Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
53 t., 2012, 37–41

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

geometrija

Kazimieras Navickis

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Santrauka. Šiame darbe nagrinėjami n-matės Euklido erdvės hiperpaviršiaus aukštesnių eilių glaustinių hiperpaviršių diferencialinė geometrija afininėje koordinačių sistemoje. Glaustinių hiperpaviršių panaudojimas leidžia analizuoti duotojo hiperpaviršiaus lokalines savybes, kurios priklauso nuo aukštesniųjų eilių dalinių išvestinių.

Raktiniai žodžiai: hiperpaviršius, glaustinis hiperpaviršius, afininė diferencialinė geometrija.

Tarkime, kad S – hiperpaviršius n-matėje Euklido erdvėje, apibrėžtas išreikštine lygtimi $(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \dots = 1, \dots, n-1; a, b, \dots, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots = n)$

$$S : x^a = f^a(x^\alpha), \tag{1}$$

funkcija f^a yra tolydi ir turi tolydines dalines išvestines taške (x_0^α) iki eilės $r+1$, $r \in \mathbb{N}$.

Pažymėkime

$$\vec{r} = \{x^1; x^2; \dots; x^{n-1}; f^a(x^\alpha)\},$$
$$\vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^\alpha}.$$

Nuo vektorių sistemos $\{\vec{r}_\alpha\}$ pereikime prie kitos vektorių sistemos $\{\vec{a}_\alpha\}$ pagal formules

$$\vec{a}_\alpha = \frac{a_{\alpha\alpha}}{G_\alpha} \sum_{\beta=1}^{\alpha} G^\alpha_{\alpha\beta} \vec{r}_\beta,$$

čia

$$a_{\alpha\alpha} = \vec{r}_\alpha \cdot \vec{a}_\alpha,$$

$G^{(\alpha)}_{\alpha\beta}$ yra elemento

$$g_{\alpha\beta} = \vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta$$

adjunktas determinante

$$G_\alpha = \det(M_\alpha)$$

ir

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1\alpha} \\ g_{12} & g_{22} & \dots & g_{2\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{1\alpha} & g_{2\alpha} & \dots & g_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}.$$

Vektoriai

$$\vec{E}_\alpha = \frac{\vec{a}_\alpha}{|\vec{a}_\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{G_{\alpha-1} \cdot G_\alpha}} \sum_{\beta=1}^{\alpha} G^{(\alpha)}_{\alpha\beta} \vec{r}_\beta$$

sudaro hiperpaviršiaus S liečiamosios hiperplokštumos ortonormuotą bazę. Hiperpaviršiaus S normalės vektorius

$$\vec{N} = (-1)^n \big\{ f^a_\alpha; -1 \big\},$$

čia

$$f^a_\alpha = \frac{\partial f^a}{\partial x^\alpha}.$$

Normalės vektoriaus $\vec{N}$ ilgis

$$|\vec{N}| = \sqrt{G_{n-1}}.$$

Pažymėkime

$$\vec{E}_n = \frac{\vec{N}}{\sqrt{G_{n-1}}}.$$

Vektorių sistema $\{\vec{E}_i\}$ $(i, j, \dots = 1, \dots, n)$ sudaro n-matės Euklido erdvės ortonormuotąją bazę hiperpaviršiaus S taške (x^i).

Hiperpaviršių S nagrinėsime jo taško $M_0(x^i_0)$ aplinkoje; čia $x^a_0 = f^a(x^\alpha_0)$. Vektorinių funkcijų $\vec{E}_i$ reikšmes taške M_0 žymėsime $\vec{e}_i$:

$$\vec{e}_i = \big\{ l^j_i \big\}.$$

Matrica

$$R = \big(l^i_j \big)$$

yra ortogonalioji. Bet kurio n-matės Euklido erdvės taško $M(x^i)$ koordinates bazės $\{\vec{e}_i\}$ atžvilgiu žymėsime y^i. Tada

$$x^i = x^i_o + l^i_j y^j. \tag{2}$$

Hiperpaviršiaus S lygtis naujoje koordinačių sistemoje bus tokia:

$$S : h^a\big(y^i\big) = 0, \tag{3}$$

čia

$$h^a(y^i) = f^a\bigl(x_0^\alpha + l_i^\alpha y^i\bigr) - \bigl(x_0^a + l_i^a y^i\bigr).$$

Funkcijos h^a dalinių išvestinių

$$h^a_{i_1\ldots i_p} = \frac{\partial^p h^a}{\partial y^{i_1}\ldots\partial y^{ip}}, \quad (p \geq 1)$$

reikšmes taške M_0 žymėsime $b^a_{i_1\ldots i_p}$. Kadangi

$$b^a_\alpha = 0, \qquad b^a_n = -\sqrt{G_{n-1}(M_0)} \neq 0,$$

tai (3) lygtis apibrėžia funkciją

$$y^a = H^a\bigl(y^\alpha\bigr).$$

Pažymėkime

$$A^a_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \frac{\partial^p H^a}{\partial y^{\alpha_1}\ldots\partial y^{\alpha_p}},$$
$$C^a_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = A^a_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(M_0),$$
$$A^a_\alpha = \frac{\partial y^a}{\partial y^\alpha}, \qquad B^\beta_\alpha = \delta^\beta_a, \qquad B^a_\alpha = A^a_\alpha.$$

