Tinjauan Tentang Fungsi Harmonik

Oleh :
Atmini Dhoruri
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

ABSTRAK

Tujuan penulisan ini untuk mengkaji tentang pengertian fungsi harmonik, fungsi harmonik konjugat pada domain D di bidang xy dan fungsi harmonik konjugat pada domain terhubung sederhana. Suatu fungsi bernilai real *U* dari dua variabel real x dan y dikatakan *harmonik* dalam domain di bidang xy yang diberikan jika, fungsi tersebut mempunyai derivatif parsial pertama dan kedua yang kontinu dan memenuhi persamaan diferensial parsial

$$U_{xx}(x,y)+U_{yy}(x,y)=0.$$

Dari pembahasan diperoleh sifat bahwa jika fungsi $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ analitik di dalam domain D, maka fungsi *u(x,y)* dan *v(x,y)* harmonik di D. Selanjutnya suatu fungsi $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ analitik di dalam domain D, jika dan hanya jika *v* harmonik konjugat dari *u*. Sifat tersebut berlaku pula jika D adalah domain terhubung sederhana, yakni jika *u(x,y)* fungsi harmonik yang terdefinisi pada domain terhubung sederhana D, maka *u(x,y)* selalu mempunyai harmonik konjugat *v(x,y)* di D.

Kata Kunci: fungsi analitik, fungsi harmonik, harmonik konjugat

A. Pendahuluan

Matematika merupakan salah satu ilmu yang sangat besar pengaruhnya dalam kehidupan manusia. Dalam kehidupan sehari-hari kita tidak lepas dari masalah-masalah yang berhubungan dengan matematika. Salah satu materi dalam matematika yang banyak digunakan dalam terapan adalah Analisis kompleks. Dalam analisis kompleks dibahas tentang fungsi kompleks atau transformasi kompleks. Dalam fungsi variable kompleks domain definisinya adalah himpunan bilangan komleks dan rangenya juga merupakan himpunan bilangan kompleks. Salah satu fungsi yang dibahas dalam fungsi kompleks adalah fungsi harmonik. Fungsi ini banyak terapannya di bidang lain, misalnya dalam bidang fisika atau mekanika. Sebagai contoh Temperatur T(x,y) dalam lempengan tipis yang terletak dalam bidang xy seringkali merupakan fungsi harmonik. Selain itu fungsi V(x,y) yang menyatakan potensial elektrostatik adalah fungsi harmonik dalam interior dari ruang berdimensi-tiga yang bebas dari muatan (charges).

Dalam makalah ini akan dibahas pengertian fungsi harmonik, fungsi harmonik konjugat dan transformasi fungsi harmonik.

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional MIPA 2006 dengan tema **"Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA serta Peranannya dalam Peningkatan Keprofesionalan Pendidik dan Tenaga Kependidikan"** yang diselenggarakan oleh Fakultas MIPA UNY, Yogyakarta pada tanggal 1 Agustus 2006

B. Pengertian Fungsi Harmonik

Suatu fungsi bernilai real *U* dari dua variabel real x dan y dikatakan *harmonik* dalam domain di bidang xy yang diberikan jika, fungsi tersebut mempunyai derivatif parsial pertama dan kedua yang kontinu dan memenuhi persamaan diferensial parsial

$$U_{xx}(x,y)+U_{yy}(x,y)=0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1)$$

Persamaan 1) dinamakan *persamaan Laplace.*

Sebagai contoh fungsi $U(x,y)=4x^3-12xy^2+2x^2-2y^2+6x$ adalah fungsi harmonik dalam setiap domain di bidang xy . Hal tersebut dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$U_x(x,y)=12x^2-24y^2+4x\ \ +6$$

