Kredibilitas dengan Pendekatan Bühlmann

Isnandar Slamet dan Kristina Natalia
Jurusan Matematika FMIPA UNS

Abstrak

Teori kredibilitas merupakan proses pembuatan tarif oleh aktuaris untuk melakukan penyesuaian premi di masa depan menurut pengalaman masa lampau. Pada teori kredibilitas terdapat tiga pendekatan untuk menentukan perkiraan kredibilitas $C = Z\,\overline{X} + (1-Z)\,\mu$. Salah satu pendekatan yaitu kredibilitas keakuratan terbesar dengan menggunakan model Bühlmann. Bühlmann mendefinisikan faktor kredibilitas Z sebagai berikut $Z = \dfrac{n}{n+K}$, dengan $0 \le Z \le 1$, dimana n menyatakan banyak percobaan dan K disebut parameter kredibilitas Bühlmann. Tujuan dalam penulisan ini adalah menentukan perkiraan kredibilitas dengan menggunakan model Bühlmann dan mengestimasi parameter-parameter dari kredibilitas Bühlmann. Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi adalah studi literatur.

Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa dalam menentukan perkiraan kredibilitas menggunakan kredibilitas Bühlmann, melibatkan penerapan analisis dari variansi, yaitu menghitung nilai harapan dari variansi proses dan variansi dari rata-rata yang diduga. Parameter-parameter kredibilitas Bühlmann diestimasi berdasarkan data empiris yang diamati.

Kata kunci: kredibilitas, Bühlmann

1. PENDAHULUAN

Aktuaris menggunakan pengamatan-pengamatan dari kejadian yang terjadi di masa lampau untuk memprediksi biaya-biaya di masa depan. Teori kredibilitas adalah proses pembuatan tarif oleh aktuaris untuk melakukan penyesuaian premi di masa depan, menurut pengalaman masa lampau. Menurut Dean dan Howard (2006), ada tiga pendekatan yang dapat digunakan untuk menentukan faktor kredibilitas, yaitu model kredibilitas klasik yang disebut juga sebagai pendekatan kredibilitas fluktuasi terbatas (*limited fluctuation credibility approach*), pendekatan kredibilitas keakuratan terbesar (*greatest accuracy credibility approach*) dan analisis Bayesian. Pada pendekatan kredibilitas keakuratan terbesar terdapat dua model, yaitu model Bühlmann dan model Bühlmann-Straub. Dalam penulisan ini dilakukan kaji ulang kredibilitas keakuratan terbesar dengan model Bühlmann untuk menentukan perkiraan kredibilitas dan menentukan penduga dari parameter-parameter kredibilitas Bühlmann.

2. PEMBAHASAN

Denuit *et al*. (2001) menyatakan bahwa permasalahan yang muncul dalam praktek asuransi adalah bagaimana menggunakan pengalaman untuk menentukan premi di masa yang akan datang, dengan menghitung bukan hanya pengalaman individual saja, tetapi juga pengalaman kolektif. Hal ini menimbulkan dua kemungkinan besar. Pertama, membebani premi yang sama kepada setiap orang, yang diduga dengan rata-rata keseluruhan data, μ.

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional MIPA 2007 dengan tema **"Peningkatan Keprofesionalan Peneliti, Pendidik & Praktisi MIPA"** yang diselenggarakan oleh Fakultas MIPA UNY Yogyakarta pada tanggal 25 Agustus 2007

Kemungkinan kedua yaitu membebani kelompok *i* dengan rata-rata klaim sendiri, $\overline{X}_i$, sebagai premi. Sebuah kompromi yang terjadi sejak awal abad 20, yang menyatakan premi sebagai rata-rata bobot dari kedua kemungkinan tersebut, yaitu $C = Z\,\overline{X}_i + (1-Z)\,\mu$. Faktor *Z* menyatakan seberapa besar terpercayanya pengalaman perseorangan dari kelompok tersebut. Faktor *Z* disebut juga faktor kredibilitas dan *C* disebut perkiraan kredibilitas.

