Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
54 t., 2013, 42–47

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

sąlygomis tyrimas ir atitinkamos suvidurkintos sistemos konstravimas

Aleksandras Krylovas, Rima Kriauzienė

Mykolo Romerio universitetas, Ekonomikos ir finansų valdymo fakultetas
Ateities g. 20, LT-08303, Vilnius
E. paštas: krylovas@mruni.lt, kriauziene@mruni.lt

Santrauka. Darbe tyrinėjama pirmosios eilės hiperbolinė diferencialinių lygčių sistema su pradinėmis ir kraštinėmis sąlygomis, kuri aprašo dujų dinamikos uždavinio matematinį modelį. Atliekama šios sistemos asimptotinė analizė. Darbo tikslas – sukonstruoti duotąją sistemą atitinkančią suvidurkintų diferencialinių lygčių sistemą tolygiai tinkamam didelėje mažojo parametro atžvilgiu srityje asimptotiniam sprendiniui rasti. Gautoji sistema yra naujas ir mažai ištirtas asimptotinės analizės objektas.

Raktiniai žodžiai: akustinės bangos, asimptotinė analizė, dujų dinamika, hiperbolinės sistemos, vidurkinimas.

1 Įvadas

Straipsnyje nagrinėjama dujų dinamikos pirmosios eilės hiperbolinė diferencialinių lygčių sistema su pradinėmis ir kraštinėmis sąlygomis. Fizikine prasme nagrinėjamos dujų rimties būsenos mažos perturbacijos (trikdžiai), dėl kurių atsiranda akustinių bangų sąveika. Esant erdvinio kintamojo kraštinei reikšmei yra žinoma generuojama banga. Tokie kraštiniai uždaviniai turi realias praktines interpretacijas, pavyzdžiui, stūmoklio uždavinys [1, 5], kuriam būdingas smūginių bangų atsiradimas. Straipsnyje aprašoma asimptotinė uždavinio analizė leidžia tyrinėti periodinių bangų rezonansinės sąveikos subtilybes.

Hiperbolines diferencialines lygčių sistemas galima perrašyti Rymano invariantais [6]. Kai $\varepsilon = 0$, čia nagrinėjamos (1) sistemos sprendinys yra nepriklausomos bėgančiosios bangos – kintamųjų $x - \lambda_j t$ funkcijos. Kai $\varepsilon > 0$, gali atsirasti periodinių bangų rezonansinė sąveika; jos atsiradimo sąlygas leidžia nustatyti asimptotinė analizė. Rymano invariantais užrašytas sistemas integruojame pagal charakteristikas ir pastebime, kad atsiranda sekuliarieji nariai εt, εx, o gautasis sprendinys nėra tinkamas didelėje, kai $\varepsilon \to 0$ srityje

$$D_\varepsilon = \left\{(t,x)\colon \left[0, \frac{t^0}{\varepsilon}\right] \times \left[0, \frac{x^0}{\varepsilon}\right]\right\},$$

čia t^0, x^0 – tam tikros teigiamos konstantos. Tuomet yra apibrėžiami vidurkinimo operatoriai ir užrašoma suvidurkintų diferencialinių lygčių sistema, kurią jau galima spręsti skaitiniais arba apytiksliais metodais, nes nebelieka asimptotinio integravimo problemų. Nagrinėjamas straipsnyje kraštinis uždavinys įdomus tuo, kad gali turėti gerokai daugiau, palyginti su Koši uždaviniu, interpretacijų dujų dinamikoje.

2 Uždavinio formulavimas

Tarkime, kad ρ – dujų tankis, u – greitis, θ – temperatūra, $P = P(\rho, \theta)$ – slėgis yra laiko t ir erdvinio kintamojo x funkcijos. Šie dydžiai tenkina gerai žinomą (žr., pvz., [6]) Oilerio lygčių sistemą, kurios dėl apribojimų straipsnio apimčiai čia neteiksime. Tarkime, kad ε – mažas teigiamas parametras, ir nagrinėsime mažos amplitudės akustines bangas:

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon\rho_1(t, x; \varepsilon), \qquad u = \varepsilon u_1(t, x; \varepsilon), \qquad \theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1(t, x; \varepsilon).$$

Tada funkcijas ρ_1, u_1, θ_1 galima išreikšti [2], kaip Rymano invariantų v_1, v_2, v_3 tiesinę kombinaciją. Funkcijos v_j yra sistemos