$$U_{xx}(x,y)=24x+4$$

$$U_y(x,y)=-24xy-4y$$

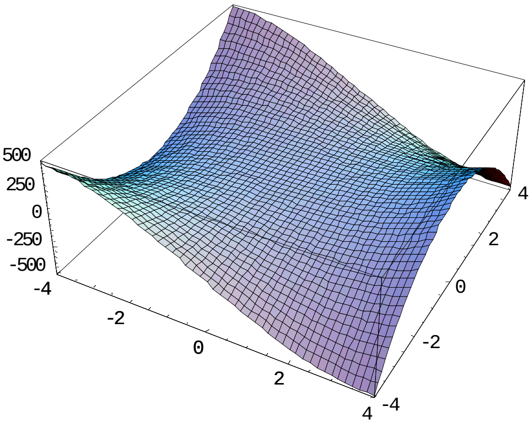
$$U_{yy}(x,y)=-24x-4$$

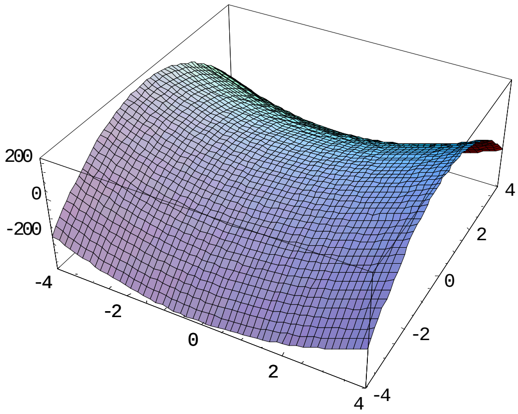
$$U_{xx}(x,y)+U_{yy}(x,y)=24x+4-12x-4=0$$

Jadi $U(x,y)=4x^3-12xy^2+2x^2-2y^2+6x$ merupakan fungsi harmonik.

Kita dapat memvisualisasikan grafik fungsi $U(x,y)$ dan $U_x(x,y)$ dalam ruang dimensi tiga. Grafik dari fungsi $U(x,y)=4x^3-12xy^2+2x^2-2y^2+6x$ dan fungsi $U_x(x,y)=12x^2-24y^2+4x\ \ +6$ dengan domain

D = $\{(x,y)|-2\le x\le 2,\ \ -2\le y\le 2\}$, adalah sebagai berikut:

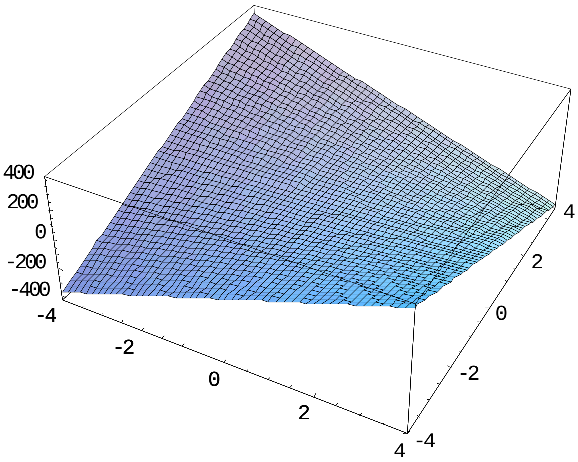




Gambar 1 Gambar 2

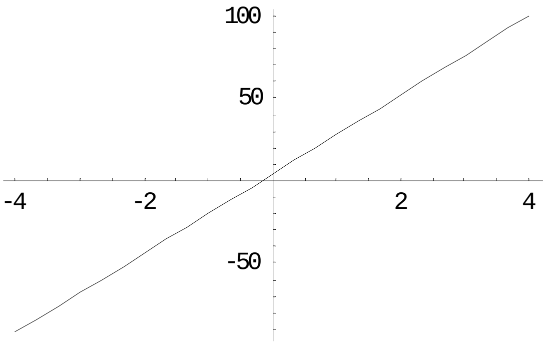
Sedangkan grafik fungsi $U_y(x,y) = -24xy - 4y$ dengan domain

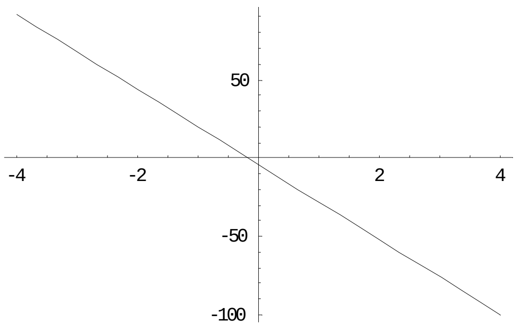
D = $\{(x,y)| -2 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 2\}$, adalah sebagai berikut:



Gambar 3

Selanjutnya grafik dari fungsi $U_{xx}(x,y) = 24x + 4$ dan $U_{yy}(x,y) = -24x - 4$ dengan domain D = $\{(x,y)| -4 \le x \le 4, \quad -4 \le y \le 4\}$, adalah sebagai berikut:





Gambar 4 Gambar 5

Contoh lain fungsi harmonik adalah fungsi, $T(x,y) = e^{-y}\sin x$, fungsi tersebut menyatakan temperatur dalam lempengan tipis yang terletak di bidang xy, . hal tersebut dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$T_x(x,y) = e^{-y}\cos x$$

$$T_{xx}(x,y) = -e^{-y}\sin x$$

$$T_y(x,y) = -e^{-y}\sin x$$

$$T_{yy}(x,y) = -e^{-y}\sin x$$

Jadi $T(x,y) = e^{-y}\sin x$ adalah fungsi harmonik.

Jika diketahui suatu fungsi kompleks $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, terdapat hubungan yang antara keanalitikan fungsi *f(z)* dengan sifat harmonik dari fungsi-fungsi *u(x,y)* dan *v(x,y)* seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1 : (Brown J.W and Churchill R: 1996)
Jika fungsi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *analitik di dalam domain D, maka fungsi u(x,y) dan v(x,y) harmonik di D.*

Bukti :

Diasumsikan fungsi *f (z)* analitik di D. Akan ditunjukkan bahwa *u(x,y)* dan *v(x,y)* harmonik. Karena fungsi *f (z)* analitik di D maka terdiferensial di D, sehingga u_x dan u_y ada dan memenuhi persamaan Cauchy-Riemann, yakni

$$u_x = v_y\ , \qquad u_y = -v_x \qquad \text{………………2)}$$

Jika kedua ruas dari persamaan tersebut di diferensialkan terhadap x, diperoleh:

$$u_{xx} = v_{yx}\ , \qquad u_{yx} = -v_{xx} \qquad \text{………………3)}$$

Sedangkan jika kedua ruas persamaan 2) didiferensialkan terhadap y, diperoleh:

$$u_{xy} = v_{yy}\ , \qquad u_{yy} = -v_{xy} \qquad \text{………………4)}$$

Karena derivatif parsial dari *u* dan *v* kontinu, maka $u_{yx} = u_{xy}$ dan $v_{yx} = v_{xy}$ dari persamaan 3) dan 4) diperoleh

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ dan } v_{xx} + v_{yy} = 0\ .$$

Jadi fungsi *u* dan *v* harmonik di D.

Sebagai contoh fungsi $f(z) = e^{-y}\sin x - ie^{-y}\cos x$, merupakan fungsi utuh, jadi analitik di seluruh bidang kompleks **C,** maka menurut Teorema 1 di atas fungsi $T(x,y) = e^{-y}\sin x$ adalah harmonik, saperti yang telah ditunjukkan di atas.

Selanjutnya perhatikan fungsi $g(x) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ dan fungsi $f(z) = e^{-y}\sin x - ie^{-y}\cos x$ yang merupakan fungsi utuh, hasilkali fungsi $f(z)g(z) = e^{-y}[(x^2 - y^2)\sin x + 2xy\cos x] - ie^{-y}[(x^2 - y^2\cos x - 2xy\sin x)$ juga merupakan fungsi utuh. Akibatnya $\text{Re}[f(z)g(z)] = e^{-y}[(x^2 - y^2)\sin x + 2xy\cos x]$ merupakan fungsi harmonik.

Jika fungsi-fungsi *u* dan *v* harmonik di dalam domain D dan derivatif parsial pertama memenuhi persamaan Chauchy-Riemann pada D, maka dikatakan *v* adalah harmonik konjugat dari *u*.

Teorema 2 : (Brown J.W and Churchill R: 1996)

Suatu fungsi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *analitik di dalam domain D, jika dan hanya jika v harmonik konjugat dari u.*

Bukti:

Jika v adalah fungsi harmonik konjugat dari *u* di D, maka *f* analitik di D. Sebaliknya jika *f* analitik di D, maka dari Teorema 1 diperoleh bahwa *u* dan *v* harmonik di D sehingga persamaan Cauchy Riemann dipenuhi.

