LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS. LMD DARBAI
52 tomas, 2011, 34–38 ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

matematinio modelio asimptotinė analizė

Aleksandras Krylovas, Rima Kriauzienė

Mykolo Romerio universitetas, Socialinės informatikos fakultetas
Ateities 20, LT-08303, Vilnius
E. paštas: krylovas@mruni.lt; kriauziene@gmail.com

Santrauka. Darbe nagrinėjamas skysčio judėjimo elastingame vamzdyje matematinis modelis, aprašomas hiperboline lygčių sistema. Atliekama šių lygčių asimptotinė analizė, kuri leidžia periodiniu atveju nustatyti bangų rezonansinės sąveikos atsiradimo sąlygas. Konstruojama suvidurkintoji integralinių diferencialinių lygčių sistema, tolygiai tinkamam ilgame laiko intervale ir dideliame erdvinio kintamojo kitimo intervale, asimptotiniam sprendiniui rasti.

Raktiniai žodžiai: asimptotinė analizė, bangų sąveika, hiperbolinės lygčių sistemos, rezonansas, vidurkinimas.

1. Straipsnyje nagrinėjama žinoma literatūroje [7] hiperbolinė lygčių sistema, aprašanti skysčio judėjimą vamzdyje. Pradžioje skystis yra rimties būsenoje. Nagrinėjami maži trikdžiai ir tiriama bangos sąveika su vamzdžio sienelėmis, kurios gali būti elastingos. Analogiškomis lygtimis aprašomas sekliųjų vandenų matematinis modelis [4], taip pat skysčio judėjimas kanale. Tokios sistemos Koši uždavinys buvo tyrinėjamas straipsnyje [2]. Šiame darbe nagrinėjamas kraštinis uždavinys, kai pradiniu laiko momentu žinoma skysčio būsena, o viename vamzdžio gale užduodama skysčio judėjimą aprašanti funkcija. Panašiai nagrinėjamas stūmoklio uždavinys [1, 8].

2. Nagrinėsime lygčių sistemą, aprašančią skysčio judėjimą elastingame vamzdyje (žr., pvz. [6]):

$$\begin{cases} \rho(u_t + uu_x) = -p_x, \\ (\rho A)_t + (\rho A u)_x = 0, \\ p = P(\rho), \end{cases} \tag{1}$$

čia $A = A(p, x)$ – vamzdžio skerspjūvio plotas, $u = u(t, x)$, $p = p(t, x)$, $\rho = \rho(p, S)$ – vidutinės skerspjūvio reikšmės atitinkamai greitis, skyčio slėgis ir tankis, t – laikas, x – erdvinis kintamasis, S – entropija, kurią šiame straipsnyje laikome konstanta.

Ieškosime (1) sistemos asimptotinio sprendinio

$$\begin{cases} u(t, x; \varepsilon) = u_0 + \varepsilon u_1(\varepsilon t, \varepsilon x; \varepsilon), \\ p(t, x; \varepsilon) = p_0 + \varepsilon p_1(\varepsilon t, \varepsilon x; \varepsilon), \\ A(p, x; \varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1(\varepsilon p, \varepsilon x; \varepsilon), \\ \rho(p, S; \varepsilon) = \rho_0 + \varepsilon \rho_1(\varepsilon p, \varepsilon S; \varepsilon), \end{cases} \tag{2}$$

ε – mažas teigiamas parametras, t.y. bus nagrinėjamos (1) sistemos mažos amplitudės bangos. Įrašę (2) į (1), gauname sistemą su mažu parametru ε:

$$\begin{cases} \varepsilon\rho_0 u_{1t} + \varepsilon\rho_0 u_0 u_{1x} + \varepsilon^2\rho_0 u_1 u_{1x} + \varepsilon^2\rho_1 u_{1t} + \varepsilon^2\rho_1 u_0 u_{1x} + \varepsilon^2\rho_1 u_1 u_{1x} \\ \quad = -\varepsilon P_\rho(\rho_0)\rho_{1x} - \varepsilon^2 P_{\rho\rho}(\rho_0)\rho_1\rho_{1x} + O(\varepsilon^3) \\ \varepsilon^2 A_{1p}P_\rho(\rho_0)\rho_{1t}\rho_0 + \varepsilon A_0\rho_{1t} + \varepsilon^2\rho_{1t}A_1 + \varepsilon\rho_0 A_0 u_{1x} + \varepsilon^2\rho_0 u_0 A_{1p}P_\rho(\rho_0)\rho_{1x} \\ \qquad + \varepsilon^2\rho_0 A_1 u_{1x} + \varepsilon A_0 u_0\rho_{1x} + \varepsilon^2 A_0 u_1\rho_{1x} + \varepsilon^2 A_0\rho_1 u_{1x} + \varepsilon^2 u_0 A_1\rho_{1x} + O(\varepsilon^3). \end{cases} \tag{3}$$

Atlikę algebrinius pertvarkius ir padalinę kiekvieną sistemos lygtį iš ε, gauname:

$$\begin{cases} u_{1t} + u_0 u_{1x} + \dfrac{P_\rho(\rho_0)}{\rho_0}\rho_{1x} \\ \quad = -\dfrac{\varepsilon}{\rho_0}\big(\rho_0 u_1 u_{1x} + u_0\rho_1 u_{1x} + \rho_1 u_{1t} + \rho_0 P_{\rho\rho}(\rho_0)\rho_1\rho_{1x}\big) + O(\varepsilon^2), \\ \rho_0 u_{1x} + u_0\rho_{1x} + \rho_{1t} \\ \quad = -\dfrac{\varepsilon}{A_0}\big(\rho_0 A_{1p}P_\rho(\rho_0)\rho_{1t} + A_1\rho_{1t} + \rho_0 u_0 A_{1p}P_\rho(\rho_0)\rho_{1x} + \rho_0 A_1 u_{1x} \\ \qquad + A_0 u_1\rho_{1x} + A_0\rho_1 u_{1x} + u_0 A_1\rho_{1x}\big) + O(\varepsilon^2). \end{cases} \tag{4}$$

Pakeitę kintamuosius

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2}\left(r_1 + \dfrac{\sqrt{P_\rho(\rho_0)}}{\rho_0}r_2\right), \\ \rho_1 = \dfrac{1}{2}\left(r_2 - \dfrac{\rho_0}{\sqrt{P_\rho(\rho_0)}}r_1\right), \end{cases} \tag{5}$$

perrašome (4) sistemą Rymano invariantais r_1, r_2:

$$\begin{cases} (r_{1t} - \alpha r_{2t}) + u_0(r_{1x} - \alpha r_{2x}) + \rho_0\alpha(r_{1x} + \alpha r_{2x}) = 2\varepsilon F_1, \\ (r_{1t} + \alpha r_{2t}) + u_0(r_{1x} + \alpha r_{2x}) + \rho_0\alpha(r_{1x} - \alpha r_{2x}) = 2\alpha\varepsilon F_2, \end{cases} \tag{6}$$

