Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai
51 tomas, 2010, 51–56

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

asimptotinė analizė

Rima Kriauzienė[1], **Aleksandras Krylovas**[1,2]

[1] *Mykolo Romerio universitetas, Socialinės informatikos fakultetas*
Ateities g. 20, LT-08303 Vilnius

[2] *Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas*
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius

E. paštas: kriauziene@mruni.lt; krylovas@mruni.lt

Santrauka. Darbe nagrinėjamos netiesinės susietos banginės lygtys, žinomos literatūroje kaip Hirota-Satsuma tipo sistema. Atliekama šios sistemos asimptotinė analizė, kuri leidžia periodiniu atveju nustatyti bangų rezonansinės sąveikos atsiradimo sąlygas. Analizės pagrindą sudaro kelių mastelių principas ir silpnai netiesinių hiperbolinių sistemų vidurkinimas pagal charakteristikas. Parodyta, kad tokio tipo sistemos atskirais atvejais išsiskaido į nepriklausomas Kortevego–de Vryso (Korteweg–de Vries) lygtis, tačiau rezonansiniu atveju suvidurkinta sistema lieka susieta ir aprašo bangų sąveiką.

Raktiniai žodžiai: Hirota–Satsuma sistema, asimptotinė analizė, vidurkinimas, bangų sąveika, rezonansas.

1. Straipsnyje nagrinėjamas žinomos literatūroje [6] susietų netiesinių banginių lygčių Hirota–Satsuma sistemos apibendrinimas. Hirota–Satsuma sistema gana aktyviai tyrinėjama įvairiais aspektais daugėlyje straipsnių. Darbe [1] parodoma kaip, naudojant specialiąją transformaciją, apibendritoji Hirota–Satsuma sistema gali būti suprastinta ir atskirais atvejais išspręsta tiksliai. [2, 5] straipsniuose ši sistema išspręsta variaciniu iteraciniu metodu (VIM). Taip pat [5] darbe rezultatai lyginami su gaunamais Adomian'o skaidymo metodu [10]. Parodyta, jog šis VIM metodas yra efektyvus sprendžiant panašias netiesiškumo problemas ir todėl jis taikytinas inžinerijoje ir fizikoje. Taip pat šiuo metu literatūroje aktyviai ieškomi apibendrintosios Hirota–Satsuma sistemos solitonų sprendiniai. Vienas pirmųjų straipsnyje [4] pasiūlo konstruoti solitonų sprendinius, naudojant tanh-funkcijos metodą ir simbolinį skaičiavimą (symbolic computation). [11] straipsnyje remiantis Hirota metodu ir perturbacijos technika gaunamas N-solitono sprendinys. [3] sprendinys ieškomas pseudospektriniu (pseudospectral) metodu. Pirmiausia autoriai diskretizuoja lygtį, o po to taiko Runge–Kutta metodą, kuris duoda santykinai mažas paklaidas, sprendžiant uždavinį skaitiškai.

Šiame mūsų darbe atliekama apibendrintosios Hirota–Satsuma sistemos asimptotinė analizė, kurios pagrindą sudaro kelių mastelių principas ir silpnai netiesinių hiperbolinių sistemų vidurkinimas pagal charakteristikas. Nagrinėjami periodiniai uždaviniai, kai gali atsirasti kombinaciniai rezonansai, ir sistemos asimptotiniam tyrimui pritaikyta vidinio vidurkinimo [7] technika. Parodyta, kad tokio tipo sistemos atskirais atvejais išsiskaido į nepriklausomas Kortevego-de Vryso lygtis, tačiau rezonansiniu atveju suvidurkintosios sistemos lygtys lieka susietomis ir aprašo bangų sąveiką. Suvidurkintos sistemos jau neturi asimptotinio integravimo problemų ilgajame laiko intervale ir efektyviai sprendžiamos skaitiniais metodais (žr. plačiau [9]). Šiame darbe nenagrinėjami asimptotinių sprendinių radimo aspektai, jo tikslas – nustatyti periodinių bangų rezonansinės sąveikos atsiradimo sąlygas.

