Proyecto Fin de Grado
Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

# Aplicación de Juegos Cooperativos a una situación secuencial originada por el Covid-19

Autor: Javier Troyano García

Tutoras: Manuela Basallote Galván
Carmen Hernández Mancera

**Dpto. de Matemática Aplicada II**
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2020

Proyecto Fin de Grado
Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

# Aplicación de Juegos Cooperativos a una situación secuencial originada por el Covid-19


Autor:

Javier Troyano García

Tutoras:

Manuela Basallote Galván

Carmen Hernández Mancera

Profesoras Titulares de Universidad

Departamento de Matemática Aplicada II

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla


Sevilla, 2020

Proyecto Fin de Carrera: Aplicación de Juegos Cooperativos a una situación secuencial originada por el Covid-19

Autor: Javier Troyano García

Tutoras: Manuela Basallote Galván
Carmen Hernández Mancera

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2020

El Secretario del Tribunal

*A Dios*
*A mi familia y amigos*
*A mis profesores*

# Agradecimientos

Me gustaría agradecer a mis tutoras, Manuela Basallote Galván y Carmen Hernández Mancera, su valiosa ayuda y su dedicación para la realización de este trabajo y reconocer, además, su capacidad para adaptarse a las nuevas circunstancias.

A mi familia y amigos les agradezco que hayan estado ahí durante todos estos años.

# Resumen

En el sector productivo ya sea de manufactura o servicios, debido a las limitaciones de capacidad, es frecuente que los pedidos se acumulen propiciando el origen de situaciones secuenciales. Estas secuencias no son más que la cola de trabajos que esperan a ser procesados o de servicios para ser servidos y que comúnmente se colocan por orden de llegada a la entidad productora. Sin embargo, la espera a la que están sometidos los clientes de dicha secuencia no genera las mismás pérdidas económicas, ni siquiera proporcionales, a los clientes.

En este trabajo veremos que los cambios en el orden inicialmente establecido pueden generar situaciones más beneficiosas para uno o varios de los agentes implicados. En concreto, abordaremos este planteamiento desde la Teoría de Juegos Cooperativos y analizaremos distintas reglas de reparto que distribuyen el beneficio obtenido entre todos los participantes atendiendo a distintas propiedades.

Estudiaremos también una variación del caso anterior, que es cuando uno de los clientes implicados no genera pérdidas hasta un determinado momento temporal, lo que conocemos como situación secuencial con jugador “target”. Utilizaremos las mismas herramientas para su análisis y veremos cómo cambian las propiedades del modelo.

# Abstract

In the productive sector, either manufacturing or services, due to capacity limitations, orders often accumulate, leading to the origin of sequential situations. These sequences are nothing more than the queue of jobs that are waiting to be processed or services that are waiting to be served and that are commonly placed in order of arrival at the producing entity. However, the wait to which the clients of this sequence are subjected does not generate the same economic losses, not even proportional, to the clients.

In this paper we will see that changes in the initially established order can generate more beneficial situations for one or more of the agents involved. Specifically, we will approach this proposal from the Cooperative Games Theory and we will analyze different distribution rules that divide the benefit obtained among all participants attending different properties.

We will also study a variation of the previous case, when one of the clients involved does not generate losses until a certain point in time, what we know as a sequential situation with a “target” player. We will use the same tools for its analysis and we will see how the properties of the model change.

# Índice

# ÍNDICE DE TABLAS

# ÍNDICE DE FIGURAS

# Notación

| | |
|---|---|
| $N$ | Conjunto finito de jugadores $N = \{1, 2, ..., n\}$ |
| $\|N\| = n$ | Cardinal del conjunto $N$, esto es, el número de jugadores |
| $2^N$ | Conjunto de partes de $N$, es decir, $2^N = \{S$ tal que $S \subset N\}$ |
| $\sigma$ | Orden sobre un conjunto de $N$ jugadores |
| $\sigma_0$ | Orden inicial |
| $\sigma^r$ | Orden inverso |
| $\sigma(k) = i$ | La posición del jugador $i$ es la $k$-ésima |
| $\sigma^{-1}(i) = k$ | La posición del jugador $i$ es la $k$-ésima |
| $\mathbb{R}$ | Conjunto de los números reales |
| $(N, v)$ | Juego de utilidad transferible para un conjunto de jugadores $\boldsymbol{N}$ y con función característica $v$, de forma abreviada $v \in$ UT |
| $\Gamma^N$ | Conjunto de todos los juegos de utilidad transferible para $N$ jugadores |
| $\Pi(N)$ | Conjunto de todos los ordenamientos posibles |
| $\phi$ | Valor de Shapley |
| $g_{ij}$ | Ganancia de dos vecinos $i$ y $j$ intercambiados |
| $MP$ | Conjunto de jugadores mal posicionados |
| $EGS$ | Regla de reparto igualitario (*Equal Game Splitting*) |
| $\alpha$ | Vector que contiene los coeficientes de los costes de cada jugador |
| $p$ | Vector que contiene los tiempos de proceso para cada jugador |
| $(N, \sigma_0, p, \alpha)$ | Situación secuencial, de forma abreviada será $s$ |
| $(N, T, \sigma_0, p, \alpha, t_1)$ | Situación secuencial con jugador target, de forma abreviada será $s^*$ |
| $SEQ^N$ | Conjunto de todas las situaciones secuenciales |
| $<_L$ | Menor en el orden lexicográfico |
| $\Leftrightarrow$ | Si y sólo si |
| $\emptyset$ | Nulo o vacío |

# 1 INTRODUCCIÓN

La Teoría de Juegos es un área de las matemáticas que puede ser definida como el estudio de modelos matemáticos para la resolución de conflictos y la cooperación entre decisores inteligentes y racionales. Ofrece, por tanto, técnicas para analizar situaciones donde dos o más individuos toman decisiones que afectan al bienestar de los otros.

El concepto de juego puede desvirtuar un poco el significado que se quiere transmitir de una disciplina cuyo ámbito de estudio abarca desde aquellos juegos que siempre se han designado como tales, entre ellos el ajedrez, el parchís, el póker..., hasta aplicaciones en el campo empresarial, el mercado bursátil o la resolución de conflictos internacionales. Es por ello por lo que algunos estudiosos consideran que un nombre más preciso podría ser "Análisis de Conflictos" o "Teoría de Decisiones Interactivas". Aun así, el concepto de "juego" está ampliamente aceptado y se refiere a cualquier situación social que afecte a dos o más individuos, a los que se les suele llamar jugadores. Estos jugadores han sido previamente definidos como inteligentes y racionales, lo que quiere decir que tomarán decisiones consistentes en virtud de alcanzar sus propios objetivos. Asumimos en Teoría de Juegos que estos objetivos son maximizar los valores esperados de sus recompensas.

La primera publicación sobre teoría de juegos se la debemos a John von Neumann y Oskar Morgenstern, matemático y economista respectivamente, que con su obra *Theory of games and economic behaviour* en el año 1944 plasmaron en este libro un estudio sobre el comportamiento de los agentes en situaciones económicas y desarrollaron la teoría de la utilidad esperada.

Pero no es hasta 1994 cuando esta disciplina cobra prestigio internacional y respaldo académico al premiar con el Nobel en Ciencias Económicas al matemático John F. Nash y a los economistas John C. Harsanyi y Reinhard Selten. Este premio representa un merecido reconocimiento a la Teoría de Juegos como herramienta fundamental para el análisis económico apoyada en una sólida base matemática. Y es que, en esta tarea, el aporte de John F. Nash fue decisivo, creó un concepto de solución clave en la Teoría de Juegos no cooperativos que adoptó su nombre, el equilibrio de Nash.

No fue esta la única ocasión en la que la Real Academia Sueca para las Ciencias premió avances relativos a la Teoría de Juegos. Dos años después, en 1996 son James A. Mirrlees y William Vickrey los que reciben el premio Nobel de Economía por "su contribución fundamental a la teoría económica de los incentivos bajo información asimétrica". En 2005 Robert J. Aumann y Thomas C. Schelling "por su comprensión de los conflictos y la cooperación por medio del análisis de la Teoría de Juegos", y más recientemente, en 2012, Alvin E. Roth y Lloyd S. Shapley por "la Teoría de la distribución estable y la práctica del diseño de mercado". Las contribuciones de los premiados nos permiten apreciar la versatilidad de esta disciplina.

La teoría de juegos analiza las situaciones desde dos perspectivas distintas: aquellas en las que no se dispone de mecanismos para tomar acuerdos vinculantes y los jugadores tomarán decisiones de forma independiente para su beneficio personal, también llamados juegos no cooperativos y aquellas situaciones en las que los jugadores sí disponen de estos mecanismos, los conocidos como juegos cooperativos.

El estudio de una situación conflictiva y su análisis mediante la teoría de juegos no cooperativos permite que cada jugador obtenga las "mejores estrategias" adaptadas a cada situación. Por otro lado, la suposición implícita en un juego cooperativo es que los participantes pueden formar coaliciones y hacer acuerdos vinculantes previos al juego sobre cómo distribuir los ingresos de estas coaliciones. Un juego cooperativo es más abstracto que un juego no cooperativo en el sentido de que las estrategias no están explícitamente modeladas, más bien, el juego describe lo que cada posible coalición puede ganar mediante la cooperación.

Dentro de los juegos cooperativos podemos encontrar situaciones en las que la utilidad o beneficio que consiguen los agentes al cooperar se puede repartir de cualquier modo entre ellos, y situaciones en las que dicho beneficio no se puede transferir de cualquier modo y está sujeta a las restricciones del problema. Siguiendo este criterio los juegos cooperativos se clasifican en juegos UT o juegos con utilidad transferible y juegos sin utilidad transferible. La parte de Teoría de juegos que se aplicará, en este documento, se centrará en los juegos UT, más concretamente en los conocidos como Juegos Cooperativos Secuenciales de Utilidad Transferible.

El trabajo está dividido en cuatro capítulos, siendo el primero esta introducción. Posteriormente describiremos los conceptos y propiedades fundamentales de la Teoría de Juegos Cooperativos y tres de los conceptos de solución más relevantes en nuestro estudio, el core, el valor de Shapley y el nucleolo. En tercer lugar, una vez presentada la teoría, pasaremos a describir ,y posteriormente analizar, las situciones secuenciales y la aplicación de la Teoría de Juegos en este ámbito. En el último capítulo se aborda una "variación" de las situaciones secuenciales, las situaciones secuenciales con un jugador "target".

El segundo capítulo, por tanto, podría ser considerado como una continuación de esta introducción, en él tratamos de definir de nuevo los Juegos Cooperativos y sus principales propiedades, no solo de palabra, sino haciendo uso de la notación matemática e ilustrando los conceptos mediante ejemplos sencillos. Hablamos en este capítulo de la función característica, que es la encargada de asociar un valor a las distintas coaliciones que pueden formarse dentro del juego y del vector de pagos, cuya función es la de asignar un porcentaje del beneficio a cada jugador.

Aunque los juegos de Utilidad Transferible se caracterizan por admitir cualquier vector de pagos posible, se suelen imponer a las distintas soluciones una serie de restricciones razonables, es lo que abordamos en la segunda parte del capítulo 2 mediante el estudio de distintos conceptos de solución, tanto de tipo conjunto, como de tipo puntual. Hablaremos del core, introducido por Gillies en 1953 que proporciona una región de admisibilidad en la que se garantiza el cumplimiento de propiedades como el principio de eficiencia o el de racionalidad coalicional. De tipo puntual abordamos el valor de Shapley, Lloyd Shapley (1953), que es el concepto de solución más utilizado dentro de los juegos cooperativos de utilidad transferible, y el Nucleolo, Schmeidler (1969), compararemos sus propiedades y veremos que bajo determinados axiomas estos podrían estar a su vez contenidos dentro del core.

En el tercer capítulo estudiamos el origen de las situaciones secuenciales y modelamos los correspondientes juegos. Una situación secuencial consiste en la realización de una serie de tareas en una máquina que en un principio vienen dadas en un orden inicial. Vemos que el cambiar la posición de las tareas puede producir reducciones en el coste asociado al orden inicial.

Aplicaremos aquí la teoría presentada a lo que podríamos considerar un problema real. Se basa en discutir los costes originados por los retrasos en la ejecución de una serie de pedidos de cuatro compañías del sector de la telefonía móvil. El origen de la secuencia tiene lugar por la paralización de las fabricas chinas debido a la crisis del Covid-19 y nosotros trataremos, no solo de buscar la situación más beneficiosa para el conjunto de los jugadores, es decir, el orden que genera menores gastos totales a la hora de procesar los pedidos, sino también de proponer un reparto justo de los beneficios obtenidos tras la cooperación de los jugadores. Esta segunda parte, el reparto de beneficios, es considerada por muchos de los estudiosos en la materia como el gran problema de la Teoría de Juegos Cooperativos.

En el capítulo 4 analizamos una variación de los Juegos secuenciales, los juegos secuenciales con jugador "target" y explicaremos las nuevas restricciones que tiene asociado el modelo. Adaptaremos el problema del capítulo anterior y lo analizaremos de nuevo desde el punto de vista cooperativo con el objetivo de volver a obtener la situación más beneficiosa posible para todos los jugadores y un reparto de los beneficios que sea considerado válido por todos ellos.

# 2 TEORÍA DE JUEGOS COOPERATIVOS

## 2.1. Juegos Cooperativos

Los Juegos Cooperativos se caracterizan por el hecho de que a los jugadores les está permitido cooperar y tomar acuerdos vinculantes previos al juego, como la formación de coaliciones, que tienen el objetivo de obtener el mayor beneficio posible. Este beneficio será después repartido entre los miembros de la coalición, es lo que llamamos pago de la coalición, que dependerá de los jugadores que la han formado. En el caso de que cualquier pago entre los jugadores sea posible, hablamos de un juego de Utilidad Transferible o de forma abreviada juego UT.

**Definición 1.** Un **juego cooperativo de utilidad transferible** está descrito por el par $(N, v)$ donde el número de jugadores $N = \{1, 2, ..., n\}$ representa un conjunto finito y $v$ es una función característica del juego de la forma $v$: $2^N \rightarrow \mathbb{R}$ que asocia a cada subconjunto de jugadores $S$ de $N$, o coalición, un número real $v(S)$ siendo este el valor de la coalición. La única restricción hasta el momento para la función característica será $v(\emptyset) = 0$, esto es, el valor de la coalición formada por el subconjunto vacío deberá ser nulo.

**Ejemplo 1.** Tres agricultores de la misma provincia han decidido poner en marcha una almazara, planta para obtener el aceite de oliva, para no tener que incurrir en gastos de alquiler al llevar sus aceitunas a instalaciones de terceros. Los tres barajan la posibilidad de no realizar tres plantas, sino cooperar entre ellos. Tras un estudio de costes, este es el resultado:

| **COALICIÓN** | {1} | {2} | {3} | {12} | {13} | {23} | {123} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **COSTE** | 100 | 100 | 100 | 200 | 200 | 200 | 240 |

Tabla 1

Es una situación modelable mediante un juego cooperativo UT $(N, v)$, donde $N = \{123\}$ y la función característica $v$ viene expresada por:

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{12\}) = 0, v(\{13\}) = 0, v(\{23\}) = 0; v(\{123\}) = 60.$$

Donde $v$ no representa el gasto, sino al ahorro que conseguirían compartiendo la planta respecto al coste que tendría cada planta individual.

Es sencillo comprobar que la única situación que beneficia a los agricultores es la de formar una coalición los 3, de forma que ahorrarían un total de 60 u.m.. Además, parece justo que para la realización de la obra cada uno pagara lo mismo, 80 u.m., pero veremos que no siempre será tan sencillo el reparto de los beneficios entre los jugadores.

**Ejemplo 2.** Considerando el mismo caso expuesto en el ejemplo anterior, pero teniendo en cuenta que las peculiaridades de cada finca y las dificultades para construir, hacen que el coste de cada planta por separado no sea el mismo, quedan los costes de la siguiente tabla.

| **COALICIÓN** | {1} | {2} | {3} | {12} | {13} | {23} | {123} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **COSTE** | 100 | 110 | 140 | 210 | 216 | 240 | 320 |

Tabla 2

En este caso, la función característica $v$ viene expresada por:

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{12\}) = 0,\ v(\{13\}) = 24,\ v(\{23\}) = 10;\ v(\{123\}) = 30.$$

Parece ser evidente, en un primer momento, que lo más beneficioso sería que los tres agricultores cooperaran y obtuvieran de esta forma un beneficio de 30. Ahora bien, ¿cómo debe ser repartido ese beneficio? ¿a partes iguales?, ¿por qué deberían entonces cooperar 1 y 3 con 2 para obtener un beneficio de 10 cada uno cuando formando coalición ellos dos solos obtienen un beneficio de 24 equivalente a 12 para cada uno? En este caso el jugador 2 se vería obligado a construir su propia almazara no obteniendo beneficio alguno, ¿Es conveniente para el agricultor 2 ceder en el reparto de beneficios para satisfacer a 1 y 3, para así poder obtener él algo de beneficio? Vemos en este sencillo ejemplo que la mayor dificultad de este tipo de juegos es el reparto de beneficios entre los miembros de la coalición.

Existe una gran variedad de juegos cooperativos según las propiedades que deba cumplir la función característica $v$ del correspondiente juego cooperativo $(N, v)$, que cualificarán y darán nombre al mismo.

**Definición 2.** Se dice que un juego $(N, v)$ es **monótono** si para cualesquiera coaliciones $S, T \subseteq N$, con $S \subseteq T$, se verifica que

$$v(S) \leq v(T).$$

En otras palabras, hablamos de juego cooperativo monótono cuando al crecer el número de jugadores que forman una coalición el beneficio que obtiene no disminuye. No hay jugadores que resten beneficios. Esta propiedad fomenta la cooperación y se debe cumplir en la mayoría de las aplicaciones de la Teoría de Juegos.

**Definición 3.** Se dice que un juego $(N, v)$ es **superaditivo** si para cualesquiera coaliciones disjuntas que puedan formarse, $S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$, se verifica que

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T).$$

Es decir, si dos coaliciones $S$ y $T$ disjuntas deciden unirse y formar una coalición mayor, el beneficio será mayor o igual que la suma de los beneficios de cada una de ellas de manera independiente, pero no disminuirá.

Si la desigualdad anterior se da en sentido opuesto, decimos que el juego es **subaditivo**, de manera que la suma del beneficio que obtienen las coaliciones disjuntas será igual o superior a la que obtendrían los dos subconjuntos formando uno solo:

$$v(S) + v(T) \geq v(S \cup T).$$

**Definición 4.** Un juego $(N, v)$ será **convexo** si para cualesquiera coaliciones $S, T \subseteq N$ se verifica que

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T).$$

Analogamente si la desigualdad se da en el sentido opuesto diremos que el juego es **cóncavo**. Es decir, un juego es cóncavo si

$$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T) - v(S \cap T).$$

**Definición 5**. Tenemos que un juego $(N, v)$ es **0-normalizado** si se cumple que

$$v(\{i\}) = 0, \text{ para todo jugador } i \in N.$$

Es visible por tanto que en los juegos de este tipo los jugadores se ven obligados a cooperar ya que solos obtendrán un beneficio nulo.

**Definición 6**. Se dice que un juego $(N, v)$ es **(0,1)-normalizado** si se verifica que

$$v(\{i\}) = 0, \text{ para todo jugador } i \in N \quad \text{y} \quad v(N) = 1.$$

**Definición 7**. Un juego $(N, v)$ será **simple** si es monótono y $v(S)$ solo toma valores en el conjunto $\{0,1\}$, para cualquier coalición $S \subseteq N$.

**Definición 8.** Un juego $(N, v)$ simple será **propio** si no existen coaliciones $S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$, que verifiquen $v(S) = v(T) = 1$.

Denotamos por $\Gamma^N$ al conjunto de todos los juegos de utilidad transferible sobre $N$; es decir,

$$\Gamma^N = \{(N, v): v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}, v(\emptyset) = 0\}.$$

En este conjunto $\Gamma^N$ se introducen las operaciones suma y producto por un escalar dadas por

$$+ : \Gamma^N \times \Gamma^N \rightarrow \Gamma^N$$

$$\bullet : \mathbb{R} \times \Gamma^N \rightarrow \Gamma^N$$

donde para cualquier $S \subseteq N$

$$(v + w)(S) = v(S) + w(S)$$

$$(\alpha \bullet v)(S) = \alpha \bullet v(S).$$

Con respecto a dichas operaciones, que están definidas para cualquier $S \subseteq N$, sabemos que la terna $(\Gamma^N, +, \bullet)$ constituye un espacio vectorial $(2^n - 1)$-dimensional.

Los juegos de **unanimidad** y los juegos de **identidad** son dos familias dentro de los juegos cooperativos UT que son de especial importancia, y que forman una base dentro de dicho espacio vectorial.

