

## **Ecuación Característica del Predictor de Smith Modificado para Sistemas MIMO**

### ***Characteristic Equation of the Modified Smith predictor to MIMO Systems***

Jorge A. Herrera-Cuartas<sup>1</sup>  
Juan S. Botero-Valencia<sup>2</sup>  
Sergio I. Serna-Garcés<sup>3</sup>

---

1 Grupo Automática, Electrónica y Ciencias  
Computacionales, Facultad de Ingenierías, Instituto  
Tecnológico Metropolitano, Medellín-Colombia  
jorgeherrera@itm.edu.co

2 Grupo Automática, Electrónica y Ciencias  
Computacionales, Facultad de Ingenierías, Instituto  
Tecnológico Metropolitano, Medellín-Colombia  
juanbotero@itm.edu.co

3 Grupo Automática, Electrónica y Ciencias  
Computacionales, Facultad de Ingenierías, Instituto  
Tecnológico Metropolitano, Medellín-Colombia  
sergioserna@itm.edu.co

**Resumen**

El retardo en sistemas de control es una característica presente con frecuencia en los sistemas reales debido al transporte de objetos o de información, a la conexión en serie de múltiples sistemas o al retardo propio del procesamiento y de los sensores, entre otros. Recientemente se han presentado diversos trabajos para la identificación del retardo externo en sistemas MIMO, estos trabajos están orientados a la identificación y control on-line de sistemas MIMO y utilizan una estructura multi-modelo basada en el predictor de Smith modificado utilizando diferentes métodos de búsqueda directa. Como es de suponer, para realizar tanto la implementación del algoritmo, como para obtener el análisis de convergencia y estabilidad, es necesario tener las ecuaciones en lazo cerrado del predictor de Smith modificado. Sin embargo, en estos trabajos no se presenta el procedimiento analítico por no tratarse del objeto principal, se presentan solo las ecuaciones de lazo cerrado sin el procedimiento para su obtención. Por tanto y para subsanar esta falta, en este trabajo se presenta la forma analítica para deducir las ecuaciones en lazo cerrado de un predictor de Smith modificado.

**Palabras clave**

Predictor de Smith modificado; sistemas inestables; sistemas con retardo; compensación; predicción.

**Abstract**

The delay in control systems is a feature frequently in real systems due to the transport of objects or information, a series connection of multiple systems or own processing and sensors delay, among others. Recently there have been several studies to identify the external delay MIMO systems, these works are focused on identification and on-line control of MIMO systems and use a multimodel structure based on modified Smith predictor using different search method. It is clear that for the implementation of the algorithm, and to obtain the convergence and stability analysis, it is necessary to have closed-loop equations of modified Smith predictor. However, in these works is not presented the analytical procedure, not be the main object, displaying only the closed loop equations without the procedure for obtaining it. Therefore, to respond, in this paper, we present an analytical way to derive the closed-loop equations of a modified Smith predictor.

**Keywords**

Modified Smith predictor; unstable systems; delay systems; compensation; prediction.

## 1. INTRODUCCIÓN

La presencia de un retardo externo en un proceso implica una dificultad adicional en el diseño de su sistema de automatización. La razón de esta dificultad es bien conocida: el retardo externo se convierte en interno al cerrarse el lazo de realimentación. Esta dificultad es aún mayor en el caso de sistemas MIMO.

El efecto del retardo sobre el sistema está relacionado directamente con la relación entre la constante de tiempo del sistema y el tamaño del retardo. Diferentes enfoques se pueden utilizar para hacer frente al retardo. Por un lado, si el retardo es pequeño en comparación con la constante de tiempo del sistema, el controlador se puede diseñar haciendo una aproximación del retardo. Por otro lado, cuando el retardo es grande en comparación con la constante de tiempo del sistema, no se recomienda hacer una aproximación. En este caso el problema se puede enfocar usando un esquema de compensación del retardo como el predictor de Smith (PS).

