

## FRECUENCIA NATURAL DE VIBRACIÓN EN UNA VIGA EMPOTRADA-LIBRE OBTENIDA POR EL MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL

Ignacio H. Díaz Valdez<sup>1,2</sup>, Carlos A. Rossit<sup>2,3</sup> y Diana V. Bambill<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>*Estudiante de Ingeniería Civil*

<sup>2</sup>*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Argentina*

<sup>3</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina*

*[ignacio.diaz@uns.edu.ar](mailto:ignacio.diaz@uns.edu.ar), [carossit@criba.edu.ar](mailto:carossit@criba.edu.ar), [dbambill@criba.edu.ar](mailto:dbambill@criba.edu.ar)*

*<http://www.uns.edu.ar/>*

**Palabras Clave:** Algoritmo, Método de cuadratura diferencial, frecuencias naturales, viga empotrada-libre, materiales funcionalmente graduados.

**Resumen.** La resolución de estructuras lineales constituye uno de los pilares de la ingeniería y su cálculo puede llevarse a cabo a partir de distintas metodologías, cada una de ellas asociada a su grado de complejidad y exactitud. Este documento aborda el diseño de un algoritmo basado en el Método de Cuadratura Diferencial (MCD), para determinar las frecuencias naturales de vibración de una viga empotrada-libre. Inicialmente, se discretiza el continuo en un número reducido de puntos o nodos para el cálculo de los coeficientes de peso del método (autovalores del problema) y se incrementa su cantidad en forma progresiva, evaluando su impacto en los resultados obtenidos. Por otro lado, se efectúa un contraste entre las frecuencias naturales arrojadas por esta solución y aquellas determinadas por medio de la resolución analítica de la ecuación diferencial gobernante del problema, con el objeto de determinar el rango de aplicación del MCD en el modelo de viga cantiléver estudiado.

## 1 INTRODUCCIÓN

El estudio de modelos de viga ha sido ampliamente desarrollado a lo largo de los años. Uno de los más empleados, por permitir la resolución de la estructura a partir de una única ecuación diferencial, el modelo desarrollado por D. Bernoulli (Bernoulli, 1735) y posteriormente evaluado por Euler (Euler, 1744), quien determinó las primeras soluciones a la ecuación diferencial.

Es común que el análisis de problemas de la ingeniería requiera de la resolución de ecuaciones diferenciales para las cuales no siempre es posible arribar a una solución analítica exacta. Es por ello que, gracias a las poderosas herramientas computacionales que existen hoy en día, se han podido desarrollar e implementar diversos métodos numéricos con el objeto de aproximarse a la solución exacta.

Para la resolución de estos problemas, el Método de Cuadratura Diferencial (MCD) es una de las técnicas que ha tenido gran auge en las últimas décadas debido al desarrollo de software para la resolución de grandes sistemas de bases de datos. Publicado por R. Bellman (Bellman et al., 1971) y posteriormente desarrollado por C. Shu y B. E. Richards (Shu y Richards, 1992) en la década del 90, el MCD ha demostrado tener un gran potencial para la obtención de soluciones a partir de considerar un dominio conformado por un número finito de nodos, cuya distribución en el espacio dependerá de la ley adoptada. Su aplicación a problemas diversos de mecánica estructural ha sido demostrada hace tiempo (Du et al., 1994)

La posibilidad de transformar una ecuación diferencial en un grupo de ecuaciones lineales compuestas por coeficientes de peso y una función definida para el dominio del elemento que se evalúa, representa una gran ventaja ya que evita recalcular el problema por completo si se varían las condiciones de borde. La razón de esta última afirmación radica en la definición matemática de los coeficientes de peso: éstos son independientes de las condiciones de borde del problema y se calculan a partir de expresiones recursivas que se desarrollan en este trabajo. Por ello una vez calculados los coeficientes de peso, pueden resolverse problemas con diferentes condiciones de vinculación sin necesidad de recalcularlos. Esto representa una importantísima ventaja en relación al tiempo necesario para la resolución de problemas, así como también una reducción en la necesidad de capacidad computacional.

En el presente trabajo se describen los pasos necesarios para desarrollar la solución de un problema estructural simple, poniendo énfasis en la influencia del tipo de mallado y el número de cifras significativas involucradas en la resolución.

## 2 ECUACIÓN GOBERNANTE DEL PROBLEMA

Existen diferentes teorías para el modelado matemático de problemas de vigas, cada una de ellas con su grado de exactitud respecto del problema real. En este trabajo se ha optado por la teoría de Bernoulli-Euler. La ecuación que gobierna el problema de vibraciones en vigas se remonta al año 1734 y fue desarrollada por Daniel Bernoulli (Bernoulli, 1735), sin embargo, su sencillez en la aplicación, sumado a los excelentes resultados que permite obtener, la han consagrado como una de las más utilizadas. Posteriormente, en 1744, Euler (Euler, 1744) determinó las primeras soluciones para los casos de vigas con extremos simplemente apoyados, empotrados y libres.

Para la aplicación de esta interesante teoría, se considera que la viga se constituye como un elemento esbelto cuya relación  $L/h$  es mayor a 10, siendo  $L$  la longitud de onda del modo de vibración estudiado y  $h$  la altura de la sección transversal de la viga. Asimismo, se consideran válidas las siguientes hipótesis:

- Deformaciones pequeñas.

- Hipótesis de Navier-Bernoulli: las secciones permanecen planas y perpendiculares al eje neutro durante la deformación, despreciando los efectos del corte.
- Las fibras longitudinales no se comprimen mutuamente.
- Se desprecia la inercia rotacional de la viga.

En el caso que aquí se desarrolla, se considera un modelo de viga como el ilustrado en la Figura 1 de longitud  $L$ , homogénea, constituida por un material de densidad  $\rho$ , módulo de elasticidad  $E$  y una sección transversal de área  $A$ , con su correspondiente momento de inercia  $I$  evaluado respecto de su eje baricéntrico  $\bar{z}$ .

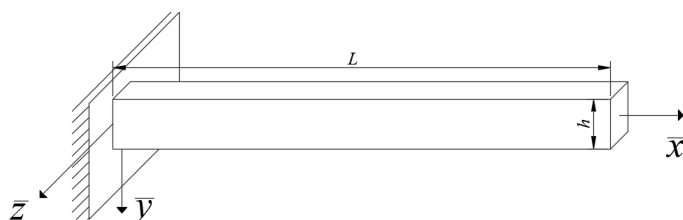


Figura 1: Esquema viga empotrada-libre

Para la determinación de las ecuaciones diferenciales gobernantes, se definen como positivos los sentidos que se indican en la siguiente figura:

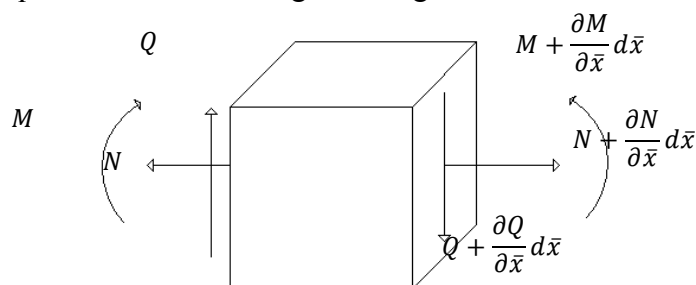


Figura 2: Convención de signos adoptada.