Por un lado, la base de los juegos de unanimidad está constituida por el conjunto

$$\{u_T \in \Gamma^N : T \subseteq N, T \neq \emptyset\},$$

siendo, para cada $S \subseteq N$, $u_T(S)$ definido por

$$u_T(S) = \begin{cases} 1, \text{ si } T \subseteq S, \\ 0, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Por otro lado, los juegos de identidad forman la siguiente base

$$\{\delta_T \in \Gamma^N : T \subseteq N,\ T \neq \emptyset\},$$

y están definidos para cada $S \subseteq N$, por

$$\delta_T(S) = \begin{cases} 1, \text{ si } S = T, \\ 0, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Como ya dijimos anteriormente, los juegos UT se caracterizan por aceptar cualquier reparto del beneficio posible, por eso uno de los objetivos al analizar este tipo de juegos podría ser el estudio de las estrategias que deben tomar los jugadores participantes y conocer el beneficio que obtendría un jugador si formase coalición con otros jugadores. Sin embargo, ese objetivo es demasiado ambicioso para cualquier juego que pretenda modelar un problema real ya que habría que definir toda relación y afinidad de cada jugador con el resto.

**Definición 9.** El **vector de pagos** es una de las formas de representar el reparto del pago total $v(N)$ entre los jugadores. Dicho vector viene dado por una función $x$ que a cada jugador del conjunto $N$ asigna un número real que equivale al pago que dicho jugador obtendrá en el juego. Tiene la forma $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ siendo $x_i$ el pago del jugador $i$.

Existen una serie de restricciones lógicas para el vector de pagos cuando modelamos problemas reales mediante juegos cooperativos UT.

- El **principio de racionalidad individual** impone que, para que los jugadores acepten la distribución de beneficios propuesta por el vector de pagos, deben recibir un pago superior al que recibirían si jugasen solos:

$$x_i \geq v(\{i\}), \text{ para todo jugador } i = 1, 2, \ldots, n.$$

- Análogamente, una coalición o conjunto de jugadores que pudiese obtener un pago cooperando, también exigirá de un vector de pagos un beneficio mayor al que obtendría formando la coalición. Es lo que llamamos **principio de racionalidad de grupo** o de **optimalidad de Pareto**:

$$\sum_{i \in S} x_i = x(S) \geq v(S).$$

- Por último, si todos los jugadores llegasen a un acuerdo, formando la gran coalición $N$ con beneficio total $v(N)$, tenemos que el vector de pagos de la forma $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ cumplirá el **principio de eficiencia** si el beneficio total es completamente repartido entre los jugadores:

$$\sum_{i \in S} x_i = v(N).$$

**Definición 10.** Llamamos **vectores de pago eficientes** o **preimputaciones** para el juego $(N, v)$ al conjunto de vectores $x \in \mathbb{R}^n$ que cumplen el principio de eficiencia. Podemos definir el conjunto de preimputaciones de un juego $(N, v)$ de la siguiente forma

$$PI(N, v) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N)\}, \text{ con } x(N) = \sum_{i \in N} x_i.$$

Si además de este principio imponemos que los vectores de pago cumplan el de individualidad racional, obtenemos el conjunto de **imputaciones** de un juego $(N, v)$.

$$\begin{aligned} I(N, v) &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in PI(N, v): x_i \geq v(\{i\}), \text{ para todo jugador } i = 1, 2, \ldots, n\} \\ &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n: x(N) = v(N), x_i \geq v(\{i\}), \text{ para todo jugador } i = 1, 2, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Diremos que el juego $(N, v)$ es **esencia**l si se verifica que $I(N, v) \neq \emptyset$.

## 2.2. Conceptos de solución en Juegos Cooperativos

Aunque los juegos de Utilidad Transferible se caracterizan por admitir cualquier vector de pagos posible, se suelen imponer a las distintas soluciones una serie de restricciones razonables.

Según las propiedades que se le exigen y los resultados que buscamos obtener existen distintos conceptos de solución que nos proporcionan vectores de pagos admisibles para los jugadores. Diferenciamos dos tipos principalmente.

Los conceptos de solución de tipo conjunto, que proporcionan una región de admisibilidad con distintas soluciones posibles y los conceptos de solución de tipo puntual que proporcionan un único vector de pagos de entre todos los posibles.

En este trabajo tendrán más relevancia, por sus propiedades, el core, el valor de Shapley y el nucleolo.

### 2.2.1 El core

El core de un juego cooperativo $(N, v)$, introducido por Gillies en 1953, es un concepto de solución de tipo conjunto que busca extraer, de entre todas las imputaciones posibles, aquellos vectores de pago que cumplen el principio de eficiencia así como el de racionalidad individual extendido mediante el principio de racionalidad coalicional, que no es más que garantizar a cada coalición que puede formarse sobre $N$ un beneficio mayor o igual al que esta coalición puede conseguir por sí misma.

**Definición 11.** El **core** de un juego $(N, v)$ es el conjunto de vectores de pagos

$$\text{core}\,(N, v) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x(N) = v(N), x(S) \geq v(S), \text{ para toda coalición } S \subseteq N\}.$$

Por tanto, vemos que los elementos del core son aceptables para todas las coaliciones $S \subseteq N$. Por otro lado, sabemos que el core de un juego cooperativo satisface, además, interesantes propiedades matemáticas: es un conjunto cerrado, acotado y convexo.

Existe la posibilidad, para determinados juegos, de que el core sea vacío no pudiendo ofrecer así un vector de pagos con el que todos los jugadores se viesen beneficiados. No obstante, determinadas clases de juegos cooperativos UT, como es el caso de los convexos, garantizan un core no vacío. Es la necesidad de caracterizar los juegos cooperativos con el core no vacío la que impulsa a Shapley (1967) a introducir los conceptos de coaliciones equilibradas y de juego equilibrado.

**Definición 12.** Una colección $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ de subconjuntos de un conjunto $N$, distintos y no vacíos, se dice que es **equilibrada sobre *N*** si existen números positivos, llamados pesos, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ tales que, para todo jugador $i \in N$

$$\sum_{\{j:\, i \in S_j\}} \alpha_j = 1.$$

En este caso, dado un juego $(N, v)$, si para cualquier colección equilibrada sobre $N$, se verifica que

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, v(S_j) \leq v(N),$$

entonces diremos que el juego $(N, v)$ es **equilibrado**.

Fueron Bondavera (1963) y Shapley (1967) los que demostraron que la clase de juegos equilibrados coincide con la clase de juegos con core no vacío.

A continuación, aplicaremos el concepto de core mediante un ejemplo con un conocido y muy ilustrativo juego simple presentado por Shubik (1998).

**Ejemplo 3**. Tres sujetos pueden cooperar en un trabajo para ganar 400 u.m. juntos. Si cooperan los jugadores 1 y 2 ganan 100 u.m., si lo hacen 1 y 3 ganan 200 u.m., y, por último, si cooperan 2 y 3 ganan 300 u.m.

| **COALICIÓN** | {1} | {2} | {3} | {12} | {13} | {23} | {123} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **BENEFICIO** | 0 | 0 | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 |

Tabla 3

Esta situación puede modelarse mediante la siguiente función característica

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$
$$v(\{12\}) = 100,\ v(\{13\}) = 200,\ v(\{23\}) = 300,$$
$$v(\{123\}) = 400.$$

Supongamos que los tres jugadores deciden cooperar juntos para ganar 400 u.m., pero no se ponen de acuerdo en el reparto de beneficios, ¿cuál es la forma en que deben repartirse para que todos la acepten?

El ejemplo propuesto por Shubik vuelve a hacer hincapié en cual es el gran problema de la Teoría de Juegos Cooperativos, el reparto de beneficios. El core es una de las herramientas posibles para la obtención de vectores de pago válidos. En general no nos proporciona una única solución, sino que acotará los valores posibles.

Para determinar esta región de admisibilidad los puntos $(x_1, x_2, x_3)$ deben cumplir las siguientes restricciones

- $x_1 + x_2 + x_3 = 400$, principio de eficiencia.
- $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$, racionalidad individual.
- $x_1 + x_2 \geq 100,\ x_2 + x_3 \geq 300,\ x_1 + x_3 \geq 200$, racionalidad coalicional.

Graficamente las restricciones quedarían así

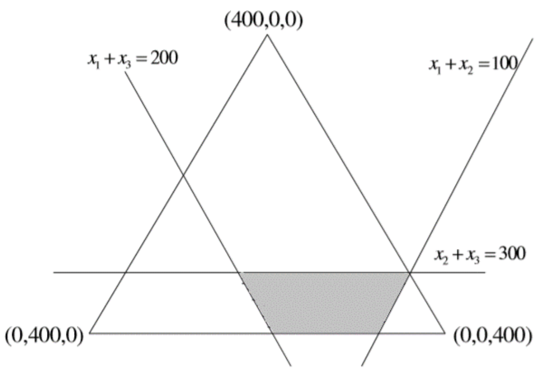


Figura 1

siendo el core la parte sombreada de la ilustración, por tanto, tenemos un core no vacío y no puntual.

Si modificamos el ejemplo con la siguiente función característica

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$
$$v(\{12\}) = 200,\ v(\{13\}) = 300,\ v(\{23\}) = 300,$$
$$v(\{123\}) = 400,$$

los puntos ($x_1, x_2, x_3$) deberían cumplir ahora las siguientes restricciones

- $x_1 + x_2 + x_3 = 400$,
- $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$,
- $x_1 + x_2 \geq 200$,
- $x_2 + x_3 \geq 300$,
- $x_1 + x_3 \geq 300$,

que pueden ser reformuladas como

- $x_1 + x_2 + x_3 = 400$,
- $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$,
- $x_1 + x_2 = 200$,
- $x_2 + x_3 = 300$,
- $x_1 + x_3 = 300$,

deduciendo que tiene como única solución

$$x_1 = 100,\ x_2 = 100 \text{ y } x_3 = 200.$$

Su representación gráfica sería la siguiente

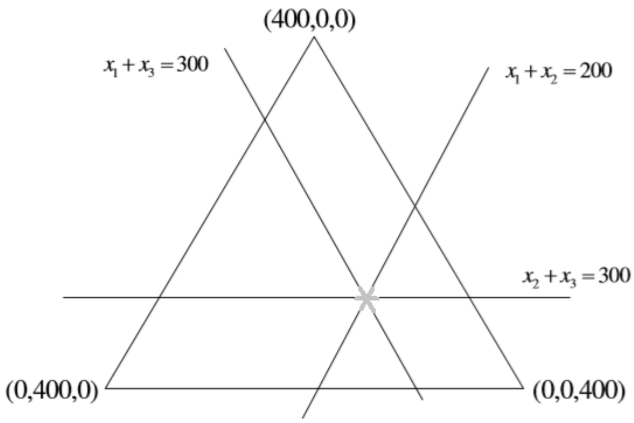


Figura 2

En esta situación, el core es un solo punto del espacio, lo cual se traduce como un único vector de pagos admisible que será el $x = (100, 100, 200)$. Cualquier otra alternativa con pago mayor para algún jugador incumpliría el principio de racionalidad coalicional.

Para visualizar el último caso posible, el de core vacío, realizamos nuevas modificaciones en la función característica

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{12\}) = 300,\ v(\{13\}) = 300,\ v(\{23\}) = 300,$$

$$v(\{123\}) = 400.$$

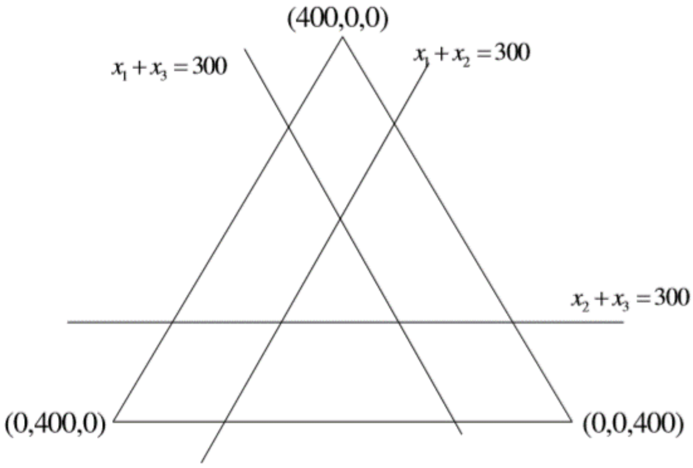


Figura 3

A partir de la representación comprobamos que el core no incluye ningún punto, lo que ya intuíamos analizando la función característica. Las coaliciones formadas por dos jugadores cualesquiera obtienen un beneficio de 300. Dada la simetría entre los jugadores, lo más justo, de formarse la gran coalición *N,* sería repartir los beneficios a partes iguales, es decir, 133.33 u.m. para cada uno. La suma para cualquier coalición de dos jugadores sería 266.66 u.m., que no llega a las 300 u.m. que impone el principio de racionalidad coalicional. El resultado de que no haya reparto posible dentro del core es el core vacío.

Hemos visualizado las tres posibilidades de core, pero reiteramos que la situación más común será la de un core no vacío y no puntual, el cual, no nos señala una solución única, pero nos limita el conjunto de los vectores de pagos que podrían ser solución de nuestro problema.

### 2.2.2 Valor de Shapley y Nucleolo

El core es uno de los conceptos más importantes de la Teoría de Juegos, porque limita el conjunto de soluciones posibles a un conjunto de vectores de pagos que cumplen una serie de restricciones razonables. Sin embargo, en la práctica en muchas ocasiones será más conveniente conocer una solución concreta. Por ello acudimos a distintas reglas de reparto que eligen un único vector de pagos. Por ejemplo, el *nucleolo*, introducido por Schmeidler (1969) o el *valor de Shapley* en honor a su autor Lloyd Shapley (1953).

A continuación, definiremos el concepto de solución de tipo puntual y algunas propiedades que pueden cumplir las distintas soluciones de un juego UT, necesarias para presentar el valor de Shapley y el nucleolo.

**Definición 13.** Una **solución** sobre $\Gamma^N$ es una aplicación de la forma

$$f\colon \Gamma^N \to \mathbb{R}^n,$$

que a cada juego $(N, v) \in \Gamma^N$ le hace corresponder un vector de $\mathbb{R}^n$, donde la componente $i$-ésima del vector representa el pago que recibe el jugador $i \in N$.

**Definición 14.** Una solución $f\colon \Gamma^N \to \mathbb{R}^n$, es **eficiente** si para todo $(N, v) \in \Gamma^N$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\,(N, v) = v(N).$$

**Definición 15.** Una solución $f\colon \Gamma^N \to \mathbb{R}^n$ satisfice la propiedad de **poder total** si para todo juego $(N, v) \in \Gamma^N$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\,(N, v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq N\setminus i} \left[v\,(S \cup \{i\}) - v(S)\right].$$

La propiedad del poder total establece que el pago obtenido por los jugadores es la suma de las medias de las contribuciones marginales de todos los jugadores. Sabemos que si una solución es eficiente no podrá cumplir la propiedad del poder total.

**Definición 16.** Diremos que los jugadores $i, j \in N$ son **simétricos** para un juego $(N, v)$ si, cuando se unen a una coalición $S$, aportan el mismo valor

$$v\,(S \cup \{i\}) = v\,(S \cup \{j\}), \text{ para cualquier coalición } S \subseteq N \setminus \{i, j\}.$$

Una solución $f\colon \Gamma^N \to \mathbb{R}^n$ será **simétrica** si, para todo juego $(N, v) \in \Gamma^N$ y para todo par de jugadores $i, j$ simétricos en $(N, v)$, se tiene que dichos jugadores reciben el mismo pago

$$f_i\,(N, v) = f_j\,(N, v).$$

**Definición 17.** Se dice que $i \in N$ es un **jugador nulo** para un juego $(N, v)$ si no aporta valor alguno a la coalición

$$v\,(S \cup \{i\}) = v\,(S), \text{ para cualquier coalición } S \subseteq N \setminus \{i\}.$$

Una solución $f\colon \Gamma^N \to \mathbb{R}^n$ cumplirá la **propiedad del jugador nulo** si para todo juego $(N, v) \in \Gamma^N$ y para todo jugador $i$ nulo en $(N, v)$, se tiene que $f_i\,(N, v) = 0$.

**Definición 18.** Se dice que una solución $f\colon \Gamma^N \to \mathbb{R}^n$ es **aditiva** si para todo par de juegos $(N, v)$ y $(N, w)$ pertenecientes al conjunto $\Gamma^N$, se tiene que

$$f\,(N, v+w) = f\,(N, v) + f\,(N, w).$$

#### 2.2.2.1 El valor de Shapley

El valor de Shapley es el concepto de solución más utilizado dentro de los juegos cooperativos de utilidad transferible. Lloyd Shapley analizó los juegos cooperativos intentando contestar la siguiente cuestión: dada la función característica de un juego, ¿cuál es el pago esperado para un jugador determinado? En este concepto de solución, se trata de hallar un reparto de pagos único que cumpla una serie de propiedades o axiomas. Demostró que sólo una asignación asumía las cuatro suposiciones que, según el autor, debería cumplir el reparto de pagos óptimo. Es importante destacar que el valor de Shapley es un concepto de solución independiente del core, y al no exigirle que cumpla el principio de racionalidad coalicional, no siempre pertenecerá al core del juego. En el caso de los juegos convexos, el valor de Shapley sí estará contenido en el core. Cuando no cumpla la propiedad de convexidad no podremos asegurar que esté contenido.

**Teorema 1.** La única solución $f$ definida en $\Gamma^N$ que satisface las propiedades de aditividad, jugador nulo, simetría y eficiencia es el valor de Shapley. Dado un juego $(N, v)$, esta solución asigna a cada jugador $i \in N$ el número real:

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{i \in S: \\ S \subseteq N}} q(s)\big(v(S) - v(S \setminus \{i\})\big), \text{ con } q(s) = \frac{(s\text{-}1)!(n\text{-}s)!}{n!},$$

donde $s = |S|$ y $n = |N|$ representan el número de jugadores que hay en las coaliciones $S$ y $N$ respectivamente.

El valor de Shapley tiene distintas interpretaciones, expondremos aquí la que, a nuestro modo de ver, es la más intuitiva. Puede ser interpretado como la contribución marginal esperada de cada jugador al entrar en una coalición al azar. En efecto, el factor $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ es la contribución marginal del jugador $i$ al incorporarse a $S \setminus \{i\}$, mientras que el factor $q(s)$ es la probabilidad de que a $i$ le toque incorporarse precisamente a la coalición $S \setminus \{i\}$ y no a otra. Shapley supuso que el jugador se uniría a una coalición de tamaño $s$, siendo los distintos tamaños equiprobables, y una vez fijado el tamaño, se uniría a una coalición determinada de ese tamaño también de manera equiprobable.

**Ejemplo 4.** Calcularemos el valor de Shapley para el juego definido por Shubik y que usamos para ilustrar el concepto de core en el ejemplo 3. Teníamos $N = \{123\}$ y, en el juego, $v$ venía dado por

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{12\}) = 100, v(\{13\}) = 200, v(\{23\}) = 300,$$

$$v(\{123\}) = 400.$$

El conjunto $2^N$ es

$$2^N = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{12\},\{13\},\{23\},\{123\}\}.$$

Las coaliciones a las que pertenece cada jugador son

$$S(1) = \{\{1\},\{12\},\{13\}\{123\}\}.$$

$$S(2) = \{\{2\},\{12\},\{23\}\{123\}\}.$$

$$S(3) = \{\{3\},\{13\},\{23\}\{123\}\}.$$

Los coeficientes $q(s)$ valdrán

$$q(1) = \frac{0!2!}{3!} = \frac{1}{3},$$

$$q(2) = \frac{1!1!}{3!} = \frac{1}{6},$$

$$q(3) = \frac{0!2!}{3!} = \frac{1}{3},$$

Calculemos ahora el pago esperado a cada jugador.

$$\phi_1(N, v) = q(1)[v(\{1\}) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{12\}) - v(\{2\})] + q(2)[v(\{13\}) - v(\{3\})] + q(3)[v(\{123\}) - v(\{23\})] =$$

$$= \frac{1}{3}[0] + \frac{1}{6}[100] + \frac{1}{6}[200] + \frac{1}{3}[400\text{-}300] = 83.33$$

$$\phi_2(N, v) = q(1)[v(\{2\}) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{12\}) - v(\{1\})] + q(2)[v(\{23\}) - v(\{3\})] + q(3)[v(\{123\}) - v(\{13\})] =$$

$$= \frac{1}{3}[0] + \frac{1}{6}[100] + \frac{1}{6}[300] + \frac{1}{3}[400 - 200] = 133.33$$

$$\phi_3(N, v) = q(1)[v(\{3\}) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{13\}) - v(\{1\})] + q(2)[v(\{23\}) - v(\{2\})] + q(3)[v(\{123\}) - v(\{12\})] =$$

$$= \frac{1}{3}[0] + \frac{1}{6}[200] + \frac{1}{6}[300] + \frac{1}{3}[400 - 100] = 183.33$$

Por tanto, el valor de Shapley para el juego sería

$$\phi(N, v) = (83.33,\ 133.33,\ 183.33).$$

Vemos que cumple la propiedad de eficiencia

$$\sum_{i \in N} \phi_i(N, v) = v(N) = 400.$$

Hemos de señalar que cuando calculamos el valor de Shapley en juegos monótonos, el sumatorio se restringe a coaliciones $S$ con valor no nulo, puesto que las coaliciones con valor nulo siempre tendrán una contribución marginal $[v(S) - v(S \setminus \{i\})]$ igual a cero.

