Textos Académicos

HÉCTOR ANÍBAL TABARES OSPINA

Métodos numéricos

ITM

Métodos numéricos

Héctor Tabares Ospina

TEXTOS ACADÉMICOS

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO
Institución Universitaria

MÉTODOS NUMÉRICOS
Héctor Tabares Ospina

1a. Edición: diciembre de 2009

ISBN: 978-958-8351-79-7
Hechos todos los depósitos legales

Dirección editorial
JAIRO OSORIO GÓMEZ

Corrección de textos
LUCÍA INÉS VALENCIA

Diagramación y montaje
L. Vieco e Hijas Ltda.

Impreso y hecho en Medellín, Colombia

Instituto Tecnológico Metropolitano
Calle 73 No. 76A 354
Tel.: (574) 440 51 60
Fax: 440 52 52
www.itm.edu.co
Medellín - Colombia

Contenido

Prólogo

Este texto se ha escrito con un propósito didáctico y pedagógico para la enseñanza de la asignatura MÉTODOS NUMÉRICOS, que se dicta en las Escuelas de Ingenierías.

Su contenido se diseñó pensando en aumentar la calidad académica de la asignatura. Así mismo, su empleo como cuaderno de trabajo en clase, ha permitido disminuir el tiempo de exposiciones magistrales, que ahora se utiliza en actividades de introducción a la investigación práctica en las que el alumno aplica lo estudiado para resolver un problema de su interés. Ésta es la principal fortaleza de la obra.

El temario se encuentra divido en siete unidades y cuatro anexos. En la primera, se proporciona una introducción al curso. La segunda unidad trata sobre la teoría de errores. En la tercera se presentan los diferentes métodos numéricos empleados para solucionar ecuaciones no lineales. La cuarta unidad estudia los algoritmos que solucionan sistemas de ecuaciones lineales. El tema de interpolación se explica en la quinta unidad. La antepenúltima unidad versa sobre diferenciación e integración numérica. La última unidad es acerca de la solución numérica de Ecuaciones Diferenciales.

El Anexo A está dividido en dos partes. En la primera se presenta un repaso a los fundamentos de programación. En la segunda parte se ilustra la sintaxis propia del lenguaje de programación de MATLAB: palabras reservadas, operadores, arreglos, instrucciones de entrada y de salida de datos, estructuras de decisión lógica y repetitiva, subprogramas definidos por el usuario, funciones matemáticas, funciones especiales y de graficación en 2D y 3D.

La necesidad de crear un mundo gobernado por reglas confiables es esencial para la mente humana, sin embargo los grandes misterios del mundo y del universo nos permanecen incomprensibles.

Discovery Channel

Aunque hemos aprendido más sobre la tierra y el cosmos en los últimos 25 años que en toda la historia registrada, cuanto más indagamos, más misterioso se vuelve el mundo.

History Channel

La cosa más maravillosa que podemos experimentar es lo inexplicable. Es la fuente de toda ciencia y arte verdadero.

Albert Einstein

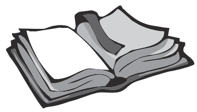
El autor desarrolló el programa de computadora MN_ITM, con el que explica durante las presentaciones magistrales la ejecución de los algoritmos planteados en este libro. El programa fue desarrollado con el lenguaje Visual C++ y utilizando la programación orientada a objetos.

La forma de manejar el sistema informático se explica en el anexo B. El anexo C presenta las referencias bibliográficas utilizadas. El anexo D está diseñado para que el estudiante registre sus datos personales y el resultado de sus evaluaciones.

Íconos utilizados

Durante la obra se utilizan varios íconos que, para avanzar en la comprensión del texto, se presentan a continuación.

Información



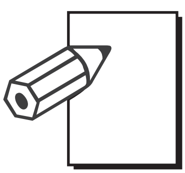
Libro guía

Observación

Práctica propuesta

Error

Aplicación en Matlab



Ejercicios

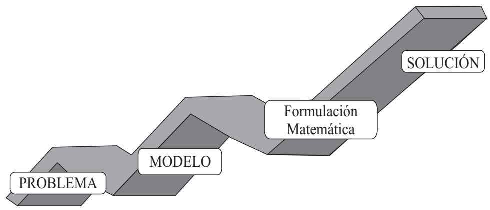
Utilización de calculadora avanzada

Agradecimientos

Expreso mi gratitud a todas aquellas personas que han contribuido a la edición de esta obra. En especial al profesor Ph.D. Jesús Antonio Hernández Riveros, por su pertinente evaluación, y a la administradora documental, Lina María Sánchez Holguín, por la clasificación y organización de la documentación empleada para esta edición.