La ecuación diferencial gobernante del problema, de acuerdo a la teoría antes mencionada, se transcribe a continuación:

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \left[ EI(\bar{x}) \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{x}^2} \right] + \rho A(\bar{x}) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

donde  $EI$  representa la rigidez a flexión de la viga y  $\rho A$  es la masa por unidad de longitud. Si se analiza el caso de modos normales de vibración se tiene que:

$$\bar{w}(\bar{x}, t) = W(\bar{x}) e^{i\omega t} \tag{2}$$

En la expresión precedente,  $W(\bar{x})$  representa la amplitud del desplazamiento y  $\omega$  la frecuencia natural circular de vibración transversal de la viga expresada en radianes por segundo. Reemplazando la ecuación (2) en (1) se obtiene:

$$\frac{d^2}{d\bar{x}^2} \left[ EI(\bar{x}) \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} \right] - \rho A(\bar{x}) \omega^2 W = 0. \tag{3}$$

Cabe destacar que si bien los valores de  $I(\bar{x})$  y  $A(\bar{x})$  se consideran constantes en este problema, no habría ningún inconveniente en considerar la variación de inercia y sección transversal, ya que el planteo general del problema sería el mismo. Si además se normaliza la ecuación por medio de la coordenada adimensional  $x = \bar{x} / L$  se llega a la siguiente expresión:

$$EI \frac{d^4 W}{dx^4} - \rho A \omega^2 L^4 W = 0, \quad (4)$$

donde  $L$  es la longitud de la viga. Definiendo la frecuencia adimensional o coeficiente de frecuencia  $\Omega = L^2 \omega \sqrt{\rho A / EI}$ , se logra simplificar la expresión (4):

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \Omega^2 W = 0. \quad (5)$$

Asimismo, se conocen las condiciones de borde propias del problema planteado (viga empotrada-libre), las cuales se expresan a continuación.

- Condiciones esenciales o geométricas:

$$W|_{x=0} = 0, \quad (6)$$

condición de desplazamiento nulo.

$$\left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad (7)$$

condición de giro nulo.

- Condiciones naturales:

$$\left. \frac{d^2 W}{dx^2} \right|_{x=1} = 0, \quad (8)$$

condición de momento flector nulo.

$$\left. \frac{d^3 W}{dx^3} \right|_{x=1} = 0, \quad (9)$$

condición de corte nulo.

### 3 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL

El *método de cuadratura diferencial* es una técnica numérica que permite hallar la solución a problemas típicos de la ingeniería cuyo comportamiento responde a una ecuación diferencial (ED) conocida. Este método aproxima la derivada de una función en un punto cualquiera, como una suma lineal ponderada de todos los valores funcionales calculados en puntos de un malla convenientemente adoptado.

La aplicación del método consiste en

- Discretizar el dominio, reemplazando el modelo continuo por un conjunto de puntos sobre una malla o grilla.
- Obtener los coeficientes de peso asociados a los puntos de la malla generada
- Plantear las ecuaciones análogas de cuadratura del sistema diferencial gobernante.

- Plantear las ecuaciones análogas de cuadratura de las condiciones de borde del modelo.
- Resolver el sistema de ecuaciones resultante

El modelo estudiado ha sido evaluado con una función que define una distribución irregular de puntos de prueba del tipo Chebyshev–Gauss–Lobato (Shu, 1999), la cual está dada por la siguiente expresión:

$$x_{[i]} = \frac{(1 - \cos((i-1) \cdot \pi / (n-1)))}{2} \text{ con } i=1, 2 \dots n \quad (10)$$

Considerando una barra de longitud unitaria y un número de puntos de muestreo  $n=7$ , la distribución de puntos resultante responde al siguiente esquema:

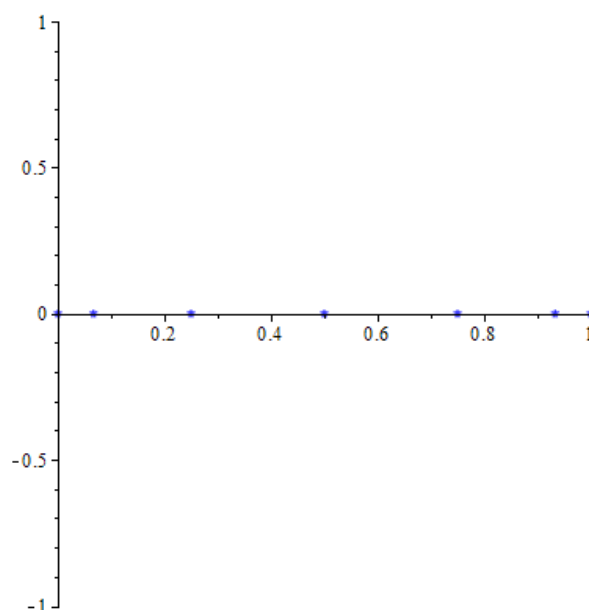


Figura 3: Ley de distribución de puntos de muestreo para  $n=7$

Tal como se puede observar en la Figura 3, existe una densificación de puntos en las regiones adyacentes a los extremos, donde se encuentran definidas las condiciones de borde; esto elimina la necesidad de introducir puntos de coordenadas  $x=\delta$  y  $x=1-\delta$  que incrementen la concentración de nodos en los puntos donde se definen las condiciones de borde, lo que será demostrado más adelante.

Para la aplicación del MCD, se parte de su definición. Aplicando las reglas del método de cuadratura diferencial a la ecuación diferencial (5) se obtiene la siguiente ecuación análoga de cuadratura:

$$\frac{d^{(4)}W}{dx^4} = \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(4)} W_k = \Omega^2 W_i \text{ con } i=3, 4 \dots n-2 \quad (11)$$

Siendo  $A_{ik}^{(4)}$  los coeficientes de peso del punto de coordenada  $x_i$ . El superíndice  $r$  indica el orden de derivación de la ecuación diferencial, que en este caso es  $r=4$ .

La determinación de los coeficientes de peso se basa en la teoría desarrollada por Bellman en 1970 y su posterior aplicación por C. Shu y Richards (Shu y Richards, 1992) y difundidas

por C. Bert y sus colaboradores (Bert et al., 1996). Es importante notar que el cálculo de los coeficientes de peso de orden superior a 1 puede realizarse a partir de los coeficientes de órdenes de derivación menores a través de una expresión recursiva. A continuación, se detalla la expresión que permite determinar los coeficientes de peso de los elementos que se encuentren fuera de la diagonal principal ( $i \neq k$ ):

$$A_{ik}^{(1)} = \frac{\prod(x_i)}{(x_i - x_k) \prod(x_k)} \text{ con } i, k=1, 2, \dots, n \text{ y } k \neq i. \quad (12)$$

Donde:

$$\prod(x_i) = \prod_{v=1, v \neq i}^n (x_i - x_v); \quad \prod(x_k) = \prod_{v=1, v \neq k}^n (x_k - x_v). \quad (13)$$

Se debe notar que si  $k = i$ ,  $A_{ik}^{(1)}$  tiende a infinito.

