

Struktur Elektronik Elektron Tunggal dalam Sistem *Quantum Ring*

Slamet Priyono, M Adib Ulil Absor, M Darwis Umar, dan Kamsul Abraha
Jurusan Fisika FMIPA UGM, Yogyakarta

ABSTRAK

Telah dilakukan studi teoritis struktur elektronik *quantum ring* semikonduktor elektron tunggal dalam sistem 1D dan 2D dengan dan tanpa medan magnet secara analitik. *Quantum ring* direpresentasikan oleh potensial pengungkung berbentuk $V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 (r - r_0)^2$. Pengungkungan elektron dalam *quantum ring* 1D menunjukkan spektrum energi hanya bergantung pada kuadrat bilangan *quantum* magnetik m^2 dan dalam pengaruh medan magnet menunjukkan fenomena menarik seperti efek Aharonov-Bohm, transport arus, dan arus kontinu (*persistent current*). Hasil perhitungan menunjukkan bahwa transport arus dan arus kontinu periodik dalam fluks magnetik Φ dengan periode sebesar fluks *quantum* $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$. Sementara itu *quantum ring* 2D menunjukkan bahwa pengungkungan ini dapat menghasilkan struktur atom buatan. Perhitungan *quantum ring* elektron tunggal menunjukkan bahwa struktur kulit atom buatan dapat digambarkan dengan set aras energi merosot yang terisi penuh oleh 2, 8, 18, 32 dan seterusnya yang dikenal sebagai "bilangan magis" untuk atom buatan *quantum ring*.

Kata Kunci : *quantum ring*, efek Aharonov-Bohm, transport arus, arus kontinu, atom buatan.

I. Pendahuluan

Seiring dengan perkembangan teknologi nano manusia mampu mengembangkan teknik pengungkungan elektron oleh suatu potensial buatan melalui proses fabrikasi. Teknik pengungkungan elektron dalam dimensi nol yang terbaru diwujudkan dalam sistem *quantum ring* yang merupakan generasi setelah *quantum dot* karena geometri kedua sistem hampir sama. Perbedaan keduanya terlihat pada bagian pusat sistem *quantum ring* yang memiliki suatu potensial penghalang (*barrier*) dan dari sisi pembentukan, *quantum ring* terbentuk melalui evolusi *dot* menjadi *ring*. Elektron yang terkungkung di dalam suatu potensial tertentu akan menyebabkan terjadinya kuantisasi energi yang memberikan struktur elektronik dan sifat-sifat material. Pengungkungan *quantum* sangat berperan dalam pembentukan atom buatan Dalam atom alami yang mengungkung elektron adalah *potensial coulomb* sedangkan dalam *quantum ring* elektron terkungkung oleh *potensial ring* yang lebih kuat daripada *potensial coulomb*. Dengan adanya atom buatan yang karakteristiknya dapat diatur oleh manusia maka dapat dibuat peralatan elektronik yang lebih praktis, tahan lama, dan hemat energi.

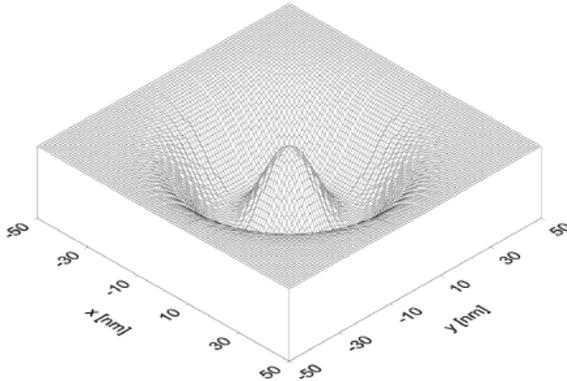
Fabrikasi *quantum ring* dilakukan melalui penumbuhan sendiri pulau InAs terlebih dahulu dan selanjutnya menstranformasikannya menjadi berbentuk *ring* melalui suatu proses yang saling berurutan[1]. *Ring* nano InAs pada GaAs dapat dibentuk dengan suatu proses yang disebut teknik lapisan penutupan parsial. Setelah penumbuhan pulau InAs pada GaAs, lapisan penutup GaAs dideposisikan secara parsial meliputi seluruh pulau. Transformasi bentuk pulau menjadi *ring* diperoleh dengan proses pendinginan (*annealing*) pulau tertutup secara parsial dalam kawasan As, minimal selama satu menit pada suhu 530⁰C dan akhirnya sampel didinginkan sampai suhu ruangan.

