Karakterisasi Modul Torsi dan Modul Bebas Torsi Menggunakan Preradikal

Indah Emilia Wijayanti
Primastuti Indah Suryani
Dwi Ertiningsih

Jurusan Matematika FMIPA UGM
Sekip Utara Yogyakarta 55281

Abstrak

Dalam teori sistem abstrak, modul bebas torsi dapat digunakan untuk menentukan keterkendalian suatu sistem. Untuk itu diperlukan studi yang lebih mendalam mengenai krakteristik modul torsi dan modul bebas torsi. Di samping hasil-hasil yang sudah ada dalam teori modul, penyelidikan mengenai modul torsi maupun bebas torsi dapat dilakukan melalui sudut pandang lain, yaitu menggunakan preradikal.

Preradikal adalah fungtor bagian dari fungtor identitas dengan sifat tertentu, yang dalam penelitian ini diterapkan pada kategori modul kiri atas gelanggang dengan elemen satuan. Dari sebuah preradikal dapat dibentuk kelas torsi dan kelas bebas torsi. Secara khusus, akan diambil sebagai preradikal adalah pengaitan suatu modul ke modul bagian torsinya. Kemudian penyelidikan akan dilakukan pada karakter dan sifat-sifat modul-modul anggota kelas torsi dan kelas bebas torsi yang terbentuk**.**

Hasil utama penelitian ini adalah :

1. Terdapat modul injektif E sehingga untuk setiap modul torsi N bersifat $Hom_R(N,E)=0$.
2. Setiap modul yang bebas torsi akan di-*cogenerated* oleh suatu modul injektif

Penelitian ini diharapkan memberi sumbangan pemikiran pada teori sistem abstrak, terutama dalam menyelidiki sifat keterkendalian sebuah sistem.

Kata-kata kunci : modul torsi, modul bebas torsi, preradikal, kelas torsi, kelas bebas torsi.

A. Pendahuluan

Salah satu studi dalam sistem linear adalah masalah keterkendalian sistem. Keterkendalian sistem persamaan diferensial linear biasa, yang merupakan sistem linear abstrak berdimensi banyak dapat dilihat melalui identitas Bezout. Berbagai pendekatan baru terus dikembangkan, antara lain dengan menggeneralisasi identitas Bezout dan menggunakan tekhnik baru dalam perhitungannya [4] dan [5]. Sementara itu dalam [2] dibahas pemakaian teorema *Quillen-Suslin* untuk menganalisa keterkendalian sistem. Keterkendalian sistem berdimensi banyak atas aljabar Ore, yang merupakan kejadian khusus dari sistem linear abstrak dikerjakan dalam [1].

Beberapa paper tersebut menunjukkan bahwa keterkendalian sebuah sistem pada umumnya dan identitas Bezout pada khususnya merupakan obyek penelitian yang menarik dan terus dikembangkan para peneliti. Untuk itu diperlukan dukungan perkembangan teori modul, terutama yang terkait dengan modul torsi dan modul bebas torsi.

Pada penelitian ini, diselidiki karakteristik modul torsi dan modul bebas torsi menggunakan preradikal. Dengan menggunakan bahasa kategori, maka obyek bahasan

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional MIPA 2007 dengan tema **"Peningkatan Keprofesionalan Peneliti, Pendidik & Praktisi MIPA"** yang diselenggarakan oleh Fakultas MIPA UNY Yogyakarta pada tanggal 25 Agustus 2007

dalam penelitian ini adalah kategori modul-modul kiri atas gelanggang dengan elemen satuan. Sebuah preradikal merupakan fungtor bagian dari fungtor indentitas yang dikenakan pada sebarang modul kiri dalam kategori modul-modul kiri. Dalam hal ini akan difokuskan pada preradikal yang mengaitkan sebarang modul kiri ke modul bagian torsinya. Dari sebarang preradikal yang didefinisikan, akan membangkitkan dua kelas dalam kategorinya, yaitu kelas torsi dan kelas bebas torsi. Sasaran penyelidikan selanjutnya adalah mengamati sifat-sifat modul-modul baik yang termuat di dalam kelas torsi maupun yang berada di dalam kelas bebas torsi.

Tujuan penelitian ini secara rinci dapat dinyatakan sebagai berikut :

1. Mendefinisikan preradikal

$$\tau(-): R-Mod \rightarrow R-Mod$$

   dengan $\tau(M):=\{m \in M \mid \exists 0 \neq r \in R,\ rm=0\}$, kemudian menyelidiki sifat-sifat preradikal tersebut beserta kelas torsi dan kelas bebas torsi yang terbentuk.

