa persamaan tertutup yang perhitungannya relatif sederhana dibandingkan persamaan probabilitas dalam model probit dan model Mixed logit yang berbentuk persamaan terbuka dengan melibatkan integral rangkap. Dalam menghitung proporsi masing-masing pilihan, khususnya pada model probit dan model Mixed logit, simulasi memainkan peranan penting.

Model probit maupun logit untuk respon multinomial telah menjadi perhatian dan banyak digunakan dalam berbagai bidang seperti dalam bidang transportasi, marketing, psikologi, dan survei (Rodriguez (2001), Agresti (1990), Ruud (1996). Model multinomial logit lebih disenangi karena menghasilkan persamaan probabilitas dalam bentuk persamaan tertutup, sedangkan model multinomial probit (MNP) menghasilkan persamaan probabilitas dalam bentuk persamaan terbuka dengan melibatkan integral rangkap.

McFadden dan Train (2000) telah menyampaikan model *Mixed Multinomial Logit* yang disingkat dengan *Mixed Logit*. Model dapat diturunkan menjadi model logit maupun model probit. Beberapa peneliti memberi nama *Error Component model* atau *logit kernel probit model*, ada juga yang menyebut dengan Logit Kernel. Mixed Logit telah sangat populer dalam beberapa literatur dan diaplikasikan dalam berbagai bidang, seperti bidang transportasi, marketing, energi, perumahan dan lain-lain (Walker dkk ,2004). Walker dkk (2004) menyebutkan bahwa model Mixed Logit merupakan "*model of the future*".

Bhat (2001) memberikan hasil dari penelitiannya mengenai simulasi Monte Carlo untuk estimasi pada Mixed Logit yang menggunakan barisan psedo-random standard dibandingkan dengan barisan Halton. Barisan Halton lebih efisien dibanding barisan psedo-random standard. Demikian juga Train (2000), Revelt dan Train (1998) memberikan hasil yang sama.

MNL memerlukan asumsi *independence from irrelevant alternatives* (IIA). Pelanggaran asumsi ini mengakibat estimator yang diperoleh menjadi bias. Semakin besar dependensi antar alternatif mengakibatkan bias estimatornya semakin besar (Nugraha dkk, 2007). Sementara itu, MNP secara teori dapat mengakomodasi adanya korelasi antar pilihan tetapi dalam implementasinya masih menyisakan masalah dalam proses komputasinya. Dalam makalah ini dibahas model Mixed Logit dalam menangani masalah dependensi antar alternatif. Model diaplikasikan pada data simulasi pada beberapa tingkat dependensi (korelasi) antar alternatif. Proses komputasi menggunakan program R.2.8.1.

LANDASAN TEORI

Model Utilitas

Seorang responden dinotasikan dengan i, yang berhadapan dengan pilihan sebanyak J pilihan. Responden mempunyai tingkat utilitas (keuntungan) untuk setiap pilihan. Misalkan U_{ij} untuk j=1,…,J adalah utilitas responden i jika memilih pilihan j. Nilai U_{ij} yang sesungguhya tidak diketahui oleh pengamat (peneliti). Peneliti tidak mengetahui nilai utilitas bagi responden pada masing-masing pilihan. Peneliti hanya mengamati atribut yang ada untuk masing-masing pilihannya yang dinotasikan dengan Z_{ij} dan atribut responden yang dinotasikan dengan X_i. Secara fungsi dapat dinotasikan sebagai

$$V_{ij} = f(Z_{ij}, X_i) = \alpha_j + \beta_j X_i + \gamma_j Z_{ij} \quad (1)$$

dengan i=1,...,n dan j=1,..,J. V_{ij} dinamakan *representative utility*. Persamaaan (1) merupakan model yang disampaikan oleh Boulduc (1999). Karena nilai utilitas U_{ij} tidak diketahui oleh peneliti maka,

$$U_{ij} = V_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_i = (\varepsilon_{i1}, \ldots, \varepsilon_{iJ})'$ adalah variabel random yang mempunyai densitas f($\boldsymbol{\varepsilon}_i$). V_{ij} merupakan faktor terobservasi dan ε_{ij} merupakan faktor tidak terobservasi dalam utilitas.