Herzog (1996) menyatakan sebuah alternatif pendekatan yang tidak memerlukan informasi awal untuk menghitung faktor kredibilitas *Z* dikenal sebagai kredibilitas Bühlmann, untuk menghormati Hans Bühlmann sebagai pengusulnya . Bühlmann mendefinisikan faktor kredibilitas *Z* sebagai

$$Z = \frac{n}{n+K}, \tag{2.1}$$

dengan $0 \le Z \le 1$. Pada persamaan (3.1) , *n* menyatakan banyak percobaan dan *K* menyatakan parameter kredibilitas Bühlmann, dirumuskan sebagai

$$K = \frac{\text{nilai harapan dari variansi proses}}{\text{variansi dari rata} - \text{rata yang diduga}}. \tag{2.2}$$

Penghitungan nilai *K* melibatkan penerapan analisis dari variansi, yaitu menghitung nilai harapan dari variansi proses dan variansi dari rata-rata yang diduga.

2.1 Nilai Harapan dari Variansi Proses

Herzog (1996) menyatakan bahwa secara umum variansi proses menunjuk kepada variansi frekuensi, tingkat kegawatan atau jumlah klaim keseluruhan pada kombinasi individual dari karakteristik-karakteristik risiko. Oleh karena itu, variansi proses adalah variansi bersyarat, dengan diberikan kombinasi dari karakteristik-karakteristik risiko.

Pengamatan selama *t* waktu dari sebuah atau sekelompok risiko dilambangkan dengan x_t, yang merupakan observasi dari variabel random X_t, dengan *t* bilangan bulat. Risiko individual adalah anggota dari sebuah populasi yang besar dan karakteristik-karakteristik dari risiko individual dicirikan oleh paramater risiko θ. Parameter risiko diasumsikan tidak diketahui distribusi populasinya dan variabel randomnya dilambangkan Θ. Distribusi dari variabel random X_t tergantung pada nilai θ; $f_{X|\Theta}(x_t \mid \theta)$. Jika X_t adalah variabel random kontinu, variansi bersyarat dari X_t jika diberikan $\Theta = \theta$ adalah

$$\begin{aligned} Var_{X|\Theta}[X_t \mid \Theta = \theta] &= E_{X|\Theta}[(X_t - \mu(\theta))^2 \mid \Theta = \theta] \\ &= \iint (X_t - \mu(\theta))^2 f_{X|\Theta}(x_t \mid \theta)\, dx_t = \sigma^2(\theta). \end{aligned}$$

Variansi ini disebut variansi proses untuk risiko yang terpilih. Variansi tidak bersyarat dari X_t, juga dikenal sebagai total variansi, yang dirumuskan sebagai

$$Var[X_t] = Var_\Theta[E_{X|\Theta}[X_t \mid \Theta]] + E_\Theta[Var_{X|\Theta}[X_t \mid \Theta]]. \qquad (2.3)$$

Persamaan (3.3) dapat ditulis sebagai berikut

$$\text{Total Variansi} = \frac{\text{Variansi dari}}{\text{rata – rata yang diduga}} + \frac{\text{Nilai harapan}}{\text{dari variansi proses}}.$$

Nilai harapan dari variansi proses (*EPV*) disimbolkan sebagai berikut

$$v = E_{X|\Theta}[Var_{X|t}[X_t \mid \Theta]] = E_{X|\Theta}[\sigma^2(\Theta)].$$

Nilai harapan dari variansi proses menunjukkan variabilitas nilai harapan dari pengamatan yang dilakukan pada risiko individual.

2.2 Variansi dari Rata-Rata yang Diduga

Secara umum, rata-rata yang diduga menunjuk kepada nilai rata-rata frekuensi, tingkat kegawatan, atau jumlah klaim keseluruhan pada kombinasi individual dari karakteristik-karateristik risiko. Rata-rata yang diduga adalah nilai harapan bersyarat, dengan diberikan kombinasi dari karakteristik-karakteristik risiko (Herzog, 1996).

