Relasi Kongruensi Fuzzy pada Grup dan Grup Hasil Bagi

Oleh
K a r y a t i
Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
e-mail: yatiuny@yahoo.com

Abstrak

Subhimpunan fuzzy μ pada himpunan X adalah suatu pemetaan dari X ke interval $[0,1]$. Definisi ini adalah generalisasi dari himpunan klasik dengan pemetaannya didefinisikan dari himpunan tersebut ke himpunan $\{0,1\}$. Pada himpunan klasik didefinisikan suatu relasi ,relasi refleksif, simetrik, transiftif, similaritas dan kongruensi. Selanjutnya dikonstruksi definisi relasi biner fuzzy yang refleksif, simetrik, transitif, similaritas dan kongruensi .

Dalam tulisan ini akan diberikan contoh-contoh relasi kongruensi pada sebarang grup dan grup hasil baginya.

Diperoleh hasil bahwa: Misalkan G adalah grup dengan elemen idenitasnya e dan μ adalah subgrup fuzzy pada G. Didefinisikan suatu relasi β pada $G \times G$ dipetakan ke interval $[0,1]$ sebagai berikut: $\beta(a,b) = \min\{\mu(a), \mu(b)\}$, jika $a \neq b$ dan $\beta(a,b) = \mu(e)$ jika $a = b$ maka β adalah relasi kongruensi fuzzy pada $G \times G$. Selanjutnya dibangun suatu pemetaan $\lambda : G/H \to [0,1]$, yang didefinisikan $\lambda(xH) = \beta(x,h)$ untuk setiap $h \in H$. Terbukti bahwa λ adalah relasi kongruensi fuzzy. Pemetaan α, dari $G/H \times G/H$ ke interval $[0,1]$, yang didefnisikan $\alpha(xH, yH) = \lambda(xHy^{-1}H)$. Terbukti juga bahwa α adalah relasi kongruensi fuzzy.

***Kata Kunci**: subgrup fuzzy, subgrup hasil bagi fuzzy , subgrup normal fuzzy, relasi kongruensi fuzzy*

A. Pendahuluan

Subhimpunan *fuzzy* μ pada himpunan X adalah suatu pemetaan dari X ke interval $[0,1]$. Himpunan *fuzzy* ini merupakan generalisasi dari himpunan klasik, sebab himpunan klasik dapat dipandang sebagai himpunan *fuzzy* dengan pemetaannya adalah dari X ke himpunan $\{0,1\}$. Teori himpunan *fuzzy* pertama kali diperkenalkan oleh Zadeh (Ray dan Ali). Konsep ini telah diperluas pada fuzzifikasi struktur Aljabar, misalkan teori subgrup *fuzzy* (Rosenfeld dikutip oleh Ray dan Ali) dan teori subring *fuzzy* (Liu dikutip oleh Ray dan Ali).

Misalkan dimiliki sebarang himpunan X, maka yang dimaksud dengan relasi R adalah subhimpunan pada $X \times X = \{(x,y) | x, y \in X\}$. Secara analog dengan pembentukan subhimpunan fuzzy, maka dapat dikonstruksi relasi fuzzy pada himpunan $X \times X$. Misalkan X adalah sebarang himpunan tak kosong , relasi biner fuzzy pada X adalah subhimpunan fuzzy μ pada $X \times X$, yaitu $\mu : X \times X \to [0,1]$. (Kandasamy:10)

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional MIPA 2007 dengan tema **"Peningkatan Keprofesionalan Peneliti, Pendidik & Praktisi MIPA"** yang diselenggarakan oleh Fakultas MIPA UNY Yogyakarta pada tanggal 25 Agustus 2007

Definisi 1.1. (Kandasamy:10) *Relasi fuzzy* μ *pada* $X \times X$ *disebut refleksif jika* $\mu\ (x,x) = 1$ *untuk setiap* $x \in X$ *, dan dikatakan simetrik jika* $\mu\ (x,y) = \mu\ (y,x)$ *untuk setiap* $x, y \in X$ *. Relasi biner fuzzy* μ *dikatakan transitif jika* $\min\{\mu(x,y), \mu(y,z)\} \leq \mu(x,z)$ *. Relasi biner fuzzy* μ *pada* X *disebut relasi similaritas jika* μ *bersifat refleksif, simetrik dan transitif*