2. Membuat karakterisasi terhadap modul torsi maupun modul bebas torsi, yang berupa pernyataan-pernyataan yang ekuivalen.
3. Sebagai tindak lanjut penelitian ini, akan dilihat terapan definisi preradikal τ dalam teori sistem abstrak, terutama kegunaannya untuk menentukan keterkendalian sistem berdimensi banyak.

Dengan adanya penelitian ini diharapkan memberikan sumbangan dalam teori sistem abstrak, terutama dalam kaitan melihat sifat keterkendalian suatu sistem berdimensi banyak. Dari segi teori modul sendiri penelitian ini menarik untuk dilakukan dan diharapkan memberikan wawasan baru terapan teori torsi dalam kategori modul atas gelanggang tertentu.

B. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan tahapan-tahapan sebagai berikut :

1. Mempelajari preradikal dan teori torsi secara umum, beserta sifat-sifatnya yang penting.
2. Mempelajari hasil-hasil yang sudah ada dalam teori modul sebagai tolak ukur kerangka penelitian tentang modul torsi dan modul bebas torsi.

3. Menyelidiki preradikal khusus $\tau(-): R-Mod \rightarrow R-Mod$ dengan definisi $\tau(M) := \{m \in M \mid \exists 0 \neq r \in R,\ rm = 0\}$.
4. Menyelidiki sifat-sifat kelas torsi $\mathcal{T}_\tau$ dan kelas bebas torsi $\mathcal{F}_\tau$ yang dibangkitkan oleh preradikal τ, sehingga bisa ditarik beberapa kesimpulan terkait dengan karakteristik modul-modul di masing-masing kelas.

Penelitian difokuskan pada kategori modul-modul kiri atas gelanggang dengan elemen satuan. Hasil penelitian ini adalah sekumpulan pernyataan yang sudah terbukti kebenarannya secara matematis, yang tertuang dalam lemma, proposisi atau teorema.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Pengertian dasar tentang teori sistem abstrak, sistem berdimensi banyak dan modul atas gelanggang diferensial dapat ditemui pada Maisonobe-Sabbah [3] dan Zeiz [9]. Adapun penelitian lanjutan sistem berdimensi banyak, terutama yang berkaitan dengan keterkendalian dan identitas Bezout dilakukan oleh Pommaret-Quadrat [4] dan Quadrat [5]. Dalam penelitian-penelitian itu ditinjau modul bebas torsi untuk menyelidiki keterkendalian suatu sistem berdimensi banyak.

Dalam menerapkan teori torsi pada modul yang terkait dengan penelitian ini, sebagai referensinya adalah buku klasik karangan Stenstrom [7]. Sifat-sifat yang bisa digali dari sebuah pre-radikal, klas torsi maupun klas bebas torsi terinspirasi dari penelitian Wisbauer [9]. Sebagai pendukung dasar teori modul, akan dipergunakan buku karangan Wisbauer [8].

Yang dimaksud modul dalam paper ini adalah R-modul kiri, dengan R adalah gelanggang dengan elemen satuan. Kategori R-Mod adalah kategori dengan obyek-obyeknya R-modul kiri dan morfismanya adalah R-homomorfisma modul.

C.1 Teori Torsi

Dalam bab ini akan dibahas pengertian umum teori torsi dengan mengacu pada buku Stenstrom (1970) dan Wisbauer (1996).

Definisi 1.1. Suatu fungtor bagian (*subfunctor*) τ dari fungtor identitas disebut ***preradikal*** dari R-Mod jika $\tau : R-Mod \rightarrow R-Mod$, yang didefinisikan untuk setiap $M \in R-Mod$ maka $M \mapsto \tau(M) \subseteq M$, dengan sifat untuk setiap homomorfisma $f : M \rightarrow N$ membangkitkan $f|_{\tau(M)} : \tau(M) \rightarrow \tau(N)$ seperti terlihat dalam diagram berikut

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau"'] & N \arrow[d, "\tau"'] \\ \tau(M) \arrow[r, "f|_{t(M)}"] & \tau(N) \end{tikzcd}$$

Definisi 1.2. Jika τ_1, τ_2 masing-masing preradical, maka didefinisikan sebagai berikut :

1. $\tau_1\tau_2(M) := \tau_1(\tau_2(M))$
2. $(\tau_1 : \tau_2)(M) / \tau_1(M) := \tau_2\left(M / \tau_1(M) \right)$, $\forall M \in$ Mod-A

Selanjutnya, preradikal τ disebut ***idempotent*** jika ττ = τ dan disebut ***radikal*** jika τ : τ = τ, yaitu : $\tau\left(M / \tau(M) \right) = 0$, untuk setiap $M \in R-Mod$.

