LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS. LMD DARBAI
52 tomas, 2011, 39–43

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Kazimieras Navickis

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Santrauka. Šiame darbe nagrinėjami n-matės Euklido erdvės hiperpaviršiaus aukštesnių eilių glaustiniai hiperpaviršiai. Tai leidžia nagrinėti duotojo hiperpaviršiaus geometrines savybes jo taško aukštesnių eilių diferencialinėse aplinkose.

Raktiniai žodžiai: hiperpaviršius, glaustinis hiperpaviršius.

Tarkime, kad S – hiperpaviršius n-matėje Euklido erdvėje. Hiperpaviršių S galima apibrėžti išreikštine lygtimi, neišreikštine lygtimi arba parametrinėmis lygtimis.

1 atvejis. Tarkime, kad hiperpaviršius S apibrėžtas išreikštine lygtimi ($\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_p = 1, \dots, n-1$)

$$S\colon x^n = f^n\big(x^\alpha\big), \tag{1}$$

funkcija f^n yra tolydinė ir turi tolydines dalines išvestines taške (x_0^α) iki eilės $r+1$; $r \in \mathbb{N}$.

Pažymėkime

$$\vec{r} = \big\{x^1; x^2; \dots; x^{n-1}; f^n\big(x^\alpha\big)\big\},$$
$$\vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^\alpha}.$$

Nuo vektorių sistemos $\{\vec{r}_\alpha\}$ pereikime prie kitos vektorių sistemos $\{\vec{a}_\alpha\}$ pagal formules

$$\vec{a}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\alpha} \lambda_{\alpha\beta} \vec{r}_\beta,$$

reikalaudami, kad vektoriai $\vec{a}_\alpha$ būtų vienas kitam ortogonalūs. Pažymėkime

$$g_{\alpha\beta} = \vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta,$$
$$M_\alpha = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1\alpha} \\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{2\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{1\alpha} & g_{2\alpha} & \cdots & g_{\alpha\alpha} \end{pmatrix},$$
$$G_\alpha = \det\,(M_\alpha),$$
$$a_{\alpha\alpha} = \vec{r}_\alpha \cdot \vec{a}_\alpha.$$

Kadangi šiuo atveju yra taikomas Gramo–Šmidto ortogonalizacijos procesas, tai dydžius $\lambda_{\alpha\beta}$ randame iš lygčių sistemų

$$(\lambda_{\alpha 1}\lambda_{\alpha 2}\dots\lambda_{\alpha\alpha})\cdot M_\alpha = (00\dots a_{\alpha\alpha}).$$

Jei $G^{(\alpha)}_{\alpha\beta}$ yra elemento $g_{\alpha\beta}$ adjunktas determinante G_α, tai

$$\vec{a}_\alpha = \frac{a_{\alpha\alpha}}{G_\alpha}\sum_{\beta=1}^{\alpha} G^{(\alpha)}_{\alpha\beta}\vec{r}_\beta.$$

Vektoriai

$$\vec{E}_\alpha = \frac{\vec{a}_\alpha}{|\vec{a}_\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{G_{\alpha-1}\cdot G_\alpha}}\sum_{\beta=1}^{\alpha} G^{(\alpha)}_{\alpha\beta}\vec{r}_\beta$$

sudaro hiperpaviršiaus S liečiamosios hiperplokštumos ortonormuotą bazę. Hiperpaviršiaus S normalės vektorius

$$\vec{N} = \left[\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{n-1}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \dots & \vec{i}_{n-1} & \vec{i}_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & f^n_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & f^n_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & f^n_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot \left\{f^n_\alpha; -1\right\},$$

čia

$$f^n_\alpha = \frac{\partial f^n}{\partial x^\alpha},$$

$\{\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_n\}$ – standartinė Euklido erdvės bazė. Normalės vektoriaus $\vec{N}$ ilgis

$$|\vec{N}| = \sqrt{1 + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\left(f^n_\alpha\right)^2} = \sqrt{G_{n-1}}.$$

Pažymėkime

$$\vec{E}_n = \frac{\vec{N}}{\sqrt{G_{n-1}}}.$$

Vektorių sistema $\{\vec{E}_i\}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ sudaro n-matės Euklido erdvės ortonormuotąją bazę hiperpaviršiaus S taške (x^i).