Dalam pembicaraan himpunan klasik, dikenal relasi yang kompatibel kiri maupun kanan, atau kompatibel saja. Secara analog dalam pembentukkan definisi relasi simililaritas dan lain-lain, maka didefinisikan relasi fuzzy yang kompatibel sebagai berikut :

Definisi 1.2. (Kandasamy:10) *Misalkan* S *adalah semigrup.*

a. *Relasi biner fuzzy* μ *pada* S *disebut kompatibel fuzzy kiri jika* $\mu\ (x,y) \leq \mu(tx,ty)$ *untuk setiap* $x, y, t \in S$
b. *Relasi biner fuzzy* μ *pada* S *disebut kompatibel fuzzy kanan jika* $\mu\ (x,y) \leq \mu(xt, yt)$ *untuk setiap* $x, y, t \in S$
c. *Relasi biner fuzzy* μ *pada* S *disebut kompatibel fuzzy jika* $\min\{\mu(a,b), \mu(c,d)\} \leq \mu(ac,bd)$ *untuk setiap* $a, b, c, d \in S$

Secara analog dalam pembentukkan didefinisikan relasi fuzzy yang kompatibel , maka didefinisikan relasi kongruensi fuzzy sebagai berikut :

Definisi 1.3. (Kandasamy:10) *Relasi similaritas yang kompatibel pada semigrup* S *disebut relasi kongruensi fuzzy*

Pada himpunan klasik dikenal tiga operasi dasar, yaitu komplemen, gabungan dan irisan. Operasi – operasi ini adalah tunggal pada teori himpunan klasik, namun perluasannya pada teori himpunan fuzzy tidak demikian. Untuk setiap operasi klasik terdapat operasi yang analog pada himpunan fuzzy. Terkait operasi-operasi tersebut, didefinisikan operasi standar fuzzy pada himpunan fuzzy yang dirujuk pada Klir, et.al. dan Zimmermann sebagai berikut:

1. Complemen Fuzzy

Diberikan himpunan fuzzy μ yang didefinisikan pada himpunan X. Komplemen dari himpunna fuzzy μ, yang dinotasikan dengan $\overline{\mu}$ adalah himpunan fuzzy dimana derajat keanggataan dari $x \in X$, $\overline{\mu}(x)$ mengekspresikan derajat $x \in X$ bukan anggota μ. Secara formal, hal ini dapat dinyatakan bahwa $\overline{\mu}(x) = 1 - \mu(x)$

2. Gabungan Fuzzy

Misalkan X adalah suatu himpunan klasik dan μ, γ adalah himpunan fuzzy yang didefinisikan pada X. Gabungan fuzzy himpunan fuzzy μ dan γ, yang dinotasikan dengan $\mu \cup \gamma$, didefinisikan sebagai fungsi keanggotaan dengan rumus:

$$(\mu \cup \gamma)(x) = \max\{\mu(x), \gamma(x)\}, \text{ untuk setiap } x \in X$$

3. Irisan Fuzzy

Misalkan X adalah suatu himpunan klasik dan A, B adalah himpunan fuzzy yang didefinisikan pada X. Irisan fuzzy himpunan fuzzy A dan B, yang dinotasikan dengan $\mu \cap \gamma$, didefinisikan sebagai fungsi keanggotaan dengan rumus:

$$(\mu \cap \gamma)(x) = \min\{\mu(x), \gamma(x)\}, \text{ untuk setiap } x \in X$$

Untuk kajian pustaka terkait dengan subgrup fuzzy maupun suggrup normal fuzzy akan merujuk pada tulisan Ajmal, Aktas, Asaad, Kandasami, Mordeson dan Malik, serta Shabir.