Jika preradikal tersebut istimewa, yaitu merupakan fungtor eksak kiri, maka diperoleh sifat menarik berikut :

Proposisi 1.3. (Stenstrom) *Pernyataan berikut saling ekuivalen untuk suatu preradikal τ:*

i. *Preradikal τ adalah fungtor eksak kiri.*

ii. *Jika $L \subset M$, maka $\tau(L) = \tau(M) \cap L$*

Sebuah preradikal eksak kiri selalu idempoten

Setiap preradikal τ membangkitkan dua kelas, yaitu : kelas modul torsi $\mathcal{T}_\tau$ dan kelas modul bebas torsi $\mathcal{F}_\tau$ yang masing-masing dinyatakan sebagai :

$$\mathcal{T}_\tau = \{M \mid \tau(M) = M\} \text{ dan } \mathcal{F}_\tau = \{M \mid \tau(M) = 0\}$$

Dengan penambahan sifat-sifat tertentu, maka diperoleh kelas-kelas khusus seperti dalam definisi berikut.

Definisi 1.4. Sebuah kelas $\mathcal{C}$ dari kategori $R-Mod$ disebut :

i. ***Kelas pretorsi*** jika $\mathcal{C}$ tertutup terhadap jumlah langsung-jumlah langsung dan modul-modul faktor.
ii. ***Kelas pretorsi herediter*** jika $\mathcal{C}$ tertutup terhadap jumlah langsung-jumlah langsung, modul-modul faktor dan submodul-submodul.
iii. ***Kelas torsi*** jika $\mathcal{C}$ tertutup terhadap jumlah langsung-jumlah langsung, modul-modul faktor dan perluasan-perluasan dalam $R-Mod$.
iv. ***Kelas torsi herediter*** jika $\mathcal{C}$ tertutup terhadap jumlah langsung-jumlah langsung, modul-modul faktor, submodul-submodul dan perluasan-perluasan dalam $R-Mod$.

Lemma 1.5. *Diberikan τ preradikal, $\{M_\lambda\}_\Lambda$ adalah keluarga R-modul-R-modul, maka preradikal τ dan hasil tambah langsung (direct sum) bersifat komutatif, yaitu :*

$$\tau(\bigoplus_\Lambda M_\lambda) = \bigoplus_\Lambda \tau(M_\lambda)$$

Bukti :

Ambil sebarang $M_\lambda \in R-Mod$, dengan $\lambda \in \Lambda$. Mengingat $\bigoplus_\Lambda M_\lambda$ adalah hasil tambah langsung dari M_λ, maka dapat dibentuk pemetaan proyeksi $\pi_\mu : \bigoplus_\Lambda M_\lambda \rightarrow M_\mu$. Menurut ketentuan diketahui bahwa τ adalah preradikal, maka untuk setiap pemetaan proyeksi π_μ membangkitkan $\pi_\mu |_{\tau(\oplus_\Lambda M_\lambda)} : \tau(\bigoplus_\Lambda M_\lambda) \rightarrow \tau(M_\mu)$, $\forall \mu \in \Lambda$ yang diberikan oleh diagram sebagai berikut :

$$\begin{tikzcd} \underset{\Lambda}{\oplus} M_\lambda \arrow[r, "\pi_\mu"] \arrow[d, "\tau"'] & M_\mu \arrow[d, "\tau"'] \\ \tau(\underset{\Lambda}{\oplus} M_\lambda) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \tau(M_\mu) \end{tikzcd} \quad , \forall \mu \in \Lambda$$

Jika proses ini dilakukan terhadap seluruh $\lambda \in \Lambda$, maka diperoleh $\tau(\underset{\Lambda}{\oplus} M_\lambda) \subseteq \underset{\Lambda}{\oplus} \tau(M_\lambda)$,