Llamando  $r$  al orden de derivación de la ecuación gobernante, los términos correspondientes a derivadas de segundo orden y superiores ( $r > 1$ ) se calculan por medio de la siguiente expresión recurrente (Bert y Malik, 1996):

$$A_{ik}^{(r)} = r \left[ A_{ii}^{(r-1)} A_{ik}^{(1)} - \frac{A_{ik}^{(r-1)}}{x_i - x_k} \right]. \quad (14)$$

Teniendo en cuenta que la suma de los coeficientes de peso en cualquier fila de la matriz de coeficientes es igual a cero, los términos de la diagonal correspondientes a derivadas de cualquier orden están dados por:

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^n A_{ik}^{(r)} \quad (15)$$

Si se analizan las condiciones de borde mencionadas en las Ecs. (6) y (7):

$$W_i = 0 \text{ con } i=1 \quad (16)$$

$$\sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} W_k = 0 \text{ con } i=1 \quad (17)$$

Respecto de las condiciones de borde en el extremo libre, dadas por las Ecs. (8) y (9):

$$\sum_{k=1}^n A_{ik}^{(2)} W_k = 0 \text{ con } i=n \quad (18)$$

$$\sum_{k=1}^n A_{ik}^{(3)} W_k = 0 \text{ con } i=n \quad (19)$$

Una vez calculados los coeficientes de peso y habiendo analizado las condiciones de borde propias del problema, las ecuaciones se pueden expresar de forma matricial de la siguiente manera para  $n=7$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & A_{16}^{(1)} & A_{17}^{(1)} & A_{13}^{(1)} & A_{14}^{(1)} & A_{15}^{(1)} \\ A_{71}^{(2)} & A_{72}^{(2)} & A_{76}^{(2)} & A_{77}^{(2)} & A_{73}^{(2)} & A_{74}^{(2)} & A_{75}^{(2)} \\ A_{71}^{(3)} & A_{72}^{(3)} & A_{76}^{(3)} & A_{77}^{(3)} & A_{73}^{(3)} & A_{74}^{(3)} & A_{75}^{(3)} \\ A_{31}^{(4)} & A_{32}^{(4)} & A_{36}^{(4)} & A_{37}^{(4)} & A_{33}^{(4)} & A_{34}^{(4)} & A_{35}^{(4)} \\ A_{41}^{(4)} & A_{42}^{(4)} & A_{46}^{(4)} & A_{47}^{(4)} & A_{43}^{(4)} & A_{44}^{(4)} & A_{45}^{(4)} \\ A_{51}^{(4)} & A_{52}^{(4)} & A_{56}^{(4)} & A_{57}^{(4)} & A_{53}^{(4)} & A_{54}^{(4)} & A_{55}^{(4)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_6 \\ W_7 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix} = \Omega^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Tal como se puede observar en la Ec. (20), para encontrar la frecuencia natural de vibración del sistema, se debe resolver un sistema de ecuaciones lineales. Es posible reordenar el sistema antes mencionado de manera que la única incógnita resulte ser el coeficiente de frecuencia  $\Omega$ ; dicho ordenamiento se expresa a continuación a través de la matriz  $[A]$ .

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & A_{16}^{(1)} & A_{17}^{(1)} & A_{13}^{(1)} - \Omega^2 & A_{14}^{(1)} - \Omega^2 & A_{15}^{(1)} - \Omega^2 \\ A_{71}^{(2)} & A_{72}^{(2)} & A_{76}^{(2)} & A_{77}^{(2)} & A_{73}^{(2)} - \Omega^2 & A_{74}^{(2)} - \Omega^2 & A_{75}^{(2)} - \Omega^2 \\ A_{71}^{(3)} & A_{72}^{(3)} & A_{76}^{(3)} & A_{77}^{(3)} & A_{73}^{(3)} - \Omega^2 & A_{74}^{(3)} - \Omega^2 & A_{75}^{(3)} - \Omega^2 \\ A_{31}^{(4)} & A_{32}^{(4)} & A_{36}^{(4)} & A_{37}^{(4)} & A_{33}^{(4)} - \Omega^2 & A_{34}^{(4)} - \Omega^2 & A_{35}^{(4)} - \Omega^2 \\ A_{41}^{(4)} & A_{42}^{(4)} & A_{46}^{(4)} & A_{47}^{(4)} & A_{43}^{(4)} - \Omega^2 & A_{44}^{(4)} - \Omega^2 & A_{45}^{(4)} - \Omega^2 \\ A_{51}^{(4)} & A_{52}^{(4)} & A_{56}^{(4)} & A_{57}^{(4)} & A_{53}^{(4)} - \Omega^2 & A_{54}^{(4)} - \Omega^2 & A_{55}^{(4)} - \Omega^2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

El sistema de Ec. (21) puede expresarse como se indica en la ecuación a continuación:

$$\begin{pmatrix} [A_{bb}] & [A_{bd}] \\ [A_{db}] & [A_{dd}] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} W_b \\ W_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\Omega^2\} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

donde los subíndices  $b$  hace referencia a los términos asociados a las condiciones de borde (nodos 1 y  $n$ ) y los subíndices  $d$  al dominio (nodos 2 hasta  $n-1$ ).

Con el fin de poder resolver el problema de autovalores, se debe eliminar el vector  $\{W_b\}$ , arrojando como resultado la ecuación (23).

$$[A]\{W_d\} - \Omega^2[I]\{W_d\} = \{0\}, \quad (23)$$

donde  $[I]$  es la matriz identidad de dimensión  $n \times n$  y la matriz  $[A]$  se obtiene a partir de las submatrices  $[A_{bb}]$ ,  $[A_{bd}]$ ,  $[A_{db}]$  y  $[A_{dd}]$  por medio de la siguiente expresión.

$$[A] = [A_{db}] - [A_{db}][A_{bb}^{-1}][A_{bd}] \quad (24)$$

En un sistema de ecuaciones, se pueden encontrar varias soluciones las cuales se resumen en dos grandes grupos: soluciones triviales del sistema (la incógnita adopta un valor nulo), y soluciones no triviales que son las que poseen mayor interés. El problema se transforma entonces en un problema de autovalores cuya resolución implica la siguiente condición:

$$\det([A] - [I]\Omega^2) = 0. \quad (25)$$

A partir de la Ec. (25) se llega a un polinomio cuya única variable es  $\Omega$ . Aplicando la condición de no trivialidad se obtienen las frecuencias características del sistema.

#### 4 DETERMINACIÓN DE FRECUENCIAS PARA $n = 7$

A partir de la aplicación de las expresiones desarrolladas en el presente trabajo, se pueden obtener los coeficientes de peso correspondientes a los distintos órdenes de derivación, los cuales se transcriben a continuación.

Es importante destacar que el cálculo de los autovalores se basa en la distribución de nodos propuesta por Chebyshev–Gauss–Lobato (Shu et al., 1999).

El número mínimo de nodos que pueden considerarse para la determinación de las frecuencias naturales es  $n=7$ . Su explicación radica en la necesidad de definir dos nodos por condición de borde y tres nodos –como mínimo– para la obtención del primer coeficiente de frecuencia natural. En total, las dos condiciones de borde más las tres correspondientes al dominio, definen los siete nodos.