Model Multinomial Logit (MNL)

Model MNL diturunkan dengan asumsi bahwa ε_{ij} berdistribusi *extreme value* untuk semua j. Fungsi densitas extreme value tipe I (Gumbel) adalah

$$f(\varepsilon_{ij}) = \exp(-\varepsilon_{ij}).\exp(-\exp(-\varepsilon_{ij})) \quad (3)$$

Mean dan variansi dari distribusi ini masing-masing adalah 0,5772 dan $\pi^2/6$.
Distribusi kumulatif *extreme value* tipe I adalah

$$F(\varepsilon_{ij}) = \exp(-\exp(-\varepsilon_{ij})) \quad (4)$$

Fungsi densitas extreme value ini hampir simetrik dengan distribusi normal standard, hanya saja distribusi ini mempunyai ekor yang lebih tebal dibanding dengan distribusi normal.

Probabilitas pembuat keputusan i memilih alternatif k dinyatakan sebagai:

$$\pi_{ik} = \frac{\exp(V_{ik})}{\sum_{j=1}^{J} \exp(V_{ij})} \quad (5)$$

Formula ini dinamakan probabilitas logit (Train, 2003) . Parameter (α_j, β_j, γ) dapat dilakukan dengan prosedur MLE.

Model Mixed Logit

Mixed Logit adalah model yang sangat fleksibel yang dapat didekati oleh banyak model random utilitas (McFadden dan Train, 2000). Dari persamaan (2), ditambahkan variabel random δ_j mempunyai densitas f(δ_j). Model utilitasnya dapat disajikan dalam bentuk

$$U_{ij} = V_{ij} + \delta_j + \varepsilon_{ij} \quad (6)$$

Pada umumnya digunakan asumsi f(γ_j) berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi 1.

$\delta_j \sim N(0,1)$ dan $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_J) \sim N(0,\Sigma)$

Diasumsikan ε_{ij} berdistribusi extreme value dan independen terhadap δ_j.

Model Mixed Logit merupakan integral Logit standar terhadap densitas δ. Probabilitas responden i memilih alternatif k dapat dirumuskan menjadi

$$\pi_{ik} = \int g_{ik}(\delta) f(\delta) d\delta \quad (7)$$

$g_{ik}(\delta)$ adalah probabilitas logit yang dapat dituliskan sbb:

$$g_{ik}(\delta) = \frac{\exp[V_{ik} + \delta_k)]}{\sum_{j=1}^{J} \exp[V_{ij} + \delta_{ij}]} \tag{8}$$

Probabilitas dalam Mixed Logit merupakan pembobotan secara rata-rata terhadap logit dengan menggunakan pembobot fungsi densitas f(δ). Mixed Logit adalah campuran antara fungsi logit dan fungsi densitas f(δ). Nilai probabilitas pada persamaan (7) dapat didekati menggunakan simulasi . Langkah-langkah simulasinya sebagai berikut (Train, 2003) :

1. Mengambil sebuah nilai δ dari densitas f(δ) dan diberi label $\delta^{(r)}$. Pada pengambilan pertama, r=1.
2. Menghitung probabilitas logit $g_{ik}(\delta^{(r)})$ pada persamaan (7).
3. Mengulangi langkah 1 dan 2 sebanyak R dan menghitung rata-rata

$$\tilde{\pi}_{ik} = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R} g_{ik}(\delta^{(r)}) \tag{9}$$

Train (2000) dan Bhat (2001) telah melakukan pengujian mengenai metode simulasi untuk model Mixed Logit. Mereka menyatakan bahwa pengambilan sampel secara sistematis menggunakan metode Halton lebih efisien dibanding dengan pengambilan secara random. R = 100 pada metode Halton sebanding dengan R=1000 pada pengambilan secara random.

Parameter yang akan diestimasi dalam model Mixed Logit adalah mean dan variansi dalam densitas f(δ) dan parameter dalam V_{ij}.