čia $\alpha = \frac{\sqrt{P_\rho(\rho_0)}}{\rho_0} \neq 0$,

$$\begin{aligned} F_1 = &-\frac{1}{4}\left(1 - \frac{u_0}{\rho_0\alpha} + \frac{P_{\rho\rho}(\rho_0)}{\alpha^2}\right)r_1 r_{1x} - \frac{1}{4}\left(\alpha - \frac{u_0}{\rho_0} - P_{\rho\rho}(\rho_0)\right)r_1 r_{2x} \\ &- \frac{1}{4}\left(\alpha + \frac{u_0}{\rho_0} - \frac{1}{\alpha}\right)r_2 r_{1x} - \frac{1}{4}\left(\alpha^2 + \frac{u_0\alpha}{\rho_0} + P_{\rho\rho}(\rho_0)\right)r_2 r_{2x} \\ &+ \frac{1}{4\rho_0\alpha}r_1 r_{1t} + \frac{1}{4\rho_0}r_1 r_{2t} - \frac{1}{4\rho_0}r_2 r_{1t} - \frac{1}{4\rho_0\alpha}r_2 r_{2t}, \\ F_2 = &-\frac{1}{2}\left(\frac{A_{1p}\rho_0^3\alpha}{A_0} - \frac{A_1}{A_0\alpha}\right)r_{1t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0^3 A_{1p}\alpha}{A_0} + \frac{A_1}{A_0}\right)r_{2t} \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{u_0 A_1}{A_0\alpha} - \frac{\rho_0 A_1}{A_0} + \frac{u_0 A_{1p}\rho_0^3\alpha}{A_0}\right)r_{1x} + \frac{1}{2\alpha}r_1 r_{1x} \\ &- \frac{1}{2}\left(\frac{u_0 A_1}{A_0} + \frac{\rho_0^3 u_0 A_{1p}\alpha}{A_0} + \frac{\rho_0 A_1\alpha}{A_0}\right)r_{2x} - \frac{\alpha}{2}r_2 r_{2x}. \end{aligned}$$

Sudėję šios sistemos lygtis, gausime pirmąją sistemos lygtį, atėmę sistemos lygtis – atrąją lygtį. Tuomet sistema (6) atrodo taip:

$$\begin{cases} r_{1t} + \lambda_1 r_{1x} = \varepsilon(F_1 + \alpha F_2), \\ r_{2t} + \lambda_2 r_{2x} = \varepsilon\left(F_2 - \dfrac{F_1}{\alpha}\right), \end{cases} \tag{7}$$

čia $\lambda_1 = u_0 - \sqrt{P_\rho(\rho_0)}$, $\lambda_2 = u_0 + \sqrt{P_\rho(\rho_0)}$.

Pastebėkime, kad gautosios (7) sistemos atskiras atvejis (kai $u_0 = 0$ ir funkcija A_1 yra konkretaus pavidalo) išnagrinėtas straipsnyje [2].

3. Tegu $u_0 = 0$. Ieškome tolygiai tinkamo, ilgajame laiko intervale $t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$ ir dideliame erdvinio kintamojo kitimo intervale $x \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$, asimptotinio sprendinio.

Sistemos (7) Koši uždavinys buvo išnagrinėtas straipsnyje [2]. Šiame straipsnyje nagrinėjama (7) sistema su kraštinėmis sąlygomis:

$$\begin{gathered} r_j(0,x) = \varphi_j(x), \quad x \geqslant 0,\ j = 1,2 \\ r_2(t,0) = \psi_2(t), \quad t \geqslant 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Jei $\varepsilon = 0$, tai tuomet turėsime nesutrukdytąją sistemą

$$\begin{cases} r_{1t} - \sqrt{P_\rho(\rho_0)}\, r_{1x} = 0, \\ r_{2t} + \sqrt{P_\rho(\rho_0)}\, r_{2x} = 0, \end{cases} \tag{9}$$

kurios sprendinys išreiškiamas tokiomis formulėmis

$$r_1(t,x) = \varphi_1\big(x + \sqrt{P_\rho(\rho_0)}\, t\big),$$

$$r_2(t,x) = \begin{cases} \varphi_2\big(x - \sqrt{P_\rho(\rho_0)}\, t\big), & \text{kai } x \geqslant \sqrt{P_\rho(\rho_0)}\, t, \\ \psi_2\left(t - \dfrac{x}{\sqrt{P_\rho(\rho_0)}}\right), & \text{kai } t \geqslant \dfrac{x}{\sqrt{P_\rho(\rho_0)}}. \end{cases}$$

Funkcijos u_1, ρ_1 reiškiamos Rymano invariantais:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2}\left(r_1 + \dfrac{\sqrt{P_\rho(\rho_0)}}{\rho_0} r_2\right), \\ \rho_1 = \dfrac{1}{2}\left(r_2 - \dfrac{\rho_0}{\sqrt{P_\rho(\rho_0)}} r_1\right). \end{cases} \tag{10}$$