Para el orden de derivación  $r=1$ , correspondiente a la condición de borde asociada al giro, los coeficientes de peso asociados se transcriben en la Ec. (26).

$$[A_{i,j}^{(1)}] = \begin{bmatrix} -24 & 29 & -7 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ -7 & 3 & 5 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 7 & -29 & 24 \end{bmatrix} \quad (26)$$

En lo que respecta al orden de derivación  $r=2$ , asociado al momento flector, los coeficientes de peso  $A_{i,j}^{(2)}$  dados por la expresión recursiva Ec. (14) se reflejan en la Ec. (27).

$$[A_{i,j}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 345 & -561 & 325 & -178 & 122 & -99 & 46 \\ 171 & -250 & 97 & -26 & 14 & -10 & 4 \\ -13 & 52 & -69 & 37 & -10 & 6 & -2 \\ 4 & -10 & 31 & -50 & 31 & -10 & 4 \\ -2 & 6 & -10 & 37 & -69 & 52 & -13 \\ 4 & -10 & 14 & -26 & 97 & -250 & 171 \\ 46 & -99 & 122 & -178 & 325 & -561 & 345 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Con respecto al esfuerzo cortante, asociado a la derivada tercera de la ecuación diferencial gobernante, los coeficientes de peso  $A_{i,j}^{(3)}$  asociados se detallan en la expresión:



$$[A_{i,j}^{(3)}] = \begin{bmatrix} -3200 & 5779 & -4384 & 3072 & -2272 & 1900 & -896 \\ -2051 & 3602 & -2509 & 1551 & -1037 & 831 & -387 \\ -256 & 277 & 160 & -384 & 352 & -277 & 128 \\ 128 & -277 & 223 & 0 & -223 & 277 & -128 \\ -128 & 277 & -351 & 384 & -160 & -277 & 256 \\ 387 & -831 & 1037 & -1551 & 2509 & -3602 & 2051 \\ 896 & -1900 & 2272 & -3072 & 4384 & -5779 & 3200 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Por último, los coeficientes asociados a las condiciones de 4to orden de derivación son:

$$[A_{i,j}^{(4)}] = \begin{bmatrix} 19456 & -37028 & 32256 & -26624 & 22016 & -19291 & 9216 \\ 14930 & -28160 & 23890 & -18943 & 15021 & -12799 & 6061 \\ 5376 & -9554 & 6656 & -3584 & 1536 & -685 & 256 \\ -1024 & 2560 & -3583 & 4095 & -3583 & 2559 & -1023 \\ 255 & -685 & 1535 & -3583 & 6656 & -9554 & 5376 \\ 6061 & -12799 & 15021 & -18943 & 23890 & -28160 & 14930 \\ 9216 & -19291 & 22016 & -26624 & 32256 & -37028 & 19456 \end{bmatrix} \quad (29)$$

A partir de la determinación de los autovalores del problema, se procede a su ordenamiento. Para ello, se hace uso de las ecuaciones análogas de cuadratura de las ecuaciones gobernantes del problema, así como también de aquellas asociadas a las condiciones de borde y continuidad.

Para la resolución del problema, se hace uso del ordenamiento propuesto en la Ec. (22). Como queda en evidencia, la determinación de las frecuencias naturales del sistema representa la resolución  $n$  sistemas de ecuaciones que relacionan, por un lado, los coeficientes de peso  $A_{i,j}^{(k)}$  y las frecuencias naturales, es decir las incógnitas del problema.

Aplicando la Ec. (24), se obtiene la matriz  $[A]$ , la cual se expresa numéricamente como:

$$[A] = \begin{bmatrix} 3949.987185 & -2093.257632 & 498.1698025 \\ -1283.554803 & 1307.828347 & -478.786243 \\ -1455.459517 & 1020.126888 & -299.100023 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Finalmente, resolviendo la Ec. (25) se obtiene el polinomio que permite conocer los coeficientes de frecuencia natural del sistema. Dicho polinomio, para  $n=7$  aplicado a una viga empotrada-libre, se corresponde con:

$$-1.000 * \Omega^6 + 4958.716 * \Omega^4 - 2.120 * 10^6 * \Omega^2 + 2.504 * 10^7 = 0 \quad (31)$$

Resolviendo la ecuación precedente, se obtiene la frecuencia fundamental del sistema, cuyo valor es  $\Omega_1 = 3,486259549$ .

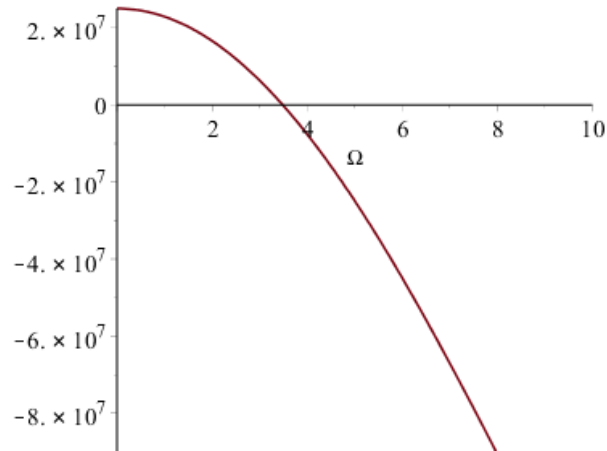


Figura 4: Representación de la Ec. (31)

## 5 SOLUCIÓN EXACTA

La solución general de la Ec. (5) es de la forma:

$$W(x) = C_1 \cosh(\beta Lx) + C_2 \sinh(\beta Lx) + C_3 \cos(\beta Lx) + C_4 \sin(\beta Lx) \quad (32)$$

donde las  $C_i$  son constantes a ser determinadas mediante las condiciones de borde en  $x=0$  y  $x=1$ . Las condiciones de borde en  $x=0$  están dadas por las Ecs. (6) y (7) mientras que en  $x=1$  por las Ecs. (8) y (9). Resulta conveniente ordenar las ecuaciones que resultan de la aplicación de las condiciones de borde en una matriz; haciendo esto se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta L & 0 & \beta L \\ \beta^2 L^2 \cosh(\beta L) & \beta^2 L^2 \sinh(\beta L) & -\beta^2 L^2 \cos(\beta L) & -\beta^2 L^2 \sin(\beta L) \\ \beta^3 L^3 \sinh(\beta L) & \beta^3 L^3 \cosh(\beta L) & \beta^3 L^3 \sin(\beta L) & -\beta^3 L^3 \cos(\beta L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (33)$$

De forma sintética se puede expresar como:

$$[B]\{C\} = \{0\}. \quad (34)$$

Para obtener la ecuación trascendente de las frecuencias, se debe hallar la solución no trivial del sistema de ecuaciones. Para ello:

$$\det([B]) = 0. \quad (35)$$

A partir de la Ec. (35) se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \beta^6 L^6 \cos(\beta L)^2 + 2\beta^6 L^6 \cosh(\beta L)\cos(\beta L) + \beta^6 L^6 \sin(\beta L)^2 + \\ & -\beta^6 L^6 \sinh(\beta L)^2 + \beta^6 L^6 \cosh(\beta L)^2 = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

A partir de la resolución de la Ec. (36) se obtienen las raíces  $\beta_n L$ , es decir los autovalores del problema. Los coeficientes de frecuencia son:

$$\Omega_n = (\beta_n L)^2. \quad (37)$$

Las raíces de la solución exacta al problema se definen a continuación

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 3,516015; \Omega_2 = 22,034492; \Omega_3 = 61,697214; \\ \Omega_4 &= 120,901916; \Omega_5 = 199,859530; \Omega_6 = 298,555531. \end{aligned} \quad (38)$$

En la [Figura 1](#), gráfica de la Ec. (35), se puede observar que existen valores de  $\Omega$  que satisfacen la condición  $f(\Omega_n) = 0$ . Los gráficos siguientes evidencian los seis primeros.