Model *potensial ring* dapat diperoleh dengan meninjau hasil eksperimen yang dilakukan oleh Lorke dkk, yaitu mengenai penumbuhan sendiri *quantum ring* In_xGa_{1-x}As hanya dengan satu elektron, dengan bentuk *ring* ditentukan oleh adanya sejumlah efek seperti *diffuse*, tegangan, dan

energi permukaan[2]. Dengan data eksperimen yang diperoleh lalu dapat disusun suatu model potensial yang berbentuk

$$V(r) = -V_0 \left[\left(\frac{r}{R_0} \right)^{2p} + b \right] \exp \left(- \left(\frac{r}{R_1} \right)^{2q} \right) \quad (1)$$

dimana V_0 adalah kedalaman potensial yaitu sekitar 200 meV dan parameter-parameter R_0, R_1, b, p , dan q adalah yang bertanggung jawab pada bentuk potensial. **Gambar 1.** menampilkan grafik Pers (1) dalam penampakan 2D.



Gambar 1. Gambar 3D potensial ring dengan parameter $V_0 = 200 \text{ MeV}$, $R_1 = 18,5 \text{ nm}$, $b = 0$, dan $p = 1$. Data eksperimen Lorke dkk [2],[3]

Posisi minimum dari potensial $V(r)$ bersesuaian dengan jari-jari *ring* r_0 . Sejumlah parameter bebas dapat direduksi potensial lateral diekspansikan dalam bentuk deret Taylor di sekitar jari-jari r_0 sampai orde kedua dan mengambil nilai $p = 0, q = 1$ [3]. Pendekatan ini berarti bahwa untuk r di sekitar r_0 , potensial pengungkung digambarkan oleh potensial parabolik berbentuk

$$V(r) \approx \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 (r - r_0)^2 \quad (2)$$

dengan $m_e \omega_0^2$ bersesuaian dengan nilai turunan kedua dari potensial $V(r)$ untuk $r = r_0$. Bentuk potensial parabolik inilah yang akan dipakai dalam kajian teoritis paper ini.

Dalam paper ini akan dibahas elektron tunggal dalam *quantum ring* dengan dan tanpa pengaruh medan magnet eksternal. Pada bagian II merupakan bagian pokok penelitian ini yang akan dibagi menjadi tiga subbagian, pada subbagian pertama membahas elektron tunggal dalam *quantum ring* 1D dengan dan tanpa medan magnet kemudian pada subbagian kedua membahas sejumlah fenomena yang muncul seperti efek Aharonov-Bohm, transport arus, dan arus kontinu dan pada subbagian tiga akan dibahas mengenai struktur kulit atom buatan *quantum ring*. Kesimpulan dan referensi akan diberikan pada bagian III dan IV.

II. Pembahasan

I. Perhitungan Sebuah Elektron Tunggal dalam Sistem *Quantum Ring* 1D

Hamiltonan sebuah elektron dalam *quantum ring* 1D hanya bergantung pada sudut polar φ yaitu

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (3)$$

dengan m_e, R , dan \hbar masing-masing adalah massa elektron, jari-jari *ring*, dan konstanta Plank tereduksi. Pers (3) tidak melibatkan potensial *ring* seperti yang dimodelkan dalam Pers (2), karena

quantum ring 1D tidak mengizinkan gerak elektron dalam arah radial (jari-jari konstan), sehingga potensial *ring* yang merupakan fungsi posisi r tidak mempengaruhi gerakan elektron. Dengan demikian persamaan Schrodinger stasioner memberikan

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \psi(\varphi) = E \psi(\varphi) \quad (4)$$

dengan solusi trivial (tanpa faktor normalisasi) adalah

$$\psi_m(\varphi) = e^{im\varphi} \text{ dan } E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2m_e R^2} \quad (5)$$

dengan ψ_m dan E_m berturut-turut adalah swakeadaan dan swanilai dari sistem sebuah elektron dalam *quantum ring* 1D yang hanya bergantung pada bilangan *quantum* magnetik m yang merupakan bilangan bulat [4]. Fungsi gelombang ψ_m memenuhi syarat $\psi_m(\varphi + 2\pi) = \psi_m(\varphi)$