Definisi 1.4. *Misalkan G adalah grup. Subhimpunan fuzzy μ dari grup G disebut subgrup fuzzy jika $\mu : G \to [0,1]$ suatu fungsi yang memenuhi :*

(i) $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ *untuk setiap* $x, y \in G$

(ii) $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$ *untuk setiap* $x \in G$

Definisi 1.5. *Misalkan* G *adalah grup. Subhimpunan fuzzy* μ *dari grup* G *disebut subgrup fuzzy normal jika* $\mu(xy) = \mu(xy)$ *untuk setiap* $x, y \in G$

B. Pembahasan

Pada bagian ini, akan dibentuk suatu pemetaan dari suatu grup $G \times G$ ke $[0,1]$ yang membentuk suatu relasi biner fuzzy.

Definisi 2.1. *Misalkan* G *adalah grup dengan elemen idenitasnya* e *dan* μ *adalah subgrup fuzzy pada* G. *Didefinisikan suatu relasi* β *pada* $G \times G$ *dipetakan ke interval* $[0,1]$ *sebagai berikut:*

$$\beta(a,b) = \begin{cases} \min\{\mu(a), \mu(b)\}, & \text{jika } a \neq b \\ \mu(e), & \text{jika } a = b \end{cases}$$

Proposisi berikut menjamin bahwa relasi $\beta : G \times G \Rightarrow [0,1]$ yang didefinisikan di atas merupakan relasi biner fuzzy

Proposisi 2.1. *Relasi* β *merupakan relasi biner fuzzy yang didefinisikan pada* G.

Bukti:

Dalam hal ini sama halnya membuktikan bahwa β adalah pemetaan:

Ambil $a = a', b = b'$ sehingga $(a,b) = (a', b'')$,

- untuk $a = b$, maka $a' = b'$ dan berlaku $\beta(a,b) = \mu(e) = \beta(a', b')$
- untuk $a \neq b$ maka $a' \neq b'$ dan berlaku

$$\beta(a,b) = \min\{\mu(a), \mu(b)\} = \min\{\mu(a'), \mu(b')\} = \beta(a', b')$$

Jelas bahwa $\mathrm{Im}(\beta) \subseteq \mathrm{Im}(\mu) \subseteq [0,1]$, dan domain β adalah $G \times G$

■

Berikut ini diberikan proposisi yang menunjukkan bahwa relasi fuzzy β adalah relasi similaritas:

Proposisi 2.2 *Relasi biner fuzzy* β *adalah relasi similaritas*

Bukti:

- Relasi β refleksif, sebab

  Ambil $a \in G$, maka $\beta(a,a) = \mu(e) = 1$

- Relasi β simetrik, sebab

  Ambil $a,b \in G$, $a \neq b$, sehingga

$$\beta(a,b) = \min\{\mu(a),\mu(b)\} = \min\{\mu(b),\mu(a)\} = \beta(b,a)$$

  Ambil $a,b \in G$, $a = b$ jelas dipenuhi

- Relasi β transitif

  Ambil $a,b,c \in G$, kasus $a = b = c$, jelas dipenuhi.

  Untuk kasus $a = b \neq c$, maka $\min\{\beta(a,b),\beta(b,c)\} = \min\{\mu(e),\min\{\mu(b),\mu(c)\}\}$

  $= \min\{\mu(b),\mu(c)\} = \min\{\mu(a),\mu(c)\} = \beta(a,c)$

  Untu kasus $a \neq b = c$, maka $\min\{\beta(a,b),\beta(b,c)\} = \min\{\min\{\mu(a),\mu(b)\},\mu(e)\}$

  $= \min\{\mu(a),\mu(b)\} = \beta(a,b)$

  Untuk kasus $a \neq b \neq c$, maka

  $\min\{\beta(a,b),\beta(b,c)\} = \min\{\min\{\mu(a),\mu(b)\},\min\{\mu(b),\mu(c)\}\} \leq \min\{\mu(a),\mu(c)\}$
  $= \beta(a,c)$