2. Nagrinėsime apibendrintą Hirota–Satsuma sistemą (literatūroje žr. [6], Hirota–Satsuma paprastai vadinama (1) sistema, kai $\alpha = 3$, $\beta = \gamma = -3$):

$$\begin{cases} u_t + \alpha u u_x = \delta(vw)_x + a u_{xxx}, \quad \delta \neq 0, \\ v_t + \beta u v_x = b v_{xxx}, \\ w_t + \gamma u w_x = c w_{xxx}. \end{cases} \tag{1}$$

Tarkime, kad ε yra mažasis parametras (jis gali turėti ir fizikinę interpretaciją, tačiau mes nagrinėsime formalią Gardner–Morikawa tipo transformaciją; plačiau žr. [8]). Ieškosime (1) sistemos asimptotinio sprendinio

$$\begin{cases} u(t,x;\varepsilon) = u_0 + \varepsilon u_1(\sqrt{\varepsilon}t, \sqrt{\varepsilon}x; \varepsilon), \\ v(t,x;\varepsilon) = v_0 + \varepsilon v_1(\sqrt{\varepsilon}t, \sqrt{\varepsilon}x; \varepsilon), \\ w(t,x;\varepsilon) = w_0 + \varepsilon w_1(\sqrt{\varepsilon}t, \sqrt{\varepsilon}x; \varepsilon). \end{cases} \tag{2}$$

Pažymėję $\sqrt{\varepsilon}t = \overline{t}$, $\sqrt{\varepsilon}x = \overline{x}$ ir įrašę (2) į (1), gauname sistemą su mažu parametru ε:

$$\begin{cases} \varepsilon\sqrt{\varepsilon}u_{1\overline{t}} + \alpha(u_0 + \varepsilon u_1)\varepsilon\sqrt{\varepsilon}u_{1\overline{x}} = \delta(\varepsilon\sqrt{\varepsilon}v_{1\overline{x}}(w_0 + \varepsilon w_1) + \varepsilon\sqrt{\varepsilon}w_{1\overline{x}}(v_0 + \varepsilon v_1)) \\ \quad + a\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}u_{1\overline{x}\overline{x}\overline{x}}, \\ \varepsilon\sqrt{\varepsilon}v_{1\overline{t}} + \beta(u_0 + \varepsilon)\varepsilon\sqrt{\varepsilon}v_{1\overline{x}} = b\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}v_{1\overline{x}\overline{x}\overline{x}}, \\ \varepsilon\sqrt{\varepsilon}w_{1\overline{t}} + \gamma(u_0 + \varepsilon u_{1\overline{x}})\varepsilon\sqrt{\varepsilon}w_{1\overline{x}} = c\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}w_{1\overline{x}\overline{x}\overline{x}}. \end{cases}$$

Atlikę aritmetinius veiksmus ir padalinę kiekvieną sistemos lygtį iš $\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$, gauname:

$$\begin{cases} u_{1\overline{t}} + \alpha u_0 u_{1\overline{x}} - \delta w_0 v_{1\overline{x}} - \delta v_0 w_{1\overline{x}} = \varepsilon(-\alpha u_1 u_{1\overline{x}} + \delta(v_1 w_1)_{\overline{x}} + a u_{1\overline{x}\overline{x}\overline{x}}), \\ v_{1\overline{t}} + \beta u_0 v_{1\overline{x}} = \varepsilon(-\beta u_1 v_{1\overline{x}} + b v_{1\overline{x}\overline{x}\overline{x}}), \\ w_{1\overline{t}} + \gamma u_0 w_{1\overline{x}} = \varepsilon(-\gamma u_1 w_{1\overline{x}} + c w_{1\overline{x}\overline{x}\overline{x}}). \end{cases} \tag{3}$$