Metode Maximum Likelihood Estimators (MLE)

Misalkan $Y_1, Y_2, ... Y_n$ adalah variabel random yang mempunyai densitas gabungan

$$f(y;\theta) = f(y_1, y_2, ..., y_n; \theta_1, ..., \theta_J) \tag{10}$$

Fungsi ini tergantung pada parameter $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, ..., \boldsymbol{\theta}_J)$. Jika $\mathbf{Y}_i$ saling independen maka

$$f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i, \theta) \tag{11}$$

Fungsi likelihood $L(\boldsymbol{\theta}; y)$, secara aljabar sama dengan $f(y;\boldsymbol{\theta})$ yang merupakan fungsi dari θ untuk suatu nilai *y* (data sampel).

$$L = L(\theta; \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}; \theta) \tag{12}$$

Misalkan Ω merupakan himpunan semua nilai yang mungkin untuk vektor parameter **θ** (Ω disebut juga ruang parameter). Greene (2005), mendifinisikan MLE untuk **θ**, yang dinotasikan dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MLE}$ adalah nilai **θ** yang memaksimumkan fungsi likelihood $L(\boldsymbol{\theta}; y)$ pada data y,

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg\max_{\theta} L(\theta; y) \tag{13}$$

Barisan Halton

Barisan Halton dibangkitkan dari sebuah bilangan yang ditentukan, biasanya bilangan prima. Secara umum barisan dari bilangan prima k dibuat secara iteratif, dengan barisan pada iterasi ke-(t+1) adalah $s_{(t+1)} = \{s_t, s_t + 1/k^t, s_t + 2/k^t, ..., s_t + (k-1)/k^t\}$. Barisan Halton didefinisikan pada unit interval [0,1].

Ketika pengambilan sampel menggunakan Barisan Halton, maka dibuat barisan berdasar bilangan prima yang dipilih. Panjang barisan disesuaikan dengan banyaknya observasi. Untuk menghilangkan korelasi antar observasi, biasanya 10 bilangan pertama dalam barisan dibuang. Nilai pada Barisan Halton merupakan densitas kumulatif dari variabel random yang ingin dibangkitkan. Sehingga variabel random yang dibangkitkan didapatkan dengan cara mencari invers fungsi densitas kumulatif yang mempunyai nilai sesuai dengan Barisan Haltonnya.

METODE PENELITIAN

Untuk mendeteksi pengaruh korelasi antar alternatif, akan dibangkitkan data multinomial untuk J=3 dan n=1000. Diasumsikan terdapat korelasi antara alternatif pertama dan alternatif kedua. Sebagai contoh permasalahan moda transportasi . Terdapat tiga alternatif yaitu kendaraan pribadi, taksi dan agkutan umum. Alternatif taksi kemungkinan besar berkorelasi dengan kendaraan pribadi. Artinya bahwa pada orang yang biasanya naik kendaraan pribadi, jika tidak ada kendaraan pribadi akan memilih naik taksi, begitu juga sebaliknya.

Selanjutnya untuk mengestimasi parameter korelasi akan digunakan dua model, yaitu model I dan Model II. Utilitas pada Model I adalah

$$\begin{aligned} U_{i1} &= V_{i1} + \delta_i + \varepsilon_{i1}, \\ U_{i2} &= V_{i2} + \delta_i + \varepsilon_{i2}, \\ U_{i3} &= V_{i3} + \varepsilon_{i3} \end{aligned} \tag{14}$$

ε_{ij} ~Extreme value tipe I, $\delta_i \sim N(0,\sigma_\delta^2)$. ε_{ij} dan δ_i saling independen untuk semua j dan i. i=1,...,1000 dan j=1,2,3.

Utilitas pada Model II adalah

$$\begin{aligned} U_{i1} &= V_{i1} + \delta_{i1} + \varepsilon_{i1}, \\ U_{i2} &= V_{i2} + \delta_{i2} + \varepsilon_{i2}, \\ U_{i3} &= V_{i3} + \varepsilon_{i3} \end{aligned} \tag{15}$$

ε_{it} ~Extreme value tipe I, $\delta_{i1} \sim N(0,1)$, $\delta_{i2} \sim N(0,1)$ $\delta = (\delta_1,\delta_2) \sim N(0,\Sigma)$.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & 1 \end{pmatrix} \text{ sehingga } -1 < \sigma_{12} < 1$$

Diasumsikan

$V_{ij} = \alpha_j + \beta_j X_i + \gamma Z_{ij}$,

X_i merupakan variabel karakteristik individu dan Z_{ij} merupakan variabel karakteristik pilihan. Karena diasumsikan alternatif 3 sebagai baseline maka $\alpha_3 = \beta_3 = 0$. Data dibangkitkan pada parameter

$$\alpha_1=-1 \quad \alpha_2 =1 \quad \beta_1=0.5 \quad \beta_2 = -0.5 \quad \gamma=1$$

dan pada berberapa nilai σ_δ^2, σ_{12}.

