Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai
52 tomas, 2011, 365–368

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

maksimumų konvergavimo greičio įvertis

Lina Dindienė, Arvydas Jokimaitis

Kauno technologijos universitetas, Fundamentaliųjų mokslų fakultetas
Studentų 50, LT-51368 Kaunas
E. paštas: lina_dindiene@yahoo.com; arvydas.jokimaitis@ktu.lt

Santrauka. Šiame darbe nagrinėjame netiesiškai normalizuotų dvimačių atsitiktinio skaičiaus vektorių maksimumų struktūrą. Gauname šios struktūros konvergavimo greičio įverčio išraišką perkėlimo teoremoje. Šiame straipsnyje apibendriname rezultatus, gautus [2] darbe.

Raktiniai žodžiai: stochastiniai maksimumai, perkėlimo teorema, konvergavimo greičio įvertis.

Įvadas

Nagrinėkime atsitiktinių, nepriklausomų vektorių seką $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$, turinčią vienodą skirstinio funkciją

$$F(x, y) = P(X_j \leqslant x, Y_j \leqslant y), \quad j \geqslant 1.$$

Apibrėžkime dvimačio vektoriaus maksimumo struktūrą:

$$Z_n^{(1)} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n), \qquad Z_n^{(2)} = \max(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n),$$
$$\max\bigl((X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)\bigr) = \bigl(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}\bigr).$$

Kai vektorių komponenčių skaičius yra atsitiktinis, maksimumą žymėsime taip

$$\max\bigl((X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_{N_n}, Y_{N_n})\bigr) = \bigl(Z_{N_n}^{(1)}, Z_{N_n}^{(2)}\bigr),$$

čia $N_1, N_2, \ldots, N_n$ teigiamų sveikųjų atsitiktinių dydžių seka, nepriklausanti nuo (X_j, Y_j), $j \geqslant 1$ ir

$$P(N_n \leqslant x) = A_n(x).$$

Nagrinėsime netiesiškai normalizuotus maksimumus:

$$\hat{Z}_{N_n}^{(1)} = G_{n1}^{-1}\bigl(Z_{N_n}^{(1)}\bigr), \qquad \hat{Z}_{N_n}^{(2)} = G_{n2}^{-1}\bigl(Z_{N_n}^{(2)}\bigr).$$

Funkcijos $G_{n1}(x)$, $G_{n2}(y)$ – teigiamos, tolydžios ir monotoniškai didėjančios. Pažymėkime

$$u_n(x, y) = n\Bigl(1 - F\bigl(G_{n1}(x), G_{n2}(y)\bigr)\Bigr). \tag{1}$$

Būtina ir pakankama silpnojo konvergavimo (visuose ribinio skirstinio tolydumo taškuose)

$$P\bigl(\hat{Z}_n^{(1)} < x, \hat{Z}_n^{(2)} < y\bigr) \quad \Rightarrow \quad H(x, y) \tag{2}$$

sąlyga yra [2]:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x,y) = u(x,y). \tag{3}$$

Jei ši sąlyga tenkinama, $H(x,y) = e^{-u(x,y)}$ yra ribinis netiesiškai normalizuotų maksimumų skirstinys [3].

1 apibrėžimas. Pasiskirstymo funkciją $F(x,y)$ vadiname maks-stabiliąja, jei egzistuoja tokios normalizavimo funkcijų sekos, kad

$$P\big(\hat{Z}_n^{(1)} < x, \hat{Z}_n^{(2)} < y\big) = H(x,y).$$

Tada

$$u_n(x,y) = u(x,y)$$

su visais x, y.

Pažymime:

$$A(z) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} \leqslant z\right) = \lim_{n\to\infty} A_n(nz). \tag{4}$$

1 teorema. *Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai N_n ir X_j, Y_j, $j \geqslant 1$ yra tarpusavyje nepriklausomi. Jei $\exists\ G_{n1}(x)$, $G_{n2}(y)$ su kuriomis*

$$P\big(\hat{Z}_n^{(1)} \leqslant x, \hat{Z}_n^{(2)} \leqslant y\big) \quad \Rightarrow \quad H(x,y),$$

ir

$$P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) \to A(x), \quad n \to \infty,$$

tai

$$P\big(\hat{Z}_{N_n}^{(1)} \leqslant x, \hat{Z}_{N_n}^{(2)} \leqslant y\big) \to \Psi(x,y),$$

čia ribinė skirstinio funkcija

$$\Psi(x,y) = \int_0^\infty H^z(x,y)\, dA(z).$$

Teorema įrodyta [4] darbe.