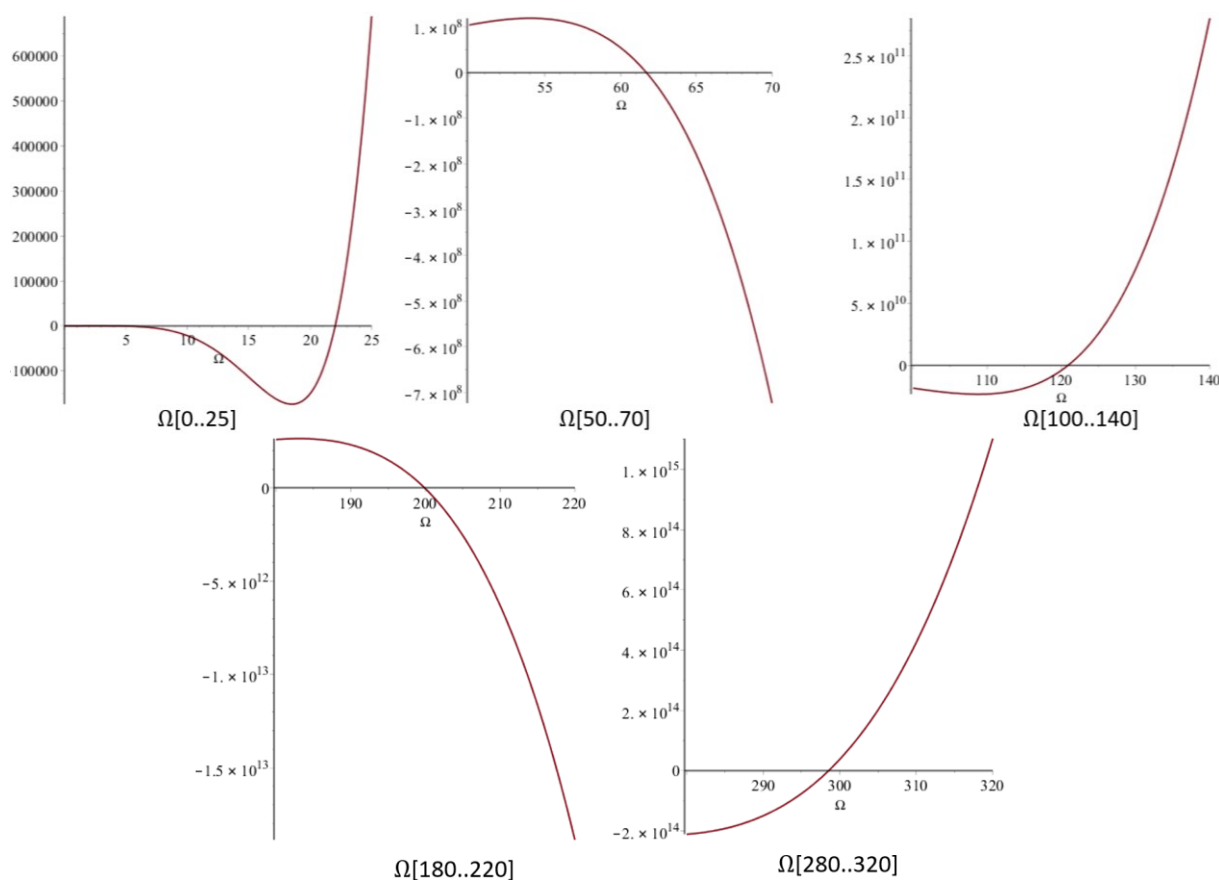


Figura 5: Representación gráfica de la Ec. (33).

## 6 COMPARACIÓN DE RESULTADOS PARA $n = 7$

A continuación, se presentan los resultados obtenidos por medio del modelo matemático desarrollado. Como puede verse, para  $n=7$  nodos, los resultados obtenidos por medio del Método de Cuadratura Diferencial para una distribución de puntos del tipo Chebyshev–Gauss–Lobato (Shu et al., 1999) con respecto a la solución exacta difieren. Por ejemplo, para la frecuencia fundamental, la solución obtenida con el MCD es  $\Omega_1 = 3,486259549$ , mientras que la solución exacta determina que  $\Omega_1 = 3,516015269$ , lo que significa una diferencia de 0,85% entre ambos métodos.

## 7 DETERMINACION DE FRECUENCIAS PARA DIFERENTES VALORES DE N – DISTRIBUCIÓN DE PUNTOS CHEBYSHEV-GAUSS-LOBATO

A partir de evaluar los resultados obtenidos para un número mínimo de nodos ( $n=7$ ), resulta lógico pensar que la diferencia entre la frecuencia natural obtenida por medio del MCD y la solución exacta difieren por el reducido número de puntos en que se han definido los coeficientes de peso. Es por ello que a continuación se evalúan los resultados para distintas densidades de nodos con el fin de determinar a partir de qué número se produce una convergencia entre la solución aproximada y la exacta.

Para una precisión de 20 dígitos en el cálculo, se han determinado las frecuencias naturales. A continuación, se expresan los resultados:

Coeficientes de frecuencia natural (20 dígitos)						
$n$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
7	3,486260	21,424630	66,989154	-	-	-
8	3,519599	21,258729	56,850865	121,348198	-	-
9	3,516551	22,194722	56,695364	107,313562	192,623957	-
10	3,516035	22,138069	40,106805	-	-	-
15	3,517066	-	-	-	-	-
20	2,752983	-	-	-	-	-
<b>Solución exacta</b>	3,516015	22,034492	61,697214	120,901916	199,859530	298,555531

Tabla 1: Resultados del MCD en el análisis de vibraciones de una viga cantiléver para un muestreo de puntos Chebyshev–Gauss–Lobato.

En la [Tabla 1](#) se observa que con 20 cifras significativas, al incrementar el número de nodos, se producen problemas numéricos y los resultados no convergen al de la solución exacta. Si se mejora la precisión con mayor número de cifras significativas, el MCD permite obtener mejores valores a medida que se aumenta el número de nodos  $n$ , tal como se observa en la [Tabla 2](#).

A partir del análisis anterior, resulta interesante analizar el impacto del incremento en el número de dígitos involucrados y determinar el número de nodos que permita para llegar a un resultado igual a la solución exacta, para las primeras seis cifras decimales.

### Modo 1

Exacta 3,516015

Solución por MCD:

Coef. De frecuencia (100 dígitos)	
$n$	$\Omega_1$
7	3,486260
8	3,519599
9	3,516551
10	3,516035
11	3,516012
<b>12</b>	<b>3,516015</b>

### Modo 2

Exacta 22,034492

Solución por MCD:

Coef. De frecuencia (100 dígitos)	
$n$	$\Omega_2$
7	21,424630
8	21,258729
9	22,194722
10	22,098308
12	22,032672
<b>15</b>	<b>22,034491</b>

### Modo 3

Exacta 61,697214

Solución por MCD:

Coef. De frecuencia (100 dígitos)	
$n$	$\Omega_3$
10	63,695388
12	61,605900
14	61,702780
16	61,697091
18	61,697218
<b>20</b>	<b>61,697214</b>