Berdasarkan data simulasi ini, diestimasi menggunakan model MNL dan model Mixed. Selanjutnya estimator yang diperoleh pada beberapa nilai σ_δ^2 dan σ_{12} dari model Mixed Logit dibandingkan dengan model MNL.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Menentukan KorelasiUtilitas

Kovariansi antar pilihan pada persamaan (14) adalah

$$Cov(U_i) = \begin{pmatrix} \sigma_\delta^2 + \frac{\pi^2}{6} & \sigma_\delta^2 & 0 \\ \sigma_\delta^2 & \sigma_\delta^2 + \frac{\pi^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi^2}{6} \end{pmatrix} \tag{16}$$

sehingga korelasi antara pilihan 1 dan pilihan 2 adalah

$$\rho = Cor(U_{i1},U_{i2}) = \frac{\sigma_\delta^2}{\sigma_\delta^2 + \frac{\pi^2}{6}} \geq 0 \text{ dan } \sigma_\delta^2 = \frac{Cor(U_{i1},U_{i2}).\frac{\pi^2}{6}}{1 - Cor(U_{i1},U_{i2})} \tag{17}$$

Persamaan (17) merupakan hubungan antara σ_δ^2 terhadap nilai korelasi. Data dibangkitkan pada beberapa nilai σ_δ^2 dan konversinya ke nilai korelasi yang disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1.
Konversi variansi dan korelasi

σ_δ^2	0.1	0.2	0.3	0.5	1	2	3
ρ	0.057364	0.108503	0.154379	0.233289	0.37832	0.548958	0.646097
σ_δ^2	4	5	6	7	8	9	10
ρ	0.708809	0.752642	0.785005	0.809879	0.829594	0.845605	0.858865
σ_δ^2	11	12	13	14	15		
ρ	0.870028	0.879555	0.88778	0.894954	0.901265		

Kovariansi antar pilihan pada persamaan (15) adalah

$$Cov(U_i) = \begin{pmatrix} 1+\frac{\pi^2}{6} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 1+\frac{\pi^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi^2}{6} \end{pmatrix} \tag{18}$$

sehingga korelasi antara pilihan 1 dan pilihan 2 adalah

$$\rho = Cor(U_{i1}, U_{i2}) = \frac{\sigma_{12}}{1+\frac{\pi^2}{6}} \geq 0 \text{ dan } \sigma_{12} = Cor(U_{i1}, U_{i2}).(1+\frac{\pi^2}{6})$$

Karena $-1 < \sigma_{12} < 1$ maka nilai Cor(U_{i1},U_{i2}) yang terestimasi adalah

$$-\frac{1}{1+\frac{\pi^2}{6}} < Cor(U_{i1}, U_{i2}) < \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{6}}$$

$$-0.3783 < Cor(U_{i1}, U_{i2}) < 0.37832 \tag{19}$$

Berdasarkan persamaaan (19), model II tidak dapat digunakan untuk mengestimasi korelasi diluar interval tersebut. Oleh karena itu untuk mengestimasi parameter akan digunakan model utilitas dari persamaan (14).

Program Estimasi Parameter

Paket Program R.2.8.1 digunakan untuk membangkitkan data maupun untuk mengestimasi parameter. Fungsi log-likelihood untuk model MNL maupun model Mixed Logit dalam program R adalah

```
MLE.logit<-function(a)
{
b01=a[1] ;b02=a[2];b1=a[3];b2=a[4];g=a[5]
p1=sum(Y1*(b01+X*b1+Z1*g) - Y1*log(exp(b01+X*b1+Z1*g )+exp(b02+X*b2+Z2*g )
+ exp( Z3*g )))
p2=sum(Y2*(b02+X*b2+Z2*g)- Y2*log(exp(b01+X*b1+Z1*g )+exp(b02+X*b2+Z2*g )
+ exp( Z3*g )))
p3=sum(Y3*(Z3*g) - Y3*log(exp(b01+X*b1+Z1*g )+exp(b02+X*b2+Z2*g )
+ exp(Z3*g )))
lg= p1+p2+p3
lg
}
```

```
MLE.mixed<-function (b)
{
b0=b[1:2];b1=b[3:4];c=b[5]; bs=abs(b[6]);
g01= exp(sqrt(bs)*t(e))%x%exp(b0[1]+b1[1]*X+c*Z[,1])
g02= exp(sqrt(bs)*t(e))%x%exp(b0[2]+b1[2]*X+c*Z[,2])
g03= exp(0*t(e))%x%exp(c*Z[,3])
y1=as.vector(Y1); y2=as.vector(Y2); y3=as.vector(Y3)
g1=(g01/(g01+g02+g03))%*%Is/(n.ht)
g2=(g02/(g01+g02+g03))%*%Is/(n.ht)
g3=(g03/(g01+g02+g03))%*%Is/(n.ht)
g= (g1^y1)*(g2^y2)*(g3^y3)
-sum(log(g))
}
```