Diferencialinių operatorių

$$\partial^\#_\alpha = B^k_\alpha \frac{\partial}{\partial y^k} \tag{4}$$

pagalba apibrėžkime naujus diferencialinius operatorius

$$\partial^\#_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \partial^\#_{\alpha_p} \circ \cdots \circ \partial^\#_{\alpha_1}.$$

Pažymėkime

$$H^a_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \partial^\#_{\alpha_1\ldots\alpha_p} h^a.$$

Dydžius $C^a_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ randame rekurentiškai iš lygčių sistemos

$$H^a_{\alpha_1\ldots\alpha_p}|_{C^a_\beta=0} = 0,$$

t. y. iš sistemos

$$\begin{cases} b^a_{a_1} C^{a_1}_{\alpha_1\alpha_2} + b^a_{\alpha_1\alpha_2} = 0, \\ b^a_{a_1} C^{a_1}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} + 3C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2} b^a_{\alpha_3)_{a_1}} + b^a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = 0, \\ b^a_{a_1} C^{a_1}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} + 3b^a_{a_1a_2} C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2} C^{a_2}_{\alpha_3\alpha_4)} + 6C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2} b^a_{\alpha_3\alpha_4)a_1} \\ \quad + 4C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3} b^a_{\alpha_4)\alpha_1} + b^a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = 0, \\ b^a_{a_1} C^{a_1}_{\alpha_1\ldots\alpha_5} + 5C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} b^a_{\alpha_5)a_1} + 10C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3} C^{a_2}_{\alpha_4\alpha_5)} b^a_{a_1a_2} \\ \quad + 10C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3} b^a_{\alpha_4\alpha_5)a_1} + 15C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2} C^{a_2}_{\alpha_3\alpha_4} b^a_{\alpha_5)a_1a_2} \\ \quad + 10C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2} b^a_{\alpha_3\alpha_4\alpha_5)a_1} + b^a_{\alpha_1\ldots\alpha_5} = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{5}$$

p-formos ($p \geqslant 2$)

$$\varphi_p^a = \frac{1}{p!} C^a_{\alpha_1 \dots \alpha_p} y^{\alpha_1} \dots y^{\alpha_p} \tag{6}$$

leidžia apibrėžti r-osios eilės hiperpaviršių

$$O^{(r)}_{M_0}(S) : y^a = \sum_{p=2}^{r} \varphi_p^a, \tag{7}$$

kuris turi r-osios eilės kontaktą taške M_0 su nagrinėjamu hiperpaviršiumi S. Todėl šį hiperpaviršių vadinsime hiperpaviršiaus S r-osios eilės glaustiniu hiperpaviršiumi. Jo savybės leidžia nagrinėti įvairias paties hiperpaviršiaus S geometrines savybes.

Pasirinkime kitą koordinačių sistemą. Vektoriai

$$\begin{cases} \vec{f}_\alpha = \vec{e}_\alpha, \\ \vec{f}_a = a_a^\alpha \vec{f}_\alpha + \vec{e}_a, \end{cases}$$

kai $a_a^\alpha \in \mathbb{R}$ yra fiksuoti skaičiai, nustato n krypčių vektorius afininėje koordinačių sistemoje, kurios pradžios taškas yra M_0. Tarkime, kad $(u^\alpha; F^a(u^\alpha))$ yra hiperpaviršiaus S taško koordinatės šios sistemos atžvilgiu. Tada

$$S : \begin{cases} X^\alpha = u^\alpha + a_a^\alpha F^a(u^\beta), \\ X^a = F^a(u^\beta). \end{cases}$$

Pažymėkime

$$\begin{aligned} F^a_{\alpha_1 \dots \alpha_p} &= \frac{\partial^p F^a}{\partial u^{\alpha_1} \dots \partial u^{\alpha_p}}, \\ d^a_{\alpha_p \dots \alpha_p} &= F^a_{\alpha_1 \dots \alpha_p}\big|_{M_0}, \\ \psi_p^a &= \frac{1}{p!} d^a_{\alpha_1 \dots \alpha_p} u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_p}. \end{aligned}$$

Lygtis

$$Osc^{(r)}_{M_0}(S) : X^a = \sum_{p=2}^{r} \psi_p^a$$

apibrėžia r-sios eilės glaustinį hiperpaviršių taške M_0 afininėje koordinačių sistemoje.