Héctor Tabares Ospina

Unidad 1
Introducción al curso



Práctica 1

- **Contenido**

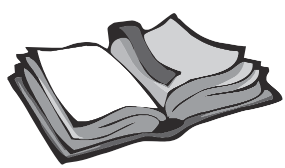
  1.1 Objetivo general
  1.2 Etapas en la solución de un problema
  1.3 Métodos numéricos
  1.4 Caminos para llegar a una solución

- **Logros**

  El estudiante:
  - Recibir una introducción al curso de *Métodos Numéricos*
  - Identificar las fuentes bibliográficas

- **Para realizar esta práctica**

  (a) Consulte en el Libro Guía el capítulo Introducción al curso



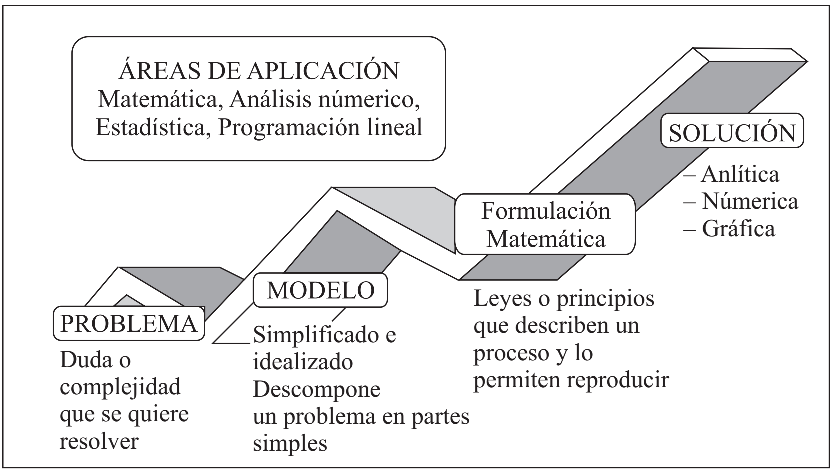
Unidad 1

1.0 Introducción al curso

1.1 Objetivo general

Solucionar problemas modelados matemáticamente, mediante la utilización de algoritmos, de manera óptima, precisa y exacta.

1.2 Etapas en la solución de un problema



1.3 Métodos numéricos 

Técnicas mediante las que es posible formular problemas, de tal manera que puedan resolverse con aproximaciones numéricas al usar operaciones aritméticas de manera eficiente.

1.4 Caminos para llegar a una solución

Analítica	Numérica	Gráfica
• Se encuentra una solución exacta	• Se encuentra una solución aproximada	• La solución no es muy precisa
• No siempre se encuentra una solución	• Se utiliza el computador para hacer los cálculos	• El computador se utiliza como herramienta para graficar
		• Sólo se trabaja en dos o tres dimensiones

Unidad 2: Teoría de errores

Práctica 2

- Contenido

  2.1 Sistemas numéricos

  2.2 Aritmética en una computadora

  2.3 Errores en una computadora

  2.4 Exactitud y precisión

  2.5 Algoritmos y estabilidad

  2.6 Conclusiones.

- Logros

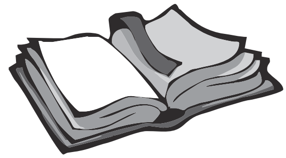
  El estudiante:

  - Aprender a identificar los diversos tipos de errores
  - Solucionar los diferentes problemas propuestos utilizando datos de varios tipos
  - Evalúe la exactitud de los cálculos utilizando:

  (a) Matlab MATLAB

  (b) Calculadora avanzada

- PARA REALIZAR ESTA PRÁCTICA
  (a) Consulte en el Libro Guía el capítulo acerca de Teoría de Errores



Unidad 2

2.0 Teoría de errores

En este capítulo se identificarán y cuantificarán los errores introducidos en los procesos de conversión del medio continuo al medio discreto (representación numérica en la máquina) y en los procesos de operación realizados en la máquina.