Beberapa library dalam program R yang dipakai adalah

a. library(randtoolbox) : digunakan untuk membangkitkan barisan halton yang digunakan dalam menghitung integral densitas normal.
b. library(micEcon) : digunakan untuk menghitung MLE pada model MNL.
c. library(mnormt) : digunakan untuk membangkitkan data multivariat normal.
d. library(adapt) : digunakan untuk mencari titik maksimum dari fungsi log-likelihood pada model Mixed Logit.

HASIL SIMULASI

Hasil estimasi parameter regresi disajikan dalam Tabel 3 (lampiran), sedangkan estimasi parameter korelasi disajikan dalam Tabel 2.

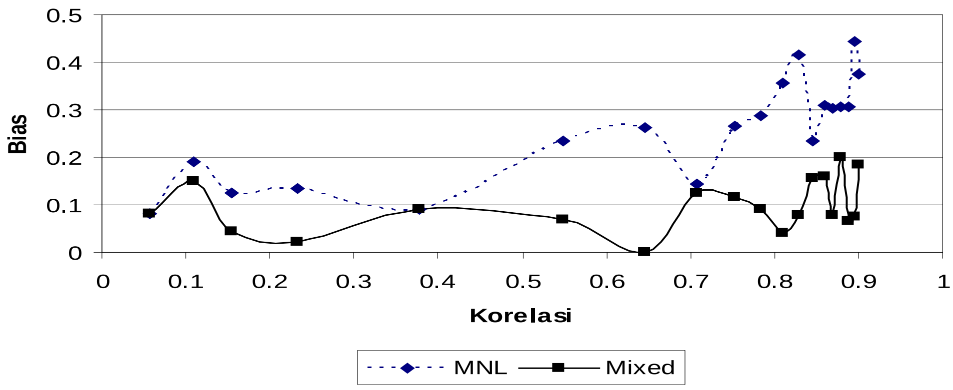
Tabel 2.
Hasil estimasi korelasi

σ_δ^2	ρ	$\hat{\sigma}_\delta^2$	$\hat{\rho}$
0.1	0.057364	1.085E-05	6.6012E-06
0.2	0.108503	0.3210743	0.16345141
0.3	0.154379	0.7283749	0.30711846
0.5	0.233289	1.0737973	0.39520501
1	0.37832	1.0956326	0.400027
2	0.548958	2.0354631	0.55330596
3	0.646097	3.3105224	0.66828086
4	0.708809	4.1270951	0.71522294
5	0.752642	5.659063	0.77496679
6	0.785005	5.9036829	0.78226081
7	0.809879	6.1002293	0.7877875
8	0.829594	7.7276937	0.82464266
9	0.845605	8.3275278	0.835192
10	0.858865	8.6954989	0.84105775
11	0.870028	9.5514109	0.85321
12	0.879555	9.8975351	0.85761243
13	0.88778	10.3296361	0.86275119
14	0.894954	13.918564	0.89440403
15	0.901265	18.2909094	0.91756536