#### 2.2.2.2 Nucleolo

El nucleolo es una regla de reparto que tiene en cuenta la diferencia entre el valor de una coalición de jugadores y el pago que recibirán. Fue introducido por Schmeidler (1969) con el objetivo de encontrar una solución que estuviera contenida dentro del core.

Recordemos que, dado un juego $(N, v)$

$$\text{core}(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } x(N) = v(N) \text{ y } x(S) \geq v(S) \text{ para todo } S \subseteq N\}.$$

**Definición 19.** Para cada imputación $x \in I(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } x(N) = v(N), x_i \geq v(\{i\})\}$ y cada coalición $S$, se define el **exceso del valor de la coalición *S* con respecto a la imputación *x*** como

$$e(S, x) = v(S) - x(S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i.$$

Notemos que, si el exceso es positivo, entonces $v(S) \geq \sum_{i \in S} x_i$ y los miembros de la coalición $S$ no estarán satisfechos con la cantidad total que la coalición $S$ recibe del reparto $x$.

Observamos también que para $S = \emptyset$, el exceso $e(S, x) = 0$ y para $S = N$ el exceso $e(N, x) = v(N) - x(N) = 0$ por el principio de eficiencia. Además, la imputación $x$ pertenecerá al core si y solo si para toda coalición $S$ se tiene que los excesos $e(S, x) \leq 0$.

Si ordenamos los excesos en orden decreciente, obtenemos un vector de $2^N$ componentes,

$$\theta(x) = (e(S, x))_{S \subseteq N}$$

el nucleolo se entiende como el vector que minimiza estos vectores en orden lexicográfico en el sentido siguiente:

Dados dos vectores $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ de $\mathbb{R}^m$, diremos que $\alpha$ es menor que $\beta$ en **el orden lexicográfico**, y lo denotamos por $\alpha <_L \beta$, si $\alpha_k < \beta_k$ siendo $k$ la primera componente que verifica $\alpha_k \neq \beta_k$.

**Ejemplo 5.** Si tenemos dos vectores de la misma longitud como $\alpha = (1, 6, -5, 8, 3)$ y $\beta = (1, 6, -5, 4, 2)$ comparamos sus componentes y la primera en la que no coincidan marcará quien es menor lexicográficamente, en este caso como $4 < 8$ tenemos que $(1, 6, -5, 4, 2) <_L (1, 6, -5, 8, 3)$.

**Definición 20.** Dado un juego $(N, v)$ el nucleolo de $v$, nuc($v$), es el conjunto de imputaciones dado por

$$\text{nuc}(v) = \{x \in I(v) \text{ tal que para todo } y \in I(v) \text{ se tiene } \theta(x) <_L \theta(y)\}.$$

Por tanto, podemos decir que el nucleolo contiene aquellos vectores de pagos que son imputaciones y para los cuales se minimiza la insatisfacción de las coaliciones.

**Teorema 2.** Dado un juego monótono $v$, existe un único vector $z$ perteneciente al nucleolo y, además, si el core es no vacío entonces dicho vector $z \in \text{core}(v)$.

**Ejemplo 6.** Dado un juego $(N, v)$ con $N = \{123\}$ y la siguiente función característica

| ***S*** | {1} | {2} | {3} | {12} | {13} | {23} | *N* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*s*)** | 0 | 0 | 0 | 600 | 600 | 0 | 600 |

Tabla 4

El core de este juego deberá cumplir las siguientes restricciones

- $x_1 + x_2 + x_3 = v(N) = 600$
- $x_1 \geq v(1) = 0$
- $x_2 \geq v(2) = 0$
- $x_3 \geq v(3) = 0$
- $x_1 + x_2 \geq v(12) = 600$
- $x_1 + x_3 \geq v(13) = 600$
- $x_2 + x_3 \geq v(23) = 0$

Si representamos gráficamente estas restricciones obtendríamos lo siguiente

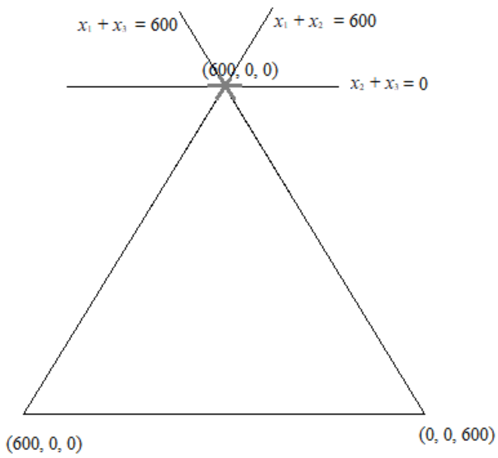


Figura 4

Por tanto, el core está formado por un vector, el (600, 0, 0).

Como el core es no vacío y $v$ es monótono, se tiene que el nucleolo es único y que está dentro del core.

El nucleolo será, por tanto, nuc($v$)= (600, 0, 0).

Como curiosidad, el valor de Shapley para este juego es $\phi(N, v) = (400, 100, 100)$. Este ejemplo ilustra cómo el valor de Shapley no tiene porqué pertenecer al core.

**Ejemplo 7.** Dado un juego $(N, v)$ con $N = \{123\}$ y la siguiente función característica

| ***S*** | {1} | {2} | {3} | {12} | {13} | {23} | *N* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*s*)** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabla 5

Para este ejemplo $v$ vuelve a ser monótono, por lo que el nucleolo será único.

Observamos las restricciones que debe cumplir para poder hacernos una idea de como será el core

- $x_1 + x_2 + x_3 = v(N) = 1$,
- $x_1 \geq v(1) = 0$,
- $x_2 \geq v(2) = 0$,
- $x_3 \geq v(3) = 0$,
- $x_1 + x_2 \geq v(12) = 1$,
- $x_1 + x_3 \geq v(13) = 1$,
- $x_2 + x_3 \geq v(23) = 1$.

Para el cálculo del nucleolo tenemos que encontrar la imputación $x \in I(v)$ ( $x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_i \geq 0$) que minimice los excesos $e(S, x) = v(S) - x(S)$

$S = \emptyset$ $\quad e(\emptyset,x) = 0$,

$S = \{1\}$ $\quad e(1, x) = -x_1$,

$S = \{2\}$ $\quad e(2, x) = -x_2$,

$S = \{3\}$ $\quad e(3, x) = -x_3$,

$S = \{12\}$ $\quad e(12, x) = v(12) - x_1 - x_2 = 1 - x_1 - x_2 = x_3$,

$S = \{13\}$ $\quad e(13, x) = v(13) - x_1 - x_3 = 1 - x_1 - x_3 = x_2$,

$S = \{23\}$ $\quad e(23, x) = v(23) - x_2 - x_3 = 1 - x_2 - x_3 = x_1$,

$S = \{123\}$ $\quad e(N, x) = 0$.

Si suponemos que $x_1 \geq x_2 \geq x_3$, entonces, ordenando decrecientemente, nos queda

$$\theta(x) = (x_1, x_2, x_3, 0, -x_3, -x_2, -x_1).$$

Veremos que $\text{nuc}(v) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

En efecto, si llamamos $z = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, tenenos que $z$ es una imputación $z \in I(v)$, y los excesos asociados a $z$ son

$e(S, z) = v(S) - z(S)$

$S = \emptyset \qquad e(\emptyset, z) = 0,$

$S = \{1\} \qquad e(1, z) = -\frac{1}{3},$

$S = \{2\} \qquad e(2, z) = -\frac{1}{3},$

$S = \{3\} \qquad e(3, z) = -\frac{1}{3},$

$S = \{12\} \qquad e(12, z) = \frac{1}{3},$

$S = \{13\} \qquad e(13, z) = \frac{1}{3},$

$S = \{23\} \qquad e(23, z) = \frac{1}{3},$

$S = \{123\} \quad e(N, z) = 0,$

$$\theta(z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Comprobaremos que para todo $x \in I(v)$ se tiene que $\theta(z) <_L \theta(x)$, esto es,

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) <_L (x_1, x_2, x_3, 0, -x_3, -x_2, -x_1)$$

- Si fuera $x_1 < \frac{1}{3}$, entonces como $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ debería tenerse que ó $x_2 > \frac{1}{3}$ ó $x_3 > \frac{1}{3}$, pero ninguna de las dos es posible porque se debe cumplir que $x_1 \geq x_2 \geq x_3$

  Por tanto, solo puede tenerse que $x_1 \geq \frac{1}{3}$.

- Si $x_1 > \frac{1}{3}$, entonces ya tendríamos $\theta(z) <_L \theta(x)$ como queríamos demostrar.

- Si tuviéramos $x_1 = \frac{1}{3}$, entonces tendríamos que analizar $x_2$.

  - Si $x_2 < \frac{1}{3}$, entonces como $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ y $x_1 = \frac{1}{3}$; debería tenerse que $x_3 > \frac{1}{3}$, pero sabemos que no es posible porque $x_1 \geq x_2 \geq x_3$.

    Por tanto, debe ser $x_2 \geq \frac{1}{3}$.

  - Si $x_2 > \frac{1}{3}$ ya tendríamos de manera automática que $\theta(z) <_L \theta(x)$, como buscábamos demostrar.

  - Si $x_2 = \frac{1}{3}$ entonces como $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ se debería tener $x_3 = \frac{1}{3}$ y así también quedaría que $\theta(z) <_L \theta(x)$.

# 3 JUEGOS SECUENCIALES

## 3.1 Situaciones secuenciales

Las situaciones secuenciales son aquellas en las que una sucesión de trabajos debe ser procesada, ya sea por una máquina, una persona o un equipo. Una situación secuencial con una máquina viene definida por la siguiente tupla $s = (N, \sigma_0, p, \alpha)$, donde $N = \{1, 2, ..., n\}$ es el conjunto finito y no vacío de jugadores que tienen un trabajo para procesar, es necesario aclarar que la máquina solo puede realizar un trabajo por vez, lo que motiva la formación de colas. El símbolo $\sigma$ representa un ordenamiento posible de los jugadores, llevará subíndice 0 cuando se trate del ordenamiento inicial y el conjunto de todas las ordenaciones posibles para $N$ jugadores estará definido por $\Pi(N)$, siendo claro que $\sigma_0 \in \Pi(N)$. El elemento $p$ es un vector cuyas coordenadas representan el tiempo que cada trabajo necesita para ser procesado, por lo que deben ser números positivos $p_i > 0$. Llamaremos tiempo de término, que denotamos como $C_i(\sigma)$, al tiempo total necesario para acabar un trabajo según el orden en cuestión $\sigma$. Además, cada jugador pierde una cierta cantidad monetaria por su trabajo, llamado coste $c_i$, que depende del tiempo de término $C_i(\sigma)$ y de un coeficiente $\alpha_i$ distinto de cero. Los costes, por tanto, pueden venir descritos por una función $c_i : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ con $c_i = \alpha_i C_i(\sigma)$. El conjunto de todas las situaciones secuenciales para $N$ jugadores lo denotamos como $SEQ^N$.

**Definición 21.** Dada una situación secuencial de la forma $s = (N, \sigma_0, p, \alpha)$ se definen los **costes totales** asociados a un orden $\sigma$ como

$$TC(\sigma) = \sum_{i \in N} \alpha_i C_i(\sigma).$$

El conjunto de todas las situaciones secuenciales para un grupo de jugadores $N$ lo denotamos por $SEQ^N$. En el siguiente ejemplo analizaremos, para una situación sencilla, dos órdenes $\sigma$ y veremos que modificar el orden inicial puede abaratar los costes.

**Ejemplo 8.** En el siguiente ejemplo consideramos tres clientes, Pablo, Emilia y Ana, que quieren contratar a un arquitecto. A día de hoy, el profesional está muy ocupado, por lo que los clientes tendrán que esperar un cierto tiempo hasta que esté disponible. En la siguiente tabla se resume la situación presentando el orden en que cada uno está planificado, así como el tiempo que necesita el arquitecto para cada cliente y las pérdidas de cada jugador debido al tiempo de espera.

| Jugador | Pablo | Emilia | Ana |
|---|---|---|---|
| $i$ | 1 | 2 | 3 |
| $p_i$ | 2 | 4 | 1 |
| $\alpha_i$ (€) | 2.000 | 1.000 | 3.000 |

Tabla 6

El orden inicial acarrea unas pérdidas de 4000€ para Pablo, 6000€ para Emilia y 21000€ para Ana. Si Emilia y Ana se intercambiaran, las pérdidas de Ana serían tan solo de 9000€, mientras que las de Emilia pasarían a ser de 7000€, es decir, mayores que las que tenía en el orden inicial. Ahora bien, si consideramos los costes totales vemos que han disminuido en 11000€, por lo que, si Ana pagara 5500€ a Emilia de forma que los costes ahorrados se repartieran equitativamente, ambas estarían satisfechas.

Smith descubrió en 1956 el orden óptimo de los productos por el que se minimizan los costes totales, llamado *orden de Smith*. Este orden $\hat{\sigma} \in \Pi(N)$ se caracteriza por situar a los jugadores de forma decreciente según su *urgencia* $u_i = \frac{\alpha_i}{p_i}$, que es el cociente entre los coeficientes de los costes de cada trabajo y el tiempo de procesar dicho trabajo. Más concretamente, dada una situación secuencial $s \in SEQ^N$, con $\sigma_0 \in \Pi(N)$ se puede comprobar que $TC(\hat{\sigma}) \leq TC(\sigma)$ para todo $\sigma \in \Pi(N)$ si y solo si $u_{\hat{\sigma}(k)} \geq u_{\hat{\sigma}(k+1)}$ para todo $k \in \{1, ..., n-1\}$.

En el siguiente ejemplo aplicamos este resultado al caso que acabamos de ver.

**Ejemplo 9.** Las urgencias de Pablo, Emilia y Ana son $u_1 = 1.000$, $u_2 = 250$, y $u_3 = 3.000$. Esto implica que en el orden óptimo sería Ana la primera en contratar al arquitecto. Después de Ana, sería Pablo, y por último el arquitecto atendería a Emilia. Tendríamos, según Smith, que el orden óptimo se corresponde con $\hat{\sigma} = (312)$.

**Definición 22.** Dada una situación secuencial de la forma $s = (N, \sigma_0, p, \alpha)$ llamamos **vecinos mal posicionados** a aquellos que no están ordenados según el orden de Smith, es decir, en urgencia decreciente. Los vecinos mal posicionados con respecto al orden inicial $\sigma_0 \in \Pi(N)$ se definen

$$MP(\sigma_0) = \{(i,j) \in N\text{x}N \mid \sigma_0^{-1}(i) < \sigma_0^{-1}(j) \text{ y } u_i < u_j\},$$

esto es, el conjunto de pares de jugadores vecinos $(i, j)$ tales que el jugador $i$ está por delante del jugador $j$ siendo la urgencia del jugador $i$ menor que la del $j$.

**Definición 23.** Dado un intercambio de vecinos mal posicionados llamamos **ganancia** $g_{ij} = p_i\alpha_j - p_j\alpha_i$ a la diferencia económica propiciada por dicho intercambio. Cuando realizamos todos los intercambios necesarios para llegar al orden óptimo y sumamos todas las ganancias obtenemos el **ahorro máximo total**

$$TC(\sigma_0) - TC(\hat{\sigma}) = \sum_{(i,j) \in MP(\sigma_0)} g_{ij}.$$

Según las conclusiones alcanzadas en los ejemplos 8 y 9 el ahorro máximo total obtenido sería

$$TC(\sigma_0) - TC(\hat{\sigma}) = 31.000 - 16.000 = 15.000.$$

## 3.2 Juegos Secuenciales

Una vez introducidas las situaciones secuenciales, pasaremos a modelarlas a través de los juegos secuenciales y y presentaremos algunas de sus propiedades.

Ya hemos visto, en el apartado anterior, que el orden óptimo puede ser hallado comparando urgencias con el objetivo de minimizar costes o maximizar ahorros. Ahora profundizaremos, también, en el valor de cada coalición, ya que no todas generan las mismas ganancias y plantearemos una forma de repartir estos beneficios.

En primer lugar, asumiremos que los jugadores de una coalición $S \subset N$ pueden establecer acuerdos vinculantes previos al juego que generen ciertos beneficios. En segundo lugar, no queremos que los jugadores ajenos a la coalición $S$ influencien el comportamiento de los miembros de dicha coalición, ni al revés.

**Definición 24.** Teniendo en cuenta las dos proposiciones anteriores definimos el **conjunto de órdenes admisibles** asociados a una coalición $S$ como

$$\mathcal{A}(S) = \{\sigma \in \Pi(N) \mid \{j \in N \mid \sigma_0^{-1}(j) < \sigma_0^{-1}(i)\} = \{j \in N \mid \sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)\} \text{ para todo } i \in N \setminus S\}.$$

Lo que quiere decir que si un jugador $i$ no participa en la coalición $S$ no debe ver alterada su condición con las distintas permutaciones admisibles. El conjunto de jugadores precedentes al i-ésimo debe ser el mismo que al principio, aunque intercambien su orden.

**Definición 25.** Para una situación secuencial $s \in SEQ^N$ se define el **juego secuencial $v^s$** $\in \Gamma^N$ como

$$v^s(S) = \max_{\sigma \in \mathcal{A}(S)} (TC(\sigma_0) - TC(\sigma)) = \max_{\sigma \in \mathcal{A}(S)} \sum_{i \in S} (\alpha_i C_i(\sigma_0) - \alpha_i C_i(\sigma)) \text{ para cada coalición } S \subset N,$$

función que representa el máximo ahorro de una coalición $S$ con respecto a las reordenaciones admisibles.

**Ejemplo 10.** Para calcular los valores del correspondiente juego secuencial del ejemplo anterior, todas y cada una de las coaliciones debe ser considerada de forma independiente.

En primer lugar, respecto a las coaliciones de un único jugador $S = \{1\}$, $S = \{2\}$ y $S = \{3\}$ sabemos, por definición que su valor será nulo.

Por tanto, empezaremos con el estudio de la coalición $S = \{12\}$. Esta coalición sí admite más de un orden admisible, ya que los jugadores 1 y 2 están uno al lado del otro en el orden inicial $\sigma_0 = (123)$ y, por ese motivo, podrán ser permutados sin afectar para nada la posición del jugador 3 que es el que no está en la coalición. Para la coalición $\{12\}$ los órdenes admisibles son $\sigma_0 = (123)$ y $\sigma = (213)$, esto nos da como resultado

$$v^s(\{12\}) = \max \{0, -6.000\} = 0,$$

lo que nos indica que la permutación de los jugadores 1 y 2 no genera ningún ahorro.

Para la coalición $S = \{13\}$ solo es admisible el orden inicial $\sigma_0 = (123)$ ya que los jugadores 1 y 3 no son contiguos en $\sigma_0$. Para esclarecer esta cuestión aplicaremos las definiciones anteriores de forma explícita. La definición nos dice que debemos considerar a todos los jugadores $i \in N \setminus S$, es decir, los que están presentes en el juego, pero no en la coalición $S$, en nuestro caso el jugador $i = 2$. El conjunto $\{j \in N \mid \sigma_0^{-1}(j) < \sigma_0^{-1}(i)\}$ contiene a los jugadores que ocupan posiciones anteriores al jugador 2, que en este ejemplo será únicamente el jugador $j = 1$. Como en el nuevo ordenamiento los jugadores que se encontraban antes que el 2 deben seguir siendo los mismos, la única ordenación posible es la inicial, con el jugador 1 delante del 2. Por tanto, $\mathcal{A}(\{13\}) = \sigma_0$ y $v^s(\{13\}) = 0$.

La coalición $S = \{23\}$ vuelve a ofrecer dos ordenamientos posibles y un valor $v^s(\{23\}) = 11.000$.

Cuando consideramos la gran coalición, todos los ordenamientos $\sigma \in \Pi(N)$ son admisibles, por lo que buscaremos el que conlleve menores costes, que resulta ser $\hat{\sigma} = (312)$ con un valor $v^s(N) = 15.000$. En la siguiente tabla exponemos los resultados del ejemplo a modo de resumen.

| $S$ | $\emptyset$ | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{3\}$ | $\{12\}$ | $\{13\}$ | $\{23\}$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v^s(S)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 11.000 | 15.000 |

Tabla 7

De aquí deducimos que el máximo ahorro se consigue si pactan los tres.

Existen otras formas de representación de la función característica para situaciones secuenciales, una de ellas es fijándonos en la reordenación de trabajos a través de las componentes conexas maximales.

