Penerapan Metode Bagi-Dua (*Bisection)* pada Analisis Pulang-Pokok (*Break Even*)

Oleh:
Nur Insani
Jurusan Pendidikan Matematika
FMIPA UNY Yogyakarta
Email: nurinsani2001@yahoo.com

Abstrak

Persoalan dalam mencari akar persamaan sering dijumpai dalam berbagai masalah-masalah rekayasa yang nyata seperti di bidang ekonomi dan teknik. Metode numerik penting untuk terapan praktis karena para ilmuwan seringkali menghadapi masalah-masalah yang tidak dapat didekati dengan menggunakan metode-metode analitis. Untuk kasus-kasus tersebut adalah cocok untuk mengimplementasikan suatu penyelesaian numerik. Salah satu contoh masalah rekayasa yang nyata di bidang ekonomi yang memerlukan penyelesaian numerik adalah "masalah pulang- pokok". Masalah pulang-pokok dipergunakan untuk menentukan titik pada mana dua pilihan alternatif setara. Makalah ini mengemukakan penyelesaian masalah tersebut dengan menggunakan salah satu metode numerik atau pendekatan hampiran yaitu metode bagi-dua.

1. Pendahuluan

Dalam matematika terapan sering ditemui masalah untuk mencari penyelesaian persamaan yang berbentuk $f(x)=0$, dimana persamaan $f(x)$ dapat berbentuk sebagai persamaan aljabar, persamaan transenden atau persamaan campuran. Nilai-nilai x yang memenuhi disebut akar persamaan. Persoalan dalam mencari akar persamaan ini sering juga dijumpai dalam berbagai masalah-masalah rekayasa yang nyata seperti di bidang ekonomi dan teknik. Sebelum ditemukannya komputer digital, terdapat sejumlah cara untuk mencari akar-akar persamaan seperti rumus kuadrat. Untuk beberapa kasus, akar-akar dapat diperoleh secara analitis, yakni penyelesaian yang dihasilkan akan memenuhi persamaan semula secara eksak. Namun masih ada banyak lagi yang kelihatannya sederhana seperti $f(x)=e^{-x}-x$ tetapi tidak dapat diselesaikan secara analitis. Dalam kasus demikian salah satu alternatif penyelesaiannya adalah dengan metode numerik, khususnya yang paling tepat metode-metode iterasi numeris. Dengan metode numerik penyelesaian yang dihasilkan berupa hampiran. Metode ini sangat penting dalam terapan praktis karena para ilmuwan seringkali menghadapi masalah-masalah yang aktual dan tidak dapat diselesaikan secara analitis.

2. Metode Bagi-Dua (*Bisection*)

Salah satu metode numerik sederhana untuk pencarian akar persamaan yang telah banyak dikenal adalah Metode Bagi-Dua (*Bisection*). Metode Bagi-Dua didasarkan pada

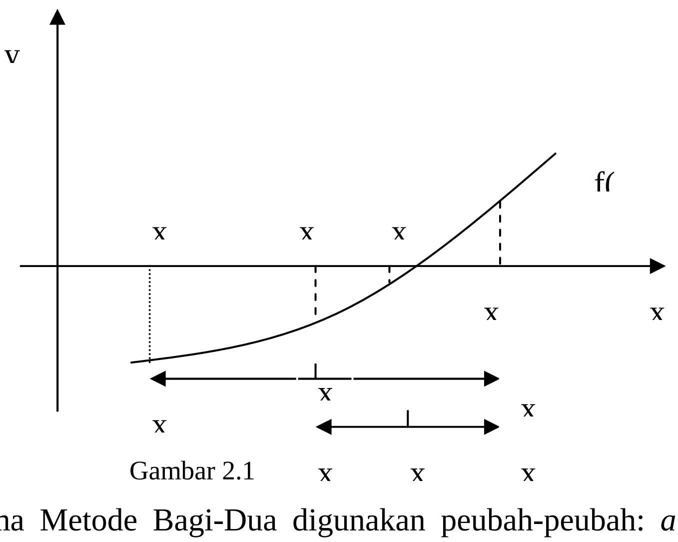
Dipresentasikan dalam Seminar Nasional MIPA 2006 dengan tema **"Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA serta Peranannya dalam Peningkatan Keprofesionalan Pendidik dan Tenaga Kependidikan"** yang diselenggarakan oleh Fakultas MIPA UNY, Yogyakarta pada tanggal 1 Agustus 2006