<b>Modo 4</b>		<b>Modo 5</b>		<b>Modo 6</b>	
Exacta 120,901916		Exacta 199,859530		Exacta 298,555531	
Solución por MCD:		Solución por MCD:		Solución por MCD:	
Coef. De frecuencia (100 dígitos)		Coef. De frecuencia (100 dígitos)		Coef. De frecuencia (100 dígitos)	
$n$	$\Omega_4$	$n$	$\Omega_5$	$n$	$\Omega_6$
14	120,398885	16	200,418105	16	290,419681
16	120,941064	18	199,819491	18	299,829533
18	120,899922	20	199,861844	20	298,426328
20	120,901992	22	199,859432	22	298,565512
22	120,901914	24	199,859533	24	298,730574
<b>24</b>	<b>120,901916</b>	<b>26</b>	<b>Solución divergente</b>	<b>26</b>	<b>Solución divergente</b>

Tabla 2: Resultados del MCD en el análisis de vibraciones de una viga cantiléver para un muestreo de puntos Chebyshev–Gauss–Lobato

<b>Modo 1</b>		<b>Modo 2</b>		<b>Modo 3</b>	
Exacta 3,516015		Exacta 22,034492		Exacta 61,697214	
Solución por MCD:		Solución por MCD:		Solución por MCD:	
Coef. De frecuencia (150 dígitos)		Coef. De frecuencia (150 dígitos)		Coef. De frecuencia (150 dígitos)	
$n$	$\Omega_1$	$n$	$\Omega_2$	$n$	$\Omega_3$
7	3,486260	8	21,258729	10	
8	3,519599	9	22,194722	12	61,605900
9	3,516551	10	22,194722	14	61,702780
10	3,516035	15	22,034491	16	61,697091
11	3,516012	16	22,034491	18	61,697218
<b>12</b>	<b>3,516015</b>	<b>18</b>	<b>22,034492</b>	<b>20</b>	<b>61,697214</b>

<b>Modo 4</b>		<b>Modo 5</b>		<b>Modo 6</b>	
Exacta 120,901916		Exacta 199,859530		Exacta 298,555531	
Solución por MCD:		Solución por MCD:		Solución por MCD:	
Coef. De frecuencia (150 dígitos)		Coef. De frecuencia (150 dígitos)		Coef. De frecuencia (150 dígitos)	
$n$	$\Omega_4$	$n$	$\Omega_5$	$n$	$\Omega_6$
14	120,398885	16	200,418105	20	298,426328
16	120,941064	18	199,819491	22	298,565512
18	120,899922	20	199,861844	24	298,554936
20	120,901992	22	199,859432	26	298,555559
22	120,901914	24	199,859534	28	298,555530
<b>24</b>	<b>120,901916</b>	<b>26</b>	<b>199,859530</b>	<b>30</b>	<b>298,555531</b>

Tabla 3: Resultados del MCD en el análisis de vibraciones de una viga cantiléver para un muestreo de puntos Chebyshev–Gauss–Lobato.

Al incrementar el número de cifras significativas empleadas a 150, se obtiene una convergencia para los primeros 6 modos de vibración. Tal como queda reflejado en la [Tabla 3](#), el aumentar el número de decimales aumenta el número de nodos necesarios para lograr la convergencia de la frecuencia correspondiente al modo 2 (15 nodos para 100 dígitos contra 18 nodos para 150 dígitos). Los modos de vibración 3 y 4 convergen para la misma cantidad de nodos para ambos casos. Para poner en evidencia el error numérico que tiene lugar debido al número de decimales empleados, se puede hacer uso de la siguiente propiedad de matrices.

$$[A].[A]^{-1}=[I] \quad (39)$$

Donde  $A$  representa una matriz de orden  $n$  invertible, e  $[I]$  la matriz identidad de orden  $n$ . Si se aplica esta propiedad a la matriz (24) el resultado debiera ser la matriz identidad, si se trabajara con números exactos. Asimismo, se sabe que:

$$\det([I])=1. \quad (40)$$

Sin embargo, debido al excesivo poder de cálculo que demanda trabajar con números exactos para una cantidad de nodos superior a 30, la necesidad de emplear aproximaciones decimales se hace evidente y esto impacta de forma notable en los resultados.

En la siguiente tabla, se evalúa la influencia del error numérico en función del número de dígitos empleados.

Dígitos	$\det([I]) - 1$
20	$6,03200 \cdot 10^{(-14)}$
100	$-2.0492000 \cdot 10^{(-93)}$
150	$3.1800 \cdot 10^{(-145)}$

Tabla 4: Influencia del número de dígitos en la determinación de las frecuencias

Como puede verse, el hecho de incrementar el número de dígitos de 20 a 100 representa una reducción del desvío del orden de  $10^{-79}$ , mientras que adoptar 150 dígitos reduce aún más el desvío, en un orden de  $10^{-53}$  con respecto a 100 dígitos.

Todos estos problemas se deben a que el sistema de ecuaciones está mal condicionado. La solución para reducir el número de cifras significativas sería reacomodar la matriz del sistema evitando valores pequeños en la diagonal principal, de forma tal que el sistema a resolver esté bien condicionado y converja sin problemas numéricos.

Además, la convergencia de resultados está fuertemente relacionada con la ley de distribución de puntos empleada para su cálculo. En base a los trabajos desarrollados por Bert y Malik ([Bert y Malik, 1996](#)) en relación con el método de cuadratura diferencial, puede verse que la incorporación de puntos adyacentes adicionales a los puntos correspondientes a las condiciones de borde permite que el número de condiciones de borde sea igual a la cantidad de nodos próximos al punto donde se corresponde dicha condición. Es por ello que definiendo una distancia entre nodos de borde del orden de  $\delta \cong 10^{-5}$  es posible afirmar que estos puntos se corresponden *virtualmente* con la condición de borde propiamente dicha.

Para permitir una comparación de los resultados, se adopta una distribución de puntos Chebyshev–Gauss–Lobato ([Shu et al., 1999](#)) considerando la incorporación de los puntos  $\delta$ .

$$x_1 = 0, x_2 = \delta, x_{n-1} = 1 - \delta, x_n = 1, x_i = \frac{(1 - \cos((i-1) \cdot \pi / (n-1)))}{2}; i = 3, 4, \dots, (n-2) \quad (41)$$

Los resultados de la [Tabla 5](#) reflejan que la introducción de puntos  $\delta$  adyacentes a los nodos de borde no representa una ventaja en lo que respecta al número de puntos necesarios para lograr la convergencia de los resultados, al menos para los primeros seis modos de vibración. Esta afirmación es válida si se adopta una distribución de puntos del dominio del tipo Chebyshev–Gauss–Lobato ([Shu et al., 1999](#)). El cálculo se ha hecho manteniendo el número de dígitos considerados por el software de cálculo, por lo que la única diferencia radica en la ubicación de puntos próximos a los bordes. Por lo tanto, puede decirse que la distribución del tipo Chebyshev-Gauss-Lobato no necesita la incorporación de los puntos  $\delta$ , ya que se distribuyen de forma adecuada. Otra sería la situación si se utilizara una distribución de puntos regular, ya que en este caso la introducción de puntos  $\delta$  permite considerar la condición de borde con mayor densidad de puntos.