2.1 Sistemas numéricos

2.1.1 Sistema digital (0,1) base 2

Ejemplo: 10011011

Bit: Dígito binario que es 0 ó 1

BYTE: Grupo de 8 bits

2.1.2 Sistema decimal (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) base 10

Ejemplo: 548

___Centenas ___Decenas ___Unidades

$(548)_{10} =$

2.1.3 Caso 1: conversión de decimal a base 2

Dividimos el número decimal y sus cocientes entre 2 y acumulamos los residuos que conformarán el número en la nueva base.

Por ejemplo: $(527)_{10}$ convertirlo a base 2

Operación	Residuo	Comentario

$(527)_{10} =$

2.1.4 Conversión de base 2 a decimal

Convertir el número $1000001111)_2$ a base 10

2.1.5 Caso 2: conversión de decimal a base 2

Para convertir la parte decimal del número en base 10 a base 2, multiplicamos sucesivamente el número decimal por 2 y acumulamos la parte entera del resultado.

Por ejemplo, evalúe $(2.56)_{10}$ a base 2

a) Parte entera

OPERACIÓN	SOBRA

b) Parte decimal

OPERACIÓN	PARTE ENTERA	COMENTARIO
$(2.56)_{10}=$		

c) Convierta de nuevo el anterior número en base 2 a base 10

Ejemplos

En los ejercicios 1 y 2, realizar la conversión de base 10 a base 2. Luego hacer la conversión inversa.

1.

$(987)_{10}$	

2.

$(3.28)_{10}$	

Conclusiones

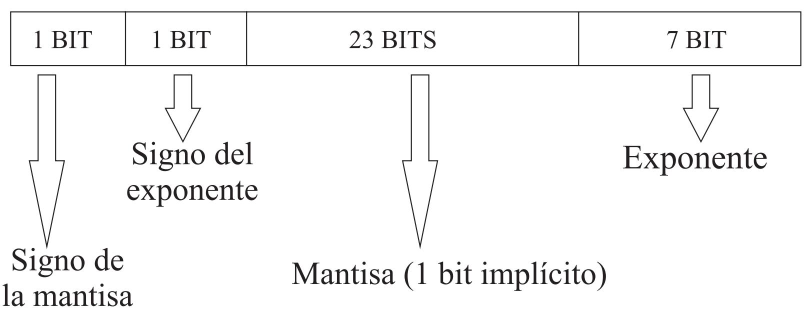
En una calculadora se producen errores porque almacena una cantidad finita de dígitos.

2.2 Aritmética de una computadora

La aritmética que realiza una calculadora o una computadora es distinta a nuestro mundo matemático tradicional, pues en este caso permitimos la existencia de números con una cantidad infinita de cifras. Sin embargo, en el mundo de las computadoras cada número representable tiene sólo un número finito, fijo, de cifras.

Normalmente los números racionales se pueden representar con exactitud, pero por ejemplo $\sqrt{3}$ no es racional, se da una representación aproximada, una cuyo cuadrado no es 3, aunque sí lo bastante cerca de 3 como para que sea aceptable en la mayor parte de las situaciones. [BURDEN 02]

2.2.1 Los números en la computadora



2.2.2 Tipos de datos en una computadora

Existen 3 tipos de datos atómicos: entero, real, real con doble precisión. Sus rangos de valores son:

Tipo	Tamaño en bits	Rango
Entero	16	-32768 a 32768
Real	32	3.4×10^{-38} a $3.4 \times 10^{+38}$
Real doble	64	1.7×10^{-308} a $1.7 \times 10^{+308}$

2.3 Errores en una computadora

2.3.1 Errores inherentes

- Datos
- Incertidumbre en las medidas
- Números que no caven en la computadora
- Formulación del modelo
- Valores experimentales

2.3.2 Error absoluto y error relativo

2.3.2.1 Error absoluto

Si *p** es una aproximación de *p*, y si *p* es el valor real, entonces:

Error Absoluto = |p - p*| o sea el valor absoluto de *p* menos p*. Debido a que la ecuación se dio en términos del valor absoluto, el error absoluto no es negativo. Así pues, una colección (suma) de errores siempre se incrementan juntos, sin reducirse. Este es un hecho muy pesimista, dado que el redondeo y otros errores rara vez están en la misma dirección, es posible que la suma ("algebraica") de ellos sea cero, con aproximadamente la mitad de los errores positiva y la otra mitad negativa. Pero también es demasiado optimista esperar que errores con signo sumen cero a menudo. Un enfoque realista es suponer que éstos, en especial el redondeo, están estadísticamente distribuidos.