Pakeiskime kintamuosius ($\delta \neq 0$, $v_0 \neq 0$, $w_0 \neq 0$)

$$\begin{cases} u_1 = r_1 + r_2 + r_3, \\ v_1 = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_u} r_2, \\ w_1 = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_3}{b_u} r_3, \\ a_u = \delta w_0, b_u = \delta v_0 \end{cases} \tag{4}$$

ir perrašykime (3) sistemą Rymano invariantais r_1, r_2, r_3 (nerašome brūkšnio $\overline{t}$, $\overline{x}$):

$$\begin{cases} r_{1t} + r_{2t} + r_{3t} + \lambda_1(r_{1x} + r_{2x} + r_{3x}) - (\lambda_1 - \lambda_2)r_{2x} - (\lambda_1 - \lambda_3)r_{3x} = \varepsilon F_u, \\ r_{2t} + \lambda_2 r_{2x} = \varepsilon F_v, \\ r_{3t} + \lambda_3 r_{3x} = \varepsilon F_w, \end{cases} \tag{5}$$

čia $\lambda_1 = \alpha u_0$, $\lambda_2 = \beta u_0$, $\lambda_3 = \gamma u_0$, $F_u = -\alpha(r_1 + r_2 + r_3)(r_{1x} + r_{2x} + r_{3x}) + \frac{\delta(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{a_u b_u}(r_2 r_3)_x + a(r_{1xxx} + r_{2xxx} + r_{3xxx})$, $F_v = -\beta(r_1 + r_2 + r_3)r_{2x} + br_{2xxx}$, $F_w = -\gamma(r_1 + r_2 + r_3)r_{3x} + cr_{3xxx}$. Atimkime iš pirmosios (5) sistemos lygties antrosios ir trečiosios lygčių sumą:

$$r_{jt} + \lambda_j r_{jx} = \varepsilon F_j, \quad j = 1, 2, 3, \tag{6}$$

čia $F_1 = F_u - F_v - F_w$, $F_2 = F_v$, $F_3 = F_w$.

3. Ieškome tolygiai tinkamo ilgajame laiko intervale $t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$ asimptotinio sprendinio

$$r_j(t, x; \varepsilon) = \overline{r}_j(\tau, y_j) + O(\varepsilon), \quad j = 1, 2, 3,$$

kai $\tau = \varepsilon t$, $y_1 = x - \lambda_1 t$, $y_2 = x - \lambda_2 t$, $y_3 = x - \lambda_3 t$ ir sudarome suvidurkintąją sistemą (vidurkinimo operatoriai apibrėžti (11) formule, plačiau žr. [9]):

$$\frac{\partial \overline{r}_j}{\partial \tau} = \langle F_j \rangle_j, \quad j = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Nagrinėsime (6) uždavinį, esant (8) sąlygai. Pastebėkime, kad (žr. 1 pastabą, taip pat [7]) $\langle r_{iy_i} \rangle_j = 0$, kai $i \neq j$:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \qquad \lambda_1 \neq \lambda_3, \qquad \lambda_2 \neq \lambda_3. \tag{8}$$

Taigi kai galioja (8), perrašome suvidurkintąją sistemą (7) taip (vėl nerašysime brūkšnio $\overline{r}_j$):

$$\begin{aligned} r_{1\tau} &+ \alpha r_1 r_{1y_1} - a r_{1y_1y_1y_1} \\ &= -\alpha \big\langle (r_2 + r_3)(r_{2y_2} + r_{3y_3}) \big\rangle_1 - \alpha \langle r_2 + r_3 \rangle_1 r_{1y_1} \\ &\quad + \delta \left(\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{a_u b_u} \langle r_{2y_2} r_3 \rangle_1 + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{a_u b_u} \langle r_2 r_{3y_3} \rangle_1 \right) \\ &\quad + \beta \langle r_3 r_{2y_2} \rangle_1 + \gamma \langle r_2 r_{3y_3} \rangle_1, \end{aligned} \tag{9_1}$$

$$r_{2\tau} + \beta r_2 r_{2y_2} + \beta \langle r_1 + r_3 \rangle_2 r_{2y_2} - b r_{2y_2y_2y_2} = 0, \tag{9_2}$$

$$r_{3\tau} + \gamma r_3 r_{3y_3} + \gamma \langle r_1 + r_2 \rangle_3 r_{3y_3} - c r_{3y_3y_3y_3} = 0. \tag{9_3}$$