**Modo 1**

Exacta 3,516015

Solución por MCD:

Coef. De frecuencia (150 dígitos)	
$n$	$\Omega_1$
7	3,486260
8	3,519599
9	3,516551
10	3,516035
11	3,516012
<b>12</b>	<b>3,516015</b>

**Modo 2**

Exacta 22,034492

Solución por MCD:

Coef. De frecuencia (150 dígitos)	
$n$	$\Omega_2$
8	21,258729
9	22,194722
10	22,098308
15	22,034491
16	22,034491
<b>18</b>	<b>22,034492</b>

**Modo 3**

Exacta 61,697214

Solución por MCD:

Coef. De frecuencia (150 dígitos)	
$n$	$\Omega_3$
10	63,695388
12	61,605900
14	61,702780
16	61,697091
18	61,697218
<b>20</b>	<b>61,697214</b>

**Modo 4**

Exacta 120,901916

Solución por MCD:

Coef. De frecuencia (150 dígitos)	
$n$	$\Omega_4$
14	120,398885
16	120,941064
18	120,899922
20	120,901992
22	120,901914
<b>24</b>	<b>120,901916</b>

**Modo 5**

Exacta 199,859530

Solución por MCD:

Coef. De frecuencia (150 dígitos)	
$n$	$\Omega_5$
16	200,418105
18	199,819491
20	199,861844
22	199,859432
24	199,859534
<b>26</b>	<b>199,859530</b>

**Modo 6**

Exacta 298,555531

Solución por MCD:

Coef. De frecuencia (150 dígitos)	
$n$	$\Omega_6$
20	298,426328
22	298,565512
24	298,554936
26	298,555559
28	298,555530
<b>30</b>	<b>298,555531</b>

Tabla 5: Resultados del MCD en el análisis de vibraciones de una viga cantiléver para un muestreo de puntos Chebyshev–Gauss–Lobato con punto  $\delta$  adyacente.

## 8 CONCLUSIONES

El método de cuadratura diferencial ha demostrado ser una herramienta sumamente poderosa para la resolución de problemas matemáticos relacionados con la ingeniería civil.

La evaluación de los resultados obtenidos permite arribar a las siguientes conclusiones:

- Se observó que la resolución del problema empleando números racionales en lugar de aproximaciones decimales genera una demanda de memoria excesiva que dificulta el cálculo en computadoras tradicionales.
- El desarrollo del algoritmo, al no ordenar el sistema antes del cálculo, debe contemplar la posibilidad de modificar el número de decimales que éste emplea para su resolución, ya que muchos de ellos, por defecto, utilizan un número reducido de cifras significativas (Maple: 10 cifras, MATLAB: 5 cifras, Mathematica: 6 cifras, entre otros), imposibilitando la determinación de la totalidad de las frecuencias naturales. Se recomienda el acondicionamiento del sistema antes de resolver.
- El empleo de puntos  $\delta$  adyacentes a los nodos de borde no representa una ventaja con respecto a la distribución de puntos Chebyshev-Gauss-Lobato, ya que esta distribución lo toma en cuenta al densificar la cantidad de nodos en los extremos en forma natural.

## AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Interuniversitario Nacional (CIN), al Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur, la Universidad Nacional del Sur y al CONICET por brindarme la oportunidad de complementar mi formación de grado a través de tareas de investigación en una temática de sumo interés como lo es el método de cuadratura diferencial. Por último, al Dr. Ing. Daniel H. Felix, Mg. Ing. Santiago Maiz y al Ing. Gonzalo J. Gilardi, cuyos comentarios y observaciones han sido sumamente significativos.

## REFERENCIAS

- Bellman, R. E. y Casti, Y. Differential Quadrature and long-term integration. *Mathematical Analysis and Applications*, 34 :235-238, 1971.
- Bernoulli, D. Letters to Euler, Basel, 1735. Referencia extraída de *Vibration of shells and plates*. Werner Soedel. Marcel Dekker, INC. New York, 1981.
- Bert, C. W. y Malik, M. Differential quadrature method in computational mechanics: A review. *Applied Mechanics Review*, 49:1-28, 1996.
- Du, H., Lim, M. K. y Lin, R. M., Application of generalized differential quadrature method to structural problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37: 1881-1896, 1994.
- Euler, L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Berlin, 1744. Referencia extraída de *Vibration of shells and plates*. Werner Soedel. Marcel Dekker, Inc. New York, 1981.
- Shu, C. y Chen, W. On optimal selection of interior points for applying discretized boundary conditions in DQ vibration analysis of beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 222(2):239-257, 1999.
- Shu, C. y Richards, B. E. Application of generalized differential quadrature to solve two dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 15:791-798, 1992.

## ANEXO: PROGRAMACIÓN



A continuación, se transcribe el modelo esquemático del algoritmo utilizado para la determinación de los coeficientes de frecuencia por medio del método de cuadratura diferencial.

*restart :*

*Digits := 150 :*

**#DETERMINACIÓN DE LAS FRECUENCIAS NATURALES POR EL MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL**

*n := 19 : #CANTIDAD DE NODOS*

*x := Vector(n) : #VECTOR GENÉRICO x*

*zeroVector := Vector(n) :*

**for i from 1 to n by 1 do:**

*x<sub>i</sub> := evalf*  $\left( \frac{\left( 1 - \cos\left( \frac{(i-1)}{(n-1)} \cdot \pi \right) \right)}{2} \right)$  :

**end do:**

**#DISTRIBUCIÓN DE PUNTOS ADOPTADA PARA TODO EL DOMINIO DE LA VIGA. SE EMPLEA LA HERRAMIENTA evalf PARA TRABAJAR CON NÚMEROS DECIMALES EN LUGAR DE LA EXPRESIÓN EXACTA. LA EXPLICACIÓN DE ESTA ELECCIÓN SE EXPLÍCITA EN EL INFORME.**

**#SE DEFINE LA PRODUCTORIA COMO UNA FUNCIÓN RECURSIVA, POR LO QUE ADOPTO UN VALOR INICIAL UNITARIO**

**for i from 1 to n do**

*prod<sub>i</sub> := 1 :*

**for v from 1 to n do**

**if v ≠ i then**

*prod<sub>i</sub> := prod<sub>i</sub> · (x<sub>i</sub> - x<sub>v</sub>) :*

**end if**

**end do:**

**end do:**

**#SE DEFINE UNA MATRIZ ASOCIADA A LOS TÉRMINOS DEL PRIMER ORDEN DE DERIVACIÓN.**

*A1 := Matrix(n, n) :*

**for i from 1 to n do**

**for k from 1 to n do**

**if i ≠ k then**

**#SE ASOCIAN LOS TÉRMINOS A<sub>i,k</sub> CON i**

**≠ k A LA MATRIZ A1 DEFINIDA PREVIAMENTE**

*A1<sub>i,k</sub> :=*  $\frac{prod_i}{(x_i - x_k) \cdot prod_k}$  :

**end if**

**end do:**

**end do:**

**#POR DEFINICIÓN, SE DETERMINAN LOS COEFICIENTES CORRESPONDIENTES  
A LOS TÉRMINOS  $A_{i,k}$  con  $i=k$**

**for j from 1 to n do**

$$A1_{j,j} := -(add(A1_{j,l}, l=1..n) - A1_{j,j})$$

**end do:**

**#SE DEFINE UNA MATRIZ ASOCIADA A LOS TÉRMINOS DEL SEGUNDO ORDEN  
DE DERIVACIÓN.**

$A2 := Matrix(n, n) :$

**for i from 1 to n do**

**for k from 1 to n do**

**if  $i \neq k$  then**

$$A2_{i,k} := 2 \cdot \left( A1_{i,i} \cdot A1_{i,k} - \frac{A1_{i,k}}{x_i - x_k} \right) :$$