■

Berdasarkan definisi relasi fuzzy β di atas dan sifat yang berlaku pada subhimpunan fuzzy μ pada G, diperoleh akibat sebagi berikut:

Akibat 2.1. *Untuk relasi biner fuzzy β di atas , maka berlaku* $\beta(x^{-1},y^{-1}) = \beta(x,y)$

Bukti:

$$\beta(x^{-1},y^{-1}) = \min\{\mu(x^{-1}),\mu(y^{-1})\} = \min\{\mu(x),\mu(y)\} = \beta(x,y)$$

■

Proposisi selanjutnya, menjamin bahwa relasi fuzzy β adalah relasi fuzzy yang kompatibel.

Proposisi 2.3. *Relasi biner fuzzy β adalah relasi kompatibel fuzzy*

Bukti:

Untuk setiap $a,b,c,d \in G$, maka ditunjukkan bahwa $\min\{\beta(a,b),\beta(c,d)\} \le \beta(ac,bd)$.

Ambil sebarang $a,b,c,d \in G$, maka :

$$\begin{aligned}\min\{\beta(a,b),\beta(c,d)\} &= \min\{\min(\mu(a),\mu(b)),\min(\mu(c),\mu(d))\}\\ &= \min\{\mu(a),\mu(b),\mu(c),\mu(d)\}\\ &\le \min(\mu(ab),\mu(cd)) = \beta(ab,cd)\end{aligned}$$

■

Sebagai konsekuensi dari Proposisi 2.1, Proposisi 2.2 dan Proposisi 2.3 , maka diperoleh akibat sebagai berikut.

Akibat 3.2. *Relasi biner fuzzy β adalah relasi kongruensi fuzzy*

Misalkan G adalah grup, dan H adalah subgrup normal dari. G maka $G/H = \{aH \mid a \in G\}$ adalah suatu grup. Sehingga dapat dibentuk suatu subhimpunan fuzzy $\lambda : G/H \to [0,1]$ dan selanjutnya disebut subgrup normal fuzzy G/H. Secara analog pula dapat didefinisikan suatu subgrup hasil bagi fuzzy G/H. Selanjutnya dibangun suatu pemetaan $\lambda : G/H \to [0,1]$, yang didefinisikan $\lambda(xH) = \beta(x,h)$ untuk setiap $h \in H$.

Selanjutnya dapat dibuktikan bahwa λ relasi biner fuzzy adalah subhimpunan fuzzy pada grup hasil bagi G/H atau yang disebut dengan subgrup hasil bagi fuzzy pada G/H.

Proposisi .2.4. *Subhimpunan fuzzy λ adalah subgrup hasil bagi fuzzy pada G/H*

Bukti:

Untuk membuktikan Proposisi tersebut, maka harus dibuktikan bahwa:

a. $\lambda(xHyH) \ge \min\{\lambda(xH),\lambda(yH)\}$

Sub bukti:

$\lambda(xHyH) = \lambda(xyH) = \beta(xy,h)$, untuk setiap $h \in H$

$= \min\{\mu(xy),\mu(h)\}$ untuk setiap $h \in H$

$\geq \min\{\min\{\mu(x),\mu(y)\},\mu(h)\}$	untuk setiap $h \in H$
$= \min\{\mu(x),\mu(y),\mu(h)\}$	untuk setiap $h \in H$
$= \min\{\mu(x),\mu(y)\}$	untuk setiap $h \in H$
$= \min\{\min\{\mu(x),\mu(h)\},\min\{\mu(y),\mu(h)\}\}$	untuk setiap $h \in H$
$= \min\{\beta(x,h),\beta(y,h)\}$	untuk setiap $h \in H$
$= \min\{\lambda(xH),\lambda(yH)\}$	

b. $\lambda(-xH) = \lambda(xH)$

Sub bukti:

$\lambda(-xH) = \lambda(-xh) = \beta(-x,h) = \min\{\mu(-x),\mu(h)\}$	untuk setiap $h \in H$
$= \min\{\mu(x),\mu(h)\} = \beta(x,h) = \lambda(xh)$	untuk setiap $h \in H$
$= \lambda(xH)$	