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial v_j}{\partial x} = \varepsilon \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} f_{jik} v_i \frac{\partial v_k}{\partial x} \tag{1}$$

su pradinėmis ir kraštinėmis sąlygomis

$$\begin{gathered} v_1(0, x; \varepsilon) = \varphi(x), \qquad v_2(0, x; \varepsilon) = h(x), \qquad v_3(0, x; \varepsilon) = \chi(x), \quad x > 0, \\ v_3(t, 0; \varepsilon) = \psi(t), \quad t > 0 \end{gathered} \tag{2}$$

sprendiniai. Čia $\lambda_1 = \lambda_0 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -\lambda_0$, $\lambda_0 = \sqrt{\frac{P_0 - \mathcal{E}_0\rho\rho_0^2}{\rho_0\mathcal{E}_{0\theta}} + P_{0\rho}}$ – akustinių bangų sklidimo (garso) greitis, $\mathcal{E}(\rho, \theta)$ – dujų vidinę energiją reiškianti funkcija, indeksai ρ ir θ reiškia dalines išvestines, indeksas 0 reiškia funkcijų reikšmes taške $(\rho_0, 0, \theta_0)$ – dujų rimties būsenoje.

Tarkime, kad funkcijos $v_j = (t, x; \varepsilon)$ skleidžiamos ε laipsniais:

$$v_j(t, x; \varepsilon) = v_j^0(t, x) + \varepsilon v_j^1(t, x) + O(\varepsilon^2). \tag{3}$$

Tada įrašę (3) į (1), (2) ir prilyginę koeficientus prie vienodų ε laipsnių nuliui, gausime, kad

$$\frac{\partial v_j^1}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial v_j^1}{\partial x} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} f_{jik} v_i^0 \frac{\partial v_k^0}{\partial x}, \tag{4}$$

$$v_j^1(0, x) = 0, \qquad v_3^1(t, 0) = 0. \tag{5}$$

Funkcijos v_j^0 išreiškiamos iš (1), (2) taip:

$$\begin{gathered} v_1^0(t, x) = \begin{cases} \varphi(x - \lambda_0 t), & \text{kai } x \geqslant \lambda_0 t, \\ \psi\bigl(t - \frac{x}{\lambda_0}\bigr), & \text{kai } x < \lambda_0 t, \end{cases} \\ v_2^0(t, x) = h(x), \\ v_3^0(t, x) = \chi(x + \lambda_0 t). \end{gathered} \tag{6}$$

Tarkime, kad (2) funkcijos yra periodinės pagal kintamuosius x ir t su periodu 2π. Tada skleisdami (4) sistemos dešinę pusę Furjė eilutėmis gausime tokius reiškinius:

$$v_1^0(t,x)\frac{\partial v_2^0(t,x)}{\partial x} = \begin{cases} \sum_{l_1\in Z}\sum_{l_2\in Z} \mathbf{i}l_2 \overset{+}{v}{}^{0}_{1l_1} v^0_{2l_2} e^{\mathbf{i}(l_1(x-\lambda_0 t)+l_2 x)}, & \text{kai } x \geqslant \lambda_0 t,\\ \sum_{l_1\in Z}\sum_{l_2\in Z} \mathbf{i}l_2 \overset{-}{v}{}^{0}_{1l_1} v^0_{2l_2} e^{\mathbf{i}(l_1(t-\frac{x}{\lambda_0})+l_2 x)}, & \text{kai } x < \lambda_0 t, \end{cases}$$

$$v_1^0(t,x)\frac{\partial v_3^0(t,x)}{\partial x} = \begin{cases} \sum_{l_1\in Z}\sum_{l_3\in Z} \mathbf{i}l_3 \overset{+}{v}{}^{0}_{1l_1} v^0_{3l_3} e^{\mathbf{i}(l_1(x-\lambda_0 t)+l_3(x+\lambda_0 t))}, & \text{kai } x \geqslant \lambda_0 t,\\ \sum_{l_1\in Z}\sum_{l_3\in Z} \mathbf{i}l_3 \overset{-}{v}{}^{0}_{1l_1} v^0_{3l_3} e^{\mathbf{i}(l_1(t-\frac{x}{\lambda_0})+l_3(x+\lambda_0 t))}, & \text{kai } x < \lambda_0 t. \end{cases}$$

Kiti reiškiniai užrašomi analogiškai; jų nerodome dėl apribojimų straipsnio apimčiai.