Jika X_t adalah variabel random kontinu, rata-rata untuk X_t jika diberikan $\Theta = \theta$, adalah nilai harapan bersyarat sebagai berikut

$$E_{X|\Theta}[X_t \mid \Theta = \theta] = \int x_t f_{X|\Theta}(x_t \mid \theta) dx_t = \mu(\theta).$$

Jika X_t adalah variabel random diskrit, maka nilai harapan bersyarat menjadi

$$E_{X|\Theta}[X_t \mid \Theta = \theta] = \sum_{\forall x_t} x_t f_{X|\Theta}(x_t \mid \theta).$$

Rata-rata X_t disebut sebagai rata-rata yang diduga, dan dinotasikan dengan

$$\mu(\theta) = E_{X|\Theta}[X_1 \mid \theta] = \ldots = E_{X|\Theta}[X_N \mid \theta] = E_{X|\Theta}[X_{N+1} \mid \theta] = \ldots.$$

Parameter risiko yang diwakili oleh variabel random Θ mempunyai fungsi densitas probabilitas (fdp), $f_\Theta(\theta)$. Jika dua risiko mempunyai parameter yang sama, yaitu θ, maka karakteristik-karakteristik risikonya diasumsikan sama dan mempunyai rata-rata yang sama, yaitu $\mu(\theta)$.

Nilai harapan tidak bersyarat dari X_t sebagai berikut

$$E[X_t] = \iint x_t\, f_{X,\Theta}(x_t,\theta)dx_t d\theta = \iint x_t\, f_{X|\Theta}(x_t \mid \theta)\, f_\Theta(\theta)dx_t d\theta$$
$$= \int \left[\int x_t\, f_{X|\Theta}(x_t \mid \theta)dx_t \right] f_\Theta(\theta)\, d\theta = E_\Theta[E_{x|\Theta}[X_t \mid \Theta]]$$
$$= E_\Theta[\mu(\theta)] = \mu.$$

Variansi dari rata-rata yang diduga adalah ukuran perbedaan antar rata-rata dari risiko pada populasi, dan dilambangkan sebagai berikut

$$a = Var_\Theta[\mu(\Theta)] = E_\Theta[(\mu(\Theta) - \mu)^2].$$

2.3 Faktor Kredibilitas Bühlmann

Kredibilitas Bühlmann memerlukan penghitungan nilai dari parameter kredibilitas Bühlmann, *K*, supaya dapat menentukan faktor kredibilitas yang telah didefinisikan pada persamaan (2.1). Titik awal penghitungan *K* adalah kombinasi individual dari karakteristik-karakteristik risiko. Untuk setiap kombinasi dari karakteristik-karakteristik risiko, pendekatan nilai harapan dan variansi dapat dihitung, dan nilai *K* juga dapat ditentukan sesuai dengan persamaan (2.2).Faktor kredibilitas yang diperoleh akan digunakan untuk menentukan perkiraan kredibilitas yang diinginkan, dengan perkiraan kredibilitas dirumuskan sebagai

$$C = Z\,\overline{X} + (1 - Z)\,\mu\,.$$

2.4 Estimasi Parameter-Parameter Kredibilitas Bühlmann

Pada prakteknya *EPV* dan *VHM* seringkali tidak diketahui. Estimasi *EPV* dan *VHM* dapat dibuat dari observasi-observasi empiris sampel dari populasi risiko. Model Bühlmann mengasumsikan bahwa untuk setiap resiko *i* yang diberikan variabel random $\{X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in}\}$ menggambarkan hasil yang mungkin untuk *n* pengamatan yang berbeda, akan saling bebas dan berdistribusi sama, serta mempunyai rata-rata dan variansi yang sama. Hasil yang mungkin untuk risiko-risiko yang berbeda juga saling bebas. Pada sampel dianggap terdapat *r* risiko dan *n* observasi dari setiap risiko.