Efek Medan Magnet Eksternal

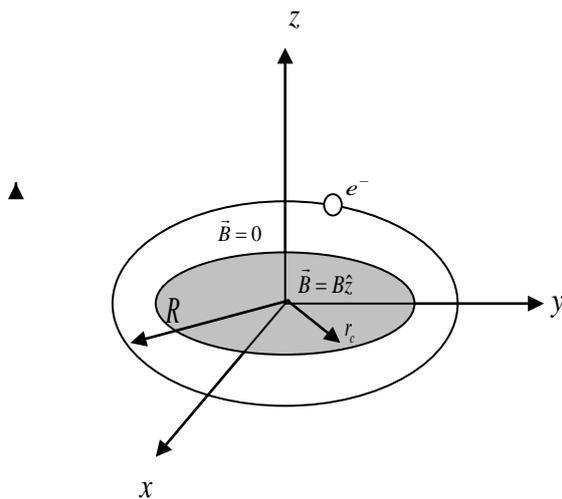
Medan magnet dipilih dalam arah z dan *ring* terletak pada bidang x - y . Jika dipilih vektor potensial \vec{A} sedemikian sehingga kontinu pada jari-jari kritis r_c tetapi medan magnet \vec{B} konstan di kawasan $r \leq r_c$ dan \vec{B} sama dengan nol dalam kawasan $r > r_c$. Jadi,

$$B_z = \begin{cases} B, & \text{jika } r \leq r_c \\ 0, & \text{jika } r > r_c \end{cases}$$

Oleh karena $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, maka

$$A_\varphi = \begin{cases} \frac{Br}{2}, & \text{jika } r \leq r_c \\ \frac{Br_c^2}{2r}, & \text{jika } r > r_c \end{cases} \quad (6)$$

sedangkan $B_\varphi = B_r = 0$



Gambar 2: Gambar skematik system *quantum ring* 1D dengan medan magnetik dan elektron berada di $r_e = R$

Hamiltonian *quantum ring* 1D dengan medan potensial magnetik \vec{A} dapat ditulis sebagai

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} \left(\hat{p} - \frac{e}{c} \hat{A} \right)^2 \quad (7)$$

Persamaan Schrodinger elektron tunggal dari *quantum ring* dalam pengaruh medan potensial magnetik adalah

$$\frac{1}{2m_e} \left(\hat{p} - \frac{e}{c} \hat{A} \right)^2 \psi'(\varphi) = E' \psi'(\varphi) \quad (8)$$

dengan e dan c adalah muatan elektron dan kelajuan cahaya dalam ruang hampa serta $\psi'(\varphi)$ dan E' adalah swafungi dan swanilai setelah dipengaruhi medan magnetik. Penyelesaian persamaan Shrodinger dalam medan magnetik dapat diperoleh melalui transformasi tera uniter (*unitary gauge transformation*)[5], yang memberikan hasil

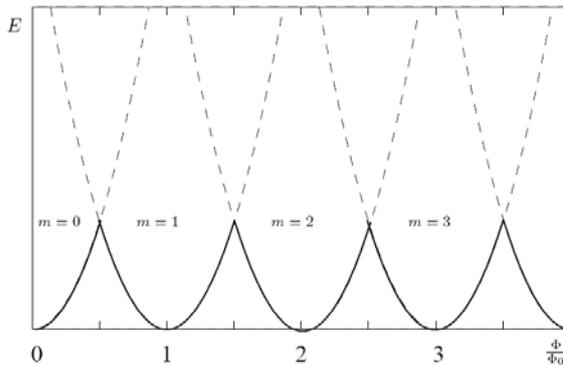
$$\psi'_m = \exp(im\varphi) \quad (9)$$

Artinya fungsi eigen $\psi'_m(\varphi)$ ini masih sama seperti pada kasus tanpa medan magnetik, tetapi nilai eigennya berubah yaitu

$$E'(m, \Phi) = \frac{\hbar^2}{2m_e R^2} \left(m - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \quad (10)$$

dengan $\Phi = \pi R^2 B$ dan $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$ masing-masing adalah fluks magnetik dan fluks *quantum*.