Funkcijos v_j^1 surandamos integruojant (4), (5) pagal charakteristikas. Pažymėkime $F_{jik}(t,x)$ reiškinių $f_{jik}v_i^0\frac{\partial v_k^0}{\partial x}$ integralus pagal charakteristikas. Pavyzdžiui,

$$F_{123}(t,x) = \begin{cases} f_{123}\int_0^t v_2^0(x)\frac{\partial v_3^0(t,x)}{\partial x}\Big|_{\substack{t=s\\ x=x-\lambda_0 t+\lambda_0 s}} ds, & \text{kai } x \geqslant \lambda_0 t,\\ f_{123}\int_0^x v_2^0(x)\frac{\partial v_3^0(t,x)}{\partial x}\Big|_{\substack{t=t-\frac{x}{\lambda_0}+\frac{r}{\lambda_0}\\ x=r}} dr, & \text{kai } x < \lambda_0 t, \end{cases}$$

$$= f_{123}\begin{cases} \sum_{l_2,l_3} \mathbf{i}l_3 v^0_{2l_2}v^0_{3l_3}\int_0^t e^{\mathbf{i}l_2(x-\lambda_0 t+\lambda_0 s)}e^{\mathbf{i}l_3(x-\lambda_0 t+2\lambda_0 s)}\,ds, & \text{kai } x \geqslant \lambda_0 t,\\ \sum_{l_2,l_3} \mathbf{i}l_3 v^0_{2l_2}v^0_{3l_3}\int_0^x e^{\mathbf{i}l_2 r}e^{\mathbf{i}l_3(r+\lambda_0(t-\frac{x}{\lambda_0}+\frac{r}{\lambda_0}))}\,dr, & \text{kai } x < \lambda_0 t, \end{cases}$$

$$= f_{123}\begin{cases} t\sum_{l_2,l_3:\ l_2+2l_3=0} \mathbf{i}l_3 v^0_{2l_2}v^0_{3l_3}e^{\mathbf{i}(l_2+l_3)\cdot(x-\lambda_0 t)}\\ \quad +\sum_{l_2,l_3:\ l_2+2l_3\neq 0}\frac{l_3 v^0_{2l_2}v^0_{3l_3}}{(l_2+2l_3)\lambda_0}\big(e^{\mathbf{i}(l_2 x+l_3(x+\lambda_0 t))}-e^{\mathbf{i}(l_2+l_3)\cdot(x-\lambda_0 t)}\big),\\ \quad \text{kai } x \geqslant \lambda_0 t,\\ x\sum_{l_2,l_3:\ l_2+2l_3=0} \mathbf{i}l_3 v^0_{2l_2}v^0_{3l_3}e^{\mathbf{i}l_3\lambda_0(t-\frac{x}{\lambda_0})}\\ \quad +\sum_{l_2,l_3:\ l_2+2l_3\neq 0}\frac{l_3 v^0_{2l_2}v^0_{3l_3}}{l_2+2l_3}\big(e^{\mathbf{i}(l_2 x+l_3(x+\lambda_0 t))}-e^{\mathbf{i}l_3\lambda_0(t-\frac{x}{\lambda_0})}\big),\\ \quad \text{kai } x < \lambda_0 t. \end{cases}$$

Taigi (3) skleidinio funkcijos reiškiamos taip:

$$v_j^1(t,x) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} F_{jik}(t,x).$$

Matome, kad (3) skleidinys turi sekuliariuosius narius εt, εx ir todėl nėra tinkamas srityje

$$D_\varepsilon = \left\{(t,x)\colon \left[0,\frac{t^0}{\varepsilon}\right]\times\left[0,\frac{x^0}{\varepsilon}\right]\right\},$$

kurioje (1), (2) uždavinys turi sprendinį [6].

Šio darbo tikslas – sukonstruoti (1) sistemos suvidurkintą analogą, leidžiantį rasti tolygiai tinkamą[1] asimptotinį artinį.

[1] Tai reiškia, kad asimptotinio artinio paklaida turi tą patį asimptotinį įvertį (pvz. $O(\varepsilon)$) visoje didelėje srityje D_ε, t. y. egzistuoja konstanta C visai sričiai, kad paklaida neviršija $C\varepsilon$.