Selanjutnya masalah yang muncul adalah jika fungsi *v* merupakan harmonik konjugat dari *u* dalam domain yang sama, apakah fungsi *u* merupakan konjugat sekawan dari *v*? Berikut ini diberikan contoh bahwa jika fungsi *v* merupakan harmonik konjugat dari *u* dalam domain yang sama, maka fungsi *u* belum tentu merupakan konjugat sekawan dari *v*?

Perhatikan fungsi $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, yang merupakan fungsi utuh, maka *v (x,y) = 2xy* adalah fungsi harmonik konjugat dari *u*. Akan tetapi fungsi *u* bukan harmonik konjugat dari *v* karena fungsi $2xy + i(x^2 - y^2)$ tidak analitik dimana-mana.

Berikut ini dijelaskan cara menentukan fungsi harmonik konjugat *v* jika diberikan suatu fungsi harmonik *u*.

Perhatikan fungsi $u(x,y) = 5x^3 - 15xy^2 + 2x^2 - 2y^2 - 4x$, maka diperoleh

$$u_x(x,y) = 15x^2 - 15y^2 + 4x \quad - 4$$

$$u_{xx}(x,y) = 30x + 4$$

$$u_y(x,y) = -30xy - 4y$$

$$u_y(x,y) = -30x - 4$$

$$u_{xx}(x,y) + U_{yy}(x,y) = 30x + 4 - 30x - 4 = 0$$

Jadi $u(x,y) = 5x^3 - 15xy^2 + 2x^2 - 2y^2 - 4x$ merupakan fungsi harmonik. Akan ditentukan fungsi *v(x,y)* yang merupakan harmonik konjugat dari *u(x,y)*, sbb:

$$u_x(x,y) = 15x^2 - 15y^2 + 4x - 4 \text{ dan } u_y(x,y) = -30xy \quad - 4y$$

Dari persamaan $u_x = v_y$, diperoleh:

$$v_y(x,y) = 15x^2 - 15y^2 + 4x - 4$$

Jika kedua ruas diintegralkan terhadap y, diperoleh:

$$\int v_y dy = \int 15x^2 - 15y^2 + 4x - 4dy$$

$$v = 15x^2 y - 5y^3 + 4xy - 4y + Q(x) \qquad \text{……………..5)}$$

Selanjutnya jika kedua ruas persamaan 5) didiferensialkan terhadap x diperoleh:

$$v_x = 30xy + 4y + Q'(x)$$

Karena persamaan $u_y = -v_x$ harus dipenuhi maka

$$30xy \quad + 4y = 30xy + 4y + Q'(x)$$

Diperoleh $Q'(x) = 0$, sehingga $Q(x) = c$, dengan c suatu konstanta.

Jadi $v(x,y) = 15x^2 y - 5y^3 + 4xy - 4y + c$, merupakan harmonik konjugat dari *u(x,y).*

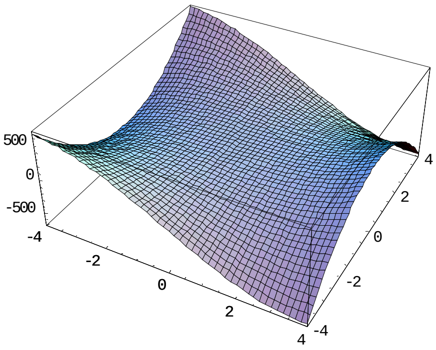
Dengan demikian diperoleh fungsi analitik *f(z)* yang berkaitan dengan *u* dan *v* tersebut adalah

$$f(z) = 5x^3 - 15xy^2 + 2x^2 - 2y^2 - 4x + i(15x^2 y - 5y^3 + 4xy - 4y + c)$$

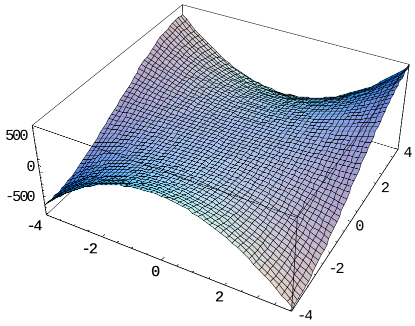
$$f(z) = 5z^3 + 2z^2 - 4z\,.$$

Grafik dari fungsi *u (x,y)* adalah seperti dalam gambar 6, sedangkan grafik

v(x,y) = $15x^2 y - 5y^3 + 4xy - 4y$ seperti gambar 7 berikut:



Gambar 6



Gambar 7

C. Harmonik Konjugat

Dalam pembahasan sebelumnya telah dijelaskan bahwa jika fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik di dalam domain D, maka fungsi bernilai real *u* dan *v* harmonik dalam domain D. Fungsi *v* dinamakan harmonik konjugat dari *u*.

Misalkan bahwa u(x,y) fungsi harmonik yang terdefinisi pada domain terhubung sederhana D. Akan ditunjukkan bahwa u(x,y) selalu mempunyai harmonik konjugat v(x,y) di D. Untuk menyelesaikan masalah ini, kita gunakan sifat yang sangat penting dalam integral garis. Andaikan P(x,y) dan Q(x,y) mempunyai derivatif parsial pertama yang kontinu dalam domain terhubung sederhana D. dari bidang xy, dan misalkan (x_0, y_0) dan (x, y) dua titik sebarang di D. Jika $P_y = Q_x$ dimana-mana di D, maka integral garis.

$$\int_C P(s,t)ds + Q(s,t)dt$$

dari titik (x_0, y_0) ke titik (x, y) nilainya tidak tergantung dari lintasan C yang diambil asalkan lintasan C terletak seluruhnya di dalam D. Selanjutnya, jika titik (x_0, y_0) diambil tertentu dan (x, y) seluruhnya di D, maka representasi integral fungsi bernilai tunggal

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(s,t)ds + Q(s,t)dt \qquad \text{………………6)}$$

dari x dan y yang mempunyai derivatif parsial tingkat satu diberikan oleh persamaan

$$F_x(x, y) = P(x, y), \qquad F_y(x, y) = Q(x, y). \qquad \text{…………….. 7)}$$

Perhatikan bahwa nilai dari F diganti oleh aditif konstan jika diambil titik yang berbeda (x_0, y_0).

Dari fungsi harmonik *u(x,y)* yang diberikan dan akibat dipenuhinya persamaan Laplace $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$ maka berlaku

$$(-u_y)_y = (u_x)_x$$

disetiap titk di D. Karena derivatif parsial kedua dari *u* kontinu di D; dan berarti derivatif parsial pertama dari $-u_y$ dan u_x adalah kontinu juga di D. Jadi jika (x_0, y_0) titik tetap di D, maka fungsi

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_t(s,t)ds + u_s(s,t)dt \qquad \text{………………8)}$$

terdefinisi dengan baik untuk semua (x, y) di D.

Sehingga menurut persamaan 7) diperoleh

$$v_x(x,y) = -u_y(x,y), \qquad v_y(x,y) = -u_x(x,y)$$

yang merupakan persamaan Cauchy-Riemann.

Karena derivatif parsial pertama dari *u* kontinu, maka dari persamaan 6) diperoleh bahwa derivatif parsial pertama dari *v* juga kontinu. Sehingga $u(x,y) + iv\ (x,y)$ fungsi analitik di D dan oleh karena itu *v* merupakan harmonik konjugat dari *u*.

Fungsi v dalam persamaan 8) tentunya bukan satu-satunya harmonik konjugat dari *u*. Fungsi $v(x,y) + c$, dengan c konstan riil, juga merupakan fungsi harmonik konjugat dari *u*. Berikut ini akan diberikan contoh fungsi harmonik *u* dan cara menentukan fungsi harmonik konjugat *v*.

Contoh:

Diberikan fungsi $u(x,y) = xy$. Fungsi *u* merupakan fungsi harmonik di seluruh bidang kompleks, karena berlaku

$$u_x(x,y) = y \qquad u_y(x,y) = x$$

$$u_{xx}(x,y) = 0 \qquad u_{yy}(x,y) = 0$$

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$$

Menurut persamaan 5) fungsi

$$v(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} -s\,ds + t\,dt$$

adalah fungsi harmonik konjugat dari $u(x,y)$.