**Definición 26.** Una coalición $T \subset N$ se llama **conexa** según un determinado ordenamiento $\sigma_0$ si dados dos jugadores cualesquiera de $T$, el resto de los jugadores que están entre ellos en el ordenamiento inicial $\sigma_0$ también forman parte de la coalición $T$.

$$\text{Si } \sigma_0(k) \in T \text{ y } \sigma_0(l) \in T \text{ con } k < l \text{ entonces } \{\sigma_0(k+1) \ldots \sigma_0(l-1)\} \in T.$$

Una coalición conexa $T \subset S$ se llama **componente conexa maximal** de $S$ si no existe otra coalición conexa en $S$ que contenga a $T$.

La relación entre componentes conexas maximales y reordenaciones posibles es clara: el conjunto de reordenaciones admisibles tiene en cuenta la posición de los jugadores que tienen permitido intercambiarse y, de hecho, esto solo es posible entre las componentes conexas maximales de $S$. La división de $S$ en componentes se expresa como $S/\sigma_0$. Tenemos entonces que

$$v^s(S) = \sum_{T \in S/\sigma_0} v^s(T) \text{ para cada } S \subset N.$$

Y para toda coalición conexa $T \subset N$ tenemos que

$$v^s(T) = \sum_{\substack{i, j \in T: \\ (i, j) \in MP(\sigma_0)}} g_{ij}.$$

También podemos expresarlo en términos de juegos de unanimidad, presentados en el capítulo anterior. Si denotamos $\{i, \ldots, j\}$ como el conjunto de todos los jugadores que en el orden inicial se encuentran entre la posición del jugador $i$ y la posición del jugador $j$ se tiene que $v^s$ viene dado por la siguiente expresión

$$v^s = \sum_{(i, j) \in MP(\sigma_0)} g_{ij}\, u_{\{i, \ldots, j\}}.$$

**Ejemplo 11.** Es posible calcular los valores del juego secuencial del ejemplo 9 haciendo uso de la ecuación en términos de juegos de unanimidad, aunque ya obtuvimos los valores en el ejemplo 10, es conveniente conocer el funcionamiento de la ecuación.

Del ejemplo 10 concluimos que $g_{13} = 4.000$ y $g_{23} = 11.000$. Como el conjunto de jugadores mal posicionados era igual a $MP(\sigma_0) = \{(13), (23)\}$ deducimos rápidamente que $v^s(\{1\}) = v^s(\{2\}) = v^s(\{3\}) = v^s(\{12\}) = 0$. La coalición $S = \{13\}$ también tendrá valor nulo, porque $v^s(\{13\}) = 4.000 \cdot u_{\{123\}}(\{13\}) = 0$.

Para la coalición $S = \{23\}$, tenemos que $v^s(\{23\}) = 11000 \cdot u_{\{23\}}(\{23\}) = 11.000$. Ya que la coalición estudiada realiza permutaciones admisibles dentro de $N$.

Por último, el valor de la gran coalición será igual a $v^s(N) = 4.000 + 11.000 = 15.000$. En efecto obtenemos los mismos resultados que en el ejemplo anterior.

Entre las propiedades de los juegos secuenciales caben destacar las siguientes:

- Monotonía y superaditividad, porque coaliciones mayores permiten más permutaciones entre jugadores, lo que incrementará su valor. Si, por ejemplo, es preferible que los jugadores 1 y 2 se intercambien cuando miramos la coalición $S = \{12\}$, cuando estudiamos la coalición $S' = \{123\}$ también lo harán. Además, en el último caso, habrá mas permutaciones admisibles que aumentarán el valor de $S'$.
- Convexidad, se puede demostrar [5] que todos los juegos secuenciales son convexos, lo que matemáticamente expresamos de la siguiente manera para un juego UT

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T) \text{ para todo } i \in N \text{ y } S \subset T \subset N \setminus \{i\}.$$

Al ser juegos convexos, tendremos que su core es no vacío y, por ello, son también juegos equilibrados.

**Ejemplo 12.** Para el caso en que tenemos $N = \{123\}$, el juego secuencial asociado a una situación secuencial genérica $s \in SEQ^N$ actúa según indica la siguiente tabla

| $S$ | $\emptyset$ | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{3\}$ | $\{12\}$ | $\{13\}$ | $\{23\}$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v^s(S)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $a$ | 0 | $b$ | $c$ |

Tabla 8

donde se cumple que $0 \leq a \leq c$, $0 \leq b \leq c$ y $0 \leq a + b \leq c$.

Más aún, si $a > 0$ y $b > 0$ entonces, $a + b < c$.

Con ella se puede apreciar de manera automática la monotonía, superaditividad y convexidad del juego $v^s$.

## 3.3 Regla de división de ganancias igualitaria EGS

En el capítulo 2 presentamos distintos conceptos de solución, tanto de tipo puntual como de tipo conjunto, caracterizaremos ahora otra alternativa para el reparto de ganancias con gran aplicación en los juegos secuenciales, la regla de división de ganancias igualitaria, del inglés *Equal Game Splitting.*

**Definición 27.** Una **regla de reparto** para una situación secuencial es una función $f$: $SEQ^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ que reparte los ahorros totales entre los jugadores. Por tanto, una regla de reparto siempre cumple la propiedad de eficiencia.

Parece que una manera justa de repartir los ahorros totales podría ser repartir equitativamente la ganancia $g_{ij}$ entre los dos jugadores $i$ y $j$ que intervienen en cada intercambio, y es así porque dicha ganancia $g_{ij}$ depende únicamente de esos dos jugadores, ya que el resto no intervienen. Esto es exactamente lo que propone la **regla de división de ganancias igualitaria** (*EGS*), que a cada situación secuencial $s$ asigna el reparto $EGS(s)$ dado por

$$EGS_i(s) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j \in N: \\ (i,j) \in MP(\sigma_0)}} g_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j \in N: \\ (j,i) \in MP(\sigma_0)}} g_{ji}, \text{ para todo jugador } i \in N.$$

Sabemos que la regla *EGS* está contenida en el core del juego secuencial asociado a la correspondiente situación secuencial *s*, lo cual fue probado por Curiel (1989) y que se basa en la propiedad de convexidad que cumplen los juegos secuenciales.

A continuación, daremos dos propiedades que la regla *EGS* cumple, la propiedad de *equivalencia* y de *intercambio*.

**Definición 28.** Una regla de reparto *f* para situaciones secuenciales tiene la **propiedad de equivalencia** si para dos situaciones secuenciales $(N, \sigma_1, p, \alpha)$ y $(N, \sigma_2, p, \alpha)$, que verifiquen que los predecesores del jugador *i* son los mismos en ambas, esto es,

$$\{k \in N \mid \sigma_1^{-1}(k) < \sigma_1^{-1}(i)\} = \{k \in N \mid \sigma_2^{-1}(k) < \sigma_2^{-1}(i)\},$$

se tiene que

$$f_i(N, \sigma_1, p, \alpha) = f_i(N, \sigma_2, p, \alpha).$$

Esto significa que un jugador *i* recibe el mismo pago bajo dos órdenes donde sus predecesores sean los mismos.

**Definición 29**. Una regla de reparto *f* para situaciones secuenciales tiene la **propiedad de intercambio** si para cada situación secuencial $s = (N, \sigma_1, p, \alpha)$ y cada par de vecinos $i, j \in N$ en el orden $\sigma_1$ se tiene que

$$f_i(s) - f_i(\tilde{s}) = f_j(s) - f_j(\tilde{s})$$

siendo $\tilde{s} = (N, \sigma_2, p, \alpha)$ la situación secuencial obtenida al considerar el orden $\sigma_2$ que resulta de intercambiar en el orden $\sigma_1$ los puestos de los jugadores *i* y *j*.

Esto significa que el intercambio de vecinos hace que el reparto para esos jugadores aumente o disminuya de la misma manera.

**Teorema 3.** La regla *EGS* no solo satisface las propiedades de equivalencia e intercambio, sino que es la única regla de reparto eficiente que las cumple.

## 3.4 Aplicación

En este apartado trataremos de aplicar con la mayor rigurosidad la teoría anteriormente presentada a un problema del ámbito real. Presentaremos una situación en la que se dan todos los factores requeridos para ser analizada desde el punto de vista de la Teoría de Juegos, más concretamente, de la Teoría de Juegos Cooperativos Secuenciales, y estudiaremos los posibles resultados a través de los distintos conceptos de solución.

### 3.4.1 Motivación del problema

En el sector productivo ya sea de manufactura o servicios, los pedidos llegan a los proveedores siguiendo una distribución variable en el tiempo que dependerá de las necesidades de cada cliente. Los hay que piden con antelación para disponer siempre de un stock de seguridad y los hay que funcionan contra pedido intentando incurrir en los menores gastos de almacenaje posibles. Cada entidad sigue distintas políticas de aprovisionamiento en las que no entraremos, ya que no son objeto de esta aplicación. Nuestro estudio se centrará en el análisis de la situación que provoca una acumulación de pedidos a un determinado proveedor, una cola de pedidos para ser procesados y la aparición, por tanto, de una situación secuencial. Desde el punto de vista del proveedor, y asumiendo que todos los clientes querrán disponer del producto a la mayor brevedad posible, los pedidos tienen la misma importancia y lo más común es que los procese, o los ordene para ser procesados, por orden de llegada.

Sin embargo, como ya comentamos anteriormente, no todos los clientes tienen las mismas necesidades ni se encuentran en las mismas circunstancias. Se puede dar el caso de que un pedido que haya sido realizado a última hora y, por tanto, colocado en la última posición de la secuencia de procesos esté generando grandes pérdidas a este cliente por tener rotura de stock, mientras que el que se encuentra delante de él en la secuencia sea de los que pide con adelanto para siempre tener reservas y no esté generando pérdidas. Es aquí donde entra en juego la cooperación y negociación de los distintos jugadores implicados para alcanzar situaciones más beneficiosas que la inicialmente establecida por criterios del proveedor.

El contexto generado por esta crisis sanitaria ha propiciado un panorama desolador para el sector manufacturero, especialmente en China, donde el virus fue por primera vez detectado. Lo que comenzó con el cierre de las ciudades con mayor número de casos positivos, continuó con el confinamiento en casa de los 1.400 millones de habitantes del país, a excepción de las personas a cargo de actividades esenciales.

Uno de los sectores afectados en esta situación es el de la telefonía móvil y a él dedicamos nuestro estudio. Su epicentro global cesa totalmente su actividad con las graves consecuencias que esto tiene en todos los mercados del mundo. Se estima que 3 de cada 4 dispositivos móviles o *smartphones* se fabrican en este lugar, y a nadie le extraña la cifra teniendo en cuenta que las grandes firmas de este sector o son originarias de China o tienen gran parte de su producción allí. En definitiva, este país se ha coronado como el líder en producción de componentes electrónicos y telefonía móvil que junto con un coste de mano de obra bastante inferior provoca que muy pocas compañías elijan otras localizaciones para el ensamblado de sus diseños. En palabras del representante de la empresa española Energy Systems : "…además de ser algo común a toda la industria, optar por fabricar allí no solo es una cuestión de costes, también es donde se encuentra todo el ecosistema de electrónica, tecnología y cadena de suministro, y replicar todo ello en Europa sería una tarea muy complicada…"

En una economía tan globalizada como la actual, la paralización y cierre temporal de infinidad de empresas, en la que pasará a la historia como crisis del Covid-19, afecta a millones de clientes que han visto sus pedidos paralizados y que aún tendrán que esperar cuando vuelva la normalidad, ya que habrán sido puestos a la cola. Es por eso por lo que el objeto de nuestro estudio cobra en estos momentos más interés que nunca.

### 3.4.2 Descripción del problema

Para que nuestro problema se adecue a las restricciones que impone la teoría pondremos el foco en las empresas de tipo ODM (*Original Design Manufacturer*) que diseñan y fabrican los dispositivos para distintas marcas que son las que luego lo pondrán a la venta, permitiendo a las marcas producir sin necesidad de disponer de todos los medios materiales necesarios. Sin embargo, son muchas las firmas de la telefonía móvil que recurren a empresas para la producción de algunos de sus dispositivos o para la mayor parte de ellos, y no hablamos de pequeñas compañías que no pueden sufragar la instalación de una planta propia, sino de grandes del sector que lideran los rankings de ventas y que ahorran costes subcontratando determinadas operaciones.

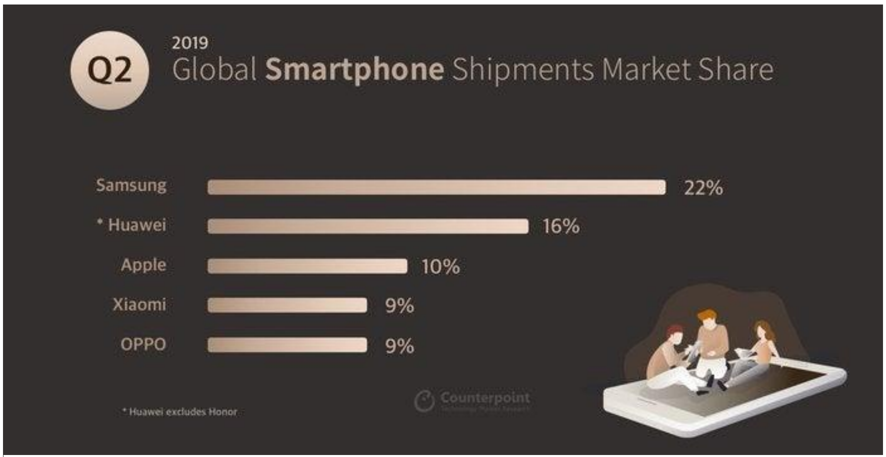


Figura 5

Cuatro de las cinco grandes firmas que podemos ver en el gráfico utilizan los servicios de una potente ODM china. La compañía se llama Wingtech technology, y se encarga de parte de la producción de Xiaomi, Huawei y Oppo. Desde inicios de este año también produce un modelo para la surcoreana Samsung, que pretende de esta forma aumentar su presencia en el mercado de los móviles de gama media-baja.

Wingtech technology no fue una excepción y cierra sus puertas a mediados de enero como el resto de las fábricas del país. Esta interrupción de la producción junto con la limitación del comercio internacional genera en las cuatro empresas incalculables pérdidas que intentaremos estimar ahora.

Para el cálculo de dichas pérdidas nos hemos basado en datos que hemos encontrado de distintos medios. En primer lugar, hemos hallado las unidades de móviles vendidos por las grandes marcas entre enero y marzo del año 2019, obteniendo el siguiente reparto.

| | |
|---|---|
| Samsung | 71,62 M |
| Huawei | 58,43 M |
| Apple | 44,56 M |
| Oppo | 29,60 M |
| Xiaomi | 27,36 M |
| TOTAL | 373 M |

Tabla 9

Que dividiendo entre los dias correspondientes a un trimestre nos permite hallar las unidades al día que venden. Por otro lado, hemos obtenido datos estimados del margen de beneficio promedio que obtienen las grandes compañías por unidad vendida.


Figura 6

Vemos que el margen de beneficio no es proporcional al "status" de la compañía, son distintas estrategias de mercado. Tras esto, consultamos los catálogos oficiales de las marcas en cuestión para conocer el número de modelos que ofertan, observando que Samsung lidera la lista con 69 dispositivos, Huawei oferta 30, Xiaomi 34 y, por último, Oppo dispone de 21 modelos, asumiremos que venden el mismo número de dispositivos de cada modelo para nuestros cálculos.

Con estos datos solo nos quedaría saber cuántos modelos produce la ODM Wingtech technology para cada marca. Sabemos que Samsung está en periodo de prueba y solo subcontrató la producción de un modelo, pero no tenemos datos exactos del resto de firmas y no parece que sea una información a la que el usuario tenga acceso.

Del resto de empresas sabemos que Xiaomi y Huawei no fabrican íntegramente en China, sino que poseen plantas de producción en India, mientras que Oppo solo produce en el país asiático. Esto nos ayuda a visualizar que Oppo estará en una situación más crítica para abastecer la demanda, ya que el resto tuvo margen de reorganización hasta que la pandemia se extendió al resto de paises donde producen.

### 3.4.3 Resolución del problema

A continuación, presentamos una situación secuencial que nos permitirá aplicar la teoría vista hasta el momento y generar algunas soluciones candidatas. Como ya sabíamos una situación secuencial venía definida por la tupla $s = (N, \sigma_0, p, \alpha)$, donde hasta el momento solo conocíamos el número de jugadores $N = 4$, ahora aportaremos el resto de los datos necesarios, es decir, el orden inicial $\sigma_0$, el vector de tiempos de proceso $p$, expresado en días, y el vector de coeficientes α. Es conveniente aclarar que, aunque los datos intentan ser realistas, no dejan de ser una estimación cuyo objetivo es la correcta visualización de la teoría.

| | HUA | SAM | OPP | XIA |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $p_i$ | 3 | 8 | 2 | 5 |
| $\alpha_i$ | 27.000 | 180.000 | 65.000 | 330.000 |

Tabla 10

El vector urgencias de esta situación nos será muy revelador para ver el grado de desorden respecto al orden óptimo propuesto por Smith,

$$u = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (9.000, 22.500, 32.500, 66.000).$$

Hemos intentado reflejar en este vector el grado de dependencia económica de cada marca con respecto a la ODM Wingtech Technology según su volumen de ventas y medios de producción, es por eso que siendo Samsung la que más dispositivos vende y, por tanto, la que más está dejando de ganar no tiene asociada una urgencia mayor que la de Oppo, esto es debido a que Samsung puede desplazar su produción al resto de plantas que posee mientras que en el caso de Oppo esto no es posible. La situación de Huawei es algo similar, la posibilidad de producir en sus propias plantas minimiza el impacto económico y por tanto la urgencia. Vemos que Xiaomi tiene la mayor urgencia, esto lo asociamos a su política de ventas, siendo la que menor beneficio obtiene por unidad vendida, su modelo de negocio solo es factible minimizando los costes de producción que es lo que se consigue subcontratando a este tipo de empresas. De ahora en adelante asociaremos las empresas con el número que toman en el orden inicial $\sigma_0 = (1234)$.

Si la ODM atendiera los pedidos en este orden $\sigma_0 = (1234)$, el grupo de las cuatro empresas tendría una pérdida total de

$$TC(\sigma_0) = \alpha_1\, p_1 + \alpha_2\,(p_1 + p_2) + \alpha_3\,(p_1 + p_2 + p_3) + \alpha_4\,(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) =$$

$$= 8.846.000\ €$$

Lo primero que hemos hecho para el estudio del problema es analizar los costes totales que tendría el grupo para cada ordenamiento posible. Para la elaboración de esta tabla hemos implementado en el programa Excel una hoja de cálculo que, introduciendo los datos iniciales para una situación secuencial, nos devuelve una tabla como la siguiente en la que podemos visualizar de forma sencilla cual es el orden que genera menor gasto total.

| $\sigma$ | $TC(\sigma)$ |
|---|---|
| 1234 | 8.846.000 |
| 1243 | 8.511.000 |
| 1324 | 8.686.000 |
| 1342 | 6.946.000 |
| 1423 | 6.771.000 |
| 1432 | 6.611.000 |
| 2134 | 8.522.000 |
| 2143 | 8.187.000 |
| 2314 | 8.381.000 |
| 2341 | 7.526.000 |
| 2431 | 7.191.000 |
| 2413 | 7.332.000 |

| $\sigma$ | $TC(\sigma)$ |
|---|---|
| 3124 | 8.545.000 |
| 3142 | 6.805.000 |
| 3214 | 8.221.000 |
| 3241 | 7.366.000 |
| 3412 | 5.950.000 |
| 3421 | 5.626.000 |
| 4123 | 5.916.000 |
| 4132 | 5.756.000 |
| 4213 | 5.592.000 |
| 4231 | 5.451.000 |
| 4312 | 5.615.000 |
| 4321 | 5.291.000 |

Tabla 11

Observamos que lo expuesto por Smith en 1956 se cumple, esto es, el orden que genera menores gastos totales es aquel en el que sus jugadores se ordenan según el criterio de urgencia decreciente. De hecho, nos encontramos en la peor situación inicial posible, ya que los jugadores están ordenados según urgencia creciente, será necesario que todos los jugadores participen y que se produzcan permutaciones entre ellos para alcanzar el orden óptimo que es $\hat{\sigma}$ = (4321) y genera un coste total al grupo de

$$TC(\hat{\sigma}) = \alpha_4\, p_4 + \alpha_3\,(p_4 + p_3) + \alpha_2\,(p_4 + p_3 + p_2) + \alpha_1\,(p_4 + p_3 + p_2 + p_1) =$$

$$= 5.291.000\ €$$

y esto supone al grupo un ahorro máximo total, con respecto al orden inicial, de

$$TC(\sigma_0) - TC(\hat{\sigma}) = 3.555.000\ €.$$

En las siguientes tablas mostramos cómo afectan el orden inicial y el orden de Smith a cada jugador.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $C_i\,(\sigma_0)$ | 3 | 11 | 13 | 18 |
| $c_i\,(\sigma_0)$ | 81.000 | 1.980.000 | 845.000 | 5.940.000 |
| $u_i$ | 9.000 | 22.500 | 32.500 | 66.000 |

| | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $C_i\,(\hat{\sigma})$ | 5 | 7 | 15 | 18 |
| $c_i\,(\hat{\sigma})$ | 1.650.000 | 455.000 | 2.700.000 | 486.000 |
| $u_i$ | 66.000 | 32.500 | 22.500 | 9.000 |

Tabla 12

donde $C_i\,(\sigma)$ representa el tiempo total de espera del jugador $i$ en el orden $\sigma$ y $c_i\,(\sigma)$ representa la pérdida que sufre el jugador $i$ en el orden $\sigma$.

