LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
53 t., 2012, 84–89

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

apibendrinto vidurkio funkcijas

Natalja Kosareva[1], **Aleksandras Krylovas**[2]

[1] *Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentiniu mokslu fakultetas*
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius
[2] *Mykolo Romerio universitetas, Socialines informatikos fakultetas*
Ateities g. 20, LT-08303 Vilnius
E. paštas: natalja.kosareva@vgtu.lt, krylovas@mruni.eu

Santrauka. Pirmojo, antrojo ir trečiojo laipsnio intuityvieji neryškieji skaičiai išreiškia priklausomumo ir nepriklausomumo tam tikrai neryškiai aibei laipsnį. Tokių skaičių svertinio apibendrinto vidurkinimo operatorius naudojamas sprendžiant daugiakriterinius sprendimų priėmimo uždavinius. Monte Carlo metodu buvo atliktas tyrimas, kurio tikslas – nustatyti, esant kokio tipo intuityviems neryškiems skaičiams ir su kokiais apibendrinto vidurkio rodikliais alternatyvų rangavimo klaidos tikimybės yra mažiausios.

Raktiniai žodžiai: intuityvusis neryškusis skaičius, svertinis apibendrinto vidurkinimo operatorius, daugiakriterinis sprendimų priėmimas, Monte Carlo metodas.

Įvadas

Neryškiųjų skaičių sąvoka buvo pasiūlyta Zadeh [4] ir apibendrinta Atanassov [1], kuris nagrinėjo intuityviuosius neryškiuosius skaičius. Pastaraisiais metais intuityvieji neryškieji skaičiai plačiai taikomi žinių valdymo sistemose, projektų valdyme, vertinant investicijų apimtį ir kryptį ir pan. Viena iš neryškiųjų skaičių taikymo sričių yra daugiakriterinių vertinimų uždaviniai, kai iš keleto alternatyvų reikia išrinkti geriausią esant baigtiniam skaičiui kriterijų. Dažnai sprendžiant tokio tipo uždavinius sunku aprašyti informaciją įprastais skaičiais. Tokiais atvejais tinkamesnis būna neryškiųjų (angl. fuzzy) skaičių naudojimas. Atanassov ir Gargov [2] apibendrino intuityviųjų neryškiųjų skaičių sąvoką ir pasiūlė antrojo laipsnio intuityviuosius neryškiuosius skaičius (angl. interval valued intuitionistic fuzzy numbers). Zhang ir Liu [3] naudojo trečiojo laipsnio intuityviuosius neryškiuosius skaičius (angl. triangular intuitionistic fuzzy numbers) sprendžiant daugiakriterinių vertinimų uždavinius. Šio tyrimo tikslas – palyginti įvairius neryškios informacijos apibendrinimo metodus daugiakriterinio vertinimo uždaviniuose.

1 Sąvokos ir apibrėžimai

Neryškiosios aibės sąvoka buvo pasiūlyta Zadeh 1965 m. [4]. Neryškiosios aibės apibrėžiamos priklausomumo tai aibei funkcija. Žemiau pateiktas Atanassov [1] intuityviosios neryškiosios aibės apibrėžimas.

1 apibrėžimas. Tarkime, kad X yra netuščia aibė. Aibės X *intuityviuoju neryškiuoju poaibiu* vadinsime aibę $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in X\}$, čia $\mu_A(x) : X \to [0;1]$, $\nu_A(x) : X \to [0;1]$ ir $0 \leqslant \mu_A(x) + \nu_A(x) \leqslant 1$ $(\forall x \in X)$. Funkcija $\mu_A(x)$ vadinama elemento $x \in X$ *priklausomumo neryškiai aibei* A *laipsniu*, o funkcija $\nu_A(x)$ – šio elemento *nepriklausomumo laipsniu.* Funkcija $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$ vadinama *neapibrėžtumo laipsniu*, susijusiu su elemento x priklausomumu aibei A.

