Liet. mat. rink. LMD darbai, **48/49**, 2008, 105–108

Matematinių objektų ypatumai. Funkcija

Algis KAVALIAUSKAS (VU, VGTU)
el. paštas: algis.kavaliauskas@mif.vu.lt

Reziumė. Straipsnyje yra analizuojama funkcijos sąvoka. Išskiriami matematiniai objektai, kurie dažnai be pagrindo tapatinami su funkcija. Aptarti matinių dydžių funkcijų ypatumai. Pateikti pavyzdžiai, iliustruojantys netinkamą sąvokų „formulė", „išraiška", „grafikas" vartojimą.

Raktiniai žodžiai: funkcija, išraiška, grafikas.

Problemos aktualumas

Kartą vienuoliktokė Rusnė paklausė: „Kam yra lygus tas π? Ar jis lygus 3,14..., ar (o gal ir) 180°?" Panašūs klausimai nereti mokykloje. Mokyklinėje matematikoje kartais nesilaikoma apibrėžimų, svarbios vietos taip sutrumpinamos, kad jos tampa dviprasmiškomis arba net klaidinančiomis. Taip atsiranda prielaidos painiotis ir painioti matematinius objektus. Mokiniai išmoksta naudotis savybėmis, nesuprasdami pačių sąvokų. Vienai svarbesnei jų – funkcijos sąvokai – yra skirtas šis straipsnis. Tai yra antrasis straipsnis apie matematinių objektų ypatumus [1].

Funkcijos apibrėžimas

Funkcijos sąvoką kiek siauresne prasme pirmą kartą įvedė Leibnicas 1692 m. Artimą šiuolaikinei prasmei panaudojo 1698 m. Johanas (pirmasis) Bernulis. Taigi funkcijos sąvoka pradėta naudoti I. Niutono (1642–1727) gyvenimo metu. Šiuo metu literatūroje galima būtų išskirti tris pagrindinius funkcijos apibrėžimo būdus:

a) funkcija – tai kintamasis y,
b) funkcija – tai taisyklė f;
c) funkcija – tai sutvarkytųjų porų (x, y) aibė.

Pirmuoju atveju [2], [3] funkcija apibrėžiama tokiu būdu: kintamasis y yra kintamojo x funkcija, jeigu yra žinoma taisyklė, pagal kurią kiekvienai x reikšmei priskiriama tik viena kintamojo y reikšmė.

Antruoju atveju (naudojamu šiuo metu mokykloje) [4] funkcija – tai vienareikšmiška taisyklė, pagal kurią kiekvienam aibės X elementui priskiriamas vienintelis aibės Y elementas.

Trečiasis funkcijos apibrėžimo būdas yra pateiktas [5], [6]. Funkcija vadinama sutvarkytųjų porų (x, y) aibė f. Be to, jeigu x priklauso X, y ir z priklauso Y, (x, y) ir (x, z) priklauso f, tai $y = z$.

Kiekvienu iš šių atvejų funkcijos sąvoka žymi iš esmės skirtingą matematinį objektą. Pasirinkdami vieną iš jų (antrąjį), turime su juo suderinti kitus susijusius apibrėžimus (grafiko ir pan.).

Funkcijos apibrėžimo papildymas

Funkcijos apibrėžimas vienareikšmiškai neapibrėžia funkcijos kaip matematinio objekto. Funkcijos apibrėžimo nepakanka funkcijų lygybei nustatyti, t.y. nuspręsti, kokios dvi funkcijos yra laikytinos lygiomis arba sutampančiomis.

Iš tikrųjų, iš apibrėžimo seka, kad dviejų funkcijų tapatumui būtina ta pati atvaizdavimo taisyklė f ir ta pati apibrėžimo sritis X. Tokiu būdu dvejetas (X, f) abiems lygioms funkcijoms turi būti vienodas. Tačiau iš funkcijos apibrėžimo nieko negalima pasakyti apie reikšmių sritį Y. Todėl būtina apibrėžimą papildyti. Tikslinga būtų laikyti, kad reikšmių sritis Y yra sudaryta iš visų apibrėžimo srities X vaizdų, t.y. $Y = f(X)$. Toks reikšmių srities nustatymas palengvintų uždavinių, susijusių su reikšmių sritimi, atvirkštinėmis funkcijomis, formulavimą. Tada funkcijos vienareikšmiškam apibrėžimui jau pakaktų dvejeto (X, f).

Matematika nagrinėja ir tokias funkcijas, kurioms $f(X) \subset Y$. Šiuo atveju kartais sakoma, kad funkcija f yra X atvaizdis į aibę Y, tuo pabrėžiant skirtumą nuo mūsų pasirinkto atvejo, kai $f(X) = Y$.