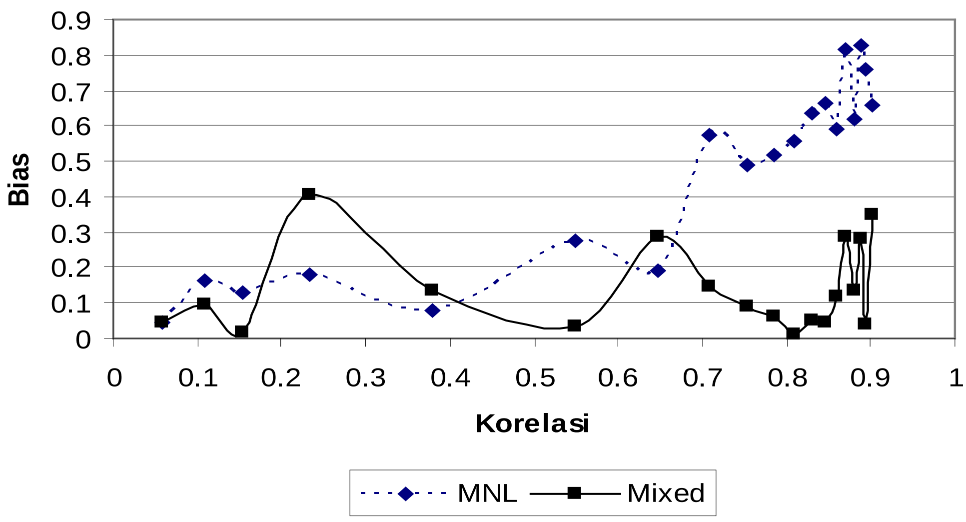
Dari Tabel 2 dapat terlihat bahwa model Mixed Logit dapat mengestimasi parameter korelasi .

Selanjutnya, bias untuk masing-masing parameter (α_1, α_2, β_1, β_2, γ) dapat dilihat pada Gambar 1 s/d Gambar 5. Dari gambar tersebut dapat diperoleh beberapa kesimpulan :

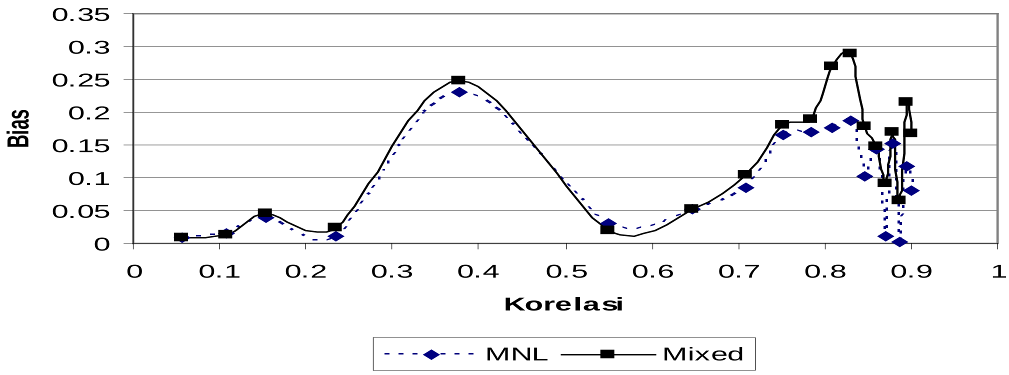
1. Pada umumnya bias yang dihasilkan umtuk model MNL lebih besar dibanding bias pada model Mixed Logit.
2. Untuk parameter intersep (yaitu :α_1, α_2), pada korelasi tinggi (lebih dari 0.7) MNL menghasilkan bias yang lebih besar dari pada model Mixed Logit.
3. Untuk parameter koefisien X (yaitu :β_1, β_2), bias yang dari model MNL relatif sama dengan model Mixed Logit.
4. Untuk parameter koefisien Z (yaitu γ), pada korelasi tinggi (lebih dari 0.5) MNL menghasilkan bias yang lebih besar dari pada model Mixed Logit.



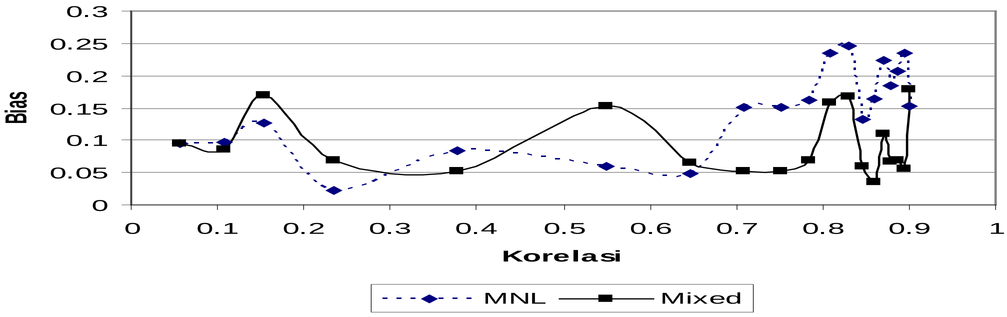
Gambar 1. Bias estimator parameter α_1.