Atskiru atveju, kai $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x) \equiv 0$, intuityvioji neryškioji aibė yra tiesiog klasikinė neryškioji aibė (angl. fuzzy set).

2 apibrėžimas. Intuityvioji neryškioji aibė $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in R\}$, kuri yra realiųjų skaičių aibės R poaibis, vadinama *intuityviuoju neryškiuoju skaičiumi*, jei:

(i) A yra normalioji, t. y. $\exists x_0 \in A$: $\mu_A(x_0) = 1$ $(\nu_A(x_0) = 0)$;

(ii) priklausomumo funkcija $\mu_A(x)$ yra neryškiai iškila, t. y. $\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$ $\forall x_1, x_2 \in R$, $\lambda \in [0;1]$;

(iii) nepriklausomumo funkcija $\nu_A(x)$ yra neryškiai įgaubta, t. y. $\nu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \max(\nu_A(x_1), \nu_A(x_2))$ $\forall x_1, x_2 \in R$, $\lambda \in [0;1]$.

Operacijos su neryškiaisiais skaičiais buvo apibrėžtos Atanassov ir Gargov [2]. Tarkime, kad $A_1 = (a_1, b_1)$, $A_2 = (a_2, b_2)$, $a, b \in R$, $0 \leqslant a + b \leqslant 1$ yra du intuityvieji neryškieji skaičiai. Tuomet

$$A_1 + A_2 = (a_1 + a_2 - a_1 a_2, b_1 b_2), \qquad A_1 A_2 = (a_1 a_2, b_1 + b_2 - b_1 b_2),$$
$$\lambda A_1 = \bigl(1 - (1 - a_1)^\lambda, b_1^\lambda\bigr), \quad \lambda > 0, \qquad A_1^\lambda = \bigl(a_1^\lambda, 1 - (1 - b_1)^\lambda\bigr), \quad \lambda > 0.$$

Antrojo laipsnio intuityvusis neryškusis skaičius apibrėžiamas kaip skaičių ketvertas $([a^L, a^U], [b^L, b^U])$, $0 \leqslant a^U + b^U \leqslant 1$. Jis parodo elemento x priklausomumo aibei A laipsnį kaip intervalą $[a^L, a^U] \subset [0;1]$, ir nepriklausomumo laipsnį – kaip intervalą $[b^L, b^U] \subset [0;1]$. Trečiojo laipsnio intuityviusis neryškusis skaičius apibrėžiamas kaip skaičių šešetas $([a^L, a^M, a^U], [b^L, b^M, b^U])$, $0 \leqslant a^U + b^U \leqslant 1$, čia $[a^L, a^U] \subset [0;1]$, $[b^L, b^U] \subset [0;1]$. Čia a^L, b^L yra mažiausios, a^M, b^M – vidutinės, a^U, b^U yra didžiausios atitinkamai priklausomumo ir nepriklausomumo intuityviai neryškiai aibei laipsniai.

Aritmetinės operacijos su trečiojo laipsnio intuityviaisiais neryškiaisiais skaičiais $A_i = ([a_i^L, a_i^M, a_i^U], [b_i^L, b_i^M, b_i^U])$, $i = 1, 2$ apibrėžiamos taip:

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 = \bigl(&\bigl[a_1^L + a_2^L - a_1^L a_2^L, a_1^M + a_2^M - a_1^M a_2^M, a_1^U + a_2^U - a_1^U a_2^U\bigr],\\
&\bigl[b_1^L b_2^L, b_1^M b_2^M, b_1^U b_2^U\bigr]\bigr),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 A_2 = \bigl(&\bigl[a_1^L a_2^L, a_1^M a_2^M, a_1^U a_2^U\bigr],\\
&\bigl[b_1^L + b_2^L - b_1^L b_2^L, b_1^M + b_2^M - b_1^M b_2^M, b_1^U + b_2^U - b_1^U b_2^U\bigr]\bigr),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda A_1 = \bigl(&\bigl[1 - \bigl(1 - a_1^L\bigr)\bigr]^\lambda, \bigl[1 - \bigl(1 - a_1^M\bigr)\bigr]^\lambda, \bigl[1 - \bigl(1 - a_1^U\bigr)^\lambda\bigr],\\
&\bigl[\bigl(b_1^L\bigr)^\lambda, \bigl(b_1^M\bigr)^\lambda, \bigl(b_1^U\bigr)^\lambda\bigr]\bigr), \quad \lambda > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1^\lambda = \bigl(&\bigl[\bigl(a_1^L\bigr)^\lambda, \bigl(a_1^M\bigr)^\lambda, \bigl(a_1^U\bigr)^\lambda\bigr],\\
&\bigl[1 - \bigl(1 - b_1^L\bigr)^\lambda, 1 - \bigl(1 - b_1^M\bigr)^\lambda, 1 - \bigl(1 - b_1^U\bigr)^\lambda\bigr]\bigr), \quad \lambda > 0.
\end{aligned}$$

Aritmetinės operacijos su antrojo laipsnio intuityviaisiais neryškiaisiais skaičiais apibrėžiamos analogiškai. Apibrėšime intuityviųjų neryškiųjų skaičių svertinio apibendrinto vidurkinimo operatorių.

3 apibrėžimas. Tarkime, kad $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ yra intuityviųjų neryškiųjų skaičių seka, $p > 0$, $p \in R$ ir $f_\omega^p : \Omega^n \to \Omega$, Ω yra visų intuityviųjų neryškiųjų skaičių aibė. Funkcija

$$f_\omega^p(A_1, A_2, \dots, A_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i A_i^p \right)^{1/p}, \tag{1}$$

čia $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$, $\omega_i \in [0; 1]$, $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$, vadinama intuityviųjų neryškiųjų skaičių *svertinio apibendrinto vidurkinimo operatoriumi su eksponente p*. Svertinio apibendrinto vidurkinimo operatoriaus rezultatas yra intuityvusis neryškusis skaičius.

1 pastaba. Kai $p = 1$ operatorius(1) sutampa su svertiniu aritmetiniu vidurkiu. (1) operatoriaus riba, kai $p \to 0$ sutampa su svertiniu geometriniu vidurkiu.

2 Intuityviųjų neryškiųjų skaičių palyginimas

Neryškiųjų skaičių palyginimas yra viena pagrindinių problemų neryškiųjų skaičių teorijoje. Pirmiausia intuityvieji neryškieji skaičiai defuzifikuojami, po to gautos reikšmės palyginamos. Vienas dažniausiai naudojamų defuzifikavimo metodų – didumo funkcijos (angl. score function) skaičiavimas.

4 apibrėžimas. Intuityviojo neryškiojo skaičiaus $A = (a, b)$ *didumo funkcija* S_A vadinama funkcija

$$S_A = a - b, \quad S_A \in [-1; 1]. \tag{2}$$

Kuo didesnė S_A reikšmė, tuo didesnis intuityvusis neryškusis skaičius A. Mažiausias intuityvusis neryškusis skaičius yra $A_{\min} = (0; 1)$, $S_{\min} = -1$, didžiausias – $A_{\max} = (1; 0)$, $S_{\max} = 1$.

5 apibrėžimas. Antrojo laipsnio intuityviojo neryškiojo skaičiaus $A = ([a^L, a^U], [b^L, b^U])$ *didumo funkcija* S_A vadinama funkcija

$$S_A = \left(a^L - b^L + a^U - b^U\right)/2, \quad S_A \in [-1; 1]. \tag{3}$$

6 apibrėžimas. Trečiojo laipsnio intuityviojo neryškiojo skaičiaus $A = ([a^L, a^M, a^U], [b^L, b^M, b^U])$ *didumo funkcija* S_A vadinama funkcija

$$S_A = \left(a^L - b^L + a^M - b^M + a^U - b^U\right)/3, \quad S_A \in [-1; 1]. \tag{4}$$