Funkcija ir išraiška – skirtingi matematiniai objektai

Panagrinėkime du skirtingus matematinius objektus: funkciją ir išraišką (arba formulę). Funkciją galima išreikšti arba apibrėžti formule arba išraiška. Tačiau funkcija gali būti apibrėžta ir kitaip, pvz., lentelės, grafiko ir pan. būdu. Yra funkcijų, kurias iš viso neįmanoma užrašyti formule. Nekorektiška sutapatinti funkciją ir išraišką. Tarp funkcijos ir išraiškos yra panašus santykis kaip tarp statybinės medžiagos ir statinio. Nekyla mintis supaprastinti ir neskirti statinio nuo statybinės medžiagos.

Aptarkime kelis funkcijos ir išraiškos nekorektiško sutapatinimo pavyzdžius.

1 pavyzdys ([7], 3 sk. Nr.3). „Raskite funkcijos $f(x) = -x^2 - 4x + 4\ldots$“. Čia $f(x) = -x^2 - 4x + 4$ yra išraiška. Nekorektiška šią išraišką vadinti funkcija. Taisytina į: „Raskite funkcijos f, apibrėžtos $f(x) = -x^2 - 4x + 4\ldots$“, arba „Raskite funkcijos $y = -x^2 - 4x + 4\ldots$“.

2 pavyzdys ([7], 3 sk. Nr. 33). „Pasirinkite teisingą atsakymą:
a) funkcijai $y = 5x - 1$ atvirkštinė funkcija yra

A) $-(5x + 1)$ B) $1/5x$ C) $1/5x + 1/5$“.

Nė vienas iš pateiktų atsakymų negalėtų atsakyti į uždavinio klausimą, nes visi jie yra ne funkcijos, o išraiškos. Taisytina į:

A) $y = -(5x + 1)$; B) $y = 1/5x$; C) $y = 1/5x + 1/5$.

Funkcija ir jos grafikas

Funkcija ir jos grafikas yra du iš esmės skirtingi matematiniai objektai. Dažnai jie papildo vienas kitą ir todėl naudojami greta.

Išskirkime tris diskutuotinas kryptis.

Pirma. Brėžiant grafiką neleistinai praplečiama funkcijos apibrėžimo sritis. Pavyzdys ([7], 3 sk. Nr.82). „Raskite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikų susikirtimo taškų koordinates, jeigu $f(x) = 4^x$ ir $g(x) = \sqrt[x]{256}$“. Šis pavyzdys parodo, kad kartais neskiriami du matematiniai objektai: šaknis ir rodiklinė funkcija. Tada nepagrįstai praplečiama šaknies apibrėžimo sritis ir tariama, kad $\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}$. Tokiu būdu diskreti šaknies funkcija $y = \sqrt[x]{a}$ tampa lyg ir tolydžiąja $y = a^{\frac{1}{x}}$. Iš tikrųjų mokyklinėje matematikoje šaknis apibrėžta tik natūraliesiems $x > 1$. Todėl šaknį ir rodiklinę funkciją turime skirti. Tai du skirtingi matematiniai objektai, sutampantys tik natūraliosioms didesnėms už 1 reikšmėms.

Todėl negali kirstis tolydžioji funkcija su diskrečiąja funkcija, sudaryta iš atskirtųjų taškų. Neįmanoma kirsti tašką.

Šio uždavinio formulavime taisytini žodžiai „... susikirtimo taškų ...“į „... raskite funkcijos f grafiko taškus einančius per funkcijos g grafiko taškus“.

Antra. Brėžiant grafiką susiaurinama funkcijos apibrėžimo sritis. Dažnai funkcija yra apibrėžta ir nagrinėjama visiems R, o jos grafikas nutraukiamas nenubrėžus bent iki vienos iš koordinačių ašių galo. Brėžiant grafikus, tokiu atveju, reikėtų sutrumpinti ašių ilgį. Koordinačių ašis reikėtų sutrumpinti tiek, kad funkcijos grafiko galo bent viena iš koordinačių x arba y sutaptų su bent vienos iš koordinačių ašių galu. Jeigu funkcijos grafikas nutraukiamas nepasiekus koordinačių ašių ribojančio stačiakampio, turime funkciją, apibrėžtą siauresnėje apibrėžimo srityje. Ji skiriasi nuo funkcijos apibrėžtos visoje R. Tai yra du skirtingi matematiniai objektai. Šio tipo pavyzdžiu galėtų būti [9] 16 uždavinys. Čia netinkamai nubrėžti funkcijų $y = x^2$ ir $y = 2 - x$ grafikai, susiaurinant jų apibrėžimo sritį.

Trečia. Neskiriama funkcija nuo jos grafiko. Kartais šie skirtingai apibrėžti matematiniai objektai sutapatinami. Pavyzdys ([7], 3 sk. Nr.8). „Tiesė $y = kx - 2$ eina per tašką $A(-4; 6)$ ...“. Čia tiese pavadinta funkcija. Tiesė yra geometrinis objektas, o $y = kx - 2$ yra funkcija, kurios grafikas yra tiesė. Mokymo stadijoje toks sutrumpinimas tampa matematinių objektų – grafiko ir funkcijos – painiojimo prielaida.