Funkcijos (10) aprašo tolygiai tinkamą sprendinį tik nerezonansiniu atveju [2]. Kadangi norėdami rasti skleidinio $r_j(t,x;\epsilon) = r_{j1}(t,x) + \varepsilon r_{j2}(t,x) + \cdots$ narius r_{j2}, turime integruoti lygtis pagal charakteristikas

$$\frac{\partial r_{j2}}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial r_{j2}}{\partial t} = \bar{F}_j[r_{11}, r_{21}], \quad j = 1,2. \tag{11}$$

Gausime sekuliariuosius narius εt ir εx. Čia žinomos funkcijos dešinėje pusėje reiškiamos taip: $\bar{F_1} = F_1 + \alpha F_2$, $\bar{F_2} = F_2 - \frac{F_1}{\alpha}$.

Tam, kad asimptotinis skleidinys neturėtų šių narių vidurkiname sistemą pagal charakteristikas [2, 3, 5].

Pažymėkime lėtuosius kintamuosius $\tau = \varepsilon t$, $\xi = \varepsilon x$ ir greituosius charakteristinius kintamuosius $y_1 = x + \lambda_1 t$, $y_2 = x - \lambda_1 t$, $z_2 = t - \frac{x}{\sqrt{P_\rho(\rho_0)}}$. Tai ir yra uždavinio sprendimas kelių mąstelių metodu [7]. Gauname tokią suvidurkintą sistemą:

$$r_{j\tau} + \lambda_j r_{j\xi} = \begin{cases} M_j^T[f_j], & \text{kai } \tau \geqslant \sqrt{P_\rho(\rho_0)}\,\xi,\ j = 1, 2, \\ M_2^X[f_2], & \text{kai } \tau \leqslant \sqrt{P_\rho(\rho_0)}\,\xi. \end{cases} \tag{12}$$

Tuomet vidurkinimo operatoriai apibrėžiami taip:

$$M_j^T\big[f(t,x,\tau,\xi)\big] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f\big(s, y_j \mp \sqrt{P_\rho(\rho_0)}s, \tau, \xi\big)\,ds, \quad j = 1, 2,$$
$$M_2^X\big[f_2(t,x,\tau,\xi)\big] = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{X}\int_0^X f\left(z_2 + \frac{r}{\sqrt{P_\rho(\rho_0)}}, r, \tau, \xi\right)dr.$$

1 pastaba. Periodiniu atveju ir kai λ sveikieji skaičiai, funkcija f integruojama nuo 0 iki 2π.

Darome prielaidą, kad pradinėms sąlygoms galioja toks reikalavimas:

$$M_j^X[\varphi_j] = 0, \qquad M_2^T[\psi_2] = 0, \quad j = 1, 2. \tag{13}$$

Perrašome suvidurkintąją sistemą (12) taip:

$$\begin{cases} r_{1\tau} + \left(\frac{1}{2} + \frac{P_{\rho\rho(\rho_0)}\rho_0^2}{4P_\rho(\rho_0)}\right) r_1 r_{1y_1} + \frac{A_{1p}\rho_0 P_\rho(\rho_0)\sqrt{P_\rho(\rho_0)}}{A_0} r_{1y_1} \\ \quad = \left(\frac{u_0 P_\rho(\rho_0)\sqrt{P_\rho(\rho_0)}}{A_0} + \frac{P_\rho^2(\rho_0)}{2A_0}\right) M_1^T\big[A_{1p} r_{2y_2}(\tau,\xi,y_1)\big], \\ r_{2\tau} + \left(\frac{1}{2} - \frac{P_{\rho\rho}(\rho_0)\rho_0}{\sqrt{P_\rho(\rho_0)}}\right) r_1 r_{2y_2} - \frac{\rho_0 A_{1p} P_\rho(\rho_0)\sqrt{P_\rho(\rho_0)}}{2A_0} r_{2y_2} \\ \left(\frac{\sqrt{P_\rho(\rho_0)}}{2\rho_0} + \frac{P_{\rho\rho}(\rho_0)\rho_0}{\sqrt{P_\rho(\rho_0)}}\right) r_2 r_{2y_2} \\ \quad = \frac{\rho_0^2 P_\rho(\rho_0)}{2A_0} \times \begin{cases} M_2^T[A_{1p} r_{1y_1}(\tau,\xi,y_1)], & \text{kai } \tau \geqslant \sqrt{P_\rho(\rho_0)}\xi \\ M_2^X[A_{1p} r_{1y_1}(\tau,\xi,z_2)], & \text{kai } \ \tau \leqslant \sqrt{P_\rho(\rho_0)}\xi, \end{cases} \end{cases} \tag{14}$$