Teorema Nilai Antara untuk fungsi kontinu [3], yaitu bahwa suatu selang [a,b] harus memuat suatu titik nol *f* (akar persamaan *f*) bila $f(a)$ dan $f(b)$ berlawanan tanda, misalnya $f(a) < 0, f(b) > 0$. Hal ini menyarankan metode pengulangan pembagiduaan selang dan dalam setiap langkah mengambil setengah selang yang juga memenuhi persyaratan tersebut.

Metode Bagi-Dua memerlukan dua nilai sebagai tebakan awal, sebut *a* dan *b*, dimana $a < b,$ yang harus memenuhi $f(a).f(b) < 0$ sehingga selang (a,b) memuat satu akar riil. Mula-mula ditentukan titik tengah selang (a,b), sebut titik tengahnya *c*. Diantara dua selang baru yang diperoleh yakni (a,c) dan (c,b), salah satu diantaranya pasti memuat akar. Berikutnya yang ditinjau adalah selang yang memuat akar tersebut. Proses pembagiduaan selang ini diulang dan dilanjutkan sampai lebar yang ditinjau cukup kecil atau dengan kata lain untuk memperoleh taksiran/hampiran yang diperhalus.
Penentuan selang yang mengandung akar dilakukan dengan memeriksa tanda dari hasil kali $f(a).f(c)$ atau $f(c).f(b)$.

$$f(a).f(c)\begin{cases} < 0, & \text{berarti akar pada } (a,c) \\ = 0, & \text{berarti akar} = c \\ > 0, & \text{berarti akar pada } (c,b) \end{cases} \tag{2.1}$$

Secara geometri metode ini diilustrasikan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1

Dalam algoritma Metode Bagi-Dua digunakan peubah-peubah: *a* sebagai ujung kiri selang, *b* sebagai ujung kanan selang, dan *c* sebagai titik tengah. Dari penjelasan diatas, Algoritma Metode Bagi-Dua dapat dibentuk sebagai berikut.

Tabel 2.1

Algoritma Metode Bagi-Dua

Masukan : $f(x)$, a, b dan epsilon

Keluaran : akar

Langkah-langkah :

1. Periksa apakah $f(a).f(b) < 0$, jika tidak pilih a dan b yang baru sehingga $f(a).f(b) < 0$
2. Hitung $c := \dfrac{a+b}{2}$
3. i. Jika $f(a).f(c) < 0$ maka $b := c$, lanjutkan ke langkah 4

   ii. Jika $f(a).f(c) > 0$ maka $a := c$, lanjutkan ke langkah ke langkah 4

   iii. Jika $f(a).f(c) = 0$ maka akar persamaan adalah c, hitungan selesai
4. Hitung perkiraan baru dari akar dengan $c := \dfrac{a+b}{2}$
5. Jika $b - a \leq$ epsilon maka akar $:= c$ dan hitungan selesai. Jika tidak ulangi langkah 2.

Karena metode ini selalu menghasilkan akar maka dikatakan bahwa metode ini selalu konvergen. Besarnya epsilon tergantung pada ketelitian yang diinginkan, semakin kecil epsilon akan semakin teliti taksiran/hampiran akar yang diperoleh.