Dengan jelas tampak dalam gambar 3 bahwa spektrum energi keadaan dasar bersifat periodik terhadap fluks magnetik Φ dengan periode sebesar fluks *quantum* Φ_0 [4][5].



Gambar 3 Spektrum energi sebuah elektron pada *quantum ring* yang ditembusi medan magnetik. Garis tebal menunjukkan energi keadaan terendah[4].

B. Fenomena dalam Sistem *Quantum Ring* 1D

1. Arus Kontinu (*persistent current*)

Berdasarkan **Gambar 3 di atas**, energi keadaan dasar (*ground state*) sebuah elektron pada *ring* yang ditembusi medan magnetik periodik dalam fluks magnetik. Energi pada keadaan dasar memenuhi kaitan

$$E_G \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \pm 1 \right) = E_G \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \quad (11)$$

Elektron yang bergerak sepanjang *ring* dapat dikatakan ada aliran arus yang disebut sebagai arus kontinu (*persistent current*). Operator arus dapat ditulis sebagai $\vec{j} = \frac{c}{e} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \vec{A}}$, dan vektor potensial

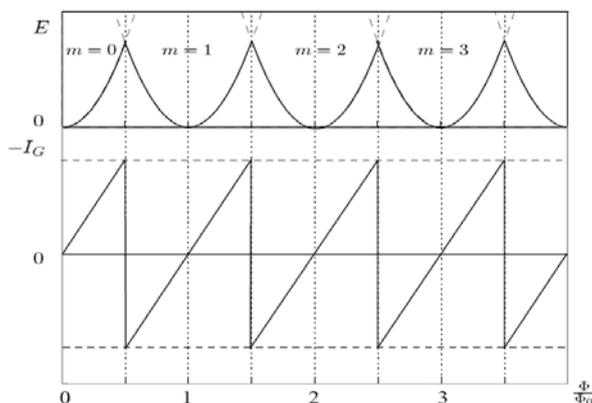
adalah $\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi R} \hat{\varphi}$ sehingga derivatif energi terhadap fluks akan memberikan

$$\begin{aligned} -c \frac{\partial E}{\partial \Phi} &= -c \langle \psi | \frac{\partial \hat{H}}{\partial \Phi} | \psi \rangle = -c \langle \psi | \frac{\partial \hat{H}}{\partial \vec{A}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \Phi} | \psi \rangle = \\ &= \langle \psi | \vec{j}_\varphi \frac{-e}{2\pi R} | \psi \rangle = \frac{-e}{2\pi R} \int_0^{2\pi} j(\varphi) d\varphi = I \end{aligned} \quad (12)$$

Artinya, arus kontinu dalam *quantum ring* dinyatakan sebagai derivatif energi terhadap fluks magnetik yaitu

$$I = -c \frac{\partial E}{\partial \Phi} \quad (13)$$

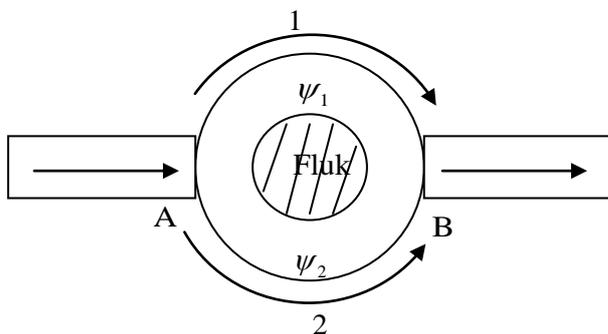
Pers. (11) dan Pers.(13) menunjukkan bahwa arus yang dihasilkan oleh elektron di keadaan dasar (*ground state*) juga periodik dalam fluks magnetik. Grafik antara energi, arus, dan fluks magnetik secara lengkap dapat ditunjukkan dalam Gambar 4.



Gambar 4: Grafik Energi (atas) dan Arus (bawah) sebagai fungsi fluks magnetik Φ , karena arus merupakan negatif dari turunan energi terhadap fluks maka grafik arus juga periodik dalam fluks magnetik dengan periode Φ_0 [4]

Arus ini adalah arus mekanika *quantum* dan tidak ada dissipasi energi, sehingga arus ini akan terus mengalir dan tidak menghasilkan panas[4][5].

2. Efek Aharonov-Bohm dan Transport Arus



Gambar 5: Gambar untuk menjelaskan efek Aharonov-Bohm yang muncul dalam *quantum ring* dan transport arus sepanjang lengkungan lintasan dari A sampai B.