Penduga tak bias untuk setiap rata-rata resiko $\mu(\theta_i)$ dinyatakan dengan $\overline{X}_i$ dan penduga tak bias untuk setiap proses variansi resiko $\sigma^2(\theta_i)$ dinyatakan dengan $\hat{\sigma}_i^2$. Variansi proses dari sampel $\hat{\sigma}_i^2$ dapat dikombinasikan untuk menghasilkan perkiraan tak bias untuk nilai harapan dari variansi proses pada populasi. Sehingga estimasi nilai harapan dari variansi proses adalah

$$\hat{v} = \left(\frac{1}{r}\right)\sum_{i=1}^{r} \hat{\sigma}_i^2 = \left(\frac{1}{r(n-1)} \sum_{i=1}^{r}\sum_{t=1}^{n} (X_{it} - \overline{X}_i)^2\right). \tag{2.4}$$

Penduga tak bias untuk setiap mean risiko-risiko $\overline{X}_i$ digunakan untuk mengestimasi variansi dari rata-rata yang diduga. Karena *r* risiko saling bebas, maka $\overline{X}_i$ adalah variabel random yang saling bebas. Penduga tak bias untuk variansi dari $\overline{X}_i$ adalah

$$V\hat{a}r[\overline{X}_i] = \left(\frac{1}{r-1}\right)\sum_{i=1}^{r}(\overline{X}_i - \overline{X})^2 , \tag{2.5}$$

dengan $\overline{X} = \left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\overline{X}_i\right).$

Rumus total variansi menyatakan bahwa

$$Var[\overline{X}_i] = Var_{\Theta}[E_{X|\Theta}[\overline{X}_i \mid \Theta_i]] + E_{\Theta}[Var_{X|\Theta}[\overline{X}_i \mid \Theta_i]]. \tag{2.6}$$

Karena

$$E_{X|\Theta}(\overline{X}_i \mid \Theta_i = \theta_i) = \mu(\theta_i)$$

dan

$$Var_{X|\Theta}[\overline{X}_i \mid \theta_i] = Var_{X|\Theta}\left[\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{t=1}^{n}X_{it} \mid \theta_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2\sum_{t=1}^{n}Var_{X|\Theta}[X_{it} \mid \theta_i] = \frac{\sigma^2(\theta_i)}{n}.$$

Persamaan (2.6) dapat ditulis kembali sebagai

$$Var[\overline{X}_i] = Var_{\Theta}[\mu(\Theta_i)] + E_{\Theta}[\sigma^2(\Theta_i)]/n \tag{2.7}$$

Notasi pertama yang berada di sebelah kanan persamaan (2.7) disebut *VHM* dan notasi kedua adalah *EPV/n*. Persamaan (2.7) dapat ditulis kembali sebagai

$$a = Var[\overline{X}_i] - v/n . \tag{2.8}$$

Subtitusikan persamaan (2.4) dan persamaan (2.5) ke dalam persamaan (2.8). Sehingga, penduga tak bias dari *VHM* adalah

$$\begin{aligned}\hat{a} &= V\hat{a}r[\overline{X}_i] - \hat{v}/n \\ &= \left(\frac{1}{r-1}\right)\sum_{i=1}^{r}(\overline{X}_i - \overline{X})^2 - \left\{\left(\frac{1}{r(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{r}\sum_{t=1}^{n}(X_{it} - \overline{X}_i)^2\right\}\Big/ n .\end{aligned} \tag{2.9}$$

Rumus penduga $\hat{a}$ pada persamaan (2.9) memperlihatkan $V\hat{a}r[\overline{X}_i]$ dikurangi $\hat{v}/n$. Pengurangan ini dapat mengakibatkan $\hat{a}$ bernilai negatif. Oleh karena variansi haruslah nonnegatif, jika diperoleh $\hat{a}$ negatif maka nilai $\hat{a}$ tersebut dapat diasumsikan nol. Penduga dari parameter kredibilitas Bühlmann adalah

$$\hat{K} = \frac{\hat{v}}{\hat{a}} ,$$

dan penduga dari faktor kredibilitas yaitu

$$\hat{Z} = \frac{n}{n + \hat{K}}.$$

Oleh karena itu, penduga dari perkiraan kredibilitas yang diinginkan yaitu

$$\hat{C} = \hat{Z} \cdot \overline{X}_i + (1 - \hat{Z}) \cdot \overline{X}.$$

2.5 Contoh Aplikasi

2.5.1 Contoh Aplikasi Model Bühlmann

Dean dan Howard (2006) memberikan contoh aplikasi model Bühlmann untuk mencari frekuensi, tingkat kegawatan, dan premi murni, dengan informasi data diberikan dalam Tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1 Informasi Data Frekuensi, Tingkat Kegawatan dan Premi Murni