3. Masalah Pulang-Pokok

Praktek rekayasa di bidang ekonomi baik yang mensyaratkan bahwa semua proyek, produksi, dan perencanaan harus didekati dengan cara yang biaya yang efektif. Seorang ilmuwan yang terlatih baik haruslah menguasai analisa biaya. Masalah ini dinamakan ”masalah pulang-pokok”. Masalah ini dipergunakan untuk menentukan titik pada mana dua pilihan alternatif setara. Pilihan-pilihan demikian dihadapi dalam semua bidang rekayasa. Walaupun terlihat sederhana namun akan sangat rumit apabila masalah tersebut tidak dapat diselesaikan secara analitis atau manual. Salah satu alternatif penyelesaian masalah ini adalah dengan metode numerik. Berikut salah satu contoh penerapan Metode Bagi-Dua dalam penyelesaian ”masalah pulang-pokok”.

Tabel 3.1 Biaya dan keuntungan untuk dua komputer pribadi. Tanda negatif menunjukkan biaya atau kerugian, sedangkan tanda positif menunjukkan keuntungan.

	Komputer	
	Pentium	AMD
Biaya pembelian, $	-3000	-10.000
Bertambahnya biaya perawatan/thn, $/thn/thn	-200	-50
Keuntungan dan kenikmatan tahunan, $/thn	1000	4000

Asumsi seorang karyawan X sedang mempertimbangkan untuk membeli salah satu dari dua komputer pribadi ”Pentium” dan ”AMD”. Taksiran biaya dan keuntungan untuk tiap komputer ditunjukkan pada tabel 3.1. Jika saat ini dana dapat dipinjam dengan tingkat bunga 20% ($i = 0{,}20$), berapa lama mesin-mesin harus dimiliki sehingga mesin-mesin tersebut akan mempunyai nilai setara? Dengan kata lain, berapa lama titik pulang-pokoknya jika diukur dalam tahun?

Seperti umumnya dalam masalah ekonomi, X mempunyai suatu campuran biaya sekarang dan mendatang. Misalnya, pembelian mesin Pentium menyangkut pengeluaran awal $3000. Selain dari biaya pengeluaran satu kali ini harus pula dikeluarkan uang setiap tahun untuk merawat mesin. Karena biaya yang demikian cenderung bertambah seiring dengan makin tuanya komputer, maka biaya perawatan dianggap bertambah secara linier terhadap waktu. Misalnya setelah 10 tahun diperlukan $2000 tiap tahun untuk menjaga agar mesin dalam kondisi kerja. Akhirnya di samping biaya-biaya tersebut, X akan juga akan menarik manfaat dengan memiliki komputer tersebut. Keuntungan tahunan dan kenikmatan yang diperoleh dari Pentium dicirikan oleh suatu pendapatan tahunan sebesar $1000 tiap tahun.

Agar dapat mempertimbangkan dua pilihan ini, biaya-biaya ini harus dikonversi ke ukuran yang dapat dibandingkan. Satu cara untuk melakukan ini adalah dengan mengungkapkan semua biaya individual sebagai pembayaran tahunan yang setara, yakni nilai dollar tahunan yang setara selama rentang hidup komputer. Keuntungan dan kenikmatan tahunan sudah dalam bentuk ini. Rumus ekonomi tersedia untuk mengungkapkan biaya-biaya pembelian dan perawatan dengan cara yang serupa. Misalnya, biaya pembelian awal dapat ditransformasikan ke dalam serangkaian pembayaran tahunan seragam dengan rumus

$$A_p = P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \tag{3.1}$$

dimana A_p adalah besarnya pembayaran tahunan (*annual payment*), P biaya pembelian, i tingkat bunga, dan n banyaknya tahun [1]. Yang artinya bahwa X bersedia meminjam uang sejumlah P untuk membeli komputer dan setuju untuk mengembalikannya dalam n pembayaran tahunan dengan suku bunga i. Misalnya, pembayaran awal untuk Pentium adalah $-3000, dimana tanda negative menunjukkan kerugian bagi X. Jika tingkat bunga adalah 20 persen ($i = 0{,}20$) maka

$$A_p = -3000\frac{0{,}2(1{,}2)^n}{(1{,}2)^n - 1} \tag{3.2}$$

Misal jika pembayaran awal harus disebar selama 10 tahun ($n = 10$), maka rumus ini dapat dipakai untuk menghitung bahwa pembayaran tahunan yang setara adalah $-715,57 tiap tahun.