3 Vidurkinimo operatoriai

Žymėsime lėtuosius kintamuosius [2] $\tau = \varepsilon t$, $\xi = \varepsilon x$ ir greituosius charakteristinius kintamuosius $y = x - \lambda_0 t$, $z = t - \frac{x}{\lambda_0}$, $w = x + \lambda_0 t$. Apibrėžkime vidurkinimo pagal charakteristikas operatorius:

$$M_y\big[f(\tau,\xi,t,x)\big] \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau,\xi,t,y+\lambda_0 t)\,dt,$$

$$M_z\big[f(\tau,\xi,t,x)\big] \equiv \lim_{X\to\infty} \frac{1}{X}\int_0^X f\left(\tau,\xi,z+\frac{x}{\lambda_0},x\right)dx,$$

$$M_w\big[f(\tau,\xi,t,x)\big] \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau,\xi,t,w-\lambda_0 t)\,dt.$$

Pastebėję, kad (1) sistemoje $f_{222} = 0$ (žr. [2]), galima parodyti, kad antroji suvidurkintos sistemos lygtis yra nepriklausoma ir turi sprendinį $h(x)$. Nagrinėsime funkcijas $V^+(\tau,\xi,y)$, $V^-(\tau,\xi,z)$, $U(\tau,\xi,w)$ ir vidurkius:

$$M_y\big[h(x)U\big] \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T h(y+\lambda_0 t)U(\tau,\xi,y+2\lambda_0 t)\,dt \equiv \langle hU\rangle_y(\tau,\xi,y),$$

$$M_z\big[h(x)U\big] \equiv \lim_{X\to\infty} \frac{1}{X}\int_0^X h(x)U\left(\tau,\xi,x+\lambda_0\left(z+\frac{x}{\lambda_0}\right)\right)dx \equiv \langle hU\rangle_z(\tau,\xi,\lambda_0 z),$$

$$M_w\big[h(x)V^+\big] \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T h(w-\lambda_0 t)V^+(\tau,\xi,w-2\lambda_0 t)\,dt \equiv \big\langle hV^+\big\rangle_w(\tau,\xi,w),$$

$$\begin{aligned} M_w\big[h(x)V^-\big] &\equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T h(w-\lambda_0 t)V^-\left(\tau,\xi,t-\frac{1}{\lambda_0}(w-\lambda_0 t)\right)dt \\ &\equiv \big\langle hV^-\big\rangle_w\left(\tau,\xi,-\frac{1}{\lambda_0}w\right). \end{aligned}$$

Matome, kad jei funkcijos h, U, V^+, V^- yra periodinės su periodu 2π pagal greituosius kintamuosius x, w, y, z, tai

$$\begin{gathered} \big\langle hV^+\big\rangle_w(\tau,\xi,w+2\pi) \equiv \big\langle hV^+\big\rangle_w(\tau,\xi,w), \\ \big\langle hV^-\big\rangle_w\left(\tau,\xi,-\frac{w}{\lambda_0}+2\pi\right) \equiv \big\langle hV^-\big\rangle_w\left(\tau,\xi,-\frac{w}{\lambda_0}\right), \\ \langle hU\rangle_y(\tau,\xi,y+2\pi) \equiv \langle hU\rangle_y(\tau,\xi,y), \\ \langle hU\rangle_z(\tau,\xi,\lambda_0 z+2\pi) \equiv \langle hU\rangle_z(\tau,\xi,\lambda_0 z). \end{gathered} \tag{7}$$

Pažymėkime funkcijų vidurkius pagal greituosius kintamuosius:

$$\bar{h}\{\tau,\xi\} \equiv \lim_{X\to\infty} \frac{1}{X}\int_0^X h(\tau,\xi,x)\,dx,$$
$$\bar{U}\{\tau,\xi\} \equiv \lim_{W\to\infty} \frac{1}{W}\int_0^W U(\tau,\xi,w)\,dw,$$
$$\bar{V}^+\{\tau,\xi\} \equiv \lim_{Y\to\infty} \frac{1}{Y}\int_0^Y \bar{V}^+(\tau,\xi,y)\,dy,$$
$$\bar{V}^-\{\tau,\xi\} \equiv \lim_{Z\to\infty} \frac{1}{Z}\int_0^Z \bar{V}^-(\tau,\xi,z)\,dz. \tag{8}$$

Tarkime, kad $\bar{h} = \bar{U} = \bar{V}^+ = \bar{V}^- = 0$. Tada turime

$$\left\langle V^+\frac{\partial V^+}{\partial y}\right\rangle_w = \left\langle V^-\frac{\partial V^-}{\partial z}\right\rangle_w = 0, \qquad \left\langle U\frac{\partial U}{\partial w}\right\rangle_y = \left\langle U\frac{\partial U}{\partial w}\right\rangle_z = 0.$$