En términos de nuestra aplicación lo que ocurre es que, si como grupo, quieren ahorrar gastos totales es necesario que intervengan los cuatro y pacten entre ellos. Samsung, con una urgencia no muy alta en comparación con el resto, accedería a ocupar la tercera posición de la secuencia cooperando con el resto de los jugadores y aumentando sus pérdidas en 720.000 € a cambio de una compensación económica. Huawei por su parte también retrocede tres posiciones en la secuencia, dicho cambio aumenta sus gastos en 405.000€, también Huawei exigirá verse compensado en el reparto del ahorro total. Por otro lado, esto permitirá a Xiaomi y Oppo adelantar puestos y tener sus pedidos listos 13 y 6 días antes, respectivamente, que en la situación inicial disminuyendo sus gastos en 4.290.000 € y 390.000 € respectivamente.

Para resolver esta situación hemos optado por analizar las soluciones que proporcionan la regla de división de ganancias igualitaria (*EGS*), el valor de Shapley y el nucleolo.

En primer lugar, con objeto de calcular el reparto propuesto por la *EGS*, observamos que para llegar al orden óptimo $\hat{\sigma}$ = (4321), es necesario que se produzcan los siguientes intercambios entre jugadores vecinos

$\sigma_0$ = (1234) – intercambio 3 y 4 – (1243) – intercambio 2 y 4 – (1423) – intercambio 1 y 4 – (4123) – intercambio 2 y 3 – (4132) intercambio 1 y 3 – (4312) intercambio 1 y 2 – (4321) = $\hat{\sigma}$

Teniendo en este caso el conjunto de pares mal posicionados

$$MP(\sigma_0) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\},$$

y las ganancias $g_{ij} = p_i\alpha_j - p_j\alpha_i$ que generan estos intercambios:

$g_{12}$ = 324.000,

$g_{13}$ = 141.000,

$g_{14}$ = 855.000,

$g_{23}$ = 160.000,

$g_{24}$ = 1.740.000,

$g_{34}$ = 335.000.

Con estos datos el reparto de ganancias propuesto por la *EGS* el siguiente:

$$EGS(s) = (EGS_1(s), EGS_2(s), EGS_3(s), EGS_4(s)) = (660.000,\ 1.112.000,\ 318.000,\ 1.465.000),$$

donde

$$EGS_1(s) = \frac{1}{2}\cdot(g_{12} + g_{13} + g_{14}),$$
$$EGS_2(s) = \frac{1}{2}\cdot(g_{12} + g_{23} + g_{24}),$$
$$EGS_3(s) = \frac{1}{2}\cdot(g_{13} + g_{23} + g_{34}),$$
$$EGS_4(s) = \frac{1}{2}\cdot(g_{14} + g_{24} + g_{34}).$$

Teniendo en cuenta que esta regla reparte equitativamente cada ganancia $g_{ij}$ entre los dos jugadores *i* y *j* que intervienen en el intercambio, resulta coherente que los jugadores 2 y 4 reciban la mayor cantidad al ser las ganancias en las que participan las más voluminosas.

Profundizaremos ahora en los movimientos monetarios que tienen lugar entre los jugadores al aplicar esta regla:

El jugador 4 es el gran beneficiado de esta operación, el cambio de orden a $\hat{\sigma} = (4321)$ le genera un ahorro de 4.290.000 €. Sin embargo, la regla *EGS* solo le asigna 1.465.000 €, ya que el resto de ese dinero (4.290.000 € –1.465.000 € = 2.825.000 € ) estará destinado a compensar al resto de jugadores.

El jugador 3 también genera ahorros al avanzar una posición en la secuencia, en concreto 390.000 € de los cuales la *EGS* le asigna 318.000 € sobrando de nuevo la cantidad de 72.000 € que los habrá de ceder para convencer al resto de jugadores.
El jugador 2 retrocede una posición en la secuencia aumentando sus costes en 720.000 €, además la *EGS* le aporta 1.112.000 € de beneficio, por lo que en total ha de recibir 1.112.000 + 720.000 = 1.832.000 € para acceder a participar de la gran coalición.

El jugador 1 también se encuentra en una situación similar a la del jugador 2, al haber cedido su posición a jugadores con más urgencia ha aumentado sus costes en 405.000 €, si la *EGS* le aporta un beneficio de 660.000 €, este jugador deberá recibir en total la suma de 1.065.000 €.

En definitiva, los jugadores 3 y 4 tienen que ceder 2.825.000 + 72.000 = 2.897.000 € a los jugadores 1 y 2 para que estos reciban 1.832.000 + 1.065.000 = 2.897.000 €, quedando de esta forma todos satisfechos.

Finalmente, cada uno de ellos tendrá que pagar

- $i$=4: 1.650.000 + 2.825.000 = 4.475.000 €
- $i$=3: 455.000 + 72.000 = 527.000 €
- $i$=2: 2.700.000 – 1.832.000 = 868.000 €
- $i$=1: 486.000 – 1.065.000 = – 579.000 €

Cifras que también podrían haber sido calculadas como $c_i(\sigma_0) - EGS_i\,(s)$.

- $i$=4: 5.940.000 – 1.465.000 = 4.475.000 €
- $i$=3: 845.000 – 318.000 = 527.000 €
- $i$=2: 1.980.000 – 1.112.000 = 868.000 €
- $i$=1: 81.000 – 660.000 = – 579.000 €

La suma de estas cantidades es 5.291.000 €, que como podíamos esperar es igual a $TC\,(\hat{\sigma})$.

A continuación, estudiaremos el valor de Shapley para este problema. Para ello tenemos que construir antes que nada el juego secuencial asociado a nuestra situación secuencial *s*. En este punto queremos señalar que en el artículo base de nuestro trabajo [5] aparece modelado dicho juego para el caso en el que participan solo 3 jugadores. Nosotros hemos dado un paso más, hemos analizado la situación general con 4 jugadores y hemos demostrado que en este caso el juego secuencial actúa de la siguiente manera.

| ***S*** | 0 | {1} | {2} | {3} | {4} | {12} | {13} | {14} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*S*)** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | *a* | 0 | 0 |

| ***S*** | {23} | {24} | {34} | {123} | {124} | {134} | {234} | {1234} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*S*)** | *b* | 0 | *c* | *d* | *a* | *c* | *e* | *f* |

Tabla 13

donde se cumple que

$$0 \le a \le d \le f, \qquad 0 \le a + c \le f,$$
$$0 \le b \le d \le f, \qquad 0 \le a + b \le d,$$
$$0 \le c \le e \le f, \qquad 0 \le b + c \le e,$$
$$0 \le b \le e \le f, \qquad 0 \le d + c \le f,$$
$$0 \le a + e \le f,$$
$$0 \le d + e \le f + b.$$

Esta tabla nos ayuda a visualizar que, en efecto, nuestro juego sigue cumpliendo las propiedades de monotonía, superaditividad y convexidad, porque a medida que aumenta el número de jugadores en las coaliciones, aumenta su valor. Además, vemos que el mayor ahorro se produce cuando cooperan las 4 compañías formando la gran coalición.

En nuestro caso, la función característica es

| ***S*** | 0 | {1} | {2} | {3} | {4} | {12} | {13} | {14} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*S*)** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 324.000 | 0 | 0 |

| ***S*** | {23} | {24} | {34} | {123} | {124} | {134} | {234} | {1234} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*S*)** | 160.000 | 0 | 335.000 | 625000 | 324.000 | 335.000 | 2.235.000 | 3.555.000 |

Tabla 14

Para la elaboración de la tabla anterior hemos necesitado encontrar todas las ordenaciones admisibles para cada coalición *S*, denotada por $\mathcal{A}(S)$ , y tomado

$$v^s(S) = \max_{\sigma \in \mathcal{A}(S)} (TC(\sigma_0) - TC(\sigma)).$$

Este cálculo también nos lo proporciona el archivo Excel que hemos implementado usando la siguiente tabla

| ***S*** | **Combinaciones admisibles** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1234 | – | – | – | – | – |
| {1} | 1234 | – | – | – | – | – |
| {2} | 1234 | – | – | – | – | – |
| {3} | 1234 | – | – | – | – | – |
| {4} | 1234 | – | – | – | – | – |
| {12} | 1234 | 2134 | – | – | – | – |
| {13} | 1234 | – | – | – | – | – |
| {14} | 1234 | – | – | – | – | – |
| {23} | 1234 | 1324 | – | – | – | – |
| {24} | 1234 | – | – | – | – | – |
| {34} | 1234 | 1243 | – | – | – | – |
| {123} | 1234 | 1324 | 2134 | 2314 | 3214 | 3124 |
| {124} | 1234 | 2134 | – | – | – | – |
| {134} | 1234 | 1243 | – | – | – | – |
| {234} | 1234 | 1243 | 1324 | 1342 | 1423 | 1432 |
| {1234} | Todas las combinaciones | | | | | |

Tabla 15

El reparto que propone Shapley en forma de vector es el siguiente:

$$\phi_i = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = (422.750, 1.082.750, 1.088.250, 961.250).$$

Recordemos que Shapley proponía el reparto del beneficio de la gran coalición entre los jugadores según la contribución marginal que aporta el jugador a las distintas coaliciones. Pudiendo calcular estas contribuciones según $[v(S) - (S \setminus \{i\})]$, es por eso por lo que observando la tabla 14 ya intuimos que los jugadores 2 y 3 serían los grandes beneficiados de esta operación ya que aportan cuantiosas sumas a las coaliciones a las que se unen.

Estas son las operaciones necesarias para el cálculo del valor de Shapley de forma desarrollada:

$$\phi_1(v) = q(1)[v(\{1\}) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{12\}) - v(\{2\})] + q(2)[v(\{13\}) - v(\{3\})] + q(2)[v(\{14\}) - v(\{4\})] +$$
$$+ q(3)[v(\{123\}) - v(\{23\})] + q(3)[v(\{124\}) - v(\{24\})] + q(3)[v(\{134\}) - v(\{34\})] + q(4)[v(\{1234\}) - v(\{234\})]$$

$$\phi_2(v) = q(1)[v(\{2\}) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{12\}) - v(\{1\})] + q(2)[v(\{23\}) - v(\{3\})] + q(2)[v(\{24\}) - v(\{4\})] +$$
$$+ q(3)[v(\{123\}) - v(\{13\})] + q(3)[v(\{124\}) - v(\{14\})] + q(3)[v(\{234\}) - v(\{34\})] + q(4)[v(\{1234\}) - v(\{134\})]$$

$$\phi_3(v) = q(1)[v(\{3\}) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{13\}) - v(\{1\})] + q(2)[v(\{23\}) - v(\{2\})] + q(2)[v(\{34\}) - v(\{4\})] +$$
$$+ q(3)[v(\{123\}) - v(\{12\})] + q(3)[v(\{134\}) - v(\{14\})] + q(3)[v(\{234\}) - v(\{24\})] + q(4)[v(\{1234\}) - v(\{124\})]$$

$$\phi_4(v) = q(1)[v(\{4\}) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{14\}) - v(\{1\})] + q(2)[v(\{24\}) - v(\{2\})] + q(2)[v(\{34\}) - v(\{3\})] +$$
$$+ q(3)[v(\{124\}) - v(\{12\})] + q(3)[v(\{234\}) - v(\{23\})] + q(3)[v(\{134\}) - v(\{13\})] + q(4)[v(\{1234\}) - v(\{123\})]$$

donde vamos calculando las contribuciones marginales de cada jugador para los distintos tamaños de coalición que puede formar ponderadas por los factores $q(s)$, que en nuestro caso son

$$q(1) = \frac{1}{4},\ q(2) = \frac{1}{12},\ q(3) = \frac{1}{12} \text{ y } q(4) = \frac{1}{4}.$$

Los movimientos monetarios en este caso quedarían así:

El jugador 4 sabemos que genera un ahorro de 4.290.000 €. Shapley le asigna 961.250 €, y el resto de ese dinero (4.290.000 € – 961.250 € = 3.328.750 € ) estará destinado a compensar al resto de jugadores.

El jugador 3 también genera ahorros, como veíamos antes: 390.000 €. Además, Shapley le reparte 1.088.250 €, por lo que ahora de la participación del jugador 3 no solo no genera dinero para compensar al resto de jugadores, sino que este recibe (|390.000 – 1.088.250| = 698.250 €). Es el jugador 4 el que asume completamente la compensación del resto de los jugadores.

El jugador 2 veíamos que aumentaba sus costes en 720.000 €, pero Shapley le aporta 1.082.750 € de beneficio, por lo que en total ha de recibir 1.082.750 + 720.000 = 1.802.750 € para acceder a participar.

El jugador 1 ha aumentado sus costes en 405.000 €, Shapley le aporta un beneficio de 422.750€, en total debe recibir la suma de 827.750 €.

Por tanto, el jugador 4 cede 3.328.750 € a los jugadores 1, 2 y 3 para que estos reciban 698.250 + 1.802.750 + 827.750 = 3.328.750 €, quedando de esta forma todos satisfechos.

Vemos como quedarían ahora los pagos si se optara por aceptar el valor de Shapley como solución, al proponer Shapley un reparto alternativo de los beneficios también variará el pago que debe hacer cada jugador en la situación final. Los presentamos a continuación calculados como $c_i(\sigma_0) - \phi_i$

- $i$=4: 5.940.000 – 961.250 = 4.978.750 €
- $i$=3: 845.000 – 1.088.250 = –243.250 €
- $i$=2: 1.980.000 – 1.082.750 = 897.250 €
- $i$=1: 81.000 – 422.750 = – 341.750 €

Cantidades que suman los costes totales para dicho orden, $TC(\hat{\sigma})$ = 5.291.000 €.

Finalmente, para analizar el nucleolo de nuestro juego tenemos que encontrar la imputación $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ que minimice en orden lexicográfico los excesos $e(S, x)_{S \subseteq N}$, donde

$$e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i,$$

El nucleolo propone una solución con el objetivo de minimizar la insatisfacción de las coaliciones. Para este cálculo hemos hecho uso de la herramienta TUGlab (Transferable Utility Games laboratory) elaborada por investigadores de la Universidad de Vigo. Está basada en Matlab y permite calcular y visualizar conceptos básicos para cualquier juego UT de 3 o 4 jugadores.

En nuestro caso, esta es la solución que propone el nucleolo:

$$nuc(v) = (660.000, 965.000, 965.000, 965.000).$$

De nuevo resulta interesante comentar cómo son los movimientos de cada jugador con respecto a la solución que propone el nucleolo:

El jugador 4 recibe, según el reparto propuesto por el nucleolo, 965.000 €, algo más que con la solución que propone Shapley, sin embargo, cede de nuevo 3.325.000 € y con ello compensará al resto de jugadores que participen.

El jugador 3 recibe algo menos que antes, pero igualmente no debe ceder nada para compensar al resto de jugadores. En concreto teniendo en cuenta el ahorro que genera y lo que debe recibir según el nucleolo, debe ingresar la cantidad total de 575.000 €.

El jugador 2, que según este reparto recibe la misma cantidad que los jugadores 4 y 3, esto es, 965.000 € debe además ver compensadas sus pérdidas. En total 1.685.000 € es lo que debe recibir.

Por último, al jugador 1 le corresponde recibir 660.000 € según el nucleolo, añadiendo la compensación por sus pérdidas debe recibir en total 1.065.000 €.

De nuevo podemos observar que lo que precisan los jugadores 1, 2 y 3 para acceder a cooperar es la cantidad que cede el jugador 4, 1.065.000 + 1.685.000 + 575.000 = 3.325.000 €,

propiciando que cada jugador tenga que pagar la siguiente cantidad, calculada como $c_i(\sigma_0) - nuc_i(v)$

- $i$=4: 5.940.000 – 965.000 = 4.975.000 €
- $i$=3: 845.000 – 965.000 = –120.000 €
- $i$=2: 1.980.000 – 965.000 = 1.015.000 €
- $i$=1: 81.000 – 660.000 = – 579.000 €

que cubre los gastos totales de este orden $TC(\hat{\sigma})$ = 5.291.000 €.

Tanto Shapley como el nucleolo son soluciones de tipo puntual, y vemos que no distan mucho una de la otra en el espacio geométrico ya que los pagos asignados a cada jugador son similares. En ambas opciones es el jugador 4, el gran beneficiado de este acuerdo, el que debe pagar la mayor cantidad de dinero para compensar al resto de jugadores, mientras que las cantidades que deben pagar los jugadores 1 y 3 son negativas, lo que significa que no deben pagar nada, sus gastos son íntegramente sufragados por el jugador 4.

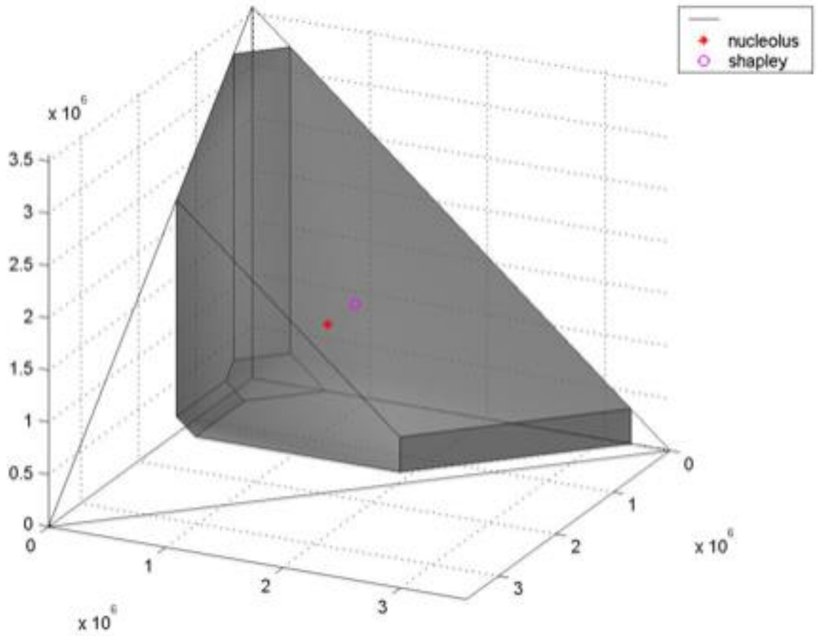


Figura 7

En esta figura comprobamos cómo ambos conceptos de solución quedan contenidos dentro de la región de admisibilidad definida por el core. El valor de Shapley $\phi(v)$ queda, en efecto, contenido dentro del core del juego puesto que dicho juego es convexo, y el nucleolo $nuc(v)$ también estará en core($v$) ya que $v$ es monótono y core($v$) es no vacío. Por otro lado, sabemos que la regla $EGS(s)$ siempre está en el core.

# 4 JUEGOS SECUENCIALES CON UN JUGADOR "TARGET"

En el capítulo anterior hablamos de una situación secuencial genérica, estudiaremos ahora una variación de este modelo. Introduciremos en el problema un jugador "target", que tiene la particularidad de que hasta un determinado momento temporal no incurrirá en costes de ningún tipo, pero después de ese instante sí generará pérdidas como el resto de los jugadores.

En el primer apartado veremos las situaciones secuenciales con jugador "target" y analizaremos cómo han de ser ordenados todos los jugadores para obtener el menor coste posible. En el segundo apartado definiremos los juegos secuenciales con un jugador de este tipo. Veremos en esta sección que no todos los juegos de este tipo cumplen la propiedad de convexidad. Por último, modificaremos el problema del capítulo 3 para aplicar esta teoría.

## 4.1 Situación Secuencial con un jugador "target"

En las situaciones en las que existen jugadores "target" asumiremos que algunos jugadores querrán haber sido atendidos antes de un determinado instante temporal $t_i$. Hasta ese momento $t_i$ dichos jugadores no pagan ningún coste, pero después de ese momento, la situación será la misma que en el modelo estándar visto en el capítulo anterior, lo que significa que los jugadores "target" pagarán ciertos costes que dependen linealmente del tiempo de término.