El error absoluto se propaga en los cálculos de la siguiente manera.

Producto: $E_{x*y} = yE_x + xE_y$

Cociente: $E_{x/y} = (E_x / y) - (x/y^2)$

Suma : $E_{x+y} = E_x + E_y$

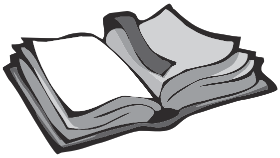
Resta: $E_{x-y} = E_x - E_y$

2.3.2.2 Error relativo

El Error relativo se define como:

Error relativo = $|p - p^*|/|p|$ con la condición de $p \neq 0$.

Generalmente el denominador es una de tres elecciones: la magnitud del valor exacto o real, la magnitud del valor calculado o aproximado, o el promedio de estas dos cantidades. La mayoría de las veces se usa como el valor real, por lo que se usará esta opción. El Error Relativo es una mejor medida del error que el error absoluto, en especial cuando se utilizan sistemas numéricos de punto flotante. Puesto que los elementos de un sistema de punto flotante no están distribuidos de manera uniforme, la cantidad de redondeos posibles depende de la magnitud de los números que se redondean. El denominador de esta ecuación compensa el efecto.



Ejemplos

En los ejercicios 1 y 2, calcular el Error Absoluto y el Error Relativo.

1. $p = 0.3x10^{1}; p^{*} = 0.31x10^{1}$

2. $p = 0.3x10^{-3}; p^{*} = 0.31x10^{-3}$

Se concluye de este numeral que tomar como una medida de precisión el error absoluto puede ser engañoso. En este caso el error relativo es más significativo.

2.3.3 Error de redondeo

El error de redondeo se origina porque una máquina involucra números con sólo un número finito de dígitos; por lo tanto, los cálculos se realizan con representaciones aproximadas de los números verdaderos. Dicho de otra manera, el error de redondeo se debe a la naturaleza discreta del sistema numérico de máquina de punto flotante, que a su vez, se debe a su longitud de palabra finita. Cada número (real) se reemplaza por el número de máquina más cercano. Esto significa que todos los números en un intervalo local están representados por un sólo número en el sistema numérico de punto flotante.

El error de redondeo es el que resulta de reemplazar un número por su forma de punto flotante. Cualquier número real positivo puede ser normalizado para que adquiera la forma:

$$y = 0.d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} \ldots x10^n$$

$$1 \leq d_i \leq 9, \longrightarrow con \longrightarrow i = 2,3,4,5,\ldots k$$

La forma de punto flotante *fl*(*y*) se obtiene terminando (recortando) la mantisa de *y* en *k* dígitos decimales.

Existen dos métodos de terminar:

a) Cortando los dígitos $d_{k+1} d_{k+2} \ldots \Rightarrow fl(y) = 0.d_1 d_2 \ldots d_k x10^n$

b) Redondeando el número

$$Si(d_{k+1} >= 5) Entonces$$

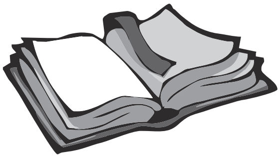
Se agrega uno a d_k para obtener *fl*(*y*) *FinSi*

$$Si(d_{k+1} < 5) Entonces$$

Se cortan todos, excepto los primeros *k* dígitos.

FinSi

Ejemplos



En el ejercicio 1, aplicar el método de cortado y el método de redondeo al número señalado.

1. $fl(\pi) = 0.314159x10^1$, $k = 5$

Cortado	Redondeo

2.3.4 Error de truncamiento

Este tipo de error ocurre cuando un proceso que requiere un número infinito de pasos se detiene en un número finito de pasos.

Generalmente, se refiere al error involucrado al usar sumas finitas o truncadas para aproximar la suma de una serie infinita. Note que el error de truncamiento, a diferencia del error de redondeo, no depende directamente del sistema numérico que se emplee.

2.3.5 Underflow, overflow

UNDERFLOW:

Son los números que tienen una magnitud menor que 16^{-65} y a los que generalmente se les da el valor cero.