Tipe	Proposi risiko	Frekuensi berdistribusi Bernoulli	Tingkat kegawatan berdistribusi gamma
1	50%	p = 40%	$\alpha = 4$, $\lambda = .01$
2	30%	p = 70%	$\alpha = 3$, $\lambda = .01$
3	20%	p = 80%	$\alpha = 2$, $\lambda = .01$

Tipe-tipe diasumsikan homogen, yang berarti setiap tertanggung dari tipe yang diberikan mempunyai frekuensi dan proses tingkat kegawatan yang sama. Untuk tertanggung individual diasumsikan frekuensi dan tingkat kegawatan saling bebas. Tertanggung diambil secara random dari tipe yang tidak diketahui. Tertanggung yang terpilih secara random tersebut selama empat tahun mempunyai observasi tiga klaim dengan total $450. Kredibilitas Bühlmann digunakan untuk memprediksi frekuensi, tingkat kegawatan, dan premi murni di masa yang akan datang dari tertanggung tersebut.

Penyelesaian.

Penghitungan estimasi yang diinginkan dimulai dari kasus yang lebih mudah yaitu frekuensi, kemudian tingkat kegawatan, dan premi murni yang merupakan kasus yang lebih kompleks.

1. Kasus Frekuensi

Jumlah pengamatan pada kasus frekuensi adalah waktu terjadinya klaim, dan besarnya yaitu $n = 4$.

a. Menentukan nilai harapan dari variansi proses

Frekuensi diketahui berdistribusi Bernoulli dengan variansi sebagai berikut.

$$\sigma_t^2 = p\,q = p\,(1-p)\,. \qquad (2.10)$$

Berdasarkan persamaan (3.10) variansi proses dari frekuensi Bernoulli untuk setiap tipe adalah

$$\sigma_1^2 = (0.4)\,(1-0.4) = 0.24\,,$$

$$\sigma_2^2 = (0.7)\,(1-0.7) = 0.21,$$

$$\sigma_3^2 = (0.8)\,(1-0.8) = 0.16\,.$$

Nilai harapan dari variansi proses adalah rata-rata bobot variansi proses dari tipe-tipe individual, dengan probabilitas awal sebagai bobot maka besar nilai harapan dari variansi proses (*EPV*) pada kasus frekuensi yaitu

$$v = (50\%)\,(0.24) + (30\%)\,(0.21) + (20\%)\,(0.16) = 0.215\,.$$

b. Menentukan variansi dari rata-rata yang diduga

Momen pertama dari frekuensi yaitu

$$E[X_t] = (50\%)\,(0.4) + (30\%)\,(0.7) + (20\%)\,(0.8) = 0.57\,, \qquad (2.11)$$

dan momen kedua yaitu

$$E[X_t^2] = (50\%)\,(0.4^2) + (30\%)\,(0.7^2) + (20\%)\,(0.8^2) = 0.355\,. \qquad (2.12)$$

Oleh karena itu, dengan persamaan (2.11) dan (2.12) dapat ditentukan besarnya variansi dari rata-rata yang diduga yaitu

$$a = E[X_t^2] - E[X_t]^2 = 0.355 - 0.57^2 = 0.0301.$$

c. Menghitung *K*, faktor kredibilitas dan perkiraan kredibilitas

Menurut persamaan (2.2) besar *K* dari kasus frekuensi yaitu

$$K = \frac{v}{a} = \frac{0.215}{0.0301} = 7.14\,.$$

Persamaan (2.1) menyatakan besarnya faktor kredibilitas yang diperoleh sebagai

$$Z = \frac{4}{4+7.14} = \frac{4}{11.14} = 0.359\,.$$

Besarnya observasi frekuensi adalah $\overline{X} = 3/4 = 0.75$ dan rata-rata awal frekuensi adalah $\mu = E[X_t] = 0.57$. Oleh karena itu, perkiraan kredibilitas untuk frekuensi di masa yang akan datang yaitu

$$C = Z\,\overline{X} + (1-Z)\,\mu = (0.359)\,(0.75) + (1-0.359)\,(0.57) = 0.635\,.$$