En general una situación secuencial con jugadores "target" viene descrita por la siguiente tupla

$$s^* = (N, T, \sigma_0, p, \alpha, t)$$

donde $N$ es el conjunto de jugadores que participan en el juego, $T$ es el conjunto de jugadores "target" $T \subseteq N$, $\sigma_0$ es el orden inicial y $p$ es un vector cuyas coordenadas representan el tiempo que cada trabajo necesita para ser procesado. Al igual que antes, en general, $C_i(\sigma)$ representará el tiempo total necesario para acabar el trabajo $i$-ésimo según el orden $\sigma$. Los coeficientes de costes están recogidos en el vector $\alpha$ y $t$ es un vector que recoge los tiempos "target" de los jugadores "target".

Observamos que, en esta nueva situación, la función de costes según el orden $\sigma$ para un jugador "no target", o jugador normal, es $c_i = \alpha_i C_i(\sigma)$ mientras que para los jugadores "target" esta función de costes es algo más complicada, ya que si el tiempo de término no supera el tiempo "target" el jugador no tendría que pagar nada, y la expresamos de la siguiente manera

$$c_i = \alpha_i \max\{0, C_i(\sigma) - t_i\}.$$

En general los jugadores "no target" pueden ser entendidos como jugadores "target" con tiempo target $t_i = 0$.

Nosotros trabajaremos con un único jugador "target" y, sin pérdida de generalidad, supondremos que es el jugador 1. Así $T = \{1\}$ y $t = t_1$

$$s^* = (N, T, \sigma_0, p, \alpha, t_1).$$

**Ejemplo 12.** Tomemos una situación secuencial con 3 jugadores en la que el jugador 1 es el único jugador "target". Los datos quedan descritos en la siguiente tabla

| $i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 48 | 1 | 3 |
| $\alpha_i$ (€) | 1000 | 1 | 6 |
| $t_i$ | 50 | 0 | 0 |

Tabla 16

Analicemos como son los costes para cada jugador según el orden $\sigma_0 = (123)$

$$c_1 = 0,\ c_2 = 49 \text{ y } c_3 = 312.$$

Por tanto, este orden inicial le proporciona al grupo un coste total de

$$TC(\sigma_0) = 0 + 49 + 312 = 361,$$

nos planteamos ver qué orden es el que ofrece menor gasto y tenemos

$$TC(132) = 0 + 306 + 52 = 358,$$

$$TC(213) = 1 + 0 + 312 = 313,$$

$$TC(231) = 1 + 24 + 2000 = 2025,$$

$$TC(312) = 18 + 1000 + 52 = 1070,$$

$$TC(321) = 18 + 4 + 2000 = 2022.$$

Observamos que, aunque a priori podríamos pensar que el orden óptimo sería $\sigma = (132)$ porque el jugador 1 tiene unos costes muy altos y porque la urgencia de 3 es mayor que la de 2, estamos incurriendo en un error puesto que el menor coste se consigue para $\tilde{\sigma} = (213)$ que además no coincide con el orden según el criterio de urgencia decreciente ya que $u_3 > u_2$ para los jugadores "no target".

Se sabe que, en el caso de 3 jugadores, si en el orden de ahorro máximo $\tilde{\sigma}$ está el jugador 1 "target" en primer o último puesto, entonces el resto de los jugadores están en $\tilde{\sigma}$ colocados según el criterio de urgencia decreciente. Sin embargo, si el orden de ahorro máximo se consiguiera con un orden $\tilde{\sigma}$ en el que el jugador "target" 1 no está ni en primer ni en último lugar, entonces no se puede asegurar nada con respecto a los jugadores "no target".

Para el caso $N = \{123\}$, es necesario que se cumplan unas determinadas relaciones entre el tiempo "target" y los tiempos de proceso para que lo óptimo sea ordenar a los jugadores normales según el criterio de urgencia decreciente, en la siguiente ilustración mostramos todas las casuísticas posibles

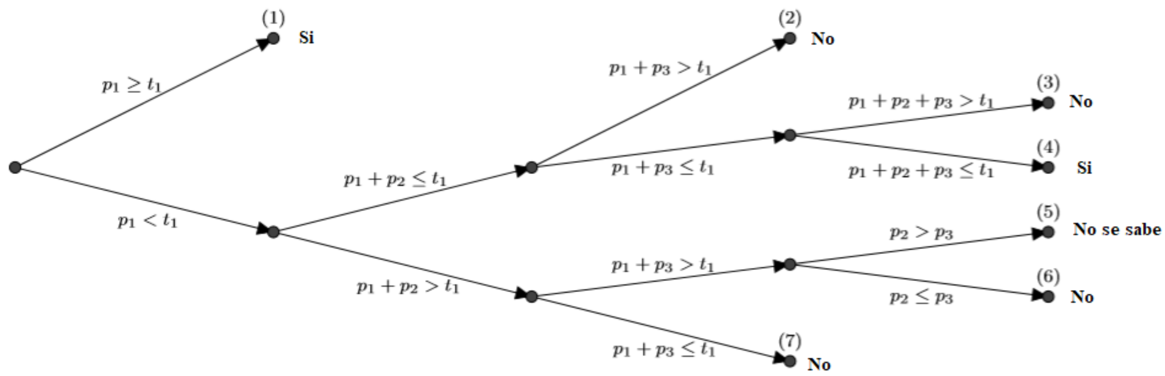


Figura 8

Podemos observar que tan solo en dos de los siete casos se cumple que los jugadores son ordenados de esta manera, quedando otro caso en el que no podemos asegurar que se ordenen según urgencia decreciente ni tampoco lo contrario. Determinamos entonces que, para 3 jugadores, si el orden que proporciona el máximo ahorro $\tilde{\sigma}$ tiene al jugador 1 "target" en segundo lugar y $p_1 \geq t_1$ o $p_1 + p_2 + p_3 \leq t_1$, entonces los jugadores normales 2 y 3 están colocados en $\tilde{\sigma}$ según el orden decreciente de urgencia.

## 4.2 Juegos Secuenciales con jugador "target"

La función característica para los juegos secuenciales con un jugador "target" correspondiente a la situación $s^* \in SEQ^N$, se define como

$$v^{s^*}(S) = \max_{\sigma \in \mathcal{A}(S)} (TC(\sigma_0) - TC(\sigma)).$$

Aplicaremos esta definición en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 13.** Consideramos la situación del ejemplo 12 y tomamos como orden inicial $\sigma_0 = (123)$. La ecuación descrita se puede aplicar considerando el ahorro total máximo de $\sigma_0$ comparándolo con todos los órdenes $\sigma \in \Pi(N)$, siendo $\sigma$ un orden admisible. Cada jugador no se puede intercambiar de forma individual, por lo que su valor será cero. La coalición $S = \{12\}$ si admite un cambio, comparamos $\sigma_0$ con $\sigma = (213)$ tal que $v^{s^*}(\{12\}) = 361 - 313 = 48$. La coalición $S = \{13\}$ no es admisible, lo que conlleva un valor igual a cero.

Para $S = \{23\}$ comparamos $\sigma_0$ con $\sigma = (132)$ obteniendo un valor igual a $v^{s^*}(\{23\}) = 3$. El resultado de comparar $\sigma_0$ con $\sigma \in \Pi(N)$ es el mismo que obtuvimos con la coalición $S = \{12\}$. Obtenemos el siguiente juego.

| **$S$** | ∅ | {1} | {2} | {3} | {12} | {13} | {23} | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$v_1$ $(S)$** | 0 | 0 | 0 | 0 | 48 | 0 | 3 | 48 |

Tabla 17

**Ejemplo 14.** Para el caso en que tenemos $N = \{123\}$, el juego secuencial asociado a una situación secuencial con jugador 1 "target" $s^* \in SEQ^N$ actúa según indica la siguiente tabla

| **$S$** | ∅ | {1} | {2} | {3} | {12} | {13} | {23} | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$v(S)$** | 0 | 0 | 0 | 0 | $a$ | 0 | $b$ | $c$ |

Tabla 18

cumpliéndose las siguientes condiciones

$$0 \leq a \leq c,$$

$$0 \leq b \leq c.$$

Por lo que se garantiza en este tipo de juegos con 3 jugadores las propiedades de monotonía y superaditividad. Si es preferible que 1 y 2 se intercambien cuando miramos la coalición $S = \{12\}$ también lo será cuando consideramos la gran coalición $N = \{123\}$ propiciando que el valor de las coaliciones aumente conforme aumente el número de jugadores.

Sabemos, además, que para $N = 3$ se trata de juegos equilibrados, ya que tienen core no vacío, la imputación $(x_1, x_2, x_3) = (0,0, c)$ está en el core($v$) y en general no serán convexos, lo que mostramos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 15.** Consideramos ahora la siguiente situación secuencial con un jugador "target".

| $i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 40 | 15 | 5 |
| $\alpha_i$ (€) | 145 | 40 | 18 |
| $t_i$ | 5 | 0 | 0 |

Tabla 19

Calculamos los costes totales de todas las combinaciones posibles $\sigma \in \Pi(N)$:

$$TC(123) = 3298,$$
$$TC(132) = 3268,$$
$$TC(213) = 1698,$$
$$TC(231) = 1703,$$
$$TC(312) = 2548,$$
$$TC(321) = 1673,$$

y deducimos que el orden que genera el máximo ahorro es $\tilde{\sigma} = (321)$. Con estos costes y considerando que $\sigma_0 = (123)$, podemos calcular el correspondiente juego de la tabla 20

| $S$ | $\emptyset$ | {1} | {2} | {3} | {12} | {13} | {23} | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v^{s^*}(S)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1600 | 0 | 30 | 1625 |

Tabla 20

Como $v^{s^*}(N) + v^{s^*}(\{2\}) = 1625 < 1630 = v^{s^*}(\{12\}) + v^{s^*}(\{23\})$, el juego es no convexo.

## 4.3. Aplicación

### 4.3.1 Descripción del problema

Trataremos ahora de aplicar la teoría correspondiente a los juegos secuenciales con un jugador "target" basándonos en la aplicación del capítulo anterior. Para ello modificaremos el enunciado de nuestro problema de forma que el jugador 1 tenga un tiempo "target" $t_1$ mientras que el resto de los jugadores se encuentren en las circunstancias anteriores, es decir, sean jugadores normales. Hemos de decir que para obtener un problema más ilustrativo hemos propuesto una situación inicial distinta de la anterior para poder generar todas las situaciones que queremos estudiar en este apartado.

Supongamos pues que Xiaomi, es nuestro jugador "target" y se puede permitir no disponer de los servicios de la ODM durante un tiempo $t_1$ sin incurrir en gastos de ningún tipo, a partir de ese día volverá a generar las mismas pérdidas según la función $c_i = \alpha_i C_i(\sigma)$. Veremos que al modificar los valores de $t_1$ las situaciones que generan los menores gastos totales serán diversas y no siempre seguirán el criterio de mínima urgencia.

En esta aplicación cobrará más importancia el análisis de las situaciones que genera la variación del tiempo $t_1$ que los repartos y movimientos monetarios entre los jugadores, en los que ya profundizamos en el capítulo anterior.

### 4.3.2 Resolución del problema

Como hemos comentado anteriormente partiremos de una situación inicial, pero no obtendremos una única situación final considerada como óptima. El tiempo $t_1$ tiene una gran influencia en el problema y al variar su valor obtendremos hasta 5 órdenes que son los de mínimos costes para cada caso. En este punto queremos resaltar que en el artículo base de nuestro trabajo [5] aparece analizada la situación general con solo 3 jugadores. De nuevo, nosotros hemos dado un paso más puesto que hemos analizado la situación general con 4 jugadores y hemos demostrado que se siguen cumpliendo propiedades análogas a las que se tenían en el caso general para 3 jugadores. Concretamente, si en el orden $\tilde{\sigma}$ de máximo ahorro está el jugador 1 "target" en primer o en último lugar entonces los jugadores normales están colocados en orden decreciente de urgencia y si en $\tilde{\sigma}$ está situado el jugador target 1 en segundo o tercer lugar y se verifica que $p_1 \geq t_1$ (el jugador 1 tiene pérdidas esté en el puesto que esté) o $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \leq t_1$ (el jugador 1 no tiene nunca pérdidas esté en el puesto que esté) entonces los jugadores normales también están colocados en orden de decrecimiento de urgencia. En otro caso, no se puede asegurar nada a priori.

También hemos construido el juego secuencial que modela esta nueva situación de manera general con 4 jugadores. Hemos llegado a que la función característica para situaciones secuenciales con 4 jugadores en las que el jugador 1 es jugador "target" tiene la siguiente forma general

| ***S*** | ∅ | {1} | {2} | {3} | {4} | {12} | {13} | {14} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*S*)** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | *a* | 0 | 0 |

| ***S*** | {23} | {24} | {34} | {123} | {124} | {134} | {234} | {1234} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*S*)** | *b* | 0 | *c* | *d* | *a* | *c* | *e* | *f* |

Tabla 21

donde se cumple:

$$0 \leq a \leq d \leq f,$$
$$0 \leq b \leq d \leq f,$$
$$0 \leq c \leq e \leq f,$$
$$0 \leq a + c \leq f,$$

que nos ayuda a visualizar que los juegos con jugador "target" serán siempre monótonos y superaditivos, pero en general no serán convexos. Sabemos además que el core será no vacío para estas situaciones ya que $(0, f-c, c, 0)$ pertenece a core($v$) y, por tanto, el juego será equilibrado.

En la siguiente tabla presentamos la nueva situación

| | XIA | HUA | OPP | SAM |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $p_i$ | 5 | 3 | 2 | 8 |
| $\alpha$ | 330.000 | 27.000 | 65.000 | 180.000 |
| $t_i$ | $t_1$ | 0 | 0 | 0 |

Tabla 22

donde el vector de urgencias correspondiente a esta situación es

$$u = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (66.000, 9.000, 32.500, 22.500).$$

Para la resolución de esta nueva situación secuencial hemos adaptado la hoja de cálculo que implementamos en Excel de manera que al introducir un nuevo valor para el tiempo $t_1$ esta nos devuelve todos los órdenes posibles con los gastos totales asociados a cada orden y si los jugadores normales cumplen o no el criterio de urgencia, que en este caso vendría dado por ($u_3$, $u_4$, $u_2$).

Hemos elaborado una segunda hoja de cálculo que nos permite, mediante comparación de los órdenes admisibles para cada coalición, obtener la función característica en nuestro caso concreto y el correspondiente valor de Shapley y, finalmente, hemos hecho uso de la herramienta TUGlab de la Universidad de Vigo para el cálculo del nucleolo y de las representaciones gráficas.

Con el objetivo de analizar todos los posibles escenarios que puede plantear esta situación secuencial hemos analizado los cambios que sufren los costes totales de cada orden, así como la función característica con $t_1$= (0, …, 20), y a continuación expondremos los resultados:

Cuando nos encontramos en el rango entre $t_1$= 0 y $t_1$ = 6 el orden que genera menores gastos será $\tilde{\sigma}$ = (1342), en este caso el jugador "target" queda en primera posición y el resto de jugadores, como era de esperar, cumplen el criterio de urgencia decreciente. Si tomamos, por ejemplo, $t_1$= 4 para ilustrar esta primera situación veremos que la función característica será así

| ***S*** | ∅ | {1} | {2} | {3} | {4} | {12} | {13} | {14} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*S*)** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| ***S*** | {23} | {24} | {34} | {123} | {124} | {134} | {234} | {1234} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*S*)** | 141.000 | 0 | 0 | 141.000 | 0 | 0 | 465.000 | 465.000 |

Tabla 23

que como ya sabemos cumple las propiedades de monotonía, superaditividad y, en este caso, convexidad.

Esta función característica proporciona el siguiente valor de Shapley

$$\phi_i = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = (0, 178.500, 178.500, 108.000),$$

donde el jugador 1 no recibe beneficio alguno al no aportar ninguna contribución marginal a las coaliciones a las que se une, lo que comprobamos fácilmente de la siguiente manera

$$[v(\{123\}) - v(\{23\})] = [v(\{1234\}) - v(\{234\})] = 0.$$

Los costes finales de cada jugador los calculamos como $c_i\,(\sigma_0) - \phi_i$

- $i$=1: 330.000 – 0 = 330.000 €
- $i$=2: 216.000 – 178.500 = 37.500 €
- $i$=3: 650.000 – 178.500 = 471.500 €
- $i$=4: 3.240.000 – 108.000 = 3.132.000 €

Por su parte el nucleolo propone una solución parecida

$$nuc(v) = (0,\ 155.000,\ 155.000,\ 155.000),$$

y también serán parecidos los costes finales de cada jugador, en este caso $c_i\,(\sigma_0) - nuc_i(v)$

- $i$=1: 330.000 – 0 = 330.000 €
- $i$=2: 216.000 – 155.000 = 61.000 €
- $i$=3: 650.000 – 155.000 = 495.000 €
- $i$=4: 3.240.000 – 155.000 = 3.085.000 €

En esta situación el jugador 1 no coopera, y por eso no recibe ninguna porción del ahorro generado y pagará lo correspondiente a los costes que él mismo genera. Los jugadores 2 y 3 presentan la propiedad de simetría para las dos soluciones y por eso reciben el mismo pago. Ambas situaciones están contenidas dentro del core como podemos ver a continuación

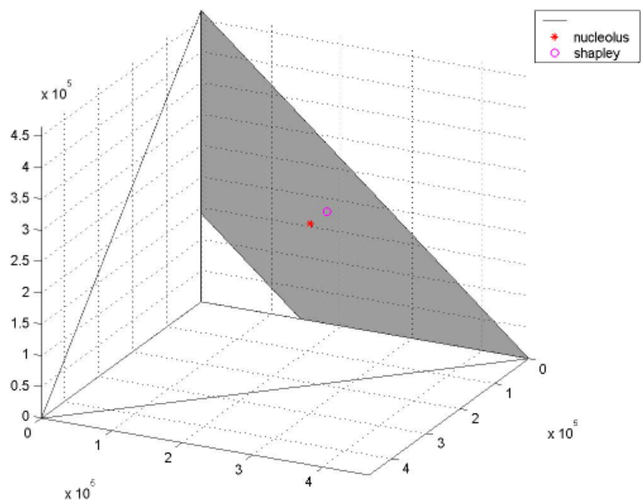


Figura 9

A medida que aumentamos el tiempo $t_1$ y , en concreto, entre $t_1$= 7 y $t_1$ = 11 el orden que genera mínimos gastos es el $\tilde{\sigma}$ = (3142). En esta situación tenemos al jugador "target" en segunda posición, y el resto de los jugadores cumple el criterio de urgencia decreciente. Tomando $t_1$= 10 podremos analizar en detalle como ha variado el juego.

| ***S*** | ∅ | {1} | {2} | {3} | {4} | {12} | {13} | {14} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*S*)** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 135.000 | 0 | 0 |

| ***S*** | {23} | {24} | {34} | {123} | {124} | {134} | {234} | {1234} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*S*)** | 141.000 | 0 | 0 | 601.000 | 135.000 | 0 | 465.000 | 790.000 |

Tabla 24

Nos encontramos ahora ante un juego monótono y superaditivo, pero que ha dejado de ser convexo. Esto implica que no podremos garantizar que el valor de Shapley esté contenido en el core. El valor de $t_1$ es ahora lo sufientemente grande para que el jugador 1 no incurra en gastos y además sea posible colocar al jugador 3 en primera posición para reducir los gastos totales.

La solución que propone Shapley para esta situación es la siguiente

$$\phi_i = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = (142.080, 320.580, 253.080, 74.250)$$

donde ahora el jugador 1 sí recibe un porcentaje del reparto ya que participa de la gran coalición, los pagos finales quedan ahora como

- $i$=1: 0 – 142.080 = – 142.080 €
- $i$=2: 216.000 – 320.580 = – 104.583 €
- $i$=3: 650.000 – 253.080 = 396.917 €
- $i$=4: 3.240.000 – 74.250 = 3.165.750 €

En este nuevo escenario el jugador 1 que no genera costes en la situación inicial se ve, aún así beneficiado por Shapley al participar en la coalición, además los ahorros generados por los jugadores 3 y 4 permiten compensar al jugador 2 que tampoco tendrá que pagar nada en la situación final, es más embolsa 104.583 €.

Por su parte el nucleolo propone la siguiente solución

$$nuc(v) = (162.500, 266.500, 266.500, 94.500),$$

siendo el pago final resultante

- $i$=1: 0 – 162.500 = – 162.500 €
- $i$=2: 216.000 – 266.500 = – 50.500 €
- $i$=3: 650.000 – 266.500 = 383.500 €
- $i$=4: 3.240.000 – 94.500 = 3.145.500 €

que es bastante similar a lo propuesto por Shapley como podemos apreciar gráficamente en la siguiente figura, la que además nos indica que el valor de Shapley en este caso está en el core.