Konvergavimo greitį perkėlimo teoremoje tirsime nagrinėdami paklaidą

$$\Delta_N(x,y) = \big|\big(P(\hat{Z}_{N_n}^{(1)} < x, \hat{Z}_{N_n}^{(2)} < y\big) - \Psi(x,y)\big|.$$

Konvergavimo greitis perkėlimo teoremoje yra tirtas [2, 1, 4] darbuose.

Šiame darbe gausime konvergavimo greitį perkėlimo teoremoje maks-stabilių dvimačių vektorių maksimumų atveju esant netiesiniam normavimui. Gautasis rezultatas apibendrina [2] darbo rezultatą daugiamačiams atsitiktiniams dydžiams.

Rezultatai

2 teorema. *Tarkime atsitiktiniai vektoriai* $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ *yra maks-stabilūs. Tarkime,* $H(x, y)$ *yra atsitiktinių vektorių* $(\hat{Z}^{(1)}_{N_n}, \hat{Z}^{(2)}_{N_n})$ *ribinis skirstinys ir* $\lim_{n\to\infty} P(\frac{N_n}{n} \leqslant x) = A(x)$, $A(+0) = 0$. *Visiems* $\frac{u(x,y)}{n} \leqslant \frac{1}{2}$ *teisingas įvertis:*

$$\begin{aligned}\Delta_n(x, y) \leqslant{}& \frac{u^2(x, y)}{n} \int_0^\infty z e^{-zu(x,y)}\, dA_n(nz) \\ &+ +u(x, y) \int_0^\infty \big|A_n(nz) - A(z)\big| H^z(x, y)\, dz.\end{aligned}$$

Įrodymas.

$$\begin{aligned}&\big|P\big(\hat{Z}^{(1)}_{N_n} \leqslant x, \hat{Z}^{(2)}_{N_n} \leqslant y\big) - \Psi(x, y)\big| \\ &\quad= \left|\int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x, y)}{n}\right)^{nz} dA_n(nz) - \int_0^\infty e^{-zu(x,y)}\, dA(z)\right| \\ &\quad\leqslant \int_0^\infty \left|\left(1 - \frac{u(x, y)}{n}\right)^{nz} - e^{-zu(x,y)}\right| dA_n(nz) \\ &\qquad+ \left|\int_0^\infty e^{-zu(x,y)}\, dA_n(nz) - A(z)\right| = I^{(1)}_n(x, y) + I^{(2)}_n(x, y). \qquad (5)\end{aligned}$$

Remiantis nelygybėmis

$$\begin{gathered}\big|u^\alpha - v^\alpha\big| \leqslant \alpha\big(\max(u, v)\big)^\alpha |\ln u - \ln v|, \quad \alpha \geqslant 0,\ 0 < u, v < 1, \\ \left(1 - \frac{u(x, y)}{n}\right)^n \leqslant e^{-u(x,y)}, \quad 0 \leqslant u(x, y) \leqslant n,\end{gathered}$$

gauname, kad

$$\left|\left(1 - \frac{u(x, y)}{n}\right)^{nz} - e^{-zu(x,y)}\right| \leqslant z e^{-zu(x,y)} \left|n \ln\left(1 - \frac{u(x, y)}{n}\right) + u(x, y)\right|.$$

Kadangi

$$\big|\ln(1 - t) + t\big| \leqslant t^2, \quad \text{kai } |t| \leqslant \frac{1}{2},$$

turime tokį įvertį

$$I^{(1)}_n(x, y) \leqslant \frac{u^2(x, y)}{n} \int_0^\infty z e^{-zu(x,y)}\, dA_n(nz). \qquad (6)$$

Antrasis dėmuo

$$I^{(2)}_n(x, y) = u(x, y)\left|\int_0^\infty \big(A_n(nz) - A(z) H^z(x, y)\big)\, dz\right|. \qquad (7)$$

Teoremos įrodymas išplaukia iš (5), (6) ir (7). □

Literatūra

[1] A. Aksomaitis. Estimation of convergence rate in the transfer theorem for maxima. *Lana*, **13**(1):3–7, 2008.

[2] A. Aksomaitis and L. Pinkevičiūtė. The estimation of convergence rate on the transfer theorem for max-scheme. *ASMDA*, 2007.

[3] Ya. Galambosh. *Asimptoticheskaya teoriya ekstremalniyh poryadkoviyh statistik*. Nauka, Moskva, 1884.

[4] A. Jokimaitis. *Daugiamačių atsitiktinių dydžių ekstremalių reikšmių asimptotika*. 1998. Disertacija mokslų daktaro laipsniui.

SUMMARY

Estimation of the convergence rate of two-dimensional random index vectors maxima

L. Dindiene, A. Jokimaitis

Nonlinearly normalized maxima of independent and identically distributed random vectors are presented in this work. We've obtained nonuniform estimate of convergence in transfer theorem in case when normalization is nonlinear.

Keywords: stochastic maxima, transfer theorem, rate of convergence.