Nagrinėsime Koši uždavinį, kai $r_j(t, x; \varepsilon)|_{t=0} = \varphi_{j0}(x) \equiv \varphi_{j0}(x + 2\pi)$, tada $\overline{r}_j(\tau, y_j)|_{\tau=0} = \varphi_{j0}(y_j)$ yra periodinės pagal y_j su periodu 2π funkcijos. Tuomet

$$r_j(\tau, y_j) = r_{j0}(\tau) + \sum_{l_j \neq 0} r_{jl_j}(\tau) e^{i l_j y_j}, \tag{10}$$

$$\langle r_i \rangle_j = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T r_i\big(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_i)s\big)\, ds. \tag{11}$$

Pastebėkime, jei λ_j yra sveikieji skaičiai, tai

$$\langle r_i \rangle_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_i\big(\tau, y_i + (\lambda_j - \lambda_i)s\big)\, dy_i = r_{i0}(\tau).$$

Tuomet $[r_j] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r_i(\tau, y_i + (\lambda_j - \lambda_i)s)\,dy_i = r_{i0}(\tau)$. Iš (10) matome, kad

$$\langle r_k r_{my_{l_m}}\rangle_j = \sum_{\substack{(\lambda_j-\lambda_k)l_k+(\lambda_j-\lambda_m)l_m=0\\ l_k\neq 0,\, l_m\neq 0}} il_m r_k(\tau)e^{i(l_k+l_m)y_j}. \tag{12}$$

Pažymėkime

$$\lambda = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_3}.$$

Tarkime, kad $\lambda \neq \pm 1$. Tada iš (12) gauname, kad $[\langle r_k r_{my_m}\rangle_1] \equiv 0$, $k,m = 2,3$. Darome prielaidą, kad galioja pradinės sąlygos $[r_j(0)] \equiv 0$, t.y.

$$r_{10}(0) = r_{20}(0) = r_{30}(0) \equiv 0. \tag{13}$$

1 pastaba. Iš funkcijų r_j periodiškumo išplaukia

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^r r_j(\tau,y_j)}{\partial_j^r y_j}\,dy_j \equiv 0, \quad r = 1,2,3. \tag{14}$$

Todėl integruodami nuo 0 iki 2π (9_2) ir (9_3) pagal y_2, y_3 atitinkamai, gauname, kad $[r_2] = [r_3] = \mathrm{const}$.

4. Tegul Q – racionaliųjų skaičių aibė, $\delta \neq 0$, $v_0 \neq 0$, $w_0 \neq 0$ ir galioja (8) ir (13) sąlygos.

1 teiginys. *Jei $\lambda \notin Q$, tai $(9_{1,2,3})$ sistema išsiskaido į 3 nepriklausomas Kortevego–de Vryso lygtis*:

$$r_{j\tau} + \kappa_j r_j r_{jy_j} + \eta_j r_{jy_jy_jy_j} = 0, \quad j = 1,2,3, \tag{15}$$

čia $\kappa_1 = \alpha$, $\kappa_2 = \beta$, $\kappa_3 = \delta$, $\eta_1 = -a$, $\eta_2 = -b$, $\eta_3 = -c$.

2 teiginys. *Tarkime, kad galioja $\lambda \in Q \setminus \{-1,1\}$, tada (9_2), (9_3) lygtys yra nepriklausomos Kortevego–de Vryso lygtys, kai (15) atitinkamai $j = 2,3$, o (9_1) lygtis turės pavidalą*:

$$r_{1\tau} + \kappa_1 r_1 r_{1y_1} + \eta_y r_{1y_1y_1y_1} = \varphi_1(\tau, y_1), \tag{16}$$

čia

$$\varphi_1(\tau,y_1) = \left(-\alpha + \gamma + \frac{\delta(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{a_u b_u}\right)\langle r_2 r_{3y_3}\rangle_1 \\ + (-\alpha + \beta + \frac{\delta(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{a_u b_u})\langle r_{2y_2} r_3\rangle_1.$$

3 teiginys. *Tarkime, kad $\lambda = \pm 1$, tada sistema $(9_{1,2,3})$ lieka susietų banginių lygčių sistema. Šiuo atveju $\langle r_2 + r_3\rangle_1 = [r_2] + [r_3]$ ir bendru atveju šis reiškinys nelygus nuliui.*

5. Taigi išnagrinėjome apibendrintosios Hirota–Satsuma tipo sistemos visus galimus atvejus. Pirmasis atvejis yra nerezonansinis. Čia turime paprastųjų bangų sumą $r_1(\varepsilon\tau, x-\alpha u_0 t)+r_2(\varepsilon\tau, x-\beta u_0 t)+r_3(\varepsilon\tau, x-\gamma u_0 t)$. Bangos r_j tenkina nepriklausomas Kortevego–de Vryso lygtis.