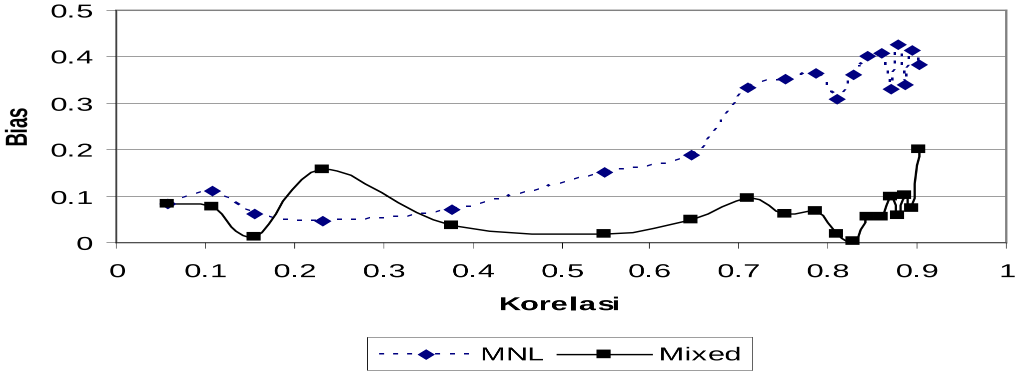
Gambar 2. Bias estimator parameter α_2.



Gambar 3. Bias estimator parameter β_1.



Gambar 4. Bias estimator parameter β_2.



Gambar 5. Bias estimator parameter γ.

SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan simulasi data untuk sampel terbatas (n=1000) dan jumlah alternatif 3 dapat disimpulkan bahwa

1. Model Mixed Logit dapat mengestimasi parameter korelasi dengan baik (nilai bias kecil)
2. Model Mixed Logit lebih baik dibanding model MNL, khususnya ketika terdapat korelasi antar alternatif

Selanjutnya dari hasil penelitian ini dapat disarankan

1. Bagi para praktisi yang akan menggunakan pemodelan respon diskrit sebaiknya :
   - Jika diduga ada korelasi antar alternatif, sebaiknya menggunakan model Mixed Logit.
   - Jika diasumsikan tidak ada korelasi antar alternatif, maka model MNL dapat digunakan
2. Bagi para Statistisi (peneliti Statistika) dapat menggembangkan metode komputasi, mengingat proses perhitungan dalam model Mixed Logit lebih lama dibanding model MNL. Disamping itu dapat dikembangkan metode estimasi selain MLE.

DAFTAR PUSTAKA

Agresti A (1990), *Categorical Data Analysis*, John Wiley and Son

Bhat, C. R. (2001), Quasi-random Maximum Simulated Likelihood Estimation of The Mixed Multinomial Logit Model, *Transportation Research*, 35B(7), 677-695.

Bolduc, D. (1999), ‘A practical technique to estimate multinomial probit models in transportation’, *Transportation Research B* **33**, 63–79.

Greene W. 2005. *Econometrics Analysis*. 5 Editions, Prentice Hall

McFadden, D. dan Train K. (2000), Mixed MNL Models for Discrete Response, *Journal of Applied Econometrics 15(5), 447-470.*

Nugraha J., Guritno S., Haryatmi S.,(2007), "Bias Maximum Likelihood Estimator (MLE) dalam Model Multinomial Logit pada Respons Saling Berkorelasi", *Prosiding* Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika di UNY

Revelt, D. dan Train K. (1998), Mixed Logit with Repeated Choices: Households' Choice of Appliance Efficiency Level, *Review of Economics and Statistics 80(4), 647-657*

Ruud P.A. (1996), Approximation and Simulation of Multinomial Probit Model: An analysis of Covariance Matrix Estimation, *Working Paper* University of California, Berkeley.

Rodriguez G. (2001), *Generalized Linear Models,* Princeton University

Train, K. (2000), Halton Sequences for Mixed Logit, *Working Paper No. E00-278*, Department of Economics, University of California, Berkeley.