Darbe įrodoma teorema, kurioje nustatomi ryšiai tarp p-formų φ_p^a ir ψ_p^a. Skyrium imant, jei

$$\begin{aligned} g^a_{(2)b_1} &= a^a_{\beta_1 \alpha_3} a^{\beta_1}_{b_1} u^{\alpha_3}, \\ g^a_{(3)b_1} &= a^a_{\beta_1 \alpha_3 \alpha_4} a^{\beta_1}_{b_1} u^{\alpha_3} u^{\alpha_4}, \\ g^a_{(4)b_1} &= a^a_{\beta_1 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5} a^{\beta_1}_{b_1} u^{\alpha_3} u^{\alpha_4} u^{\alpha_5}, \\ g^a_{(5)b_1} &= a^a_{\beta_1 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6} a^{\beta_1}_{b_1} u^{\alpha_3} u^{\alpha_4} u^{\alpha_5} u^{\alpha_6}, \\ h^a_{(2)b_1 b_2} &= a^a_{\beta_1 \beta_2} a^{\beta_1}_{b_1} a^{\beta_2}_{b_2}, \\ h^a_{(3)b_1 b_2} &= a^a_{\beta_1 \beta_2 \alpha_5} a^{\beta_1}_{b_1} a^{\beta_2}_{b_2} u^{\alpha_5}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&h^a_{(3)b_1b_2b_3} = a^a_{\beta_1\beta_2\beta_3} a^{\beta_1}_{b_1} a^{\beta_3}_{b_2} a^{\beta_3}_{b_3},\\
&h^a_{(4)b_1b_2} = a^a_{\beta_1\beta_2\alpha_5\alpha_6} a^{\beta_1}_{b_1} a^{\beta_2}_{b_2} u^{\alpha_5} u^{\alpha_6},\\
&Z^a_{(p)} = a^a_{\alpha_1\ldots\alpha_p} u^{\alpha_1} \ldots u^{\alpha_p},
\end{aligned}
$$

tai

$$
\begin{aligned}
\psi^a_2 =& \frac{1}{2} Z^a_{(2)},\\
\psi^a_3 =& \frac{1}{6} Z^a_{(3)} + \frac{1}{2} Z^{b_1}_{(2)} g^a_{(2)b_1},\\
\psi^a_4 =& \frac{1}{24} Z^a_{(4)} + \frac{1}{8} Z^{b_1}_{(2)} Z^{b_2}_{(2)} h^a_{(2)b_1b_2} + \frac{1}{6} Z^{b_1}_{(3)} g^a_{(2)b_1} + \frac{1}{4} Z^{b_1}_{(2)} g^a_{(3)b_1},\\
\psi^a_5 =& \frac{1}{5!} Z^a_{(5)} + \frac{1}{24} g^a_{(2)b_1} Z^{b_1}_{(4)} + \frac{1}{12} h^a_{(2)b_1b_2} Z^{b_1}_{(3)} Z^{b_2}_{(2)} + \frac{1}{12} g^a_{(3)b_1} Z^{b_1}_{(3)}\\
&+ \frac{1}{6} h^a_{(3)b_2b_2} Z^{b_1}_{(2)} Z^{b_2}_{(2)} + \frac{1}{12} g^a_{(4)b_1} Z^{b_1}_{(2)},\\
\psi^a_6 =& \frac{1}{6!} Z^a_{(6)} + \frac{1}{120} g^a_{(2)b_1} Z^{b_1}_{(5)} + \frac{1}{48} h^a_{(2)b_1b_2} Z^{b_1}_{(4)} Z^{b_2}_{(2)} + \frac{1}{72} h^a_{(2)b_1b_2} Z^{b_1}_{(3)} Z^{b_2}_{(3)}\\
&+ \frac{1}{48} g^a_{(3)b_1} Z^{b_1}_{(4)} + \frac{1}{12} h^a_{(3)b_1b_2} Z^{b_1}_{(3)} Z^{b_2}_{(2)} + \frac{1}{48} h^a_{(3)b_1b_2b_3} Z^{b_1}_{(2)} Z^{b_2}_{(2)} Z^{b_3}_{(2)}\\
&+ \frac{1}{36} g^a_{(4)b_1} Z^{b_1}_{(3)} + \frac{1}{16} h^a_{(4)b_1b_2} Z^{b_1}_{(2)} Z^{b_2}_{(2)} + \frac{1}{48} g^a_{(5)b_1} Z^{b_1}_{(2)}.
\end{aligned}
$$

Literatūra

[1] W. Blaschke. *Affine Differentialgeometrie*. Berlin, 1923.

SUMMARY

Affine differential geometry of osculating hypersurfaces

K. Navickis

Osculating surfaces of second order have been studied in classical affine differential geometry [1]. In this article we generalize this notion to osculating hypersurfaces of higher order of hypersurfaces in Euclidean n-space. Various geometric interpretations are given. This yields a affinely invariant consideration of the local properties of a given hypersurface which depend on the derivatives of higher order.

Keywords: hypersurface, osculating hypersurface, affine differential geometry.