El PS permite diseñar el controlador de una manera óptima aislando el retardo. Su principal inconveniente es su reducida robustez frente a incertidumbres en el modelo de la planta y su aplicación únicamente en sistemas estables. Recientemente, un enfoque basado en la identificación y control de sistemas con incertidumbre en el retardo ha sido propuesta para sistemas estables (Alcantara, Ibeas, Herrera, Vilanova, & Pedret, 2009) (Herrera, Ibeas, Alcantara, & de la Sen, 2011) e inestables (Herrera, Ibeas, Alcantara, & Vilanova, 2010) (Herrera & Ibeas, 2012). El enfoque presentado en (Alcantara, Ibeas, Herrera, Vilanova, & Pedret, 2009) se basa en el PS y un esquema multimodelo. Este enfoque se extiende a sistemas estables, inestables e integrativos en (Herrera & Ibeas, 2012). El enfoque tiene el mismo marco, pero en este caso, el esquema se basa en el PS modificado propuesto por (Majhi & Atherton, 1999). En estos trabajos se presenta una breve introducción tanto del PS como del PS modificado, pero por cuestión de espacio en ningún caso se realiza un análisis profundo de su comportamiento y de sus propiedades en relación a incertidumbres en los parámetros del proceso.

Por lo anterior, este trabajo se centra en el análisis del PSM. Para ello se realiza el desarrollo analítico de la ecuación en lazo

cerrado del PS modificado para sistemas MIMO. Así mismo, se presentan simulaciones que corroboran la autenticidad de la ecuación obtenida.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2 se presenta una breve revisión del PS. En la Sección 3 se presenta el predictor de Smith modificado. Los ejemplos de simulación se presentan en la Sección 4. Finalmente, la Sección 5 concentra las principales conclusiones.

## 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Consideremos el siguiente modelo en espacio de estados para describir un sistema MIMO:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Br(t - h^r), \quad y(t + h^y) = Cx(t) + Dr(t - h^r) \quad (1)$$

Donde  $x(t) \in \mathbb{R}^q$  denota el vector de estado,  $A \in \mathbb{R}^{q \times q}$  es la matriz del Sistema;  $B \in \mathbb{R}^{q \times n}$  es la matriz de entrada;  $C \in \mathbb{R}^{m \times q}$  es la matriz de salida;  $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz de perturbaciones;  $r(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  son los vectores de entrada y salida, respectivamente, los cuales se definen como:

$$\begin{aligned} r(t - h^r) &= [r_1(t - h_1^r), r_1(t - h_2^r), \dots, r_n(t - h_n^r)]^T \\ y(t + h^y) &= [r_1(t + h_1^y), r_2(t + h_2^y), \dots, r_m(t + h_m^y)]^T \end{aligned} \quad (2)$$

Donde los vectores de entrada y salida con retardos se definen como:

$$\begin{aligned} h^r &= [h_1^r, h_2^r, \dots, h_n^r]^T \\ h^y &= [h_1^y, h_2^y, \dots, h_m^y]^T \end{aligned} \quad (3)$$

Realizando la transformada de Laplace de (1), esta se puede escribir como el siguiente matriz de transferencia MIMO:

$$G(s) = (G_{ij}(s)) = (G_{ij}^{df}(s)e^{-h_{ij}s}) \quad (4)$$

donde  $i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  y

$$H = (h_{ij}) = \begin{bmatrix} h_1^y + h_1^r & \cdots & h_1^y + h_n^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_m^y + h_1^r & \cdots & h_m^y + h_n^r \end{bmatrix} \quad (5)$$

es la matriz que contiene los retardos de cada canal, los cuales recogen el retardo de la entrada y de la salida.