Di bidang ekonomi, pembayaran/biaya perawatan yang bertambah pada suatu laju konstanta G menurut pertambahan waktu dinamakan dinamakan *deret hitung gradien*. Konversi deret yang demikian menjadi laju tahunan A_m dapat dilaksanakan dengan rumus ekonomi

$$A_m = G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right] \tag{3.3}$$

dimana G adalah laju hitung pertambahan perawatan [1]. Persamaan (3.3) mentransformasikan biaya perawatan yang terus meningkat ke dalam serangkaian pembayaran tahunan tetap yang setara. Persamaan-persamaan ini dapat digabungkan untuk mengungkapkan nilai tiap komputer dalam bentuk serangkaian pembayaran yang seragam. Misalnya untuk Pentium, dari persamaan (3.2) dan (3.3) diperoleh

$$A_t = -3000\frac{0{,}2(1{,}2)^n}{1{,}2^n - 1} - 200\left[\frac{1}{0{,}2} - \frac{n}{1{,}2^n - 1}\right] + 1000 \qquad (3.4)$$

Harga total = - biaya pembelian – biaya pemeliharaan + keuntungan/laba

dimana A_t menyatakan nilai total tahunan. Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi

$$A_t = \frac{-600(1{,}2)^n}{1{,}2^n - 1} + \frac{200n}{1{,}2^n - 1} \qquad (3.5)$$

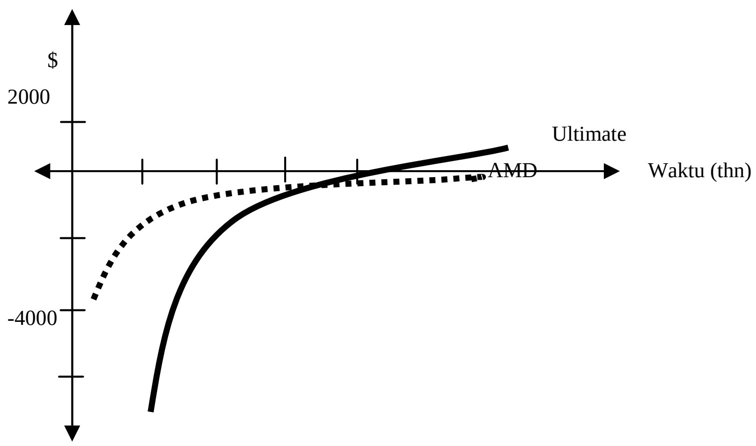
Dengan mensubstitusikan $n = 2$ ke dalam persamaan (3.5) akan memberikan hasil yang jika X memutuskan untuk membuang Pentium setelah memilikinya selama hanya 2 tahun, maka X akan menghabiskan biaya sebesar \$1055 tiap tahun. Jika komputer dibuang setelah 10 tahun ($n = 10$), persamaan (3.5) memberi indikasi bahwa biayanya akan sebesar \$30 tiap tahun.

Serupa untuk AMD, berdasar persamaan (3.4), persamaan untuk nilai tahunan dapat dikembangkan seperti dalam

$$A_t = \frac{-2000(1{,}2)^n}{1{,}2^n - 1} + \frac{50n}{1{,}2^n - 1} + 3750 \qquad (3.6)$$

Nilai-nilai untuk persamaan (3.6) untuk $n = 2$ dan $n = 10$ adalah \$-2568 dan \$+1461 tiap tahun. Jadi walaupun AMD lebih mahal berdasarkan jangka pendek, jika dimiliki cukup lama, tidak hanya akan lebih hemat biaya tetapi sebenarnya akan menghasilkan uang untuk X.

Identifikasi titik tempat dua komputer mempunyai nilai setara menunjukkan kapan Pentium menjadi pilihan yang lebih baik. Secara grafis, titik tersebut berpadanan dengan perpotongan dua kurva dalam Gambar 3.1.