Antruoju atveju r_2 ir r_3 lieka tos pačios, tačiau banga r_1 surandama sprendžiant nehomogeninę Kortevego–de Vryso lygtį (15).

Trečiasis atvejis yra rezonansinis ir visos trys bangos yra susietos. Norint rasti bangas r_1, r_2, r_3 reikia spręsti suvidurkintąją sistemą $(9_{1,2,3})$. Tai galima daryti skaitiniais metodais [9].

2 pastaba. Įprastinei (t.y. neapibendrintai, kai $\alpha = 3$, $\beta = \gamma = -3$) Hirota–Satsuma sistemai negalioja (8) sąlyga. Jos tyrimas yra paprastesnis ir sistema visais atvejais bus nerezonansinė.

Literatūra

[1] M.A. Abdou. Exact solutions for nonlinear evolution equations via extended projective Riccati equation expansion method. *Electronic Journal of Theoretical Physics*, **4**(14):17–30, 2007.

[2] Laila M.B. Assas. Numerical simulation of the generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equations by variational iteration method. *International Journal of Nonlinear Science*, **7**(1):67–74, 2009.

[3] M.T. Darvishi, F. Khani and S. Kheybari. Spectral collocation solution of a generalized Hirota–Satsuma coupled KdV equation. *International Journal of Computer Mathematics*, **84**(4):541–551, 2007.

[4] E. Fan. Soliton solutions for generalized Hirota–Satsuma coupled KdV equation and a coupled MKdV equation. *Physics Letters A*, **282**(1–2):18–22, 2001.

[5] D.D. Ganji, M. Nourollahi and M. Rostamian. A comparison of variational iteration method with Adomian's decomposition method in some highly nonlinear equations. *International Journal of Science & Technology*, **2**(2):179–188, 2007.

[6] R. Hirota and J. Satsuma. Soliton solution of a coupled Korteweg–de Vries equation. *Physics Letters A*, **85**(8–9):407–408, 1981.

[7] A. Krylov. A method of investigating weakly nonlinear interaction between one-dimensional waves. *J. Appl. Math. Mech*, **51**(6):716–722, translated from Prikl. Mat. Mekh. **51**(6) (1987):933–940 (Russian), 1987.

[8] A. Krylovas. Asymptotic method for approximation of resonant interaction of nonlinear multidimensional hyperbolic waves. *Mathematical Modelling and Analysis*, **13**(1):47–54, 2008.

[9] A. Krylovas and R. Čiegis. Review of numerical asymptotic averaging for weakly nonlinear hyperbolic waves. *Mathematical Modelling and Analysis*, **9**(3):209–222, 2004.

[10] K.R. Raslan. The decomposition method for a hirota–satsuma coupled KdV equation and a coupled MKdV equation. *International Journal of Computer Mathematics*, **81**(12):1497–1505, 2004.

[11] J.P. Wu, X.G. Geng and X.L. Zhang. N-soliton solution of a generalized hirota–satsuma coupled KdV equation and its reduction. *Chinese Physics Letters*, **26**(2):216–230, 2009.

SUMMARY

Asymptotical analysis of generalized Hirota–Satsuma type system

R. Kriauzienė, A. Krylovas

Paper deals with the nonlinear coupled equations of the well known in the literature Hirota–Satsuma type system. The asymptotic analysis of this system, which is based on the principle of two scales and on averaging of weakly nonlinear hyperbolic systems along characteristics is presented in the paper. The asymptotic analysis shown that the system disintegrates on three independent Korteweg–de Vries equations in the non-resonance case, and the system describes an interaction of periodical nonlinear waves in the resonance case.

Keywords: Hirota–Satsuma system, asymptotical analysis, averaging, interaction of waves.