Por lo tanto,  $G(s)$  es una matriz de función de transferencia  $m \times n$  la cual relaciona el vector de salida  $Y(s)$  (talla  $m$ ) con el vector de entrada  $R(s)$  (talla  $n$ ), la cual se descompone en un factor libre de retardo  $G_{ij}^{df}(s)$  y termino solo de retardo  $h_{ij}$ . La función de transferencia (4) se puede factorizar usando el producto Schur (o componente a componente) (BERNSTEIN, 2005).

$$\begin{aligned} G(s) &= G^{df}(s) \cdot D(s) \\ G(s) &= (G_{ij}^{df}(s)) \cdot (e^{-h_{ij}s}) = (G_{ij}^{df}(s)e^{-h_{ij}s}) \end{aligned} \quad (6)$$

Donde  $G_{ij}^{df}(s)$  representa la parte que contiene únicamente la componente racional del sistema y  $D(s)$  es una matriz que contiene únicamente los retardos. Una vez que se tiene desacoplado es sistema MIMO en dos matrices, se puede aplicar el predictor de Smith modificado.

### 3. PREDICTOR DE SMITH MODIFICADO PARA SISTEMAS MIMO

La versión MIMO del PS modificado (Majhi & Atherton, 1999) se muestra en la Fig. 1.  $\hat{G}^{df}(s) \cdot \hat{H}$  y  $G^{df}(s) \cdot H$  son las funciones de transferencia del modelo de la planta y del sistema real, respectivamente.

Esta estructura tiene tres controladores, los cuales son diseñados para diferentes objetivos:

i)  $G_{C1} = \text{diag}(G_{C1_i}), i = 1, 2, \dots, n$ , en el lazo interior se diseña para preestabilizar  $G^{df}$ .

ii)  $G_C = \text{diag}(G_{C_i}), i = 1, 2, \dots, n$ , se utiliza para el seguimiento a la referencia.

iii)  $G_{C2} = \text{diag}(G_{C2_i}), i = 1, 2, \dots, n$ , se utiliza para el rechazo a las perturbaciones.

Se puede observar que cuando  $G_{C1} = 0$  y  $G_{C2} = 0$ , se obtiene la versión estándar del predictor de Smith para sistemas estables.

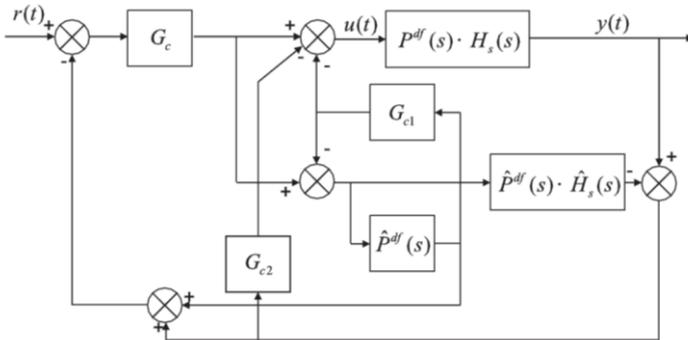


Fig. 1. Esquema básico del predictor de Smith. Fuente: Autores

### 3.1 Ecuación de Lazo Cerrado del Predictor de Smith Modificado para Sistema MIMO

En este caso la complejidad para obtener la ecuación en lazo cerrado radica en la naturaleza MIMO del sistema. Se hace uso de las variables instrumentales  $U, T$  y  $U_1$ , para desarrollar la ecuación. El procedimiento que se desarrolla a continuación permite obtener la ecuación en lazo cerrado del PS modificado para sistemas MIMO.

$$U_1 = G_C(R + \hat{P}\hat{H}T - PHU - \hat{P}T) \tag{7}$$

$U_1$  se puede reescribir de la siguiente manera:

$$U_1 = G_C(R - PHU) + G_C(\hat{P}\hat{H} - \hat{P})T \tag{8}$$

donde  $T$ , viene dado por:

$$T = (I + G_{C1}\hat{P})^{-1}U_1 \tag{9}$$

Reemplazando (9) en (8), se tiene:

$$U_1 = G_c(R - PHU) + G_c(\hat{P}\hat{H} - \hat{P})(I + G_{c1}\hat{P})^{-1}U_1 \quad (10)$$