3 Daugiakriterinis sprendimų priėmimas taikant agreguotas neryškiųjų skaičių funkcijas

Tarkime, kad turime baigtinę alternatyvų aibę $S = (s_1, s_2, \dots, s_m)$. Daugiakriterinio vertinimo uždaviniuose paprastai šias alternatyvas reikia ranguoti pagal jų atitikimą tam tikriems kriterijams $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$. Tegu $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ yra kriterijų svoriai $\omega_i \in [0; 1]$, $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

Tarkime, kad informacija, apibūdinanti projektą s_i aprašyta intuityviaisiais neryškiaisais skaičiais $\{\langle r_j, \mu_i(r_j), \nu_i(r_j)\rangle, r_j \in A\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Čia $\mu_i(r_j)$ parodo projekto s_i atitikimo kriterijui r_j laipsnį, o $\nu_i(r_j)$ parodo projekto s_i neatitikimo kriterijui r_j laipsnį. Tegu $\mu_i(r_j) = [a^L_{ij}, a^M_{ij}, a^U_{ij}]$, $\nu_i(r_j) = [b^L_{ij}, b^M_{ij}, b^U_{ij}]$, t. y. visi šie skaičiai yra trečiojo laipsnio intuityvieji neryškieji skaičiai, o sprendimų matrica yra:

$$D = (I_{ij})_{m\times n}, \qquad (I_{ij}) = \bigl([a^L_{ij}, a^M_{ij}, a^U_{ij}], [b^L_{ij}, b^M_{ij}, b^U_{ij}]\bigr),$$
$$i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Daugiakriterinis vertinimas vyksta pagal tokią schemą.

Jei vertinimą atliko keli ekspertai, t. y. turime atitinkamas ekspertų sprendimų priėmimo matricas, kurių elementai yra intuityvieji neryškieji skaičiai, pirmiausia formuojame apibendrintą sprendimų priėmimo matricą, kurios elementai yra pirmo, antro arba trečio laipsnio intuityvieji neryškieji skaičiai.

Kiekvienai gautos sprendimų matricos eilutei skaičiuojame svertinio apibendrinto vidurkinimo operatoriaus reikšmę $I_i^p = f_\omega(I_{i1}, I_{i2}, \ldots, I_{in})$ pagal formulę (1). Tokiu būdu apjungiame visą informaciją, susijusią su projektu i ($i = 1, 2, \ldots, m$). Kiekvienam projektui skaičiuojame didumo funkcijos reikšmę $S(I_i^p)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ ir palyginame projektus tarpusavyje.

4 Stabilumo tyrimas

Tarkime, kad 5 ekspertai vertina 5 alternatyvius projektus pagal jų atitikimą penkiems kriterijams, kurių svorių vektorius yra $\omega = (0,2; 0,2; 0,2; 0,2; 0,2)^T$. Tarkime, kad pradinės sprendimų priėmimo matricos, kurios elementai atspindi objektyvų projektų įvertinimą, eilučių, atitinkančių penkis projektus, elementai yra:

$$s_1 = (0{,}65; 0{,}65; 0{,}65; 0{,}65; 0{,}65), \qquad s_2 = (0{,}55; 0{,}55; 0{,}55; 0{,}55; 0{,}55),$$
$$s_3 = (0{,}45; 0{,}45; 0{,}45; 0{,}45; 0{,}45), \qquad s_4 = (0{,}35; 0{,}35; 0{,}35; 0{,}35; 0{,}35),$$
$$s_5 = (0{,}25; 0{,}25; 0{,}25; 0{,}25; 0{,}25).$$