2. Kasus tingkat kegawatan

Pada kasus tingkat kegawatan, yang diamati adalah banyaknya klaim yang terjadi, maka jumlah pengamatan yaitu $n = 3$.

a. Menentukan nilai harapan dari variansi proses

Tingkat kegawatan berdistribusi Gamma $(1/\lambda, \alpha)$. Besarnya variansi proses yaitu

- Untuk tipe 1, $\sigma_1^2 = \alpha/\lambda^2 = 4/0.01^2 = 40{,}000.$
- Untuk tipe 2, $\sigma_2^2 = 3/0.01^2 = 30{,}000$.
- Untuk tipe 3, $\sigma_3^2 = 2/0.01^2 = 20{,}000$.

Rata-rata frekuensi yaitu 0.4, 0.7, dan 0.8. Nilai awal pada setiap tipe yaitu 50%, 30%, dan 20%. Maka, besar bobot yang akan digunakan dalam penghitungan nilai harapan dari variansi proses yaitu (0.4) (50%) = 0.2, (0.7) (30%) = 0.21, dan (0.8) (20%) = 0.16. Sehingga, nilai harapan dari variansi proses pada tingkat kegawatan yaitu

$$\begin{aligned} v &= \{(0.2)(40{,}000) + (0.21)(30{,}000) + (0.16)(20{,}000)\}/(0.2 + 0.21 + 0.16) \\ &= 30{,}702. \end{aligned}$$

b. Menentukan variansi dari rata-rata yang diduga

Variansi dari rata-rata yang diduga pada tingkat kegawatan penghitungannya sama dengan variansi yang lainnya. Pertama, hitung momen pertamanya yaitu {(0.2) (400) + (0.21) (300) + (0.16) (200)}/(0.2 + 0.21 + 0.16) = 307.02. Kemudian hitung momen keduanya yaitu {(0.2) (400^2) + (0.21) (300^2) + (0.16) (200^2)}/(0.2 + 0.21 + 0.16) = 100,526. Sehingga, besarnya variansi dari rata-rata yang diduga pada tingkat kegawatan yaitu

$$a = 100{,}526 - 307.02^2 = 6{,}265.$$

c. Menghitung *K*, faktor kredibilitas dan perkiraan kredibilitas

Besar *K* pada kasus tingkat kegawatan yaitu

$$K = \frac{v}{a} = \frac{30{,}702}{6{,}265} = 4.90.$$

Faktor kredibilitas diperoleh sebagai berikut

$$Z = \frac{3}{3 + 4.90} = \frac{3}{7.90} = 0.38$$

Observasi tingkat kegawatan yaitu \$450 / 3 = \$150 dan rata-rata awal yaitu \$307. Sehingga, perkiraan kredibilitas untuk tingkat kegawatan di masa yang akan datang yaitu

$$C = (0.38)(150) + (1 - 0.38)(307) = \$247.3.$$

3. Kasus Premi Murni

Jumlah pengamatan pada kasus premi murni yaitu $n = 4$.

a. Menentukan nilai harapan dari variansi proses

Premi murni adalah produk dari frekuensi dan tingkat kegawatan. Variansi proses dari setiap tipe adalah sebagai berikut.

- Untuk tipe 1, $\sigma_1^2 = (0.4)(40{,}000) + (400)2\,(0.24) = 54{,}400.$
- Untuk tipe 2, $\sigma_2^2 = (0.7)(30{,}000) + (300)2\,(0.21) = 39{,}900.$
- Untuk tipe 3, $\sigma_3^2 = (0.8)(20{,}000) + (200)2\,(0.16) = 22{,}400.$

Oleh karena itu, nilai harapan dari variansi proses untuk premi murni yaitu

$$v = (50\%)(54{,}400) + (30\%)(39{,}900) + (20\%)(22{,}400) = 43{,}650.$$

b. Menentukan variansi dari rata-rata yang diduga

Penghitungan variansi dari rata-rata yang diduga pada premi murni mirip penghitungan pada frekuensi, dengan besar rata-rata premi murni yaitu (rata-rata frekuensi) (rata-rata tingkat kegawatan).