Factorizando  $U_1$  de (10), se obtiene:

$$U_1 = \left( I - G_c(\hat{P}\hat{H} - \hat{P})(I + G_{c1}\hat{P})^{-1} \right)^{-1} G_c(R - PHU) \quad (11)$$

Usando la propiedad de la inversa de matrices la cual dice que la inversa de dos matrices es el producto de las inversas cambiando el orden,  $(I - BA^{-1})^{-1} = A(A - B)^{-1}$ , para  $A$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , (11) se puede reescribir como:

$$U_1 = (I + G_{c1}\hat{P})F^{-1}G_c(R - PHU) \quad (12)$$

donde  $F^{-1} = (I + [G_{c1} + G_c]\hat{P} - G_c\hat{P}\hat{H})^{-1}$  por comodidad en el desarrollo de las siguientes ecuaciones. El siguiente paso es definir la señal de control  $U$ .

$$U = U_1 + (G_{c2}\hat{P}\hat{H} - G_{c1}\hat{P})T - G_{c2}PHU \quad (13)$$

Reemplazando (9) y (11) en (13), se obtiene:

$$U = U_1 + (G_{c2}\hat{P}\hat{H} - G_{c1}\hat{P})(I + G_{c1}\hat{P})^{-1}U_1 - G_{c2}PHU \quad (14)$$

Factorizando  $U_1$  en (14):

$$U = \left( I + (G_{c2}\hat{P}\hat{H} - G_{c1}\hat{P})(I + G_{c1}\hat{P})^{-1} \right) U_1 - G_{c2}PHU \quad (15)$$

Ec. (15) se puede escribir de la siguiente manera:

$$U = \left( (I + G_{c1}\hat{P})(I + G_{c1}\hat{P})^{-1} + (G_{c2}\hat{P}\hat{H} - G_{c1}\hat{P})(I + G_{c1}\hat{P})^{-1} \right) U_1 - G_{c2}PHU \quad (16)$$

Factorizando el término  $(I + G_{c1}\hat{P})^{-1}$  de (16), se obtiene:

$$U = (I + G_{C2}\hat{P}\hat{H})(I + G_{C1}\hat{P})^{-1}U_1 - G_{C2}PHU \quad (17)$$

Reemplazando (12) en (17), se llega:

$$U = (I + G_{C2}\hat{P}\hat{H})(I + G_{C1}\hat{P})^{-1}(I + G_{C1}\hat{P})F^{-1}G_C(R - PHU) - G_{C2}PHU \quad (18)$$

La cual cancelando el término  $(I + G_{C1}\hat{P})^{-1}(I + G_{C1}\hat{P})$ , se escribe de la siguiente manera:

$$U = (I + G_{C2}\hat{P}\hat{H})F^{-1}G_C(R - PHU) - G_{C2}PHU \quad (19)$$

Factorizando U de (20), se obtiene:

$$\left( (I + G_{C2}PH) + (I + G_{C2}\hat{P}\hat{H})F^{-1}G_CPH \right) U = (I + G_{C2}\hat{P}\hat{H})F^{-1}G_C R \quad (20)$$

Factorizando  $(I + G_{C2}\hat{P}\hat{H})F^{-1}$  del lado izquierdo de 20, se obtiene:

$$\begin{aligned} (I + G_{C2}\hat{P}\hat{H})F^{-1} \left( \left( (I + G_{C2}\hat{P}\hat{H})F^{-1} \right)^{-1} (I + G_{C2}PH) + G_CPH \right) U \\ = (I + G_{C2}\hat{P}\hat{H})F^{-1}G_C R \end{aligned} \quad (21)$$