Gambar 3.1

Dari sudut matematis, titik pulang-pokok (titik impas – *break even*) adalah nilai n dimana persamaan (3.5) dan (3.6) setara, yaitu

$$\frac{-600(1{,}2)^n}{1{,}2^n-1}+\frac{200n}{1{,}2^n-1}=\frac{-2000(1{,}2)^n}{1{,}2^n-1}+\frac{50n}{1{,}2^n-1}+3750 \qquad (3.7)$$

Dengan membawa semua suku persamaan ini ke satu ruas, persamaan (3.7) direduksi menjadi pencarian akar dari

$$f(n)=\frac{-1400(1{,}2)^n}{1{,}2^n-1}-\frac{150n}{1{,}2^n-1}+3750 \qquad (3.8)$$

Akar-akar persamaan (3.8) tidak dapat ditentukan secara analitis. Di lain pihak pembayaran tahunan yang setara mudah dihitung untuk suatu n yang diberikan. Jadi, masalah ini menciptakan kebutuhan untuk pendekatan numerik.

4. Penyelesaian dengan Metode Bagi-Dua (*Bisection*)

Akar-akar persamaan (3.8) dapat dihitung dengan salah satu metode numerik yang cukup dikenal yaitu Metode Bagi-Dua, yang pendekatannya dapat diterapkan dengan usaha yang minimal. Berdasarkan Gambar 3.1 diketahui bahwa akarnya berada antara $n=2$ dan $n=10$. Nilai-nilai ini menyediakan nilai-nilai pemulai untuk Metode Bagi-Dua.

Ambil $a=2$, $b=10$ dan epsilon = 0.001. Berdasar (3.8) maka

<u>Iterasi 1</u>

$a=2$, $\qquad f(a)=\dfrac{-1400(1{,}2)^2}{1{,}2^2-1}-\dfrac{150.2}{1{,}2^2-1}+3750=-1513{,}63<0$

$b=10$, $\qquad f(b)=\dfrac{-1400(1{,}2)^{10}}{1{,}2^{10}-1}-\dfrac{150.10}{1{,}2^{10}-1}+3750=1791{,}42>0$

$c:=\dfrac{2+10}{2}=6$ $\qquad f(c)=\dfrac{-1400(1{,}2)^6}{1{,}2^6-1}-\dfrac{150.6}{1{,}2^6-1}+3750=1191{,}88>0$

Sehingga, $f(a).f(c)=(-1513{,}63)(1191{,}88)<0$

Berarti $b:=c$, atau ujung kanan selang digeser menjadi $b = 6$.

$c_{baru}=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{2+6}{2}=4$ dan $b-a=6-2=4\le 0{,}001$

<u>Iterasi 2</u>

$a = 2$, $\quad f(a) = \dfrac{-1400(1,2)^2}{1,2^2 - 1} - \dfrac{150.2}{1,2^2 - 1} + 3750 = -1513,63 < 0$

$b = 6$, $\quad f(b) = \dfrac{-1400(1,2)^6}{1,2^6 - 1} - \dfrac{150.6}{1,2^6 - 1} + 3750 = 1191,88 > 0$

$c := \dfrac{2+6}{2} = 4$ $\quad f(c) = \dfrac{-1400(1,2)^4}{1,2^4 - 1} - \dfrac{150.4}{1,2^4 - 1} + 3750 = 487,1 > 0$

Sehingga, $f(a).f(c) = (-1513,63)(487,1) < 0$

Berarti $b := c$, atau ujung kanan selang digeser menjadi b = 4.