Hiperpaviršių S nagrinėsime jo taško $M_0(x^i_0)$ aplinkoje; čia $x^n_0 = f^n(x^\alpha_0)$. Vektorinių funkcijų $\vec{E}_i$ reikšmes taške M_0 žymėsime $\vec{e}_i$:

$$\vec{e}_i = l^j_i\vec{i}_j.$$

Matrica

$$R = (l^i_j)$$

yra ortogonalioji. Bet kurio n-matės Euklido erdvės taško $M(x^i)$ koordinates bazės $\{\vec{e}_i\}$ atžvilgiu žymėsime y^i. Tada

$$x^i = x^i_0 + l^i_j y^j. \tag{2}$$

Hiperpaviršiaus S lygtis, atlikus (2) koordinačių transformaciją, bus tokia:

$$S\colon h(y^i) \equiv f^n\bigl(x_0^\alpha + l_i^\alpha y^i\bigr) - \bigl(x_0^n + l_i^n y^i\bigr) = 0. \tag{3}$$

Funkcijos h dalinių išvestinių

$$h_i = \frac{\partial h}{\partial y^i}, \qquad h_{ij} = \frac{\partial^2 h}{\partial y^i \partial y^j}, \quad \ldots$$

reikšmes taške M_0 žymėsime $b_i, b_{ij}, \ldots$. Kadangi

$$b_\alpha = 0, \qquad b_n = -\sqrt{G_{n-1}(M_0)} \neq 0,$$

tai lygtis $S\colon h(y^i) = 0$ apibrėžia funkciją

$$y^n = H^n\bigl(y^\alpha\bigr).$$

Pažymėkime

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \frac{\partial^p H^n}{\partial y^{\alpha_1} \ldots \partial y^{\alpha_p}},$$
$$c_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = A_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(M_0),$$
$$A_\alpha^n = \frac{\partial y^n}{\partial y^\alpha}.$$

Diferencialinių operatorių

$$\partial_\alpha^{\#} = \partial \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + A_\alpha^n \frac{\partial}{\partial y^n} \tag{4}$$

pagalba apibrėžkime naujus diferencialinius operatorius

$$\partial^{\#}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \partial^{\#}_{\alpha p} \circ \ldots \circ \partial^{\#}_{\alpha_1}.$$

Pažymėkime

$$H_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \partial^{\#}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} h.$$

Dydžius $c_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ randame rekurentiškai iš lygčių sistemos

$$H_{\alpha_1\ldots\alpha_p}|_{c_\beta=0} = 0,$$

t.y. iš sistemos

$$\begin{cases} b_{\alpha\beta} + b_n c_{\alpha\beta} = 0, \\ b_{\alpha\beta\gamma} + 3c_{(\alpha\beta} b_{\gamma)n} + c_{\alpha\beta\gamma} b_n = 0, \\ b_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} + 6c_{(\alpha\beta} b_{\gamma\varepsilon)n} + 4c_{(\alpha\beta\gamma} b_{\varepsilon)n} + 3c_{(\alpha\beta} c_{\gamma\varepsilon)} b_{nn} + c_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} b_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{5}$$

p-formos ($p \geqslant 2$)

$$\varphi_p = \frac{1}{p!} c_{\alpha_1\ldots\alpha_p} y^{\alpha_1} \ldots y^{\alpha_p} \tag{6}$$

leidžia apibrėžti r-osios eilės hiperpaviršių

$$O_{M_0}^{(r)}(S)\colon\ y^n = \sum_{a=2}^{r} \varphi_a, \tag{7}$$

kuris turi r-osios eilės kontaktą taške M_0 su duotuoju hiperpaviršiumi S. Todėl šį hiperpaviršių vadinsime hiperpaviršiaus S r-osios eilės glaustiniu hiperpaviršiumi. Jo savybės leidžia nagrinėti paties hiperpaviršiaus S geometrines savybes.