**end if:**

**end do:**

**end do :**

**#SE CALCULAN LOS COEFICIENTES CORRESPONDIENTES A LOS TÉRMINOS  $A_{i,k}$   
CON  $k=i$  PARA ORDEN DE DERIVACIÓN 2**

**for j from 1 to n do**

$$A2_{j,j} := -(add(A2_{j,l}, l=1..n) - A2_{j,j})$$

**end do:**

**#COEF. DE PESO CORRESP. A ORDEN DE DERIVACIÓN 3 CON  $A_{i,k}$   $k \neq i$**

$A3 := Matrix(n, n) :$

**for i from 1 to n do**

**for k from 1 to n do**

**if  $i \neq k$  then**

$$A3_{i,k} := 3 \cdot \left( A2_{i,i} \cdot A1_{i,k} - \frac{A2_{i,k}}{x_i - x_k} \right) :$$

**end if:**

**end do:**

**end do:**

**#COEF. DE PESO PARA 3ER ORDEN CON  $i=k$**

**for j from 1 to n do**

$$A3_{j,j} := -(add(A3_{j,l}, l=1..n) - A3_{j,j})$$

**end do:**

**#COEF. DE PESO PARA ORDEN 4 CON  $i \neq k$**

**#SE DEFINE UNA MATRIZ ASOCIADA A LOS TÉRMINOS DEL CUARTO ORDEN  
DE DERIVACIÓN.**

$A4 := Matrix(n, n) :$

**for i from 1 to n do**

**for k from 1 to n do**

**if  $i \neq k$  then**

$$A4_{i,k} := 4 \cdot \left( A3_{i,i} \cdot A1_{i,k} - \frac{A3_{i,k}}{x_i - x_k} \right) :$$

**end if:**

**end do:**

**end do:**

**#COEF. DE PESO ORDEN 4 CON  $i=k$**

**for j from 1 to n do**

$A4_{j,j} := -(add(A4_{j,l} \ l = 1 .. n) - A4_{j,j})$

**end do:**

**#SE DEFINE LA PRIMERA FILA TAL QUE  $A0_{11}$**

**= 1 Y LOS RESTANTES TÉRMINOS SON CERO.**

$A := Matrix(n, n) :$

$A_{1,1} := 1 :$

**#OBSERVACIÓN: LOS TÉRMINOS CORRESPONDIENTES A LOS NODOS 2 Y N-1 SE ASOCIAN A LOS NODOS EXTREMOS, YA QUE EN REALIDAD LOS NODOS AUXILIARES NO REPRESENTAN EL PUNTO EN QUE SE CUMPLE LA CONDICIÓN DE BORDE**

$A_{2,1} := A1_{1,1} :$

$A_{2,2} := A1_{1,2} :$

$A_{2,3} := A1_{1,n-1} :$

$A_{2,4} := A1_{1,n} :$

$A_{3,1} := A2_{n,1} : A_{3,2} := A2_{n,2} : A_{3,3} := A2_{n,n-1} : A_{3,4} := A2_{n,n} :$

$A_{4,1} := A3_{n,1} : A_{4,2} := A3_{n,2} : A_{4,3} := A3_{n,n-1} : A_{4,4} := A3_{n,n} :$

**#SE ENSAMBLA LA MATRIZ  $Abd$**

**for p from 5 to n do**

$A[2,p] := A1_{1,p-2}$

**end do:**

**for p from 5 to n do**

$A[3,p] := A2_{n,p-2}$

**end do:**

**for p from 5 to n do**

$A[4,p] := A3_{n,p-2}$

**end do:**

**#SE ENSAMBLA LA MATRIZ  $Adb$**

**for p from 5 to n do**

$A_{p,1} := A4_{p-2,1} :$

$A_{p,2} := A4_{p-2,2} :$

$A_{p,3} := A4_{p-2,n-1} :$

$A_{p,4} := A4_{p-2,n} :$

**end do:**

**#SE ENSAMBLA LA MATRIZ  $Add$   $A[5 .. n, 5 .. n] := A4[3 .. n - 2, 3 .. n - 2]$**

**#SE ENSAMBLA EXPLICITAMENTE LAS MATRICES**

$Abb := A[1 .. 4, 1 .. 4] :$

$Abd := A[1 .. 4, 5 .. n] :$

$Adb := A[5 .. n, 1 .. 4] :$

$Ade := A[5 .. n, 5 .. n] :$

$Aglobal := Ade - Adb.Abb^{-1}.Abd$  : **#SE DEFINE LA MATRIZ  $A$**

$MatrizIdentidad := Matrix(n - 4, n - 4, shape = identity) :$

$MatrizOmega := MatrizIdentidad \cdot (\Omega^2) :$

$MatrizDiferencia := Aglobal - MatrizOmega :$

$Determinante := LinearAlgebra[Determinant](MatrizDiferencia) :$

$fsolve(Determinante, \Omega = 0 .. 100)$

Para la solución exacta, el código desarrollado es el siguiente:

*restart* :

*Digits* := 150 :

$A := C_1 \cosh(\beta \cdot L \cdot x) + C_2 \sinh(\beta \cdot L \cdot x) + C_3 \cos(\beta \cdot L \cdot x) + C_4 \sin(\beta \cdot L \cdot x) :$

**#CONDICIÓN DE DESPLAZAMIENTO NULO EN EL EMPOTRAMIENTO**

*eval*( $A, x=0$ ) :

$B := \frac{d}{dx} A :$

**#CONDICIÓN DE GIRO NULO EN EL EMPOTRAMIENTO** *eval*( $B, x=0$ ) :

$C := \frac{d}{dx} B :$

**#CONDICIÓN DE CORTE NULO EN EL EMPOTRAMIENTO** *eval*( $C, x=1$ ) :

$E := \frac{d}{dx} C :$

**#CONDICIÓN DE MOMENTO NULO EN EL EMPOTRAMIENTO** *eval*( $E, x=1$ ) :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta \cdot L & 0 & \beta \cdot L \\ \beta^2 L^2 \cosh(\beta \cdot L) & \beta^2 L^2 \sinh(\beta \cdot L) & -\beta^2 L^2 \cos(\beta \cdot L) & -\beta^2 L^2 \sin(\beta \cdot L) \\ \beta^3 L^3 \sinh(\beta \cdot L) & \beta^3 L^3 \cosh(\beta \cdot L) & \beta^3 L^3 \sin(\beta \cdot L) & -\beta^3 L^3 \cos(\beta \cdot L) \end{bmatrix} :$$

*Determinante* := *Determinant*( $A$ );

$$\begin{aligned} \text{Determinante} := & L^6 \cos(\beta L)^2 \beta^6 + 2 \beta^6 L^6 \cosh(\beta L) \cos(\beta L) + L^6 \sin(\beta L)^2 \beta^6 \\ & - L^6 \sinh(\beta L)^2 \beta^6 + L^6 \cosh(\beta L)^2 \beta^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SolucionOrdinaria} := & \Omega^3 \cos(\sqrt{\Omega})^2 + 2 \Omega^3 \cosh(\sqrt{\Omega}) \cos(\sqrt{\Omega}) + \Omega^3 \sin(\sqrt{\Omega})^2 \\ & - \Omega^3 \sinh(\sqrt{\Omega})^2 + \Omega^3 \cosh(\sqrt{\Omega})^2 : \end{aligned}$$

*fsolve*(*SolucionOrdinaria*,  $\Omega = 0 .. 10$ ) :