Efek Aharonov-Bohm adalah terjadinya pergeseran fase fungsi gelombang karena adanya medan magnet luar. Efek Aharonov-Bohm dalam *quantum ring* terjadi ketika elektron terkurung dalam sistem dikenai medan magnet \vec{B} eksternal. Dalam Gambar 5 sebuah gelombang elektron yang datang dari kiri berjalan melewati *ring*. Gelombang menyebar di A dalam busur atas (lintasan 1) dan busur bawah (lintasan 2) dan terjadi interferensi di B. Fase dalam gelombang atas adalah φ_1 , dalam busur bawah φ_2 . Perbedaan fase $\Delta\varphi$ dipengaruhi oleh fluks magnetik yang memasuki *ring*. Karena fluks yang melalui berubah sebesar satu fluks *quantum* Φ_0 , maka perubahan fase berubah sebesar 2π . Oleh karena itu kondisi interferensi dapat konstruktif, destruktif atau diantaranya, menjadi periodik dalam pengaruh fluks magnetik yang memasuki *ring*. Interferensi destruktif bersesuaian dengan konduktansi rendah sedangkan interferensi konstruktif bersesuaian dengan konduktansi yang tinggi. Akibatnya konduktansi dari *ring* beresilasi secara periodik dengan medan magnetik[6]. Karena fungsi gelombang yang mengelilingi *ring* memiliki fase φ_1 dan φ_2 , maka beda fase antara dua fungsi gelombang tersebut adalah

$$\Delta\varphi = -\frac{ie\Phi}{2\pi\hbar}(\varphi_2 - \varphi_1) = -i\frac{\Phi}{\Phi_0}(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (14)$$

Sedangkan transport arus dapat dipandang sebagai elektron yang mengalir melewati lintasan 1 dan 2 (**Gambar 5**) dengan fase masing-masing adalah $\varphi_1 = -i \frac{\Phi}{\Phi_0} \pi$ dan $\varphi_2 = i \frac{\Phi}{\Phi_0} \pi$. Beda fase

fungsi gelombang yang berinterferensi di titik B adalah $\Delta\varphi = 2\pi i \frac{\Phi}{\Phi_0}$ yang bahwa beda fase dapat

di ubah dengan jalan mengubah besarnya medan magnet, sedangkan fungsi gelombang yang mengalami interferensi di titik B memiliki persamaan

$$\left| \psi \cdot \exp\left(2\pi i \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) + \psi \cdot \exp\left(-2\pi i \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \right|^2 = 2|\psi|^2 \left(1 + \cos\left(\frac{\Phi}{\Phi_0} 2\pi\right)\right) \quad (15)$$

Jadi, transport arus melalui *quantum ring* dalam pengaruh fluks magnetik adalah periodik dengan periode Φ_0 karena adanya interferensi fungsi gelombang[4],[6].

C. Atom Buatan Sistem *Quantum Ring*

Untuk mempelajari struktur elektronik atom buatan sistem *quantum ring* maka harus diselesaikan nilai energi dan fungsi gelombang elektron dalam pengungkung *ring* 2D. Dengan menyelesaikan nilai eigen dan fungsi gelombang maka akan diketahui ketergantungan energi terhadap bilangan *quantum* utama dan magnetik, sehingga aras-aras tenaga dapat di gambar dan dipelajari.

Dalam kasus sistem 2D elektron memiliki kebebasan gerak dalam arah radial r dan arah azimuth φ . Karena elektron memiliki kebebasan gerak dalam arah radial maka model potensial *ring* dalam Pers (2) harus disertakan dalam Hamiltonian. Hal ini sebagai akibat dari potensial *ring* memiliki variabel r yang berarti turut membatasi gerak elektron ke arah radial. Artinya, Hamiltonian sebuah elektron dalam *quantum ring* 2D diberikan oleh persamaan

$$\hat{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m_e} + \frac{1}{2}m_e\omega^2(r - r_0)^2 \quad (16)$$

Sehingga dengan substitusi ke dalam persamaan Shrodinger sistem koordinat polar akan menjadi

$$-\frac{\hbar}{2m_e} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \psi + \left(\frac{1}{2} m_e \omega^2 (r - r_0)^2 - E \right) \psi = 0 \quad (17)$$