Cancelando  $(I + G_{C2}\hat{P}\hat{H})F^{-1}$  y organizando a  $\left( (I + G_{C2}\hat{P}\hat{H})F^{-1} \right)^{-1} = F(I + G_{C2}\hat{P}\hat{H})^{-1}$ , (21) se puede escribir como:

$$\left( F(I + G_{C2}\hat{P}\hat{H})^{-1} (I + G_{C2}PH) + G_CPH \right) U = G_C R \quad (22)$$

Sacando inversa a ambos lados y reemplazando F la señal de control U, toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} U = \left( (I + [G_{C1} + G_C]\hat{P} - G_C\hat{P}\hat{H})(I + G_{C2}\hat{P}\hat{H})^{-1} (I + G_{C2}PH) \right. \\ \left. + G_CPH \right)^{-1} G_C R \end{aligned} \quad (23)$$

Dado que la ecuación en lazo cerrado viene determinada por la siguiente ecuación:

$$Y = PHU \quad (24)$$

Reemplazando (23) en (24) se obtiene:

$$Y = PH \left( (I + [G_{c1} + G_c]\hat{P} - G_c\hat{P}\hat{H})(I + G_{c2}\hat{P}\hat{H})^{-1}(I + G_{c2}PH) + G_cPH \right)^{-1} G_cR \quad (25)$$

De (25) se puede ver que cuando  $\hat{P} = P$  y  $\hat{H} = H$ , (25) se puede escribir como:

$$Y = PH(I + [G_{c1} + G_c]P)^{-1} G_cR \quad (26)$$

Cuya ecuación característica  $(I + [G_{c1} + G_c]P)^{-1}$  no depende del retardo.

## 4. EJEMPLOS

En esta sección se muestran como la ecuación obtenida representa claramente la función de transferencia en lazo cerrado del PS modificado. Se presentan dos pruebas, en primer lugar se presenta una simulación para un valor de  $\hat{H} = H$ , de esta manera se muestra que efectivamente la ecuación representa correctamente las dinámicas del PSM. Paso seguido se presenta una simulación para  $\hat{H} \neq H$  es decir usando (26). En los dos casos los resultados se comparan con el bloque en simulink mostrado en la Fig. 2.

### 4.1 Respuesta de la Ecuación en Lazo Cerrado del PS Modificado para $\hat{H} = H$

Con esta prueba se demuestra que la ecuación obtenida representa correctamente la respuesta en lazo cerrado del PS modificado. En este caso se supone un completo conocimiento del retardo de la planta, es decir,  $\hat{H} = H$ . En este caso la planta y el modelo de la planta, vienen dados por:

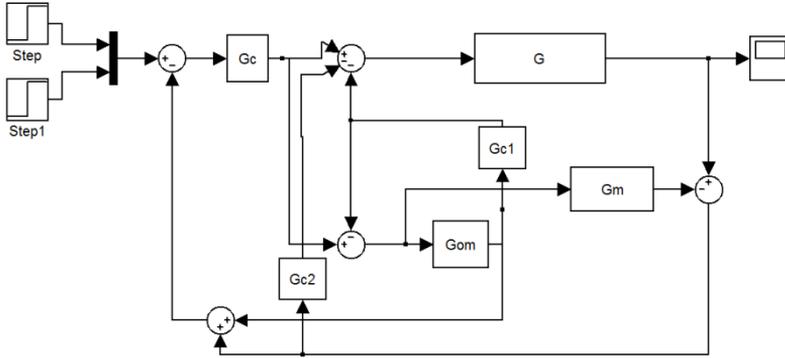


Fig. 2. Representación en Simulink del PSM. Fuente: Autores

$$G = Gm = \begin{bmatrix} \frac{4e^{-4s}}{s-1} & \frac{2.3e^{-4s}}{s+2} \\ \frac{2.5e^{-4s}}{s+1.5} & \frac{3.8e^{-4s}}{s-2} \end{bmatrix}, Gom = \begin{bmatrix} \frac{4}{s-1} & \frac{2.3}{s+2} \\ \frac{2.5}{s+1.5} & \frac{3.8}{s-2} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Los controladores toman la siguiente forma:

$$Gc = \begin{bmatrix} \frac{s+13}{s(s+14)} & 0 \\ 0 & \frac{s+13}{s(s+14)} \end{bmatrix}, Gc1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } Gc2 = \begin{bmatrix} 1.4 & 0 \\ 0 & 1.4 \end{bmatrix} \quad (28)$$

