Liet. mat. rink. LMD darbai, **48/49**, 2008, 87–91

Dviejų paviršių sankirtos kreivės diferencialinė geometrija

Kazimieras NAVICKIS (VU)
el. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Reziumė. Šiame darbe nagrinėjama dviejų trimatės euklidinės erdvės paviršių sankirtos kreivės diferencialinė geometrija. Skyrium imant, išvedamos formulės tokios kreivės kreivumui ir sukiniui apskaičiuoti.

Raktiniai žodžiai: paviršius, kreivė, kreivumas, sukinys.

Tarkime, kad turime du trimatės euklidinės erdvės paviršius S_1 ir S_2, apibrėžtus lygtimis

$$S_1\colon\ F(x^1, x^2, x^3) = 0$$

ir

$$S_2\colon\ x^i = x^i(u^1, u^2);$$

čia $i, j, k, \ldots = 1, 2, 3$. Šių paviršių sankirtos kreivės $\gamma = S_1 \cap S_2$ taškai tenkina tapatybę

$$F\bigl(x^i(u^\alpha)\bigr) \equiv 0; \tag{1}$$

čia $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, 2$. Pažymėkime

$$\begin{aligned}
&F_i = \frac{\partial F}{\partial x^i}, \quad F_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j},\\
&F_{ijk} = \frac{\partial^3 F}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}, \ldots;\\
&x^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \quad x^i_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta},\\
&x^i_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^3 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta \partial u^\gamma}, \ldots .
\end{aligned}$$

Iš (1) tapatybės išplaukia, kad

$$(F_i x^i_\alpha)\, \mathrm{d}u^\alpha = 0.$$

Pažymėkime

$$p_\alpha = F_i x^i_\alpha.$$

Iš lygybės

$$p_\alpha \, \mathrm{d}u^\alpha = 0$$

gauname, kad

$$\mathrm{d}u^\alpha = \lambda \cdot p^\alpha;$$

čia λ – proporcingumo daugiklis,

$$p^\alpha = \sigma^{\alpha\beta} p_\beta$$

ir

$$(\sigma^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Paviršiaus S_2 vektorinė lygtis

$$S_2\colon\ \vec{r} = x^i(u^\alpha)\vec{e}_i;$$

čia $\{\vec{e}_i\}$ – ortonormuotoji trimatės euklidinės erdvės bazė. Išilgai sankirtos kreivės γ

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}_\alpha \, \mathrm{d}u^\alpha = \lambda p^\alpha \vec{r}_\alpha;$$

čia $\vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\alpha}$.

Iš čia išplaukia, kad

$$(\mathrm{d}\vec{r})^2 = \lambda g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta;$$

čia $g_{\alpha\beta}$ yra paviršiaus S_2 pirmosios kvadratinės formos koeficientai:

$$g_{\alpha\beta} = \vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta.$$

Funkcijos $\vec{r}$ antrosios eilės diferencialas

$$\mathrm{d}^2\vec{r} = (\lambda \cdot dp^\alpha + p^\alpha \cdot d\lambda)\vec{r}_\alpha + \lambda_{\alpha\beta} p^\alpha \, \mathrm{d}u^\beta;$$

čia $\vec{r}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$.

Remiantis Gauso lygtimis ([1], 538 psl.)

$$\vec{r}_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\vec{r}_\gamma + A_{\alpha\beta}\vec{n};$$

čia $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ – paviršiaus S_2 Kristofelio antrosios rūšies simboliai, $A_{\alpha\beta}$ – šio paviršiaus antrosios kvadratinės formos koeficientai ir $\vec{n}$ – vienetinis šio paviršiaus normalės vektorius.

Kita vertus,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}p_\alpha &= \left(F_{ij}x^i_\alpha x^i_\beta + F_i x^i_{\alpha\beta}\right) \mathrm{d}u^\beta = \\
&= \lambda\left(F_{ij}x^i_\alpha x^i_\beta + F_i x^i_{\alpha\beta}\right) p^\beta, \\
\mathrm{d}p^\alpha &= \lambda \cdot A^\alpha;
\end{aligned}$$

čia

$$A^{\alpha} = \sigma^{\alpha\beta}\big(F_{ij}x^i_{\beta}x^i_{\gamma} + F_i x^i_{\beta\gamma}\big)p^{\gamma}.$$

Pažymėkime

$$\begin{aligned} B^{\gamma} &= A^{\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta}, \\ C &= A_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta}. \end{aligned}$$

Tada

$$\mathrm{d}^2\vec{r} = (\lambda^2 B^{\alpha} + p^{\alpha}\cdot \mathrm{d}\lambda)\vec{r}_{\alpha} + \lambda^2\cdot C\cdot\vec{n}.$$

Iš čia gauname, kad

$$\mathrm{d}\vec{r}\times \mathrm{d}^2\vec{r} = \lambda^3\sqrt{g}(q^{\alpha}\vec{r}_{\alpha} + D\cdot\vec{n});$$

čia

$$\begin{aligned} g &= det(f_{\alpha\beta}); \\ q^{\alpha} &= C\cdot g^{\alpha\beta}p_{\beta}; \\ D &= -B^{\alpha}P\alpha; \\ (g^{\alpha\beta}) &= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabar matome, kad

$$(\mathrm{d}\vec{r}\times \mathrm{d}^2\vec{r})^2 = \lambda^6\cdot g\cdot(g_{\alpha\beta}q^{\alpha}q^{\beta} + D^2).$$

Mes įrodėme tokią teoremą.