Pemisahan variabel menyatakan bahwa fungsi gelombang $\psi(r, \varphi)$ dapat ditulis sebagai hasil kali dari bagian radial $\mathfrak{R}(r)$ dan bagian angular $\phi(\varphi)$

$$\psi = \mathfrak{R}(r)\phi(\varphi) \quad (18)$$

Bagian angular persamaan Shrodinger dapat diselesaikan dengan mudah yaitu $\phi = Ae^{im\varphi}$, dengan A adalah faktor normalisasi dan memenuhi syarat batas $\phi(\varphi + 2\pi) = \phi(\varphi)$. Kemudian, bagian radial persamaan Shrodinger dapat dirumuskan sebagai

$$\frac{d^2\mathfrak{R}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathfrak{R}(r)}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \mathfrak{R}(r) + (k^2 - (r - r_0)^2) \mathfrak{R}(r) = 0 \quad (19)$$

dengan $k = \sqrt{\frac{2m_e E}{\hbar^2}}$ berkaitan dengan swanilai $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}$ dan $\lambda = \frac{m_e \omega}{\hbar}$ adalah besaran

karakteristik osilator.

Selanjutnya dengan menerapkan kondisi syarat batas di $r \rightarrow 0$ maka $\mathfrak{R}(r) < \sim$ (finit), dan saat $r \rightarrow \sim$ maka $\mathfrak{R}(r) \rightarrow 0$. Maka akan diperoleh

$$R(r) = r^{|m|} e^{-\frac{\lambda(r^2 - 2rr_0)}{2}} L(r) \quad (20)$$

substitusi persamaan ini ke persamaan differensial memberikan.

$$\frac{d^2 L(r)}{dr^2} + \left\{ \frac{2|m|+1}{r} - 2\lambda(r-r_0) \right\} \frac{dL(r)}{dr} - \left\{ 2\lambda(|m|+1) - k^2 - \frac{\lambda r_0}{r} (2|m|+1) \right\} L(r) = 0 \quad (21)$$

dengan memperkenalkan variable baru $z = -\sqrt{\lambda}r$, $L(r)$ menjadi berbentuk persamaan differensial Heun Biconfluent (*Biconfluent Heun(BCH) differential equation*) menurut

$$\frac{d^2 L(z)}{dz^2} - \frac{(2z^2 - 1 - 2|m| + 2\sqrt{\lambda}r_0 z)}{z} \frac{dL(z)}{dz} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(-\frac{2k^2}{\lambda} + 4|m| + 4 \right) z + 4r_0 \sqrt{\lambda}|m| + 2r_0 \sqrt{\lambda}}{z} \right\} L(z) = 0 \quad (22)$$

Pers(21) memiliki penyelesaian berupa fungsi HeunB yaitu

$$L(z) = \text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, z) \quad (23)$$

dengan $\alpha = 2|m|$, $\beta = 2\sqrt{\lambda}r_0$, $\gamma = \frac{k^2}{\lambda}$, $\delta = 0$, dan $z = -\sqrt{\lambda}r$. Fungsi HeunB akan menjadi polinomial jika dan hanya jika $\gamma - 2 - \alpha = 2n$ dengan $n = 0, 1, 2, \dots$ adalah bilangan *quantum radial* [7]. Setelah kondisi ini terpenuhi, fungsi gelombang baru dapat dinormalisasi. Dengan demikian penyelesaian lengkap persamaan Shrodinger adalah

$$\psi_{nm}(r, \varphi) = C_{nm} r^{|m|} e^{-\frac{\lambda(r-2r_0)}{2}} \text{HeunB}(2|m|, 2\sqrt{\lambda}r_0, 2(n+|m|+1), 0, -\sqrt{\lambda}r) e^{-im\varphi} \quad (24)$$

dan diperoleh

$$E_{nm} = \hbar\omega_0(n+|m|+1) \quad (25)$$

dengan C_{nm} adalah faktor normalisasi dan E_{nm} adalah swanilai energi yang bergantung pada bilangan *quantum radial* dan azimuth (n, m). Fungsi gelombang ψ_{nm} dikenal sebagai aras-aras Fock-Darwin, setelah Fock dan Darwin menghitung swanilai partikel dalam potensial harmonik dan swanilai partikel dalam medan magnet luar secara terpisah [8].