Dengan mengintegralkan sepanjang lintasan horizontal dari titik (0,0) ke tikti (x,0) dan dilanjutkan integralsepanjang lintasan vertikal dari (x,0) ke titik (x,y) diperoleh hasil:

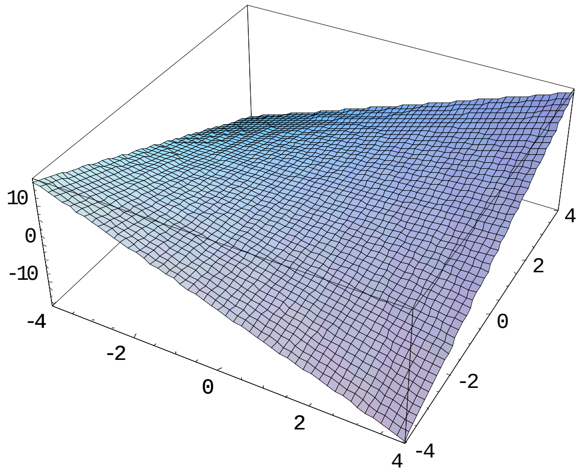
$$v(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} -s\,ds + t\,dt + \int_{(x,0)}^{(x,y)} -s\,ds + t\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2.$$

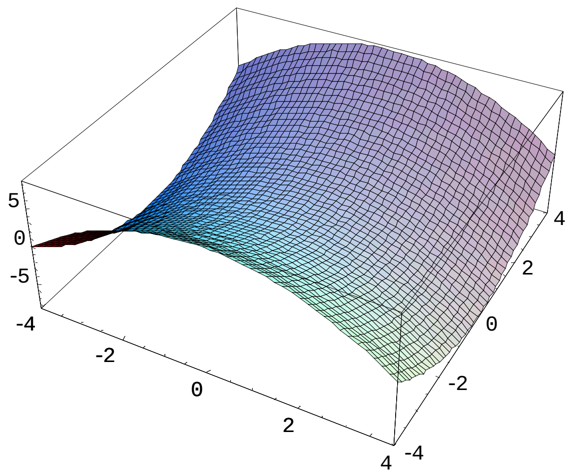
Fungsi analitik *f(z)* yang berkaitan dengan fungsi harmonik *u* dan *v* tersebut adalah

$$f(z) = xy - \frac{i}{2}(x^2 - y^2) = -\frac{i}{2}z^2.$$

Grafik tiga dimensi dari fungsi *u* dan *v* adalah seperti dalam gambar 8 dan 9 berikut.



Gambar 8



Gambar 9

D. Penutup

Fungsi harmonik merupakan fungsi yang sangat penting dalam analisis, khususnya analisis kompleks. Dalam makalah ini telah dibahas suatu sifat bahwa fungsi kompleks $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ yang analitik pada bidang kompleks bagian realnya dan bagian imaginernya merupakan fungsi harmonik yakni, jika fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik di dalam domain D, maka fungsi u(x,y) dan v(x,y) harmonik di D. Selain itu telah ditunjukkan bahwa suatu fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik di dalam domain D, jika dan hanya jika v harmonik konjugat dari u. Dalam makalah ini telah dibahas pula cara menentukan fungsi harmonik konjugat jika diketahui suatu fungsi harmonik. Hal yang perlu dikaji lebih lanjut misalnya tentang transformasi dari fungsi harmonik.

Daftar Pustaka

Brown J.W & Churchill Ruel. 1996. *Complex Variable and Applications*. .McGraw-Hill. New York.

Conway J.B. 1973. *Functions of One Compleks Variable*. Springer International. New York.

Martha L.Abell & James P.Braselton.1994. *Mathematica By Example.* AP Profesional. New York.

R. Sumantri. 1994. *Fungsi Variabel Kompleks*. Diktat Kuliah. Yogyakarta

N.K Kutha Ardana. 2004. *Panduan Penggunaan Mathematica* . Buku 1. IPB Bogor

Tim Pelatihan . 2004. *Panduan Penggunaan Mathematica* . Buku 2. IPB Bogor