Train, K. (2003), *Discrete Choice Methods with Simulation*, UK Press, Cambridge

Walker J. , Ben-Akiva M., Bolduc D. (2004), Identification of the Logit Kernel (or Mixed Logit) Model, *Working Paper* Massachusetts Institue of Technology.

LAMPIRAN.

Tabel 3.

Hasil estimasi parameter regresi

σ_{δ}^{2}	Model	Parameter				
		α_1=-1	α_2 =1	β_1=0.5	β_2 = -0.5	γ=1
0.1	Logit	-1.0820397	0.9570063	0.5085003	-0.4049338	0.9157006
	Mix-Logit	-1.0820500	0.9569940	0.5085772	-0.4049219	0.9157116
0.2	Logit	-1.1891563	0.8377265	0.5144175	-0.4031753	0.8900812
	Mix-Logit	-1.1485085	0.9065620	0.5126635	-0.4139295	0.9223453
0.3	Logit	-1.1263546	0.8719698	0.4604642	-0.6273847	0.9394594
	Mix-Logit	-1.0429815	1.0155655	0.4550223	-0.6700660	1.0129981
0.5	Logit	-1.1331315	1.1809890	0.5115591	-0.5218364	1.0460728
	Mix-Logit	-1.0209141	1.4069878	0.5232962	-0.5684692	1.1588799
1	Logit	-1.0910121	0.9232880	0.7293906	-0.4161242	0.9296585
	Mix-Logit	-1.0910121	1.1353897	0.7482258	-0.4485884	1.0380471
2	Logit	-1.2340452	0.7217710	0.5295068	-0.5595222	0.8490157
	Mix-Logit	-1.0683104	1.0311304	0.5205118	-0.6526206	1.0197001
3	Logit	-1.2631787	0.8102169	0.5518312	-0.4519676	0.8109018
	Mix-Logit	-0.9989709	1.2886179	0.5511986	-0.5643533	1.0507553
4	Logit	-1.1450981	0.4277022	0.4145928	-0.3496570	0.6667977
	Mix-Logit	-0.8751249	0.8517508	0.3952151	-0.4471058	0.9045478
5	Logit	-1.2657586	0.5095037	0.6658029	-0.3498746	0.6481598
	Mix-Logit	-0.8853560	1.0890588	0.6799238	-0.4472538	0.9379534
6	Logit	-1.2870457	0.4817746	0.6701468	-0.3375699	0.6366787
	Mix-Logit	-0.9082190	1.0615113	0.6887330	-0.4302786	0.9316741
7	Logit	-1.3546923	0.4441560	0.6758602	-0.2650508	0.6899177
	Mix-Logit	-1.0396803	0.9896029	0.7699706	-0.3407205	1.0195644

8	Logit	-1.4147482	0.3654857	0.6869802	-0.2539744	0.6401623
	Mix-Logit	-1.0778791	0.9499069	0.7901127	-0.3323799	1.0044416
9	Logit	-1.2350797	0.3339042	0.3979181	-0.3673812	0.5974748
	Mix-Logit	-0.8427982	0.9562321	0.3215740	-0.5592697	0.9444958
10	Logit	-1.3082698	0.4102022	0.6433415	-0.3366008	0.5924132
	Mix-Logit	-0.8408041	1.1169468	0.6475197	-0.4638984	0.9451848
11	Logit	-1.3042875	0.1833946	0.5112466	-0.2755903	0.6705004
	Mix-Logit	-1.0766507	0.7143608	0.5911738	-0.3893042	1.0980798
12	Logit	-1.3072919	0.3837021	0.6531657	-0.3160782	0.5738949
	Mix-Logit	-0.8012720	1.1337395	0.6698818	-0.4337996	0.9406709
13	Logit	-1.3058442	0.1704799	0.5016896	-0.2939947	0.6591141
	Mix-Logit	-1.0667426	0.7203540	0.5653857	-0.4308860	1.1007823
14	Logit	-1.4427927	0.2428831	0.3819696	-0.2654855	0.5866355
	Mix-Logit	-1.0758214	0.9594194	0.2856160	-0.4434660	1.0734814
15	Logit	-1.3749713	0.3419744	0.4191620	-0.3464587	0.6159980
	Mix-Logit	-0.8151681	1.3491172	0.3329803	-0.6779866	1.1997187