

atveju

Algimantas Bikelis, Juozas Augutis, Kazimieras Padvelskis

Vytauto Didžiojo universitetas, Informatikos fakultetas

Vileikos 8, LT-44404 Kaunas

E. paštas: marius@post.omnitel.net, j.augutis@if.vdu.lt, k.padvelskis@if.vdu.lt

Santrauka. Nagrinėjame k -mačio tikimybinio skirstinio $P(A)$ sąsūkos $P^{*n}(A\sqrt{n})$ asimptotinių elgesį, kai $n \rightarrow \infty$ ir A priklauso Euklido erdvės R^k poaibių σ -algebrai \mathfrak{M} arba jos siauresniems poaibiams.

Raktiniai žodžiai: tikimybiniai skirstiniai, sąsūkos, Bergstremo tapatybė, Čebyšev-Kramerio asimptotinis skleidinys.

Nagrinėjame nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių k -mačių atsitiktinių vektorių seką

$$\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_n, \dots$$

Tarkime, kad $\vec{\xi}_1$ matematinių vilčių vektorius $E\vec{\xi}_1 = \vec{0} \in R^k$, o antrųjų momentų matrica Σ yra neišigimusi. Tarkime $\Phi_1(A) \sim N_k(\vec{0}, \Sigma)$ yra Gauso k -matis skirstinys.

Pažymėkime

$$\vec{S}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \vec{\xi}_j$$

ir

$$P^{*n}(A\sqrt{n}) = P\{\vec{S}_n \in A\}$$

visoms Borelio aibėms $A \in \mathfrak{M}$ Euklido erdvėje R^k .

Pasinaudoję Bergstremo tapatybe [1] gauname

$$P^{*n}(A\sqrt{n}) = \Phi_1^{*n}(A\sqrt{n}) + \sum_{j=1}^{s-1} \left(\frac{1}{n}\right)^j \sum_{\nu=j+1}^s \frac{(-1)^j}{\nu!} C_\nu^{(j)} \Phi_1^{*(n-\nu)} * (n(P - \Phi_1))^{*\nu}(A\sqrt{n}) \\ + C_n^{s+1} (P - \Phi_1)^{*(s+1)} * \mathbb{E}(P^{*(n-\theta)} * \Phi_1^{*(\theta-s-1)})(A\sqrt{n}).$$

Čia $n > 1$, $C_\nu^{(j)}$ yra pirmos rūšies Strlingo skaičius ($C_\nu^{(0)} = 1$),

$$\mathbb{E}(P^{*(n-\theta)} * \Phi_1^{*(\theta-s-1)}) = \sum_{m=s+1}^n P\{\theta = m\} P^{*(n-m)} * \Phi_1^{*(m-s-1)},$$

θ – neigiamas hipergeometrinis atsitiktinis dydis, įgyjantis $m = s + 1, s + 2, \dots, n$, su tikimybėmis

$$P\{\theta = m\} = C_{m-1}^s / C_n^{s+1}.$$

Yra žinomos [2] dvi teoremos apie tapatybę (1) narių asimptotinį elgesį.

1 teorema. Tarkime tikimybinis skirstinys $P(A) = P\{\vec{\xi} \in A\}$ turi $2 + \delta$ eilės, $0 < \delta \leq 1$, baigtinius momentus, tuomet egzistuoja konstanta C priklausoma tik nuo k, s ir δ tokia, kad

$$\sup_{A \in \mathfrak{M}} |\Phi_1^{*(n-\nu)} * (n(P - \Phi_1))^{*\nu}(A\sqrt{n})| \leq \left(\frac{C \mathbb{E}(\vec{\xi}^T \Sigma^{-1} \vec{\xi})^{\frac{2+\delta}{2}}}{n^{\delta/2}} \right)^\nu.$$

Čia $1 \leq \nu \leq s$,

$$\mathbb{E}(\vec{\xi}^T \Sigma^{-1} \vec{\xi})^{\frac{2+\delta}{2}} = \int_{R^k} (\vec{x}^T \Sigma^{-1} \vec{x})^{\frac{2+\delta}{2}} dP(\vec{x}),$$

$\vec{\xi}^T$ – transponuotas vektorius $\vec{\xi}$.

2 teorema. Tarkime galioja 1 teoremos sąlygos ir charakteringoji funkcija atsitiktinio vektoriaus $\vec{\xi}$ išpildo Kramerio sąlygą

$$\overline{\lim}_{\|\vec{t}\| \rightarrow \infty} |\mathbb{E}e^{i(\vec{t}, \vec{\xi})}| < 1. \tag{C}$$

Tuomet

$$\sup_{A \in \mathfrak{M}} |r_n^{(s+1)}(A)| = o(n^{-(\delta/2)s}).$$

Čia

$$r_n^{(s+1)}(A) = C_n^{s+1} (P - \Phi_1)^{*(s+1)} * \mathbb{E}(P^{*(n-\theta)} * \Phi_1^{*(\theta-s-1)})(A\sqrt{n}).$$