4 Suvidurkintoji sistema

Pažymėkime

$$V(\tau,\xi,y,z) = \begin{cases} V^+(\tau,\xi,y), & \xi > \lambda_0\tau, \\ V^-(\tau,\xi,z), & \xi < \lambda_0\tau \end{cases}$$

ir (1),(2) uždavinio asimptotinio sprendinio ieškosime tokiu pavidalu: $v_1 \approx V$, $v_2 \approx h$, $v_3 \approx U$, o funkcijos $V^\pm$, U yra suvidurkintosios sistemos

$$\frac{\partial V^+}{\partial \tau} + \lambda_0\frac{\partial V^+}{\partial \xi} - f_{111}V^+\frac{\partial V^+}{\partial y} = f_{123}M_y\left[h\frac{\partial U}{\partial w}\right] + f_{132}M_y\left[\frac{dh}{dx}U\right], \quad \xi \geqslant \lambda_0\tau, \tag{9}$$

$$\frac{\partial V^-}{\partial \tau} + \lambda_0\frac{\partial V^-}{\partial \xi} + \frac{1}{\lambda_0}f_{111}V^-\frac{\partial V^-}{\partial z} = f_{123}M_z\left[h\frac{\partial U}{\partial w}\right] + f_{132}M_y\left[\frac{dh}{dx}U\right], \quad \xi < \lambda_0\tau, \tag{10}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \lambda_0\frac{\partial U}{\partial \xi} - f_{333}U\frac{\partial U}{\partial w} = \begin{cases} f_{321}M_w\left[h\frac{\partial V^+}{\partial y}\right] + f_{312}M_w\left[\frac{dh}{dx}V^+\right], & \xi \geqslant \lambda_0\tau, \\ f_{321}M_w\left[h\frac{\partial V^-}{\partial y}\right] + h_{312}M_w\left[\frac{dh}{dx}V^-\right], & \xi < \lambda_0\tau \end{cases} \tag{11}$$

su pradinėmis ir kraštinėmis sąlygomis:

$$V^+(0,\xi,y) = \varphi(y), \qquad V^-(\tau,0,Z) = \psi(z), \qquad U(0,\xi,w) = \chi(w) \tag{12}$$

sprendiniai.

Gauta dujų dinamikos suvidurkintų lygčių (9)–(12) sistema yra naujas ir mažai ištirtas asimptotinės analizės objektas, kurio tyrimą numatome tęsti. Panašūs uždaviniai pradėti tirti straipsnio autorių darbuose [4, 3].

Literatūra

[1] R. Fazio and G. Russo. Central schemes and second order boundary conditions for 1D interface and piston problems in Lagrangian coordinates. *Commun. Comput. Phys.*, **8**(4):797–822, 2010.

[2] A. Krylovas and R. Čiegis. Review of numerical asymptotic averaging for weakly nonlinear hyperbolic waves. *Math. Model. Anal.*, **9**(3):209–222, 2004.

[3] A. Krylovas ir R. Kriauzienė. Skysčio judėjimo elastingame vamzdyje matematinio modelio asimptotinė analizė. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **52**:34–38, 2011.

[4] A. Krylovas and R. Kriauzienė. Asymptotical analysis of some coupled nonlinear wave equations. *Math. Model. Anal.*, **16**(1):97–108, 2011.

[5] A. Novikovs, H. Ockendon and J. R. Ockendon. Numerical solutions of the unsteady Fanno model for compressible pipe flow. *J. Fluid Mech.*, **579**:493–507, 2007.

[6] B.L. Rozdestvenskii and N.N. Janenko. *Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics* [translated from the Russian by J.R. Schulenberger]/[2nd ed.]. American Mathematical Society, Providence, RI, 1983.

SUMMARY

The analysis of gas dynamics equations with initial and boundary conditions and the construction of the corresponding averaged system

A. Krylovas, R. Kriauzienė

In this paper hyperbolic system of the first order gas dynamics PDE with initial and boundary conditions is studied. The aim of the paper is to construct the averaged system of differential equations in order to find the uniformly valid in a large domain asymptotical solution. The averaged system is a new object of asymptotical analysis.

Keywords: Gas dynamics, acoustic waves, asymptotical analysis, averaging, hyperbolic systems.