1 teorema. *Dviejų paviršių S_1 ir S_2 sankirtos kreivės γ kreivumas k apskaičiuojamas pagal formulę*

$$k = \frac{\sqrt{g(g_{\alpha\beta}q^{\alpha}q^{\beta} + D^2)}}{(g_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta})^{3/2}}.$$

Vektorinės funkcijos $\vec{r}$ trečiosios eilės diferencialas

$$\mathrm{d}^3\vec{r} = T^{\alpha}\vec{r}_{\alpha} + T\vec{n};$$

čia

$$\begin{aligned} T^{\gamma} &= 3\cdot\lambda\cdot \mathrm{d}\lambda\cdot B^{\gamma} + p^{\gamma}\cdot \mathrm{d}^2\lambda + \\ &\quad + \lambda^2\cdot dB^{\gamma} + \lambda^3\cdot(C\cdot A^{\gamma}_{\alpha}p^{\alpha} + \\ &\quad + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}B^{\alpha}p^{\beta}), \\ T &= 3\cdot C\cdot\lambda\cdot \mathrm{d}\lambda + \lambda^2\cdot dC + \end{aligned}$$

$$+\lambda^3\cdot A\alpha\beta B^\alpha p^\beta;$$

A^α_β – *Veingarteno lygčių* ([1], 394 psl.)

$$\vec{n}_\alpha = A^\alpha_\beta \vec{r}_\beta$$

koeficientai:

$$A^\alpha_\beta = -g^{\alpha\gamma}A_{\gamma\beta}.$$

Kadangi

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}C = \lambda\cdot Q,\\&\mathrm{d}B^\alpha = \lambda\cdot R^\alpha,\\&\mathrm{d}A^\alpha = \lambda\cdot S^\alpha\end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned}Q &= \frac{\partial A\alpha\beta}{\partial u^\gamma}\,p^\alpha p^\beta p^\gamma + 2A_{\alpha\beta}A^\alpha p^\beta,\\ R^\gamma &= \frac{\partial\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}{\partial u^\varepsilon}\,p^\alpha p^\beta p^\varepsilon + 2\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}A^\alpha p^\beta + S^\gamma,\\ S^\gamma &= \sigma^{\alpha\beta}\big[\{F_{ijk}x^i_\beta x^j_\gamma x^k_\epsilon +\\ &\quad + F_{ij}(x^i_{\beta\varepsilon}x^j_\gamma + x^i_{\beta\gamma}x^j_\varepsilon + x^i_\beta x^j_{\gamma\varepsilon})+\\ &\quad + F_i x^i_{\beta\gamma\varepsilon}\}p^\alpha p^\varepsilon + (F_{ij}x^i_\beta x^j_\gamma +\\ &\quad + F_i x^i_{\beta\gamma})A^\gamma\big],\end{aligned}$$

tai

$$(\mathrm{d}\vec{r},\ \mathrm{d}^2\vec{r},\ \mathrm{d}^3\vec{r}) = \lambda^3\sqrt{g}(D\cdot T + g_{\alpha\beta}q^\alpha T^\beta) = \lambda^6\sqrt{g}q;$$

čia

$$\begin{aligned}&q = h^\alpha p_\alpha,\\&h^\gamma = C\cdot(R^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}B^\alpha p^\beta + C\cdot A^\gamma_\alpha p^\alpha) - (Q + A_{\alpha\beta}B^\alpha p^\beta)B^\gamma.\end{aligned}$$

Mes įrodėme tokią teoremą.

2 teorema. *Dviejų paviršių S_1 ir S_2 sankirtos kreivės γ sukinys χ apskaičiuojamas pagal formulę*

$$\chi = \frac{\sqrt{g}\cdot q}{g(g_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta + D^2)}.$$

Literatūra

1. A. Gray, E. Abbena, and S. Salamon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Chapman & Hall/CRC (2006).

SUMMARY

K. Navickis. Differential geometry of intersection curve of two surfaces

In this this article the differential geometry of intersection curve of two surfaces in the three dimensional euclidean space is considered. In case, curvature and torsion formulas for such curve are defined.

Keywords: surface, curve, curvature and torsion.