■

Proposisi 2.5. *Subhimpunan fuzzy* λ *adalah subgrup normal fuzzy pada* G/H

Bukti:

Dalam hal ini tinggal dibuktikan bahwa:

$\lambda(xHyH) = \lambda(yHxH)$

$\lambda(xHyH) = \lambda(xyH) = \beta(xy,h)$ untuk setiap $h \in H$

$= \min\{\mu(xy),\mu(h)\}$

$= \min\{\min\{\mu(x),\mu(y)\},\mu(h)\}$

$= \min\{\min\{\mu(y),\mu(x)\},\mu(h)\}$

$= \min\{\mu(yx),\mu(h)\}$

$= \beta(yx,h) = \lambda(yxH)$

$\lambda(xHyH) = \lambda(yHxH)$

■

Proposisi 2.6. *Misalkan* λ *adalah subgrup hasil bagi fuzzy pada grup* G/H *dan* $xH \in G/H$ *, sehingga berlaku:*

$$\lambda(xHyH) = \lambda(yH),\ \forall yH \in G/H \Leftrightarrow \lambda(xH) = \lambda(H)$$

Bukti:

(□)

Diketahui $\lambda(xHyH) = \lambda(yH),\ \forall yH \in G/H$, sehingga

$\lambda(xHyH) = \lambda(yH)$

$\lambda(xyH) = \lambda(yH)$

Akan terjadi jika dan hanya jika $xy = y$, atau $xyy^{-1} = yy^{-1}$

$\lambda(xH) = \beta(x,h) = \beta(e,h) = \lambda(eH) = \lambda(H)$

(□)

Diketahui $\lambda(xH) = \lambda(H)$ ' dibuktikan $\lambda(xHyH) = \lambda(yH),\ \forall yH \in G/H$

Diketahui bahwa λ adalah subgrup hasil bagi fuzzy pada grup G/H dan μ adalah subgrup fuzzy pada G. Selanjutnya diperoleh:

$$\lambda(xHyH) = \min\{\lambda(xH), \lambda(yH)\} = \min\{\lambda(H), \lambda(yH)\} = \min\{\lambda(eH), \lambda(yH)\}$$

$$= \min\{\beta(e,h), \beta(y,h)\} = \min\{\min\{\mu(e), \mu(h)\}, \min\{\mu(y), \mu(h)\}\}$$

$$= \min\{\mu(h), \min\{\mu(y), \mu(h)\}\} = \min\{\mu(y), \mu(h)\} = \beta(y,h) = \lambda(yH)$$

■

Jika dipunyai subhimpunan fuzzy pada sebarang himpunan yang sama, misalkan α dan β, maka yang dimaksud dengan $\alpha \cap \beta$ adalah minimum dari derajat kanggotaan suatu elemen relative terhadap α dan β. Sehingga diperoleh propoisi sebagai berikut:

Proposisi 2.7. Jika λ dan γ adalah subgrup normal fuzzy pada grup G/H, maka $\lambda \cap \gamma$ subgrup normal fuzzy pada grup G/H.

- Dibuktikan $\lambda \cap \gamma\ (xHyH) \geq \min\{\lambda \cap \gamma(xH), \lambda \cap \gamma(yH)\}$

$$\lambda \cap \gamma\ (xHyH) = \min\{\lambda(xHyH), \gamma(xHyH)\}$$

$$\geq \min\{\min\{\lambda(xH), \lambda(yH)\}, \min\{\gamma(xH), \gamma(yH)\}\}$$

$$= \min\{\min\{\lambda(xH), \gamma(xH)\}, \min\{\lambda(yH), \gamma(yH)\}\}$$

$$= \min\{\lambda \cap \gamma(xH), \lambda \cap \gamma(yH)\}$$

- Dibuktikan $\lambda \cap \gamma(xH) = \lambda \cap \gamma(-xH)$

$$\lambda \cap \gamma(xH) = \min\{\lambda(xH), \gamma(xH)\} = \min\{\lambda(-xH), \gamma(-xH)\} = \lambda \cap \gamma(-xH)$$