Untuk membuktikan yang sebaliknya, dibentuk pemetaan inklusi $\boldsymbol{i} : M_\lambda \rightarrow \underset{\Lambda}{\oplus} M_\lambda$, $\forall \lambda \in \Lambda$. Mengingat τ adalah preradikal, maka untuk setiap pemetaan inklusi $\boldsymbol{i}$ membangkitkan $\boldsymbol{i}|_{\tau(M_\lambda)} : \tau(M_\lambda) \rightarrow \tau(\underset{\Lambda}{\oplus} M_\lambda)$, $\forall \lambda \in \Lambda$ seperti diberikan dalam diagram berikut :

$$\begin{tikzcd} M_\lambda \arrow[r, "\boldsymbol{i}"] \arrow[d, "\tau"] & \underset{\Lambda}{\oplus} M_\lambda \arrow[d, "\tau"] \\ \tau(M_\lambda) \arrow[r, "\boldsymbol{i}|_{M_\lambda}"] & \tau(\underset{\Lambda}{\oplus} M_\lambda) \end{tikzcd}$$

Karena $\tau(\oplus_\Lambda M_\lambda)$ adalah modul dan $\tau(M_\lambda)$ adalah modul bagian $\tau(\oplus_\Lambda M_\lambda)$, akibatnya diperoleh $\underset{\Lambda}{\oplus} \tau(M_\lambda) \subseteq \tau(\underset{\Lambda}{\oplus} M_\lambda)$, $\forall \lambda \in \Lambda$. Jadi terbukti $\tau(\underset{\Lambda}{\oplus} M_\lambda) = \underset{\Lambda}{\oplus} \tau(M_\lambda)$. $\square$

C.2 Modul Torsi dan Modul Bebas Torsi

Dalam bagian ini akan dibahas preradikal khusus yang didefinisikan sebagai berikut. Untuk sebarang R-modul kiri M didefinisikan ***himpunan elemen-elemen torsi*** sebagai :

$$\tau(M) := \{ m \in M \mid \exists 0 \neq r \in R,\ rm = 0 \}.$$

Atau dengan kata lain, $\tau : M \mapsto \tau(M)$ dengan $\tau(M)$ adalah modul bagian torsi dari M. Modul M disebut **modul bebas torsi** jika $\tau(M) = 0$, dan disebut **modul torsi** jika $\tau(M) = M$.

Lemma 2.1. *Jika M dan N masing-masing adalah R-Modul,* $f : M \to N$ *adalah homomorfisma modul dan* U *adalah modul bagian torsi M, maka* $f(U)$ *juga merupakan himpunan bagian dari modul bagian torsi N.*

Bukti : Karena U adalah modul bagian torsi M, maka untuk sebarang $u \in U$ terdapat $0 \neq r \in R$ sehingga $ru = 0$. Oleh homomorfisma f diperoleh $f(u) \in N$ dan

$$rf(u) = f(ru) = f(0) = 0 .$$

Jadi $f(U)$ juga merupakan himpunan bagian dari modul bagian torsi *N.*□

Dalam pembicaraan *teori torsi* secara umum, pendefinisian $\tau(-)$ ini merupakan salah satu contoh pembentukan sebuah preradikal. Jika *M* dan *N* masing-masing adalah *R*-Modul dan $f : M \to N$ adalah homomorfisma modul, maka diperoleh diagram berikut :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau"'] & N \arrow[d, "\tau"] \\
\tau(M) \arrow[r, "f|_{\tau(M)}"'] & \tau(N)
\end{tikzcd}$$

Dari Lemma 2.1 disimpulkan bahwa $f\big|_{\tau(M)} \subseteq \tau(N)$. Jadi, τ merupakan preradikal.

Lemma 2.2. *Preradikal* $\tau : M \mapsto \tau(M)$, *dengan* $\tau(M)$ *adalah modul bagian torsi dari modul* M *, adalah fungtor eksak kiri.*

Bukti : Dibentuk barisan eksak pendek dalam $R - Mod$ sebagai berikut :

$$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \to 0$$

Barisan tersebut dikenai preradikal τ sehingga didapat :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f", "injektif"'] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\tau"] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau(N) \arrow[r, "f|_{\tau(N)}"] & \tau(M) \arrow[r, "g|_{\tau(M)}"] & \tau(K) &
\end{tikzcd}$$

Karena $f\big|_{\tau(N)}$ adalah homomorfisma injektif f yang dibatasi pada $\tau(N)$ maka $f\big|_{\tau(N)}$ injektif. Dengan kata lain, τ adalah *fungtor eksak kiri*. □

Berdasarkan Proposisi 1.3 dan Lemma 2.2, maka diperoleh

Proposisi 2.3 *Diberikan* preradikal $\tau : M \mapsto \tau(M)$ *, dengan* $\tau(M)$ *adalah modul bagian torsi dari modul* M *, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen :*

(a) Preradikal τ *adalah fungtor eksak kiri.*

(b) Jika $L \subset M$ *, maka* $\tau(L) = \tau(M) \cap L$.