Funkcija ir matiniai dydžiai

Grįžkime į straipsnio pradžią, prie Rusnės klausimo apie skaičių π. Teisingos yra dvi lygybės $\pi = 3,14\ldots$ arba π rad. $= 180°$, bet ne $\pi = 180°$. Pirma yra lygybė tarp skaičių, antra – tarp dviejų matinių dydžių, trečia – tarp skaičiaus ir matinio dydžio.

Užduotyje matiniai skaičiai turi būti atskirti nuo nematinių, bent kartą juos apibrėžiant, nurodant jų matavimo vienetus. Panagrinėkime pavyzdį, kuriame užduoties ir atsakymo matai yra nesuderinti ([7], 3 sk. Nr.180 arba Nr.181).

Nr.180. „Išreikškite radianais 450°. Atsakymas $2,5\pi$.“ Teisingas atsakymas turėtų būti „$2,5\pi$ rad“, t.y. atsakymas irgi turėtų būti matinis.

Pavyzdys ([8], Nr.798).

„Išspręskite lygtį: $\sin(30° + x) + \sin(30° - x) = -0,5$. Atsakymas: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$“.

Šiame uždavinyje painiojami skirtingi matavimo vienetai: laipsniai ir radianai. Iš sąlygos matyti, kad x turi būti matuojamas laipsniais, todėl atsakymas irgi turi būti užrašytas laipsniais. Nekorektiškas matinių ir nematinių dydžių naudojimas sutinkamas ir uždavinyje Nr. 22.

„Impulsinio variklio varomo lėktuvo modelio, judančio tiese, pagreitis laiko momentu t yra lygus $a = 1 - \cos(2\pi t)$ (m/s^2). Laikydami, kad pradiniu laiko momentu $t = 0$ modelio greitis buvo 1 m/s, raskite kintančio greičio išraišką".

Iš uždavinio sąlygos aišku, kad t yra matinis kintamasis, tačiau jo matavimo vienetai nėra apibrėžti. Kadangi 2π nėra apibrėžta kaip matinė konstanta, tai 2π – nematinis skaičius. Taigi, turime nesuprantamą objektą – kosinusą, priklausantį nuo matinio argumento $2\pi t$, kurio matas yra laikas. Tačiau kosinusas gali būti tik kampo funkcija. Dar daugiau, nesuprantama, kaip kosinusas įgyja matą m/s^2, nes mokykloje kosinusas – tik bematė funkcija.

Šitame uždavinyje visiškai supainioti matiniai ir nematiniai skaičiai. Formuluojant užduotį su matiniais skaičiais būtina jos apibrėžti, o trigonometrinės, logaritminės, rodyklinės funkcijos negali priklausyti nuo matinių argumentų [1] (trigonometrines funkcijos gali priklausyti nuo kampų išmatuotų laipsniais ar radianais, bet ne nuo kitų matinių dydžių). Reikėtų pridurti, kad fizikoje netgi vengiami uždaviniai su matiniais parametrais, nes matinių uždavinių rezultatai irgi yra matiniai ir todėl priklauso nuo vienų ar kitų matų pasirinkimo ir nėra absoliutūs. Tam paprastai įvedami santykiniai kintamieji. Pavyzdžiui, greitis $\nu = \nu(t)/\nu(0)$ jau yra nematinis dydis.

Literatūra

1. A. Kavaliauskas, Matinių objektų ypatumai. Matiniai dydžiai. *Liet. mat. rink.*, **47**, spec. nr., 240–243 (2007).
2. G.M. Fichtengolcas, *Matematinės analizės pagrindai*, Mintis, Vilnius (1967).
3. V. Iljinas, E. Pozniakas, *Matematinės analizės pagrindai*, 1 d., Mokslas (1981).
4. E. Misevičius, *Matematinė analizė*, 1 d., TEV, Vilnius (1998).
5. V.S. Šipačiov, *Vyssaja matematika*, Vyssaja škola, Maskva (1985).
6. K. Feis, *Algebra: kolca, moduli i kategoriji*, Mir, Maskva (1977).
7. Autorių kolektyvas, *Matematika 11. Uždavinynas*, TEV (2006).
8. R. Razmas, J. Teišerskis, V. Vitkus, *Matematikos uždavinynas*, Šviesa, Kaunas, (2000).
9. *Matematika, 2008 m., Mokyklinio brandos egzamino užduotys*, LR švietimo ir mokslo ministerija, Nacionalinis egzaminų centras, `www.egzaminai.lt`

SUMMARY

A. Kavaliauskas. Peculiarity of mathematical objects. Function

The article deals with some possible definitions of function. Shortages of function definition used at schools are discussed. Some concrete examples of improper use of definitions like function and expression, function and its graph are analyzed. Furthermore, some features of recording dimensional and not dimensional variables and their functions are discussed.

Keywords: function, expression, graph.