❖ Dibuktikan $\lambda \cap \gamma(xHyH) = \lambda \cap \gamma(yHxH)$

$$\lambda \cap \gamma(xHyH) = \min\{\lambda(xHyH), \gamma(xHyH)\} = \min\{\lambda(yHxH), \gamma(yHxH)\}$$
$$= \lambda \cap \gamma\{yHxH\}$$

■

Himpunan G/H adalah grup, sehingga secara analog dapat dibentuk suatu pemetaan α, dari $G/H \times G/H$ ke interval $[0,1]$, yang didefnisikan $\alpha(xH, yH) = \lambda(xHy^{-1}H)$.

Proposisi 2.8. *Relasi* $\alpha(xH, yH) = \lambda(xHy^{-1}H)$ *adalah relasi biner fuzzy pada* $G/H \times G/H$

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $(xH, yH) = (x'H, y'H) \Rightarrow \alpha(xHyH) = \alpha(x'Hy'H)$

$(xH, yH) = (x'H, y'H)$, maka $xH = x'H$ dan $yH = y'H$ atau $xx'^{-1} \in H$ dan $yy'^{-1} \in H$

$$\alpha(xH, yH) = \lambda(xHy^{-1}H) = \lambda(xy^{-1}H) = \beta(xy^{-1}, h) = \min\{\mu(xy^{-1}), \mu(h)\}$$
$$= \min\{\mu(x'y'^{-1}), \mu(h)\} = \beta(x'y'^{-1}, h) = \lambda\left(x'y'^{-1}H\right) = \alpha(x'Hy'H)$$

■

Proposisi 2.9. Relasi $\alpha(xH, yH) = \lambda(xHy^{-1}H)$ adalah relasi kongruensi fuzzy pada $G/H \times G/H$

Bukti

❖ $\alpha(xH, yH) = \lambda(xHy^{-1}H)$ adalah refleksif

$$\alpha(xH, xH) = \lambda(xHx^{-1}H) = \lambda(xx^{-1}H) = \lambda(eH) = \lambda(H) = 1$$

❖ $\alpha(xH, yH) = \lambda(xHy^{-1}H)$ adalah simetrik

$$\alpha(xH,yH)=\lambda(xHy^{-1}H)$$

$$=\lambda(xy^{-1}H)=\lambda\left((xy^{-1})^{-1}H\right)=\lambda(yx^{-1}H)=\lambda(yHx^{-1}H)=\alpha(yH,xH)$$

❖ $\alpha(xH,yH)=\lambda(xHy^{-1}H)$ adalah transitif

Harus dibuktikan bahwa $\min\{\alpha(xH,yH),\alpha(yH,zH)\}\le\alpha(xH,zH)$

$$\min\{\alpha(xH,yH),\alpha(yH,zH)\}=\min\left\{\lambda(xHy^{-1}H),\lambda(yHz^{-1}H)\right\}$$

$$=\min\left\{\lambda(xy^{-1}H),\lambda(yz^{-1}H)\right\}$$

$$=\min\left\{\beta(xy^{-1},h),\beta(yz^{-1},h)\right\}=\min\left\{\min\left\{\mu\left(xy^{-1}\right),\mu(h)\right\},\min\left\{\mu(yz^{-1}),\mu(h)\right\}\right\}$$

$$\le\min\left\{\min\left\{\mu(xy^{-1}),\mu(yz^{-1})\right\},\mu(h)\right\}\le\min\left\{\mu(xy^{-1}yz^{-1}),\mu(h)\right\}$$

$$=\min\left\{\mu(xz^{-1}),\mu(h)\right\}$$

$$=\beta(xz^{-1},h)=\lambda(xz^{-1}H)=\lambda(xHz^{-1}H)=\alpha(xH,zH)$$

❖ Dibuktikan bahwa $\alpha(xH,yH)=\lambda(xHy^{-1}H)$ adalah kompatibel, yaitu:

$$\min\{\alpha(xH,yH),\alpha(zH,wH)\}\le\alpha(xzH,ywH)$$

$$\min\{\alpha(xH,yH),\alpha(zH,wH)\}=\min\left\{\lambda(xy^{-1}H),\lambda(zw^{-1}H)\right\}$$

$$=\min\left\{\beta(xy^{-1},h),\beta(zw^{-1},h)\right\}$$

$$=\min\left\{\min\left\{\mu(xy^{-1}),\mu(h)\right\},\min\left\{\mu(zw^{-1}),\mu(h)\right\}\right\}$$

$$=\min\left\{\mu(xy^{-1}),\mu(zw^{-1})\right\}$$

$$=\min\left\{\mu(y^{-1}x),\mu(w^{-1}z)\right\}$$

$$\le\mu(y^{-1}xw^{-1}z)$$

$$=\mu(xzw^{-1}y^{-1})$$

$$=\min\left\{\mu(xzw^{-1}y^{-1}),\mu(h)\right\}$$

$$=\beta(xzw^{-1}y^{-1},h)$$

$$=\beta\left(xz(yw)^{-1},h\right)$$

$$=\alpha(xzH,ywH)$$

■

C. Penutup

C.1. Simpulan

Berdasarkan pembahasan di atas diperoleh hasil bahwa:

1. Misalkan G adalah grup dengan elemen idenitasnya e dan μ adalah subgrup fuzzy pada G. Didefinisikan suatu relasi β pada $G \times G$ dipetakan ke interval $[0,1]$ sebagai berikut: $\beta(a,b) = \min\{\mu(a), \mu(b)\}$ jika $a \neq b$ dan $\beta(a,b) = \mu(e)$ jika $a = b$, maka β adalah relasi kongruensi fuzzy.
2. Pemetaan $\lambda : {}^{G}\!/_{H} \to [0,1]$, yang didefinisikan $\lambda(xH) = \beta(x,h)$ untuk setiap $h \in H$, adalah relasi kongruensi fuzzy
3. Pemetaan α, dari ${}^{G}\!/_{H} \times {}^{G}\!/_{H}$ ke interval $[0,1]$, yang didefnisikan $\alpha(xH, yH) = \lambda(xHy^{-1}H)$ adalah relasi kongruensi fuzzy.

C.2. Saran

Dalam tulisan ini hanya didasarkan pada subgrup fuzzy, subgrup normal fuzzy dan subgrup hasil bagi fuzzy. Hal ini diduga dapat dikembangkan untuk struktur aljabar yang lain. Dapat juga diberikan contoh-contoh lain definisi relasi fuzzy pada sebrang subgrup fuzzy, subgrup normal fuzzy dan subgrup hasil bagi fuzzy.

D. Daftar Pustaka

Ajmal, Naseem. 1994. Homomorphism of Fuzzy groups, Corrrespondence Theorm and Fuzzy Quotient Groups. *Fuzzy Sets and Systems 61, p:329-339*. North-Holland

Asaad, Mohamed.1991. Group and Fuzzy Subgroup. *Fuzzy Sets and Systems 39, p:323-328*. North-Holland

Kandasamy, W.B.V. 2003. *Smarandache Fuzzy Algebra*. American Research Press and W.B. Vasantha Kandasamy Rehoboth. USA

Klir, G.J, Clair, U.S, Yuan, B. 1997. *Fuzzy Set Theory: Foundation and Applications*. Prentice-Hall, Inc. USA

Mordeson, J.N, Malik, D.S. 1998. *Fuzzy Commutative Algebra.* World Scientifics Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore

Ray, A.K, Ali, T. 2002. Ideals and Divisibility in A Ring with Respect to A Fuzzy Subset. *Novi Sad J Math, Vol 32, No. 2, p: 67-75*

Shabir, M. 2005. Fully Fuzzy Prime Semigroups. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences:1 p:163-168*

Zimmermann, H.J, 1991. *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers. USA.