Akivaizdu, kad projektų išdėstymo pagal jų atitikimą duotiems kriterijams tvarka yra tokia: $s_1 \succ s_2 \succ s_3 \succ s_4 \succ s_5$. Penkių ekspertų sprendimų matricų elementai buvo generuojami Monte Carlo metodu kaip intuityvieji neryškieji skaičiai. Atitikimo kriterijams laipsnių a_{ij} generavimas buvo atliktas pagal normalųjį ir tolygųjį skirstinius esant skirtingoms dispersijų reikšmėms, o vidurkiai – atitinkami sprendimų priėmimo matricos elementai. Nepriklausomai buvo generuojami neapibrėžtumo laipsniai su vidurkiais 0,1 ir standartiniais nuokrypiais 0,05. Po to neatitikimo kriterijams laipsniai apskaičiuojami pagal formulę $b_{ij} = 1 - a_{ij} - \pi_{ij}$. Sugeneruota vieno eksperto sprendimų matrica pateikta 1 lentelėje. Iš 5 ekspertų sprendimų priėmimo matricų pagal metodiką, aprašytą 3 skyrelyje, formuojama apibendrinta sprendimų priėmimo matrica, kurios elementai yra pirmo, antro arba trečio laipsnio intuityvieji neryškieji skaičiai. Po to pagal formulę (1) kiekvienai eilutei apskaičiuojamos svertinio apibendrinto vidurkinimo operatoriaus reikšmės, esant $p = 0$; 0,01; 0,25; 0,5; 1. Pagal formules (2)–(4) apskaičiuojamos atitinkamų intuityviųjų neryškiųjų skaičių didumo funkcijos reikšmės ir projektai ranguojami. 500 Monte Carlo eksperimentų

1 lentelė. Eksperto sprendimų priėmimo matricos realizacija generuojant pagal normalųjį skirstinį $\sigma = 0,1$.

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
s_1	(0,736; 0,169)	(0,78; 0,176)	(0,533; 0,337)	(0,554; 0,357)	(0,824; 0)
s_2	(0,717; 0,265)	(0,578; 0,366)	(0,324; 0,544)	(0,532; 0,368)	(0,521; 0,342)
s_3	(0,516; 0,413)	(0,425; 0,427)	(0,401; 0,554)	(0,49; 0,389)	(0,251; 0,749)
s_4	(0,308; 0,593)	(0,456; 0,452)	(0,348; 0,563)	(0,442; 0,431)	(0,287; 0,595)
s_5	(0,48; 0,452)	(0,185; 0,724)	(0,306; 0,555)	(0,205; 0,752)	(0,201; 0,799)

2 lentelė. Rangavimo klaidų tikimybės taikant svertinį apibendrintą vidurkinimo operatorių 1-jo, 2-jo ir 3-jo laipsnio intuityviesiems neryškiesiems skaičiams.

σ	3 $p=0$	2 $p=0$	1 $p=0$	3 $p=0{,}01$	2 $p=0{,}01$	1 $p=0{,}01$	3 $p=0{,}25$	2 $p=0{,}25$	1 $p=0{,}25$	3 $p=0{,}5$	2 $p=0{,}5$	1 $p=0{,}5$	3 $p=1$	2 $p=1$	1 $p=1$
Generavimas tolygiuoju skirstiniu															
0,5	0,010	0,010	0,014	0,011	**0,0095**	0,015	0,011	0,0096	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
0,6	0,033	0,031	0,048	0,031	**0,0280**	0,052	0,033	0,0295	0,05	0,03	0,03	0,05	0,03	0,03	0,05
0,7	0,860	0,081	0,115	0,082	**0,0710**	0,124	0,083	0,0740	0,12	0,08	0,08	0,12	0,09	0,08	0,12
0,8	0,161	0,154	0,205	0,159	0,1490	0,217	0,158	**0,1450**	0,21	0,16	0,15	0,21	0,16	0,15	0,21
0,9	0,249	0,244	0,302	0,240	**0,2230**	0,314	0,244	0,2260	0,31	0,25	0,23	0,31	0,25	0,24	0,30
1,0	0,350	0,341	0,412	0,317	**0,2890**	0,425	0,330	0,3020	0,42	0,34	0,32	0,42	0,35	0,34	0,41
Generavimas normaliuoju skirstiniu															
0,10	0,050	0,0490	0,066	0,0132	**0,01285**	0,020	0,018	0,0179	0,03	0,03	0,03	0,04	0,05	0,05	0,07
0,15	0,115	0,1150	0,143	0,0536	**0,05135**	0,078	0,065	0,0614	0,09	0,08	0,08	0,10	0,12	0,12	0,14
0,20	0,179	0,1816	0,206	**0,1102**	0,11420	0,134	0,124	0,1260	0,15	0,14	0,14	0,17	0,18	0,18	0,21
0,25	0,243	0,2456	0,257	**0,1738**	0,17570	0,193	0,187	0,1900	0,21	0,20	0,21	0,22	0,24	0,25	0,26
0,30	0,298	0,3020	0,310	**0,2340**	0,23550	0,247	0,246	0,2490	0,26	0,26	0,26	0,28	0,30	0,30	0,31
0,40	0,374	0,3794	0,385	0,3211	**0,31935**	0,339	0,332	0,3320	0,35	0,35	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39