Sąsūka

$$\Phi_1^{*(n-\nu)} * (n(P - \Phi))^{*\nu}(A\sqrt{n}) = \int_A p_\nu(\vec{y}) d\vec{y}$$

turi „tankį“ $p_\nu(\vec{y})$. Panaudodami tikimybinių skirstinių $P(A)$ ir $\Phi_1(A)$ charakterin-
gąsias funkcijas gauname $p_\nu(\vec{y})$ formalų asimptotinį skleidinį

$$\begin{aligned} p_\nu(\vec{y}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{l+\nu+2m} \frac{(-\nu)^m}{m!(3\nu+l)!} \frac{\partial^{m+3\nu+l}}{\partial \varepsilon^m \partial \varrho^{3\nu+l}} \\ &\times \left[\int_{x \in R^k} \left(\frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon)2\pi}} \right)^k \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}} \right. \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1+\varepsilon)} (\vec{y} - \vec{x}\varrho)^T \Sigma^{-1} (\vec{y} - \vec{x}\varrho) \right\} d(P - \Phi_1)^{*\nu}(\vec{x}) \Big] \Big|_{\substack{\varepsilon=0 \\ \varrho=0}}, \end{aligned} \tag{2}$$

kai $1 \leq \nu \leq s$. Čia $|\Sigma|$ yra matricos Σ determinantas.

Iš (1) ir (2) išplaukia sąsūkos $P^{*n}(A\sqrt{n})$ formalus asimptotinis skledinys:

$$\begin{aligned}
 & P^{*n}(A\sqrt{n}) \\
 &= \Phi(A) + \sum_{j=0}^{s-1} \left(\frac{1}{n}\right)^j \sum_{\nu=j+1}^s \frac{(-1)^j}{\nu!} C_\nu^{(j)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{l+\nu+2m} \frac{(-\nu)^m}{m!(3\nu+l)!} \\
 &\quad \times \frac{\partial^{m+3\nu+l}}{\partial \varepsilon^m \partial \varrho^{3\nu+l}} \left[\int_{\vec{x} \in R^k} P\{\vec{\eta}_\varepsilon + \vec{x}\varrho \in A\} d(P - \Phi_1)^{* \nu}(\vec{x}) \right] \Big|_{\substack{\varepsilon=0 \\ \varrho=0}} + \dots \\
 &= P\{\vec{\xi} \in A\} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{\nu=j+1}^s \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+m} \nu^m}{\nu! m! (3\nu+l)!} C_\nu^{(j)} \\
 &\quad \times \frac{\partial^{m+3\nu+l}}{\partial \varepsilon^m \partial \varrho^{3\nu+l}} \left[\int_{\vec{x} \in R^k} P\{\vec{\eta}_\varepsilon + \vec{x}\varrho \in A\} d(P - \Phi_1)^{* \nu}(\vec{x}) \right] \Big|_{\substack{\varepsilon=0 \\ \varrho=0}} + \dots
 \end{aligned}$$

Čia

$$\begin{aligned}
 & P\{\vec{\eta}_\varepsilon + \vec{x}\varrho < \vec{z}\} \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\varepsilon)}}\right)^k \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}} \int_{\vec{y} < \vec{z}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1+\varepsilon)}(\vec{y} - \vec{x}\varrho)^T \Sigma^{-1}(\vec{y} - \vec{x}\varrho)\right\} d\vec{y}.
 \end{aligned}$$

$\vec{\eta}_\varepsilon \sim N_k(\vec{0}, (1+\varepsilon)\Sigma)$ – k -matis Gauso tikimybinis skirstinys.

3 teorema. Tarkime atsitinis vektorius $\vec{\xi}$ turi $2 + \delta$ eilės, $0 < \delta \leq 1$, baigtinius absoliutinius momentus ir charakteringoji funkcija $\mathbb{E}e^{i(\vec{t}, \vec{\xi})}$ tenkina Kramerio sąlygą (C), tuomet

$$\begin{aligned}
 & P\{\vec{S}_n^T \Sigma^{-1} \vec{S}_n < x\} \\
 &= P\{\chi_k^2 < x\} + \sum_{j=0}^{s-1} \left(-\frac{1}{n}\right)^j \sum_{\nu=j+1}^s \frac{1}{\nu!} C_\nu^{(j)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n-\nu}\right)^r \frac{1}{r!} P\left\{\chi_{k+2r}^2 < x \frac{n}{n-\nu}\right\} \\
 &\quad \times \int_{\vec{x} \in R^k} \left(\frac{1}{2} \vec{x}^T \Sigma^{-1} \vec{x}\right)^r e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{n-\nu} \vec{x}^T \Sigma^{-1} \vec{x}} d(n(P - \Phi_1))^{* \nu}(\vec{x}) + o(n^{-(\delta/2)s}),
 \end{aligned}$$

čia $x > 0$, $s = 1, 2, \dots$, χ_k^2 – yra chikvadrato su k laisvės laipsniais atsitiktinis dydis.

3 teoremos tvirtinimas išplaukia iš (2) ir 2 teoremos iš [2].

Literatūra

- [1] H. Bergström. On asymptotic expansions of probability function. *Scand. Aktuarietidskrift*, **34**(1):1–34, 1951.
- [2] A. Bikelis and J. Mogyorodi. On asymptotic expansion of the convolution of n multidimensional distribution functions. *Liet. mat. rink.*, **11**(3):433–443, 1970.

SUMMARY

Asymptotic expansion in approximation by normal law*A. Bikelis, J. Augutis, K. Padvelskis*

We consider the asymptotic behavior of the convolution $P^{*n}(A\sqrt{n})$ of a k -dimensional probability distribution $P(A)$ as $n \rightarrow \infty$ for A from the σ -algebra \mathfrak{M} of Borel subsets of Euclidian space R^k or from its subclasses.

Keywords: Probability distributions in R^k , convolutions, Bergström identity, Appell polynomials, Chebyshev–Cramer asymptotic expansion.