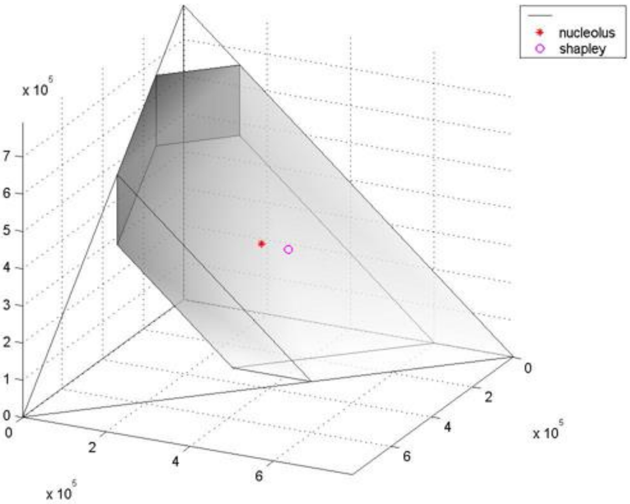


Figura 10

Cuando aumentamos $t_1$ hasta encontrarnos en el rango entre $t_1$= 12 y $t_1$ = 13 alcanzamos una de las situaciones más interesantes, el orden que genera menores gastos es el $\tilde{\sigma}$ = (4132), donde los jugadores normales incumplen el criterio de urgencia decreciente. Tomaremos $t_1$= 12 para analizar su función característica.

| ***S*** | ∅ | {1} | {2} | {3} | {4} | {12} | {13} | {14} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*S*)** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 135.000 | 0 | 0 |

| ***S*** | {23} | {24} | {34} | {123} | {124} | {134} | {234} | {1234} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*S*)** | 141.000 | 0 | 0 | 601.000 | 135.000 | 0 | 465.000 | 875.000 |

Tabla 25

Nos encontramos de nuevo ante un juego que no es convexo y por tanto no sabremos de antemano si el valor de Shapley estará contenido dentro del core, habremos de calcularlo para salir de dudas. Resulta que con el jugador 4 al principio de la secuencia es cuando se generan menores gastos totales, aunque la situación cambia en el intervalo. Para $t_1$= 12 el jugador 1 “target” genera gastos, mientras que para $t_1$ = 13 el jugador 1 “target” ya puede ocupar la segunda posición de la secuencia sin incurrir gastos.

La solución que propone Shapley para esta situación es la siguiente

$$\phi_i = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = (163.330, 341.830, 274.330, 95.500),$$

que hace que los gastos finales de cada jugador queden como mostramos a continuación

- $i$=1: 0 – 163.333 = – 163.333 €
- $i$=2: 216.000 – 341.833 = – 125.833 €
- $i$=3: 650.000 – 274. 333 = 375.667 €
- $i$=4: 3.240.000 – 95.500 = 3.144.500 €

Hay muy poca variación respecto a la situación anterior, vemos que el jugador 1 aumenta ligeramente sus beneficios al haber aumentado los de la coalición.

El nucleolo, por su parte, propone repartir el beneficio como indica el siguiente vector

$$nuc(v) = (205.000, 266.500, 266.500, 137.000),$$

de forma que los costes finales quedarían

- $i$=1: 0 – 205.000 = – 205.000 €
- $i$=2: 216.000 – 266.500 = – 50.500 €
- $i$=3: 650.000 – 266.500 = 383.500 €
- $i$=4: 3.240.000 – 137.000 = 3.103.000 €

Ambos conceptos de solución reparten los beneficios de tal manera que los jugadores 1 y 2, que retroceden 1 y 2 posiciones respectivamente, no paguen en la situación final, siendo el jugador 4, el gran beneficiado, el que pague la mayor parte del gasto total.

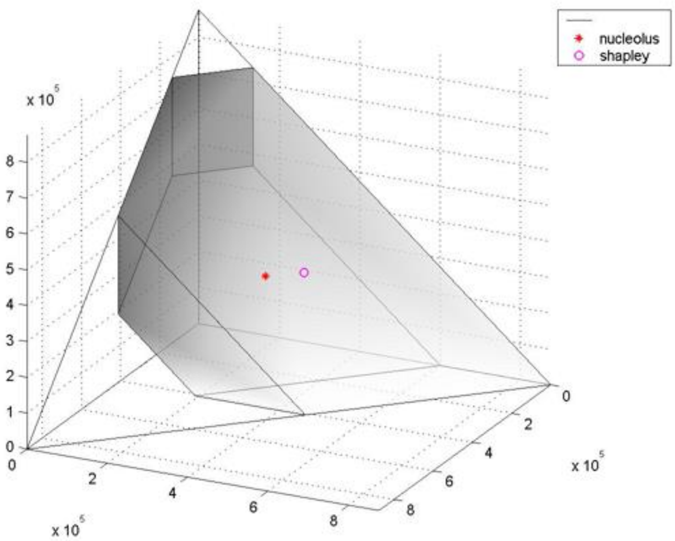


Figura 11

Vemos que en general las soluciones suelen ser muy parecidas, en este caso observamos que el nucleolo beneficia ligeramente más al jugador 1 que al 2 comparando respecto al valor de Shapley. Ambas soluciones quedan cercanas en el gráfico y contenidas dentro del core.

Al continuar aumentando el valor de $t_1$, en concreto entre $t_1$ = 14 y $t_1$ = 17 aparece una nueva situación donde el orden que genera menores gastos resulta ser $\tilde{\sigma}$ = (3412) de nuevo el jugador “target” no está ni al principio ni al final, pero en este caso volvemos a tener que los jugadores normales si se ordenan bajo el criterio de urgencia decreciente. Tomamos un tiempo “target” contenido en este rango para analizar su función característica, por ejemplo, $t_1$ = 15. Con este valor la función característica queda así

| ***S*** | ∅ | {1} | {2} | {3} | {4} | {12} | {13} | {14} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*S*)** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 135.000 | 0 | 0 |

| ***S*** | {23} | {24} | {34} | {123} | {124} | {134} | {234} | {1234} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*S*)** | 141.000 | 0 | 0 | 601.000 | 135.000 | 0 | 465.000 | 1.690.000 |

Tabla 26

El juego recupera de nuevo la convexidad que, recordemos, garantiza que Shapley pertenezca al core. En este caso el vector propuesto por Shapley es el siguiente

$$\phi_i = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = (367.080, 545.580, 478.080, 299.250),$$

y, por tanto, los costes asociados a cada jugador en esta situación

- $i$=1: 0 – 367.080 = – 367.080 €
- $i$=2: 216.000 – 545.580 = – 329.583€
- $i$=3: 650.000 – 478.080 = 171.917 €
- $i$=4: 3.240.000 – 299.250 = 2.940.750 €.

Y el nucleolo tiene la siguiente forma

$$nuc(v) = (422.500, 422.500, 422.500, 422.500),$$

que genera a cada jugador unos gastos totales muy parecidos:

- $i$=1: 0 – 422.500 = – 422.500 €
- $i$=2: 216.000 – 422.500 = – 206.500 €
- $i$=3: 650.000 – 422.500 = 227.500 €
- $i$=4: 3.240.000 – 422.500 = 2.817.500 €.

Mostramos, de nuevo, la representación de la situación en el espacio vectorial

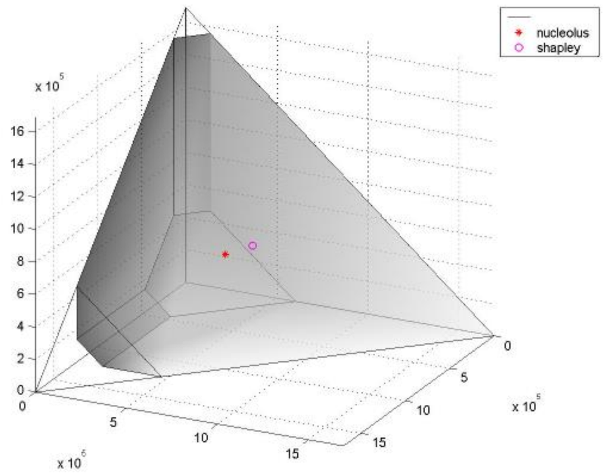


Figura 12

Damos paso ahora al análisis del último escenario al que da lugar esta situación secuencial, para un tiempo "target" mayor que 18, vemos que el orden de menores costes totales se genera colocando al jugador 1 en última posición, $\tilde{\sigma}$ = (3421), el resto de los jugadores, los jugadores normales cumplen con lo establecido, es decir, están de nuevo ordenados según el criterio de urgencia decreciente. La función característica de este último caso es la siguiente

| ***S*** | ∅ | {1} | {2} | {3} | {4} | {12} | {13} | {14} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*S*)** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 135.000 | 0 | 0 |

| ***S*** | {23} | {24} | {34} | {123} | {124} | {134} | {234} | {1234} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***v*(*S*)** | 141.000 | 0 | 0 | 601.000 | 135.000 | 0 | 465.000 | 1.825.000 |

Tabla 27

De nuevo estamos ante un juego convexo, además de monótono y superaditivo como el resto, el valor de Shapley es

$$\phi_i = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = (400.830, 579.330, 511.830, 333.000),$$

Siendo los gastos de cada jugador según Shapley

- $i$=1: 0 – 400.830 = – 400.830 €
- $i$=2: 216.000 – 579.330 = – 363.330 €
- $i$=3: 650.000 – 511.830 = 138.170 €
- $i$=4: 3.240.000 – 333.000 = 2.907.000 €.

Mientras que el nucleolo toma la siguiente forma

$$nuc(v) = (456.250, 456.250, 456.250, 456.250),$$

y los costes de cada jugador quedan

- $i$=1: 0 – 456.250 = – 456.250 €
- $i$=2: 216.000 – 456.250 = – 240.250 €
- $i$=3: 650.000 – 456.250 = 193.750 €
- $i$=4: 3.240.000 – 456.250 = 2.783.750 €.

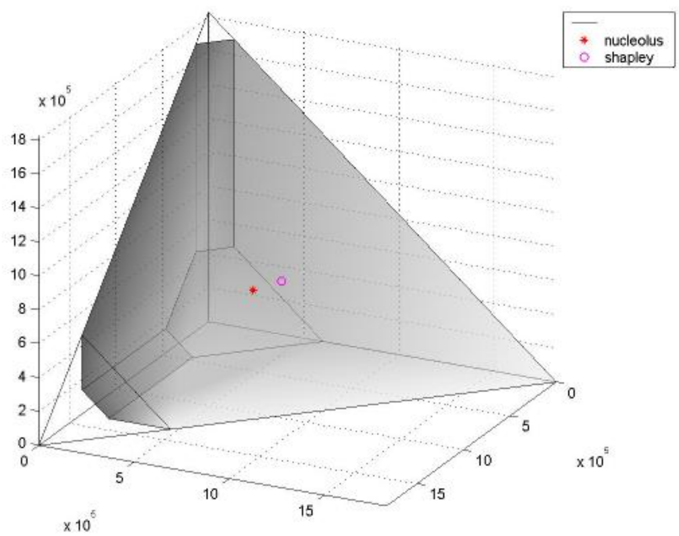


Figura 13

Consideramos oportuno sintetizar toda la información recopilada en una tabla para tener una visión general de lo ocurrido en esta aplicación. En primer lugar, hemos de aclarar que en los rangos de $t_1$ que hemos señalado, tanto la función característica como el orden que menores gastos genera se mantienen, es por eso por lo que podemos analizar la situación generando los resultados para solo un valor de $t_1$.

| Rango de $t_1$ | Valor analizado | Orden | Convexidad | Criterio urgencia | $TC(\tilde{\sigma})$ | $TC(\tilde{\sigma}) - TC(\sigma_0)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 - 6 | $t_1 = 4$ | $\tilde{\sigma}$= (1342) | ✓ | ✓ | 3.971.000 | 465.000 |
| 7 - 11 | $t_1 = 10$ | $\tilde{\sigma}$= (3142) | × | ✓ | 3.316.000 | 790.000 |
| 12 - 13 | $t_1 = 12$ | $\tilde{\sigma}$= (4132) | × | × | 3.231.000 | 875.000 |
| 14 - 17 | $t_1 = 15$ | $\tilde{\sigma}$= (3412) | ✓ | ✓ | 2.416.000 | 1.690.000 |
| 18 - ∞ | $t_1 = 18$ | $\tilde{\sigma}$= (3421) | ✓ | ✓ | 2.281.000 | 1.825.000 |

Tabla 28

Observando la tabla 21 podemos deducir que la situación inicial no era un escenario tan desfavorable para la coalición, su vector de urgencias que tiene la siguiente forma

$$u = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (66.000, 9.000, 32.500, 22.500),$$

nos muestra que, si hubiéramos estado en condiciones normales, con tan solo dos intercambios entre jugadores $MP(\sigma_0) = \{(2, 3), (2, 4)\}$, hubiésemos alcanzado el orden con minímos costes que sigue el criterio de urgencia decreciente. Sin embargo, la participación de un jugador "target" cambia el comportamiento y los planteamientos del modelo.

El $t_1$ determina de cuanto tiempo se dispone sin que el jugador 1 tenga que pagar costes de ningún tipo, mientras que el resto de jugadores sí están generando pérdidas como en la situación general, esto hace que el planteamiento sea el siguiente, se intentará que el jugador 1 retroceda tantas posiciones en la secuencia como sea posible aprovechando que no genera costes hasta un determinado momento y se intentará ordenar a los jugadores restantes de forma que generen los menores gastos totales posibles, para lo que habrá que tener en cuenta que $p_1 = 5$, $p_2 = 3$, $p_3 = 2$ y $p_4 = 8$.

Ahora podemos comprobar, ayudándonos de la tabla, que para el primer rango de tiempo donde $t_1$ como máximo alcanza el valor de 6 días, no es posible procesar el pedido de ningún otro jugador ya que el tiempo del jugador 1 ocupa 5 de esos días. Sin embargo, en el segundo rango, el tiempo "target" hace que en un primer momento ya sea posible procesar al jugador 3 que conlleva dos días, antes que al 1 y continúa aumentando hasta ser de 11 días donde existe la posibilidad de procesar tanto al jugador 2 como al jugador 3, siendo necesario estudiar cual beneficiará en mayor medida a la gran coalición

$$TC\,(2134) = 3.971.000\ €$$
$$TC\,(3142) = 3.316.000\ €$$

Vemos que continúa siendo más rentable para $t_1 = 10$ situar al jugador 3 en primera posición, lo cual asociamos a una urgencia casi tres veces mayor que la del jugador 2 ($u_2 = 9.000$, $u_3 = 32.500$).

Una de las situaciones más interesantes ocurre cuando el tiempo "target" es de entre 12 y 13 días, esta situación en la que el jugador 4 tiene la posibilidad de colocarse antes que el 1 y es lo que sucede, incumpliéndose de esta manera el criterio de urgencia decreciente entre los jugadores no "target". Además, en esta situación el juego pierde la propiedad de convexidad, aunque aún así Shapley estará finalmente contenido en el core.

Si continuamos aumentando el número de días en los que el jugador 1 no incurre en gastos, comprobamos que la tendencia será colocar según el criterio de urgencia decreciente a cuantos jugadores sea posible para ser procesados antes que el jugador "target".

Resulta interesante también comprobar, a través de las representaciones, que a medida que vamos aumentando el valor del tiempo "target" la región de admisiblidad definida por el core se va haciendo más amplia, es decir, ofreciendo un mayor número de soluciones que serían admitidas por los jugadores de la coalición.

En definitiva, la aplicación nos ha permitido comprobar que cuando hay un jugador "target" los juegos pueden perder la propiedad de convexidad y que los jugadores normales no siempre serán ordenados según el criterio de urgencia decreciente, aunque si nos encontramos en situaciones en las que el jugador "target" ocupe el primer o el último lugar de la secuencia si podemos afirmar que estarán ordenados según este criterio.

# 5 CONCLUSIONES

En este trabajo se han abordado dos situaciones secuenciales mediante la Teoría de Juegos Cooperativos. Esta disciplina nos ha permitido visualizar las deficiencias del orden inicialmente establecido y nos ha proporcionado las herramientas necesarias no solo para alcanzar la situación más beneficiosa para el conjunto de los jugadores sino también para distribuir dicho beneficio, en nuestro caso económico, de forma que todos queden satisfechos.

El reparto de los beneficios es considerado el gran problema de la Teoría de Juegos y aunque son los jugadores, y no nosotros, los que deben acordar previamente cómo será dicho reparto, proporcionamos en este estudio varios conceptos de solución candidatos que son ampliamente utilizados.

Las situaciones secuenciales tienen gran relevancia en el ámbito de la ingeniería y las que aquí estudiamos cobran ahora más interés que nunca debido a la paralización del sector productivo que ha provocado esta pandemia. Por tanto, llegamos a la conclusión de que el estudio de este tipo de situaciónes mediante la Teoría de Juegos y la cooperación entre los jugadores afectados puede tener resultados muy positivos y conllevar un ahorro ecónomico para el conjunto de los jugadores.

# 6 ANEXO

A continuación, mostramos la hoja de cálculo implementada para la realización de los cálculos necesarios. Mediante fórmulas de búsqueda y comparación, esta hoja nos proporciona costes totales de cada jugador en cada orden posible y nos indica si cumple el criterio de urgencia decreciente propuesto por Smith. En verde quedará señalado el mínimo coste total para su identificación.

Los datos necesarios para el estudio de un juego serán el vector de costes y el vector de tiempos.

Introducir aquí los datos de la situación secuencial:

| | | HUA | SAM | OPP | XIA |
|---|---|---|---|---|---|
| *i* | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *pi* | | 3 | 8 | 2 | 5 |
| $\alpha$ | | 27.000 | 180.000 | 65.000 | 330.000 |
| | ui | 9.000 | 22.500 | 32.500 | 66.000 |

| | |
|---|---|
| 1234 | 8.846.000 |
| 1243 | 8.511.000 |
| 1324 | 8.686.000 |
| 1342 | 6.946.000 |
| 1423 | 6.771.000 |
| 1432 | 6.611.000 |
| 2134 | 8.522.000 |
| 2143 | 8.187.000 |
| 2314 | 8.381.000 |
| 2341 | 7.526.000 |
| 2431 | 6.201.000 |
| 2413 | 7.332.000 |
| 3124 | 8.545.000 |
| 3142 | 6.805.000 |
| 3214 | 8.221.000 |
| 3241 | 7.366.000 |
| 3412 | 5.950.000 |
| 3421 | 5.626.000 |
| 4123 | 5.916.000 |
| 4132 | 5.756.000 |
| 4213 | 5.592.000 |
| 4231 | 5.451.000 |
| 4312 | 5.615.000 |
| 4321 | 5.291.000 |

Para 4 jugadores estas serán todas las combinaciones posibles:

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 3 | 11 | 13 | 18 |
| ci | 81.000 | 1.980.000 | 845.000 | 5.940.000 |
| ui | 9.000 | 22.500 | 32.500 | 165.000 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| TC | | 8.846.000 | | |

| | 1 | 2 | 4 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 3 | 11 | 16 | 18 |
| ci | 81.000 | 1.980.000 | 5.280.000 | 1.170.000 |
| ui | 9.000 | 22.500 | 165.000 | 32.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| TC | | 8.511.000 | | |

| | 1 | 3 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 3 | 5 | 13 | 18 |
| ci | 81.000 | 325.000 | 2.340.000 | 5.940.000 |
| ui | 9.000 | 32.500 | 22.500 | 165.000 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| TC | | 8.686.000 | | |

| | 1 | 3 | 4 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 3 | 5 | 10 | 18 |
| ci | 81.000 | 325.000 | 3.300.000 | 3.240.000 |
| ui | 9.000 | 32.500 | 165.000 | 22.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| TC | | 6.946.000 | | |

| | 1 | 4 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 3 | 8 | 16 | 18 |
| ci | 81.000 | 2.640.000 | 2.880.000 | 1.170.000 |
| ui | 9.000 | 165.000 | 22.500 | 32.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| TC | | 6.771.000 | | |

| | 1 | 4 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 3 | 8 | 10 | 18 |
| ci | 81.000 | 2.640.000 | 650.000 | 3.240.000 |
| ui | 9.000 | 165.000 | 32.500 | 22.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| TC | | 6.611.000 | | |

| | 2 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 8 | 11 | 13 | 18 |
| ci | 1.440.000 | 297.000 | 845.000 | 5.940.000 |
| ui | 22.500 | 9.000 | 32.500 | 66.000 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| TC | | 8.522.000 | | |

| | 2 | 1 | 4 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 8 | 11 | 16 | 18 |
| ci | 1.440.000 | 297.000 | 5.280.000 | 1.170.000 |
| ui | 22.500 | 9.000 | 66.000 | 32.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| TC | | 8.187.000 | | |

| | 2 | 3 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 8 | 10 | 13 | 18 |
| ci | 1.440.000 | 650.000 | 351.000 | 5.940.000 |
| ui | 22.500 | 32.500 | 9.000 | 66.000 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| TC | | 8.381.000 | | |

| | 2 | 3 | 4 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 8 | 10 | 15 | 18 |
| ci | 1.440.000 | 650.000 | 4.950.000 | 486.000 |
| ui | 22.500 | 32.500 | 66.000 | 9.000 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| TC | | 7.526.000 | | |

| | 2 | 4 | 3 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 8 | 10 | 15 | 18 |
| ci | 1.440.000 | 3.300.000 | 975.000 | 486.000 |
| ui | 22.500 | 66.000 | 32.500 | 9.000 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| TC | | 6.201.000 | | |

| 2 | 4 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| 8 | 13 | 16 | 18 |
| 1.440.000 | 4.290.000 | 432.000 | 1.170.000 |
| 22.500 | 66.000 | 9.000 | 32.500 |
| | NO CUMPLE | | |
| | 7.332.000 | | |

| | 3 | 2 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 2 | 10 | 13 | 18 |
| ci | 130.000 | 1.800.000 | 351.000 | 5.940.000 |
| ui | 32.500 | 22.500 | 9.000 | 66.000 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| TC | | 8.221.000 | | |

| 3 | 2 | 4 | 1 |
|---|---|---|---|
| 2 | 10 | 15 | 18 |
| 130.000 | 1.800.000 | 4.950.000 | 486.000 |
| 32.500 | 22.500 | 66.000 | 9.000 |
| | NO CUMPLE | | |
| | 7.366.000 | | |

| | 3 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 2 | 5 | 13 | 18 |
| ci | 130.000 | 135.000 | 2.340.000 | 5.940.000 |
| ui | 32.500 | 9.000 | 22.500 | 66.000 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| TC | | 8.545.000 | | |

| 3 | 1 | 4 | 2 |
|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 10 | 18 |
| 130.000 | 135.000 | 3.300.000 | 3.240.000 |
| 32.500 | 9.000 | 66.000 | 22.500 |
| | NO CUMPLE | | |
| | 6.805.000 | | |

| | 3 | 4 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 2 | 7 | 10 | 18 |
| ci | 130.000 | 2.310.000 | 270.000 | 3.240.000 |
| ui | 32.500 | 66.000 | 9.000 | 22.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| TC | | 5.950.000 | | |

| 3 | 4 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 15 | 18 |
| 130.000 | 2.310.000 | 2.700.000 | 486.000 |
| 32.500 | 66.000 | 22.500 | 9.000 |
| | NO CUMPLE | | |
| | 5.626.000 | | |

| | 4 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 5 | 8 | 16 | 18 |
| ci | 1.650.000 | 216.000 | 2.880.000 | 1.170.000 |
| ui | 66.000 | 9.000 | 22.500 | 32.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| TC | | 5.916.000 | | |

| 4 | 1 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 10 | 18 |
| 1.650.000 | 216.000 | 650.000 | 3.240.000 |
| 66.000 | 9.000 | 32.500 | 22.500 |
| | NO CUMPLE | | |
| | 5.756.000 | | |

| | 4 | 2 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 5 | 13 | 16 | 18 |
| ci | 1.650.000 | 2.340.000 | 432.000 | 1.170.000 |
| ui | 66.000 | 22.500 | 9.000 | 32.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| TC | | 5.592.000 | | |

| 4 | 2 | 3 | 1 |
|---|---|---|---|
| 5 | 13 | 15 | 18 |
| 1.650.000 | 2.340.000 | 975.000 | 486.000 |
| 66.000 | 22.500 | 32.500 | 9.000 |
| | NO CUMPLE | | |
| | 5.451.000 | | |

| | 4 | 3 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 5 | 7 | 10 | 18 |
| ci | 1.650.000 | 455.000 | 270.000 | 3.240.000 |
| ui | 66.000 | 32.500 | 9.000 | 22.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| TC | | 5.615.000 | | |

| 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|
| 5 | 7 | 15 | 18 |
| 1.650.000 | 455.000 | 2.700.000 | 486.000 |
| 66.000 | 32.500 | 22.500 | 9.000 |
| | CUMPLE | | |
| | 5.291.000 | | |

Para el cálculo de la función característica será necesario tener todos los ordenes admisibles para los que participa cada coalición y comparar los costes totales de cada orden con los del orden inicial.

| $S$ | **Combinaciones admisibles** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1234 | – | – | – | – | – |
| {1} | 1234 | – | – | – | – | – |
| {2} | 1234 | – | – | – | – | – |
| {3} | 1234 | – | – | – | – | – |
| {4} | 1234 | – | – | – | – | – |
| {12} | 1234 | 2134 | – | – | – | – |
| {13} | 1234 | – | – | – | – | – |
| {14} | 1234 | – | – | – | – | – |
| {23} | 1234 | 1324 | – | – | – | – |
| {24} | 1234 | – | – | – | – | – |
| {34} | 1234 | 1243 | – | – | – | – |
| {123} | 1234 | 1324 | 2134 | 2314 | 3214 | 3124 |
| {124} | 1234 | 2134 | – | – | – | – |
| {134} | 1234 | 1243 | – | – | – | – |
| {234} | 1234 | 1243 | 1324 | 1342 | 1423 | 1432 |
| {1234} | Todas las combinaciones | | | | | |

Siendo el valor final en la función característica el máximo de todos ellos para cada coalición.

| $S$ | $v(S)$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | | | | | |
| {1} | 0 | | | | | | | | |
| {2} | 0 | | | | | | | | |
| {3} | 0 | | | | | | | | |
| {4} | 0 | | | | | | | | |
| {12} | 324.000 | 324.000 | | | | | | | |
| {13} | 0 | 0 | | | | | | | |
| {14} | 0 | 0 | | | | | | | |
| {23} | 160.000 | 160.000 | | | | | | | |
| {24} | 0 | 0 | | | | | | | |
| {34} | 335.000 | 335.000 | | | | | | | |
| {123} | 625.000 | 160.000 | 324.000 | 465.000 | 625.000 | 301.000 | | | |
| {124} | 324.000 | 324.000 | | | | | | | |
| {134} | 335.000 | 335.000 | | | | | | | |
| {234} | 2.235.000 | 335.000 | 160.000 | 1.900.000 | 2.075.000 | 2.235.000 | | | |
| {1234} | 3.555.000 | 335.000 | 160.000 | 1.900.000 | 2.075.000 | 2.235.000 | 324.000 | 659.000 | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| 465.000 | 1.320.000 | 2.645.000 | 1.514.000 | 301.000 | 2.041.000 | 625.000 | 1.480.000 | 2.896.000 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| 3.220.000 | 2.930.000 | 3.090.000 | 3.254.000 | 3.395.000 | 3.231.000 | 3.555.000 |

Finalmente, esta función característica es utilizada para calcular el valor de Shapley implementando la fórmula que él propuso basada en las contribuciones marginales de cada jugador.

| | |
|---|---|
| q(1) | 0,25 |
| q(2) | 0,083333333 |
| q(3) | 0,083333333 |
| q(4) | 0,25 |

| *S* | *v(S)* |
|---|---|
| 0 | 0 |
| {1} | 0 |
| {2} | 0 |
| {3} | 0 |
| {4} | 0 |
| {12} | 324.000 |
| {13} | 0 |
| {14} | 0 |
| {23} | 160.000 |
| {24} | 0 |
| {34} | 335.000 |
| {123} | 625.000 |
| {124} | 324.000 |
| {134} | 335.000 |
| {234} | 2.235.000 |
| {1234} | 3.555.000 |

| | |
|---|---|
| $\phi 1$ | 422.750 |
| $\phi 2$ | 1.082.750 |
| $\phi 3$ | 1.088.250 |
| $\phi 4$ | 961.250 |

| | |
|---|---|
| $\phi N$ | 3.555.000 |

De esta manera hemos podido encontrar de forma sencilla el enunciado del problema más conveniente para el desarrollo y análisis de la teoría, que ha sido especialmente útil en la aplicación con jugador “target” que mostramos ahora.

Para el caso "target" hemos implementado algunos cambios en la hoja principal destinada al cálculo de los costes. Ahora también será un dato necesario el valor del tiempo "target".

Introducir aquí los datos de la situación secuencial:

| | | XIA | HUA | OPP | SAM |
|---|---|---|---|---|---|
| *i* | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *pi* | | 5 | 3 | 2 | 8 |
| α | | 330.000 | 27.000 | 65.000 | 180.000 |
| *ti* | | 10 | | 0 | 0 |
| | ui | 66.000 | 9.000 | 32.500 | 22.500 |

Mediante una comparación entre el tiempo "target" y el tiempo de término para cada jugador en cada orden veremos si el jugador "target" se mantiene en coste nulo o comienza a pagar como el resto de los jugadores. Cuando el tiempo "target" es menor que el tiempo de término el resultado del coste es un valor negativo y el algoritmo asociará finalmente un coste nulo.

Presentaremos el caso para $t_1 = 10$.

| | |
|---|---|
| 1234 | 4.106.000 |
| 1243 | 4.266.000 |
| 1324 | 3.965.000 |
| 1342 | 3.641.000 |
| 1423 | 3.942.000 |
| 1432 | 3.801.000 |
| 2134 | 3.971.000 |
| 2143 | 4.131.000 |
| 2314 | 3.646.000 |
| 2341 | 5.386.000 |
| 2431 | 5.546.000 |
| 2413 | 5.211.000 |
| 3124 | 3.640.000 |
| 3142 | 3.316.000 |
| 3214 | 3.505.000 |
| 3241 | 5.245.000 |
| 3412 | 4.066.000 |
| 3421 | 4.921.000 |
| 4123 | 4.032.000 |
| 4132 | 3.891.000 |
| 4213 | 4.887.000 |
| 4231 | 5.222.000 |
| 4312 | 4.226.000 |
| 4321 | 5.081.000 |

Para 4 jugadores estas serán todas las combinaciones posibles:

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 5 | 8 | 10 | 18 |
| ci | -1.650.000 | 216.000 | 650.000 | 3.240.000 |
| ui | 66.000 | 9.000 | 32.500 | 90.000 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 0 | 216.000 | 650.000 | 3.240.000 |
| TC | | 4.106.000 | | |

| | 1 | 2 | 4 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 5 | 8 | 16 | 18 |
| ci | -1.650.000 | 216.000 | 2.880.000 | 1.170.000 |
| ui | 66.000 | 9.000 | 90.000 | 32.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 0 | 216.000 | 2.880.000 | 1.170.000 |
| TC | | 4.266.000 | | |

| | 1 | 3 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 5 | 7 | 10 | 18 |
| ci | -1.650.000 | 455.000 | 270.000 | 3.240.000 |
| ui | 66.000 | 32.500 | 9.000 | 90.000 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 0 | 455.000 | 270.000 | 3.240.000 |
| TC | | 3.965.000 | | |

| | 1 | 3 | 4 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 5 | 7 | 15 | 18 |
| ci | -1.650.000 | 455.000 | 2.700.000 | 486.000 |
| ui | 66.000 | 32.500 | 90.000 | 9.000 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 0 | 455.000 | 2.700.000 | 486.000 |
| TC | | 3.641.000 | | |

| | 1 | 4 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 5 | 13 | 16 | 18 |
| ci | -1.650.000 | 2.340.000 | 432.000 | 1.170.000 |
| ui | 66.000 | 90.000 | 9.000 | 32.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 0 | 2.340.000 | 432.000 | 1.170.000 |
| TC | | 3.942.000 | | |

| | 1 | 4 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 5 | 13 | 15 | 18 |
| ci | -1.650.000 | 2.340.000 | 975.000 | 486.000 |
| ui | 66.000 | 90.000 | 32.500 | 9.000 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 0 | 2.340.000 | 975.000 | 486.000 |
| TC | | 3.801.000 | | |

| | 2 | 3 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 3 | 5 | 10 | 18 |
| ci | 81.000 | 325.000 | 0 | 3.240.000 |
| ui | 9.000 | 32.500 | 66.000 | 22.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 81.000 | 325.000 | 0 | 3.240.000 |
| TC | | 3.646.000 | | |

| | 2 | 3 | 4 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 3 | 5 | 13 | 18 |
| ci | 81.000 | 325.000 | 2.340.000 | 2.640.000 |
| ui | 9.000 | 32.500 | 22.500 | 66.000 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 81.000 | 325.000 | 2.340.000 | 2.640.000 |
| TC | | 5.386.000 | | |

| | 2 | 4 | 3 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 3 | 11 | 13 | 18 |
| ci | 81.000 | 1.980.000 | 845.000 | 2.640.000 |
| ui | 9.000 | 22.500 | 32.500 | 66.000 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 81.000 | 1.980.000 | 845.000 | 2.640.000 |
| TC | | 5.546.000 | | |

| | 2 | 4 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 3 | 11 | 16 | 18 |
| ci | 81.000 | 1.980.000 | 1.980.000 | 1.170.000 |
| ui | 9.000 | 22.500 | 66.000 | 32.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 81.000 | 1.980.000 | 1.980.000 | 1.170.000 |
| TC | | 5.211.000 | | |

| | 2 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 3 | 8 | 10 | 18 |
| ci | 81.000 | -660.000 | 650.000 | 3.240.000 |
| ui | 9.000 | 66.000 | 32.500 | 22.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 81.000 | 0 | 650.000 | 3.240.000 |
| TC | | 3.971.000 | | |

| | 2 | 1 | 4 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 3 | 8 | 16 | 18 |
| ci | 81.000 | -660.000 | 2.880.000 | 1.170.000 |
| ui | 9.000 | 66.000 | 22.500 | 32.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 81.000 | 0 | 2.880.000 | 1.170.000 |
| TC | | 4.131.000 | | |

| | 3 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 2 | 7 | 10 | 18 |
| ci | 130.000 | -990.000 | 270.000 | 3.240.000 |
| ui | 32.500 | 66.000 | 9.000 | 22.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 130.000 | 0 | 270.000 | 3.240.000 |
| TC | | 3.640.000 | | |

| 3 | 1 | 4 | 2 |
|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 15 | 18 |
| 130.000 | -990.000 | 2.700.000 | 486.000 |
| 32.500 | 66.000 | 22.500 | 9.000 |
| | NO CUMPLE | | |
| 130.000 | 0 | 2.700.000 | 486.000 |
| | 3.316.000 | | |

| | 3 | 2 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 2 | 5 | 10 | 18 |
| ci | 130.000 | 135.000 | 0 | 3.240.000 |
| ui | 32.500 | 9.000 | 66.000 | 22.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 130.000 | 135.000 | 0 | 3.240.000 |
| TC | | 3.505.000 | | |

| 3 | 2 | 4 | 1 |
|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 13 | 18 |
| 130.000 | 135.000 | 2.340.000 | 2.640.000 |
| 32.500 | 9.000 | 22.500 | 66.000 |
| | NO CUMPLE | | |
| 130.000 | 135.000 | 2.340.000 | 2.640.000 |
| | 5.245.000 | | |

| | 3 | 4 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 2 | 10 | 15 | 18 |
| ci | 130.000 | 1.800.000 | 1.650.000 | 486.000 |
| ui | 32.500 | 22.500 | 66.000 | 9.000 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 130.000 | 1.800.000 | 1.650.000 | 486.000 |
| TC | | 4.066.000 | | |

| 3 | 4 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|
| 2 | 10 | 13 | 18 |
| 130.000 | 1.800.000 | 351.000 | 2.640.000 |
| 32.500 | 22.500 | 9.000 | 66.000 |
| | NO CUMPLE | | |
| 130.000 | 1.800.000 | 351.000 | 2.640.000 |
| | 4.921.000 | | |

| | 4 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 8 | 13 | 16 | 18 |
| ci | 1.440.000 | 990.000 | 432.000 | 1.170.000 |
| ui | 22.500 | 66.000 | 9.000 | 32.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 1.440.000 | 990.000 | 432.000 | 1.170.000 |
| TC | | 4.032.000 | | |

| 4 | 1 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|
| 8 | 13 | 15 | 18 |
| 1.440.000 | 990.000 | 975.000 | 486.000 |
| 22.500 | 66.000 | 32.500 | 9.000 |
| | NO CUMPLE | | |
| 1.440.000 | 990.000 | 975.000 | 486.000 |
| | 3.891.000 | | |

| | 4 | 2 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 8 | 11 | 16 | 18 |
| ci | 1.440.000 | 297.000 | 1.980.000 | 1.170.000 |
| ui | 22.500 | 9.000 | 66.000 | 32.500 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 1.440.000 | 297.000 | 1.980.000 | 1.170.000 |
| TC | | 4.887.000 | | |

| 4 | 2 | 3 | 1 |
|---|---|---|---|
| 8 | 11 | 13 | 18 |
| 1.440.000 | 297.000 | 845.000 | 2.640.000 |
| 22.500 | 9.000 | 32.500 | 66.000 |
| | NO CUMPLE | | |
| 1.440.000 | 297.000 | 845.000 | 2.640.000 |
| | 5.222.000 | | |

| | 4 | 3 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| Ci | 8 | 10 | 15 | 18 |
| ci | 1.440.000 | 650.000 | 1.650.000 | 486.000 |
| ui | 22.500 | 32.500 | 66.000 | 9.000 |
| Smith | | NO CUMPLE | | |
| ci target | 1.440.000 | 650.000 | 1.650.000 | 486.000 |
| TC | | 4.226.000 | | |

| 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|
| 8 | 10 | 13 | 18 |
| 1.440.000 | 650.000 | 351.000 | 2.640.000 |
| 22.500 | 32.500 | 9.000 | 66.000 |
| | NO CUMPLE | | |
| 1.440.000 | 650.000 | 351.000 | 2.640.000 |
| | 5.081.000 | | |

# REFERENCIAS

## Referencias literarias


[1] J. Redondo and L. Segura, “Resolución de Problemas de Bancarrota usando reglas y juegos cooperativos”. Trabajo Fin de Master, 2018.

[2] M. Estela Sánchez Rodríguez, “Juegos cooperativos que describen modelos en los que el orden es inherente al problema”. Tesis doctoral, 1999.

[3] Driessen, T.S.H., “Cooperative Games, Solutions and Applications”. Theory and Decision Library C, 3. Springer-Netherlands, 1988.

[4] Gonzalez-Díaz, J., García-Jurado, I. y Fiestras-Janeiro, G.M. “An Introductory Course on Mathematical Game Theory”. Graduate Studies in Mathematics, 115. American Mathematical Society y Real Sociedad Matemática Española, 2010.

[5] S. R. Hogeweij, “Sequencing Games with a Target Player”. Master Thesis Mathematics, 2017.

[6] H. Peters, “Games Theory, A Multi-Leveled Approach”. Springer Science & Business Media, 2008.

## Referencias electrónicas

https://www.businessinsider.es/coronavirus-cierre-fabricas-empresas-587053
https://www.economiadigital.es/tecnologia-y-tendencias/coronavirus-escasez-de-moviles-iphone-samsung-y-huawei-por-el-covid-19_20040666_102.html
https://www.economiadigital.es/tecnologia-y-tendencias/como-el-coronavirus-esta-afectado-a-apple-segun-tim-cook_20039622_102.html
https://www.applesfera.com/apple/disenado-en-california-fabricado-en-china-cambiara-eso-algun-dia-actualizado-video-explicativo
https://www.xataka.com/moviles/samsung-cambia-china-por-vietnam-para-ser-mas-rentable
https://www.xatakamovil.com/mercado/donde-estan-las-principales-las-fabricas-de-smartphones-y-componentes-del-mundo
https://lamanzanamordida.net/resultados-financieros-apple-q4-2019/
https://elandroidelibre.elespanol.com/2019/05/huawei-crecio-ventas-2019-samsung-xiaomi-apple-bajaron.html
https://www.expansion.com/economia-digital/companias/2019/03/19/5c90eefe22601d5b138b460a.html
https://www.huawei.com/es/press-events/news/es/2019/huawei-reporta-ingresos-anuales-por-valor-721200-millones-yuanes
https://www.xataka.com/moviles/que-hacen-las-marcas-espanolas-de-smartphones-ademas-de-ponerle-el-logo-a-un-movil-fabricado-en-china
https://www.tuotrodiario.com/empresa/2017051968030/fabricantes-iphone/
https://www.muycanal.com/2017/07/20/apple-y-samsung
https://lta.reuters.com/articulo/samsung-china-idLTAKBN1XS1VV-OUSLT
https://www.businessinsider.com/samsung-plans-to-outsource-smartphone-manufacturing-to-china-2019-11?IR=T
https://www.xataka.com/moviles/que-hacen-las-marcas-espanolas-de-smartphones-ademas-de-ponerle-el-logo-a-un-movil-fabricado-en-china
https://elpais.com/economia/2020/02/21/actualidad/1582308700_524581.html
https://andro4all.com/2018/04/beneficios-marcas-android-2018
https://www.clarin.com/mundo/celulares-venden-dia-mundo_0_DMiu7VW6I.html
https://www.mi.com/global/list
https://www.huawei.com/en/?ic_medium=direct&ic_source=surlent

https://www.oppo.com/en/smartphones/

https://www.lasexta.com/tecnologia-tecnoxplora/gadgets/asi-se-hace-tu-movil-dentro-de-la-fabrica-de-huawei_201711085a0306420cf2018c195a4ad4.html

https://andro4all.com/noticias/xiaomi/que-hay-dentro-fabrica-xiaomi

https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1996/mirrlees/facts/>

http://tuglabweb.uvigo.es/TUGlabWEB2/index.php