Struktur kulit atom buatan yang diperoleh dari spektrum energi Pers. dihubungkan dengan derajat degenerasi ditunjukkan dalam gambar dibawah ini.

Degenerasi ↓						Jumlah elektron	
$4 \hbar\omega_0$	<u>(0,-3)</u>	<u>(1,-2)</u>	<u>(2,-1)</u>	<u>(3,0)</u>	<u>(2,1)</u>	<u>(1,2)</u>	<u>(0,3)</u>	32
$3 \hbar\omega_0$		<u>(0,-2)</u>	<u>(1,-1)</u>	<u>(2,0)</u>	<u>(1,1)</u>	<u>(0,2)</u>		18
$2 \hbar\omega_0$			<u>(0,-1)</u>	<u>(1,0)</u>	<u>(0,1)</u>			8
$1 \hbar\omega_0$			↑↓	<u>(0,0)</u>				2

Gambar 6: Spektrum energi sistem *quantum ring* partikel tunggal dalam potensial pengungkung harmonik. Degenerasi aras-aras energi membentuk struktur kulit atom buatan.

Karena elektron dapat memiliki spin-up maupun spin-down, maka masing-masing aras (*level*) dapat terisi oleh dua elektron. Keadaan $n = 0, m = 0$ terisi penuh oleh dua elektron dengan spin berlawanan. Keadaan berikutnya terisi penuh oleh 6 elektron, yaitu dua elektron pada (0,1), dua elektron pada (1,0), dan dua elektron pada (0,1) sehingga kulit kedua terisi penuh oleh 8 elektron. Kulit ketiga dapat dipenuhi oleh 10 elektron yang masing-masing pasangan menempati keadaan

(0,-2), (1,-1), (2,0), (1,1), dan (0,2), sehingga kulit ketiga akan terisi penuh oleh 18 elektron. Pengisian secara penuh kulit atom ini membentuk pola $N = 2, 8, 18, 32$ dan seterusnya, pola inilah yang disebut "bilangan magis" untuk atom buatan sistem *quantum ring*.

Jika dibandingkan dengan *dot*, aras-aras energi *quantum ring* seakan-akan merupakan aras energi *quantum dot* yang mengalami pemecahan (*splitting*) pada tingkat energi yang lebih tinggi. Hal ini menunjukkan bahwa adanya penghalang lunak/*soft barrier* menyebabkan terjadinya degenerasi aras-aras energi.

III. Kesimpulan

Studi teoritis elektron tunggal dalam *quantum ring* telah dipaparkan dalam artikel ini. Solusi analitis *quantum ring* 1D telah menunjukkan fenomena menarik di dalamnya, dan dalam sistem 2D telah menunjukkan sifat atom buatan yang berperilaku seperti atom real.

IV. Daftar Pustaka

- [1]. Riikonen, J. 2006, "Self-assembled nanorings and stressor quantum dots" Helsinki University of Technology, Finlandia
- [2]. Lorke, J. Luyken, A.O. Govorov, dan J.P. Kotthaus, 2000, "Spectroscopy of Nanoscopic, Semiconductor Ring", *Phys. Rev. Lett.* 84, 2223
- [3]. Moskal, S. Spisak, B.J, 2007 "Influence of Geometry-Confinement Parameters on the Electronic Properties of *Quantum Ring*", *Acta Physica Polonica* **112**
- [4]. Danilevich, A, 2007 "1D Quantum Rings", Universitas Erlangen-Nurnber, Germany
- [5]. Lim, Y.K. 1998, "Problems and Solutions on Quantum Mechanics", Qualifying Exam World Scientific, Singapore
- [6]. Ihn, T. Fuhrer, A. Meier, L. Sigrist, M dan Ensslin Klaus, 2005, "Quantum Physics in Quantum Rings", Solid State Physics, ETH Zurich 8093 Zurich, Switzerland
- [7]. Arriola, E.R. Zarzo, A. dan Dehesa, J.S, 1991, "Spectral Properties of the Biconfluent Heun Differential Equation", *J. Comput. Appl. Math.* **37** 161-169
- [8]. Fock, V., 1928, "Bemerkung zur Quantelung de harmonischen Oszillators im magnetfeld", *Zeitschrift fur Physik* **47**, 446