Perrašome kraštines (13) sąlygas (14) sistemai:

$$r_1(0,\xi,y_1) = \varphi_1(y_1), \tag{15}$$
$$r_2(0,\xi,y_2,z_2) = \varphi_2(y_2), \tag{16}$$
$$r_2(\tau,0,y_2,z_2) = \psi_2(z_2). \tag{17}$$

4. Gauta nauja integro-diferencialinių lygčių sistema, kurią išsprendę gausime tolygiai tinkamą srityje $0 \leqslant t + x \leqslant O(\varepsilon^{-1})$ asimptotinį sprendinį. Pastebėkime, kad suvidurkintoji sistema (14)–(17) turi kitokį pavidalą nei Koši uždaviniui, tai buvo atskiras šios sistemos atvejis, išnagrinėtas straipsnyje [2]. Kaip ir anksčiau, nerezonansiniu atveju sistema išsiskaido į nepriklausomas Hopfo lygtis. Sukonstruota suvidurkinta integralinė diferencialinė lygčių sistema (14)–(17) nebuvo nagrinėjama literatūroje ir yra mūsų tolimesnių tyrimų objektas.

Literatūra

[1] R. Fazio and G. Russo. Central schemes and seond order boundary conditions for 1d interface and piston problems in lagrangian coordinates. *Commun. Comput. Phys.*, **8**(4):797–822, 2010.

[2] A.V. Krylov. A method of investigating weakly nonlinear interaction between one-dimensional waves. *J. Appl. Math. Mech*, **51**(6):716–722 (Russian), 1989. Translated from *Prikl. Mat. Mekh.* **51**(6):933–940 (1987).

[3] A. Krylovas, O. Lavcel-Budko and P. Miškinis. Asymptotic solution of the mathematical model of nonlinear oscillations of absolutely elastic inextensible weightless string. *Nonlinear Anal. Model. Control.*, **15**(3):307–323, 2010.

[4] A. Krylovas and R. Čiegis. Asymptotic approximation of hyperbolic weakly nonlinear systems. *Nonlinear Math. Phys.*, **8**(4):458–470, 2001.

[5] A. Krylovas and R. Čiegis. Review of numerical asymptotic averaging for weakly nonlinear hyperbolic waves. *Math. Mod. Anal.*, **9**(3):209–222, 2004.

[6] J. Lighthill. *Waves in Fluids.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1978.

[7] A. H. Nayfeh. *Introduction to Perturbation Techniques.* Wiley-Interscience, NY, 1981.

[8] A. Novikovs, H. Ockendon and J. R. Ockendon. Numerical solutions of the unsteady fanno model for compressible pipe flow. *J. Fluid Mech.*, **579**:493–507, 2007.

SUMMARY

The asymptotical analysis of the mathematical model of the fluid flow in the elastic pipe

A. Krylovas, R. Kriauzienė

In this paper the model of the fluid flow in elastic pipe is studied. This model is described by the system of hyperbolic equations. The asymptotic analysis of these equations allows to investigate the conditions of the interaction of waves in the resonance case. The averaged system of integro-differential equations is constructed to find the uniformly valid asymptotic solution in the long time interval and large interval of the dimensional variable.

Keywords: asymptotical analysis, averaging, interaction of waves, resonance, the systems of hyperbolic equations.