OVERFLOW:

Son los números que tienen una magnitud mayor a 16^{63} y causan que los cálculos se detengan.

2.4 Exactitud y precisión

EXACTITUD se refiere a la aproximación de un número al valor verdadero que se supone representa.

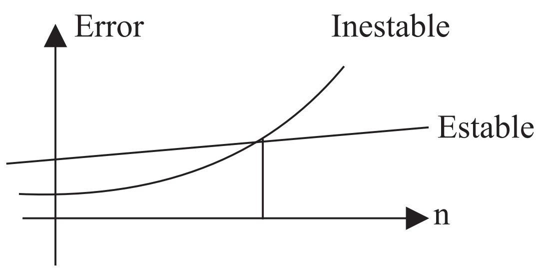
PRECISIÓN se refiere al número de cifras significativas que representan una cantidad.

2.5 Algoritmos y estabilidad

$\in_0$ representa el crecimiento del error después de *n* operaciones.

Si : $\in_n \approx C \quad n \in_0$. C es una constante independiente de *n*. Se dice que el crecimiento del error es lineal. (Estable)

$\in_0 \approx k \in_0^N$ para alguna $k > 1$, el crecimiento del error es exponencial. (Inestable)



El crecimiento del error se puede determinar con:

a) Prueba de escritorio

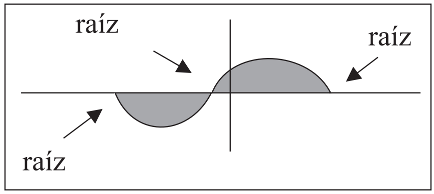
b) Seguir la propagación del error

c) Comparar soluciones con datos del tipo de precisión simple y doble

2.6 Conclusiones

- Evitar restar números casi iguales
- Evitar la división por un número cercano a cero
- Minimizar la ejecución del número de operaciones en el algoritmo
- Utilizar datos del tipo doble precisión cuando sea necesario
- Realizar escalamiento de los datos si es posible

Unidad 3
Solución numérica
de ecuaciones no lineales



Práctica 3

- Contenido
  - 3.1 Raíces de una ecuación
  - 3.2 Métodos cerrados
  - 3.3 Métodos abiertos

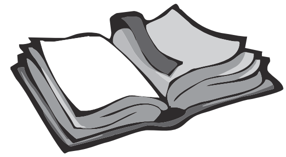
- Logros

  El estudiante:
  - Aprender los algoritmos para la solución numérica de ecuaciones no lineales
  - Aplicar los diferentes métodos de solución numérica de ecuaciones no lineales
  - Implementar los diferentes algoritmos para la solución numérica de ecuaciones no lineales utilizando

  (a) Matlab MATLAB

  (b) Calculadora avanzada

- PARA REALIZAR ESTA PRÁCTICA



(a) Consulte en el Libro Guía el capítulo de solución numérica de ecuaciones no lineales.

(b) Realice la práctica propuesta al finalizar esta unidad.

Anexo C

Bibliografía

[BURDEN 02], Burden Richard L. y Duglas Faires. *"Análisis numérico"*. Editorial Thomson Learning, 2002.

[CHAPRA 87], Chapra Steven & Canale, Raymond. *"Métodos numéricos para ingenieros"*, McGrawHill, 1987.

[GERALD & WHEATLEY 2000], Gerrald C, & Wheatley O. *"Análisis numérico con aplicaciones"*, Pearson Educación, 2000.

[MATHEWS 00], Mathews, John H. & Fink, Kurtis D. *"Métodos Numéricos con Mathlab"*, 3ª Edición. Madrid: Prentice Hall, 2000.

[NAKAMURA 97], Nakamura, Shoichiro. "*Análisis numérico y visualización gráfica con MATLAB*", 1ª Edición. Madrid: Prentice Hall Hispanoamericana, 1997.

Anexo D

Evaluación

Alumno:
Carnet:
Correo electrónico:
Tel.
Programa académico:
Universidad:

Evaluación	Valor	Fecha	Nota
Definitiva	100%		

Métodos numéricos
se terminó de imprimir en diciembre de 2009.
Para su elaboración se utilizó papel Bond de 70 g,
en páginas interiores, y cartulina Propalcote 250 g para la carátula.
Las fuentes tipográficas empleadas son Times New Roman 12 puntos,
en texto corrido, y Myriad Pro 14 puntos en títulos.