Selanjutnya, sesuai dengan ketentuan dalam teori torsi, preradikal τ mengakibatkan terbentuknya kelas-kelas berikut dalam kategori $R-Mod$:

$$T_\tau = \{M \in R-Mod \mid \tau(M) = M\} \text{ dan } F_\tau = \{M \in R-Mod \mid \tau(M) = 0\}.$$

Kelas T_τ disebut kelas torsi, sedangkan kelas F_τ disebut kelas bebas torsi. Pasangan (T_τ , F_τ) disebut *pasangan teori torsi* dengan $M \in T_\tau$ disebut *modul torsi* dan $N \in F_\tau$ disebut *modul bebas torsi*.

Kemudian akan diselidiki sifat-sifat kelas torsi T_τ dalam lemma berikut.

Lemma 2.4 *Kelas* $T_\tau = \{M \in R-Mod \,|\, \tau(M) = M\}$ *merupakan kelas pretorsi herediter, yaitu memenuhi :*

1. *tertutup terhadap hasil tambah langsung-hasil tambah langsung,*
2. *tertutup terhadap modul faktor – modul faktor,*
3. *tertutup terhadap modul bagian- modul bagian.*

Bukti :

1. Dari Lemma 1.5 diperoleh $\tau(\oplus M_\lambda) = \oplus\tau(M_\lambda) = \oplus M_\lambda$.

2. Untuk sebarang modul M dan modul bagian U selalu ada homomorfisma proyeksi kanonik $p_U : M \longrightarrow M/U$. Karena p_u *surjektif* maka seluruh elemen M/U juga elemen torsi (yaitu : M/U adalah modul torsi). Jadi, $\tau(M/U) = M/U$
3. Jelas. □

Lemma 2.5 *Jika R adalah daerah integral, maka kelas* $T_\tau = \{M \in R - Mod \mid \tau(M) = M\}$ *tertutup terhadap perluasan-perluasan.*

Bukti : Dibentuk barisan eksak pendek sebagai berikut :

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow M/K \longrightarrow 0$$

dengan $\tau(K) = K$, $\tau(M/K) = M/K$. Akan dibuktikan $\tau(M) = M$. Ambil sebarang $m \in M$. Jika $m \in K \Rightarrow m \in \tau(K) = K$, maka *m* elemen torsi.

Jika $m \notin K \Rightarrow m \in M/K = \tau(M/K)$ yang artinya : $(\exists(r \neq 0) \in R)$, $rm \in K = \tau(K)$. Oleh karena itu $(\exists(r_1 \neq 0) \in R)$, $r_1 rm = 0$. Karena R daerah integral maka $r_1 r \neq 0$. Jadi, untuk $m \notin K$, juga diperoleh m elemen torsi. Kesimpulannya : $(\forall m \in M)$, $m \in \tau(M)$.□

Akibat 2.6 *Jika R adalah daerah integral, maka kelas* $T_\tau = \{M \in R - Mod \mid \tau(M) = M\}$ *merupakan kelas torsi herediter*.

Lemma 2.7 *Jika* R *merupakan daerah integral, maka kelas pretorsi* $T_\tau = \{M \in R - Mod \mid \tau(M) = M\}$ *tertutup terhadap trace, yaitu untuk sebarang modul* M *berlaku :*

$$T_\tau(M) := Tr(T_\tau, M) = \sum\{U \subset M \mid U \in T_\tau\} \in T_\tau .$$

Bukti : Tanpa mengurangi keumuman, akan dibuktikan bahwa jika u_1, u_2 masing-masing elemen torsi di modul bagian-modul bagian torsi dari M , yaitu U_1 dan