$c_{baru} = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3$ dan $b - a = 4 - 2 = 2 \leq 0,001$

<u>Iterasi 3</u>

$a = 2$, $\quad f(a) = \dfrac{-1400(1,2)^2}{1,2^2 - 1} - \dfrac{150.2}{1,2^2 - 1} + 3750 = -1513,63 < 0$

$b = 4$, $\quad f(b) = \dfrac{-1400(1,2)^4}{1,2^4 - 1} - \dfrac{150.4}{1,2^4 - 1} + 3750 = 487,1 > 0$

$c := \dfrac{2+4}{2} = 3$ $\quad f(c) = \dfrac{-1400(1,2)^3}{1,2^3 - 1} - \dfrac{150.3}{1,2^3 - 1} + 3750 = -191,2 < 0$

Sehingga, $f(a).f(c) = (-1513,63)(-191,2) > 0$

Berarti $a := c$, atau ujung kiri selang digeser menjadi a = 3.

$c_{baru} = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{3+4}{2} = 3,5$ dan $b - a = 4 - 3 = 1 \leq 0,001$

<u>Iterasi 4</u>

$a = 3$, $\quad f(a) = \dfrac{-1400(1,2)^3}{1,2^3 - 1} - \dfrac{150.3}{1,2^3 - 1} + 3750 = -191,2 < 0$

$b = 4$, $\quad f(b) = \dfrac{-1400(1,2)^4}{1,2^4 - 1} - \dfrac{150.4}{1,2^4 - 1} + 3750 = 487,1 > 0$

$c := \dfrac{3+4}{2} = 3,5$ $\quad f(c) = \dfrac{-1400(1,2)^{3,5}}{1,2^{3,5} - 1} - \dfrac{(150)(3,5)}{1,2^{3,5} - 1} + 3750 = 2072,65 > 0$

Sehingga, $f(a).f(c) = (-191,2)(2072,65) < 0$

Berarti $b := c$, atau ujung kanan selang digeser menjadi b = 3,5.

$$c_{baru} = \frac{a+b}{2} = \frac{3+3{,}5}{2} = 3{,}25 \text{ dan } b-a = 3{,}5-3 = 0{,}5 \leq 0{,}001$$

Pembagiduaan selang dapat diulang sampai 18 iterasi untuk memberikan suatu hasil hampiran yang halus/akurat dengan epsilon sebesar 0,001. Titik pulang-pokok terjadi pada $n = 3{,}23$ tahun. Hasil ini dapat diperiksa dengan mensubstitusi kembali ke persamaan (3.8) bahwa $f(3{,}23) \cong 0$.

Pensubstitusian $n = 3{,}23$ ke dalam persamaan (3.5) atau persamaan (3.6) akan memberikan hasil bahwa pada titik pulang-pokok kedua komputer tersebut memerlukan biaya sekitar $542 tiap tahun. Di luar titik ini AMD mejadi akan lebih hemat biaya. Akibatnya jika X bermaksud memiliki mesin komputer selama lebih dari 3,23 tahun, maka lebih baik membeli AMD.

5. Kesimpulan

Metode numerik merupakan salah satu alternatif metode penyelesaian yang berupa hampiran dan penting dalam terapan praktis dimana para ilmuwan seringkali menghadapi masalah-masalah yang aktual dan tidak dapat diselesaikan secara analitis. Di bidang ekonomi, salah satu penerapan metode numerik ini adalah pada penyelesaian masalah pulang-pokok. Masalah untuk menentukan titik pada mana dua pilihan alternatif setara ini sebelumnya dikonversi ke suatu ukuran yang dapat dibandingkan dan akhirnya masalah tersebut direduksi menjadi masalah pencarian akar persamaan. Dengan menggunakan salah satu metode yaitu Metode Bagi-Dua, penyelesaian dapat diperoleh dengan melalui 18 iterasi. Sehingga dapat disimpulkan alternatif pilihan mana yang lebih baik diambil.

Daftar Pustaka

[1] Chapra, S.C and Canale, R.P. (1991). *Metode Numerik Jilid 1*. Erlangga. Jakarta

[2] Hartono, D. E. Juni. (2000). *Modul praktikum Komputasi Metode Numerik*. Universitas Gadjah Mada

[3] Purcell, E.J and Varberg, D. (2001). *Kalkulus Jilid 1*. Interaksa. Batam

[4] Sulila, I Nyoman. (1982). *Dasar-Dasar Metode Numerik*. Bandung.