Rata-rata premi murni untuk setiap tipe yaitu

- Tipe 1, rata-rata premi murni = (0.4) (400) = 160.
- Tipe 2, rata-rata premi murni = (0.7) (300) = 210.
- Tipe 3, rata-rata premi murni = (0.8) (200) = 160.

Momen pertama untuk premi murni yaitu (50%) (160) + (30%) (210) + (20%) (160) = 175, dan momen kedua untuk premi murni yaitu (50%) $(160)^2$ + (30%) $(210)^2$ + (20%) $(160)^2$ = 31,150. Jadi, besarnya variansi dari rata-rata yang diduga pada premi murni yaitu

$$a = 31{,}150 - 175^2 = 525.$$

c. Menghitung K, faktor kredibilitas dan perkiraan kredibilitas

Pada premi murni besarnya K yaitu

$$K = \frac{v}{a} = \frac{43{,}650}{525} = 83.1.$$

Sehingga besarnya faktor kredibilitas yaitu

$$Z = \frac{4}{4 + 83.1} = 0.046.$$

Observasi premi murni yaitu \$450/4 = \$112.5 dan rata-rata awal yaitu \$175. Sehingga, perkiraan kredibilitas premi murni di masa yang akan datang yaitu

$$C = (0.046)(112.5) + (1 - 0.046)(175) = \$172.$$

<u>2.5.2 Contoh Aplikasi Estimasi Parameter Kredibilitas</u>

Sebuah perusahaan asuransi mempunyai dua kelompok polis pengganti kerugian para pekerja. Jumlah klaim keseluruhan (dalam jutaan dollar) untuk tiga tahun pertama polis diringkas dalam Tabel 3.2. Model Bühlmann digunakan untuk mengestimasi jumlah klaim kumpulan selama tahun keempat polis untuk masing-masing dua kelompok polis (Herzog, 1996).

Tabel 3.2 Jumlah Klaim Keseluruhan

Jumlah klaim keseluruhan			
Kelompok polis	Tahun polis		
	1	2	3
1	5	8	11
2	11	13	12

Penyelesaian

Diketahui bahwa terdapat dua kelompok polis dan tiga tahun pengalaman data dari masing-masing polis, maka diperoleh r = 2 dan n = 3. Vektor klaim pengamatan untuk kedua polis yaitu

$$x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13}) = (5,8,11)$$

dan

$$x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23}) = (11,13,12)\,.$$

Rata-rata dari kedua vektor yaitu

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = \frac{5+8+11}{3} = 8$$

dan

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{2j} = \frac{11+13+12}{3} = 12\,.$$

Estimasi rata-rata keseluruhan (rata-rata awal) yaitu

$$\bar{x} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \bar{x}_i = \frac{8+12}{2} = 10.$$

Variansi proses masing-masing polis yaitu

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_{1j} - \bar{x}_1)^2 = \frac{1}{2}[(5-8)^2 + (8-8)^2 + (11-8)^2] = 9$$

dan

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_{2j} - \bar{x}_2)^2 = \frac{1}{2}[(11-12)^2 + (13-12)^2 + (12-12)^2] = 1.$$

Estimasi nilai harapan dari variansi proses yaitu

$$\hat{v} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{2}(9+1) = 5\,.$$

Estimasi variansi dari rata-rata yang diduga yaitu

$$\hat{a} = \frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(\overline{x}_i - \overline{x})^2 - \frac{\hat{v}}{n}$$
$$= \frac{1}{2-1}[(8-10)^2 + (12-10)^2] - \frac{5}{3} = \frac{19}{3}.$$

Estimasi parameter kredibilitas Bühlmann yaitu

$$\hat{K} = \frac{\hat{v}}{\hat{a}} = \frac{5}{19/3} = 0.78947\,.$$

Oleh karena parameter-parameter kredibilitas Bühlmann yang digunakan untuk menentukan faktor kredibilitas telah diketahui, maka estimasi dari faktor kredibilitas untuk setiap kelompok polis dapat ditentukan sebagai berikut

$$\hat{Z} = \frac{n}{n+\hat{K}} = \frac{3}{3+0.78947} = 0.79167.$$

Setelah faktor kredibilitas diperoleh, estimasi premi murni dari masing-masing kelompok polis untuk tahun keempat polis dapat ditentukan sebagai berikut.