En las Fig. 3 y 4 se muestra la señal de salida para el canal 1 y 2, respectivamente. La línea negra muestra el valor de la salida obtenido por medio de la ecuación (25). La respuesta punteada representa la salida obtenida con el Simulink. Se puede ver claramente que las dos respuestas tienen el mismo comportamiento, lo cual da a entender que la ecuación (25) efectivamente representa el lazo cerrado del PS modificado.

#### 4.2 Respuesta de la Ecuación en Lazo Cerrado del PS Modificado para $\hat{H} \neq H$

En este caso se supone que existe una discrepancia entre el verdadero retardo y el retardo nominal, es decir,  $\hat{H} \neq H$ . Por lo tanto, G y Gom tienen los valores dados por (27), mientras que Gm toma el siguiente valor:

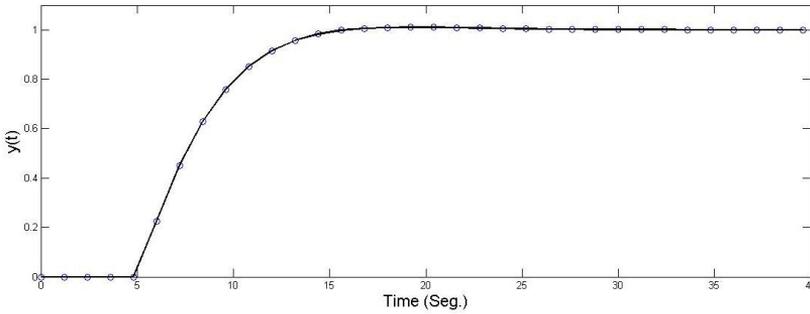


Fig. 3. Señal de salida cuando  $\hat{H} = H$ , canal 1. Fuente: Autores

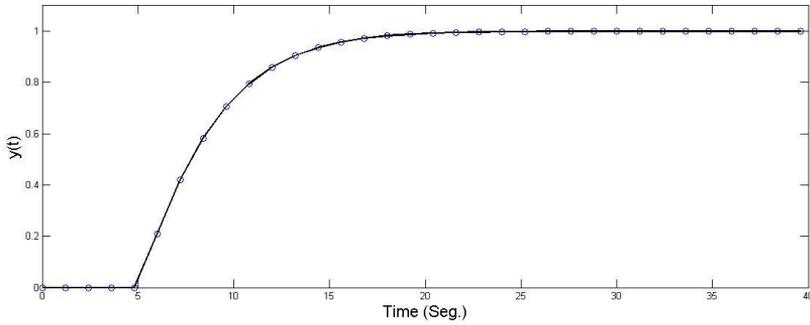


Fig. 4. Señal de salida cuando  $\hat{H} = H$ , canal 2. Fuente: Autores

$$Gm = \begin{bmatrix} \frac{4e^{-4s}}{s-1} & \frac{2.3e^{-4s}}{s+2} \\ \frac{2.5e^{-4s}}{s+1.5} & \frac{3.8e^{-4s}}{s-2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

En las Fig. 5 y 6 se muestra la señal de salida para el canal 1 y 2, respectivamente. Se puede ver claramente que las dos respuestas tienen el mismo comportamiento.