2 atvejis. Tarkime, kad hiperpaviršius S apibrėžtas neišreikštine lygtimi

$$S\colon\ F(x^i) = 0 \tag{8}$$

ir taškas $M_0(x_0^i) \in S$ yra toks, kad

$$F_n(M_0) = \frac{\partial F}{\partial x^n}\bigg|_{M_0} \neq 0.$$

Tada tam tikroje taško M_0 aplinkoje hiperpaviršius S aprašomas (1) lygtimi ir

$$f_\alpha^n = -\frac{F_\alpha}{F_n}. \tag{9}$$

Funkcijos f^n aukštesnių eilių dalinės išvestinės gaunamos taikant diferencialinius operatorius

$$\mathcal{D}_\alpha^{\#} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + f_\alpha^n \frac{\partial}{\partial x^n}. \tag{10}$$

Pažymėkime

$$F_{i_1\ldots i_p} = \frac{\partial^p F}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_p}},$$
$$d_{i_p\ldots i_p} = F_{i_1\ldots i_p}(M_0),$$

čia $i_1,\ldots,i_p = 1,\ldots,n$; $p = 1,2,\ldots$.

Taške $M_0 \in S$ turime ortonormuotą bazę $\{\vec{e}_i\}$. Taikydami (2) koordinačių transformaciją (1) lygčiai, gauname (3) hiperpaviršiaus lygtį. Matome, kad glaustinio hiperpaviršiaus $O_{M_0}^{(r)}(S)$ radimui galime taikyti 1 atveju gautas formules.

3 atvejis. Tarkime, kad hiperpaviršius S apibrėžtas parametrinėmis lygtimis

$$S\colon\ x^i = x^i\big(u^\alpha\big), \tag{11}$$

funkcijos $x^i(u^\alpha)$ yra tolydinės ir turi tolydines dalines išvestines taške $V_0(u_0^\alpha)$ iki eilės $r+2$. Hiperpaviršių S nagrinėsime jo taško $M_0(x_0^i)$ aplinkoje; čia $x_0^i = x^i(V_0)$. Pažymėkime

$$x_\beta^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^\beta}, \qquad u_\beta^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta},$$
$$\Delta = \det(x_\beta^\alpha).$$

Kadangi

$$x^{\alpha}_{\gamma}u^{\gamma}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}, \qquad u^{\alpha}_{\gamma}x^{\gamma}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta},$$

tai matricos (x^{α}_{β}) ir (u^{α}_{β}) yra viena kitai atvirkštinės:

$$\left(u^{\alpha}_{\beta}\right) = \left(x^{\alpha}_{\beta}\right)^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot\left(\overset{*}{x}{}^{\alpha}_{\beta}\right),$$

čia $\overset{*}{x}{}^{\alpha}_{\beta}$ – elemento x^{β}_{α} adjunktas determinante Δ.

Jei $d_n = \Delta(V_0) \neq 0$, tai koordinates u^{α} galima išspręsti koordinačių x^{α} atžvilgiu:

$$u^{\alpha} = u^{\alpha}\left(x^{\beta}\right).$$

Iš (11) hiperpaviršiaus S lygčių dabar išplaukia, kad jis aprašomas lygtimi

$$S\colon x^n = x^n\left(u^{\alpha}\left(x^{\beta}\right)\right)$$

arba

$$S : x^n = f^n\left(x^{\alpha}\right). \tag{1}$$

Šiuo atveju galima apibrėžti diferencialinius operatorius

$$L^{\#}_{\alpha} = u^{\beta}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial u^{\beta}}$$

ir jų kompozicijas $L^{\#}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$. Iš (1) lygties randame, kad

$$f^n_{\alpha} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta},$$

čia $\Delta_{\alpha} = \overset{*}{x}{}^{\beta}_{\alpha}\cdot x^n_{\beta}$. Šiuo atveju

$$f^n_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = L^{\#}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}f^n_{\alpha_p}.$$

Šitaip glaustinio hiperpaviršiaus $O^{(r)}_{M_0}(S)$ radimas aptariamu atveju yra suvestas į 1 atveju gautų formulių taikymą.

Literatūra

[1] M.P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewod Cliffs, N.J., 1976.

SUMMARY

Osculating hypersurfaces of higher order

K. Navickis

Oscurating surfaces of second order have been studied in classical differential geometry [1]. In this article we generalize this notion to osculating hyper-surfaces of higher order of hyper-surfaces in Euclidean n-space. Various related results are obtained using the derivatives of higher order.

Keywords: hypersurface, osculating hypersurface.