1. Estimasi premi untuk kelompok polis pertama yaitu

$$\hat{C} = \hat{Z}\,\overline{x}_1 + (1-\hat{Z})\,\overline{x} = (0.79167)(8) + (0.20833)(10) = 8.41666\,.$$

2. Estimasi premi untuk kelompok polis kedua yaitu

$$\hat{C} = \hat{Z}\,\overline{x}_2 + (1-\hat{Z})\,\overline{x} = (0.79167)(12) + (0.20833)(10) = 11.58334\,.$$

3. PENUTUP

3.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan maka dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Langkah-langkah dalam menentukan perkiraan kredibilitas menggunakan kredibilitas Bühlmann yaitu
   a. Menentukan *n*, jumlah pengamatan (jumlah periode pengamatan).
   b. Menentukan nilai harapan dari variansi proses (*EPV*), $v = E_{X|\Theta}[Var_{X|t}[X_t \mid \Theta]] = E_{X|\Theta}[\sigma^2(\Theta)].$
   c. Menentukan variansi dari rata-rata yang diduga (*VHM*), $a = Var_{\Theta}[\mu(\Theta)] = E_{\Theta}[(\mu(\Theta)-\mu)^2].$
   d. Menghitung *K*, $K = \dfrac{EPV}{VHM}.$
   e. Menentukan faktor kredibilitas, *Z*, $Z = \dfrac{n}{n+K}$
   f. Menentukan perkiraan kredibilitas yang diinginkan,

$$C = Z\,\overline{X} + (1-Z)\,\mu\,.$$

2. Parameter-parameter kredibilitas Bühlmann diestimasi berdasarkan data empiris yang diamati. Estimasi tak bias untuk nilai harapan dari variansi proses yaitu

$$\hat{v} = \left(\frac{1}{r}\right)\sum_{i=1}^{r}\hat{\sigma}_i^2 = \left(\frac{1}{r(n-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{t=1}^{n}(X_{it} - \overline{X}_i)^2\right).$$

Estimasi tak bias untuk variansi dari rata-rata yang diduga yaitu

$$\begin{aligned}\hat{a} &= V\hat{a}r[\overline{X}_i] - \hat{v}/n \\ &= \left(\frac{1}{r-1}\right)\sum_{i=1}^{r}(\overline{X}_i - \overline{X})^2 - \left\{\left(\frac{1}{r(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{r}\sum_{t=1}^{n}(X_{it} - \overline{X}_i)^2\right\}\Big/ n\end{aligned}.$$

Estimasi dari parameter kredibilitas Bühlmann, *K*, yaitu

$$\hat{K} = \frac{\hat{v}}{\hat{a}}.$$

Sehingga, faktor kredibilitas dapat diestimasi sebagai berikut

$$\hat{Z} = \frac{n}{n+\hat{K}},$$

dan penduga dari perkiraan kredibilitas adalah

$$\hat{C} = \hat{Z}\cdot\overline{X}_i + (1-\hat{Z})\cdot\overline{X}.$$

3.2 Saran

Dalam skripsi ini hanya dibahas tentang menentukan perkiraan kredibilitas dengan menggunakan model Bühlmann. Bagi pembaca yang tertarik dengan pembahasan ini, penulis memberikan saran

1. Pada metode kredibilitas keakuratan terbesar selain menggunakan model Bühlmann, juga dapat menggunakan model Bühlmann-Straub, untuk menentukan perkiraan kredibilitas yang diinginkan.
2. Perkiraan kredibilitas juga dapat ditentukan dengan metode kredibilitas fluktuasi terbatas dan metode analisis Bayesian.

DAFTAR PUSTAKA

Bain, L. J., and M. Engelhardt. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics.* Duxbury Press, California.

Dean, C. G. and M.C. Howard, (2006). *Credibility*. Download available at http:// www.casact.org / admissions / syllabus / Ch.8.pdf.

Denuit, M., K. Rob, G. Mark, and J. Dhaene. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory.* Kluwer Academic Publishers, London.

Herzog, T. N. (1996). *Introduction to Credibility Theory.* Second Edition. ACTEX, Winsted.