U_2 ,berturut-turut, maka $u_1 + u_2$ juga merupakan elemen torsi di M . Karena u_1 elemen torsi, berarti ada $0 \neq r_1 \in R$ sehingga $r_1 u_1 = 0$. Jadi diperoleh

$$r_1(u_1 + u_2) = r_1 u_1 + r_1 u_2 = 0 + r_1 u_2 = r_1 u_2 \in U_2 .$$

Karena $r_1 u_2$ elemen torsi, berarti ada $0 \neq r_2 \in R$ sehingga $r_2 r_1 u_2 = 0$. Lebih lanjut dapat ditunjukkan bahwa $r_2 r_1 (u_1 + u_2) = r_2 r_1 u_1 + r_2 r_1 u_2 = 0$, atau dengan kata lain $u_1 + u_2$ juga merupakan elemen torsi di M . Terbukti jumlahan dari modul bagian-modul bagian torsi juga merupakan modul bagian torsi. □

Dengan menerapkan Sifat 9.4 dan 9.5 di (Wisbauer, 1996) berturut-turut diperoleh proposisi-proposisi berikut. Pengertian modul injektif, *injective hull* dan *cogenerator* dapat ditemui di (Wisbauer, 1988).

Proposisi 2.8 *Diberikan* $T_\tau = \left\{ M \in R - Mod \,\middle|\, \tau(M) = M \right\}$ *yang merupakan kelas torsi herediter di* $R - Mod$ *. Didefinisikan kelas* $F_T = \left\{ N \in R - Mod \,\middle|\, T_\tau(N) = 0 \right\}$ *. Maka berlaku:*

(1) Kelas F_T *tertutup terhadap submodul, bayangan isomorfis, injektif hull dan hasil kali langsung..*

(2) Terdapat modul injektif E dengan sifat : $L \in F_T \Leftrightarrow L$ *cogenerated oleh E.*

Proposisi 2.9 *Diberikan* $T_\tau = \left\{ M \in R - Mod \,\middle|\, \tau(M) = M \right\}$ *dan R merupakan daerah integral, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen :*

(a) Kelas T_τ *adalah kelas torsi herediter di* $R - Mod$ *.*

(b) Terdapat modul injektif E dengan sifat $T_\tau = \left\{ N \in R - Mod \,\middle|\, Hom_R(N, E) = 0 \right\}$.

C. Simpulan

Berdasarkan pembahasan pada bagian-bagian sebelumnya, hasil utama dari penelitian ini disimpulkan sebagai berikut :

1. Kelas $T_\tau = \{M \in R-Mod \mid \tau(M) = M\}$ merupakan kelas torsi herediter di $R-Mod$.
2. Terdapat modul injektif E sehingga untuk setiap modul T_τ - torsi N bersifat

$$Hom_R(N,E) = 0.$$

3. Kelas $F_T = \{N \in R-Mod \mid T_\tau(N) = 0\}$ yang disebut sebagai kelas T_τ -bebas torsi bersifat tertutup terhadap modul bagian-modul bagian, bayangan-bayangan isomorfis, injektif hull-injektif hull dan hasil kali langsung-hasil kali langsung.
4. Kelas T_τ -bebas torsi tersebut tak lain adalah kelas yang anggota-anggotanya adalah modul bebas torsi.
5. Setiap modul yang T_τ -bebas torsi akan di-*cogenerated* oleh suatu modul injektif.

D. Daftar Pustaka

Chyzak, F., Quadrat, A., Robertz, D., *Ore Modules : A symbolic package for the study of multidimensional systems*, to appear in the proceedings of MTNS04, Leuven (Belgium) (05-09/07/04). http://citeseer.ist.psu.edu/703920.html.

Fabianska, A., Quadrat, A., 2007, *Applications of Quillen-Suslin theorem to multidimensional linear systems,* Rapport de recherce INRIA No. 6126, February 2007.

Maisonobe, P., Sabbah, C., 2002, *Aspects of the Theory of D-Modules*, Lecture Notes, Kaiserslautern, Germany.

Pommaret, J.F., Quadrat, A., 1998, *Generalized Bezout Identity*, Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing (AAECC) 9, 91-116.

Quadrat, A., *Extended Bezout Identities*, Proceedings of the European Control Conference 2001.

Stenstrom, B., 1970, *Rings and Modules of Quotients*, Springer-Verlag, Berlin.

Wisbauer, R., 1988, *Grundlagen der Modul- und Ringtheorie*, Verlag Reinhard Fischer, Muenchen.

Wisbauer, R., 1996, *Modules and Algebras : bimodule structure and group actions on algebras,* Addison Wesley Longman Ltd., Essex.

Zeiz, E., 2004, *Algebraic Systems Theory*, Lecture Notes, Berichte der Arbeitsgruppe Technomathematik, Kaiserslautern, Germany.