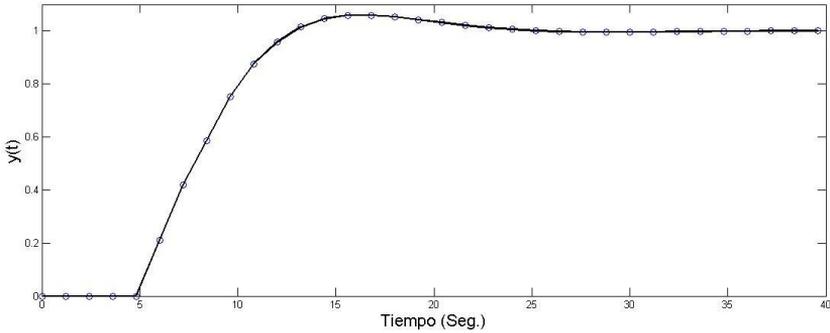


Fig. 5. Señal de salida cuando  $\hat{H} \neq H$ , canal 1. Fuente: Autores

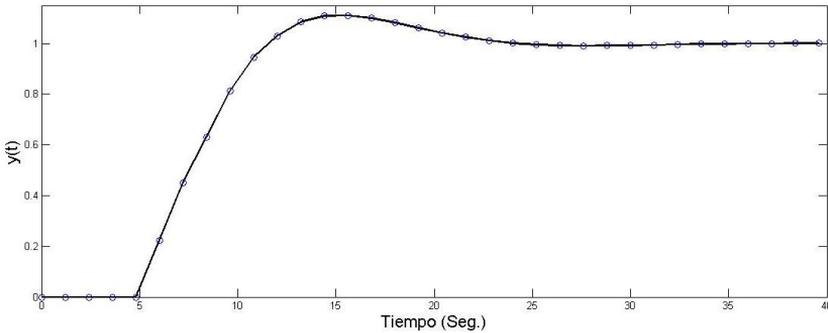


Fig. 6. Señal de salida cuando  $\hat{H} \neq H$ , canal 2. Fuente: Autores

## 5. CONCLUSIONES

Este trabajo presenta el desarrollo analítico de la ecuación en lazo cerrado del PSM. El desarrollo de la ecuación hace uso del álgebra lineal la cual permite tener una mejor comprensión del problema. Esta ecuación permite comprender de una manera intuitiva el funcionamiento del PSM. De igual manera al obtener una ecuación que represente el lazo cerrado esta se puede utilizar en otros procesos de simulación permitiendo obtener resultados más fácilmente.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente soportado por el grupo de investigación en Automática y electrónica del Instituto Tecnológico Metropolitano (ITM) bajo el proyecto “Maximización de extracción de energía en aerogeneradores para cogeneración urbana en el Valle de Aburrá”, código P10-233.

## 7. REFERENCIAS

- Alcantara, S., Ibeas, A., Herrera, J., Vilanova, R., & Pedret, C. (2009). Multi-model Smith predictor based control of multivariable systems with uncertain bounded external delays. *IEEE Latin America Transactions*, 7(1), 42–53.
- Bernstein, D. (2005). *Matrix mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Herrera, J., & Ibeas, A. (2012). On-line delay estimation for stable, unstable and integrating systems under step response. *ISA Transactions*, 51, 351-361.
- Herrera, J., Ibeas, A., Alcantara, S., & de la Sen, M. (2011). Multimodel-based techniques for the identification and adaptive control of delayed multi-input multi-output systems. *IET Control Theory & Applications*, 5(1), 188–202.
- Herrera, J., Ibeas, A., Alcantara, S., & Vilanova, R. (2010). Identification and adaptive control of delayed unstable systems. In: *Proceedings of the 2010 international symposium on intelligent control*.
- Krstic, M. (2009). *Delay Compensation for Non linear, Adaptive, and PDE Systems*. Birkhauser.
- Majhi, S., & Atherton, D. (1999). Modified Smith predictor and controller for processes with time delay. *IET Control Theory & Applications*, 146, 359–66.
- Niculescu, S. I. (2001). *Delay Effects on Stability. A Robust Control Approach*. Springer-Verlag.