buvo pakartoti 40 kartų. Iš viso atlikta po 20000 eksperimento realizacijų. Kiekvieną kartą gautas projektų išdėstymas buvo lyginamas su žinoma projektų išdėstymo tvarka $s_1 \succ s_2 \succ s_3 \succ s_4 \succ s_5$ ir skaičiuojami neatitikimai. Rezultatai, gauti generuojant pagal normalųjį ir tolygųjį skirstinius ir esant skirtingoms p ir σ reikšmėms pateikti 2 lentelėje. Mažiausios klaidų reikšmės yra paryškintos.

5 Išvados

Eksperimentas parodė, kad trečiojo laipsnio intuityviųjų neryškiųjų skaičių naudojimas normaliojo ir tolygiojo skirstinio atvejais nėra tikslingas, nes klaidų tikimybės nėra mažiausios. Mažiausios klaidų tikimybės, kaip matome iš 2 lentelės, tolygiojo skirstinio atveju yra antro laipsnio intuityviesiems neryškiesiems skaičiams su eksponentės reikšmėmis $p = 0{,}01$ ir $p = 0{,}25$, normaliojo skirstinio atveju – pirmo laipsnio intuityviesiems neryškiesiems skaičiams su eksponente $p = 0{,}01$. Taigi nei aritmetinis ($p = 1$), nei geometrinis ($p = 0$) vidurkiai neduoda geriausio rezultato. Nuodugnesnė analizė parodė, kad jei projekto atitikimas bent vienam kriterijui $\mu_j = (0, 0, 0)$, tokiu atveju apibendrintas geometrinis vidurkinimo operatorius šiam projektui suteiks žemiausią rangą, nepriklausomai nuo jo atitikimo kitiems kriterijams. Kitą vertus, jei projekto atitikimas bent vienam kriterijui $\mu_j = (1, 1, 1)$, tai apibendrintas aritmetinis vidurkinimo operatorius šiam projektui suteiks aukščiausią rangą, nepriklausomai nuo jo atitikimo kitiems kriterijams. Toks šių kriterijų nejautrumas atsispindi gautuose rezultatuose.

Literatūra

[1] K. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzz. Sets Syst.*, **20**(1):87–96, 1986.

[2] K. Atanassov and G. Gargov. Interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzz. Sets Syst.*, **31**(3):343–349, 1989.

[3] X.Zhang and P. Liu. Method for aggregating triangular fuzzy intuitionistic fuzzy information and its application to decision making. *Techn. Econ. Devel. Econ.*, **16**(2):280–290, 2010.

[4] L. Zadeh. Fuzzy sets. *Inf. Contr.*, **8**:338–353, 1965.

SUMMARY

Decision making by the values of generalized average fuzzy functions
N. Kosareva, A. Krylovas

Notions of point, interval and triangular intuitionistic fuzzy numbers are introduced. The generalized weighted averaging operator is used for solving multiple criteria decision making problems. Monte Carlo study was conducted with the aim to establish for which types of intuitionistic fuzzy numbers and which exponent values of weighted generalized average operator probabilities of alternatives ranking errors are the least.

Keywords: intuitionistic fuzzy number, weighted generalized average operator, multiple criteria decision making, Monte Carlo method.