МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

Л. Б. Коваленко

ЗБІРНИК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ МЕНЕДЖЕРІВ

Навчальний посібник

2-ге видання, перероблене та доповнене

Харків

ХНУМГ ім. О. М. Бекетова

2020

УДК 51-7:005:378.147(075.8)
К56

Автор

Коваленко Л. Б., кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рецензенти:

Тевяшев А. Д., доктор технічних наук, завідувач кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки;

Храбустовський В. І., кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої математики Українського державного університету залізничного транспорту

Рекомендовано до друку Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова (протокол № 4 від 28 листопада 2019 р.)

Коваленко Л. Б.

К56 Збірник тестових завдань з вищої математики для менеджерів : навч. посібник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – 2-ге вид., перероб. та допов. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 473 с.

ISBN 978-966-695-513-8

Поданий «Збірник тестових завдань з вищої математики для менеджерів» є логічним продовженням підручника «Вища математика для менеджерів» (авт. – Л. Б. Коваленко) – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019, рекомендований Вченою радою ХНУМГ імені О. М. Бекетова (протокол № 12 від 06.07.18 р.). Разом вони утворюють навчальний комплекс по курсу «Вища та прикладна математика (Вища математика)» для студентів, що навчаються за спеціальністю 073 – Менеджмент організацій. Друге видання доповнено розділами із застосуванням методів лінійної алгебри, математичного аналізу у розв'язанні прикладних задач за фахом.

УДК 51-7:005:378.147(075.8)

ISBN 978-966-695-513-8

З М І С Т

Передмова

Поданий «Збірник тестових завдань з вищої математики» для студентів-менеджерів є логічним продовженням навчального посібника «Вища математика для менеджерів». Разом вони утворюють комплекс по курсу «Вища та прикладна математика (Вища математика)» для студентів, що навчаються за спеціальністю 073 Менеджмент.

Під час підготовки «Збірника тестових завдань» автор намагалася задовольнити сучасним високим вимогам у підготовці спеціалістів з урахуванням обраного студентами напряму підготовки. Саме тому «Збірник» поряд з класичними задачами математичного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії містить прикладні задачі з економічним змістом.

Збірник містить 11 розділів, у кожному з яких за темами подані задачі в 30 варіантах. Саме така кількість варіантів обрана з урахуванням того, що наповненість навчальних груп, зазвичай, не перебільшує 30 осіб. Викладач має можливість запропонувати ці завдання як контрольні або самостійні наприкінці кожної з тем для контролю рівня засвоювання вивченого матеріалу. Автор навмисно відійшла від поширеної зараз практики, коли читачеві відразу пропонують варіанти відповідей, одна з яких – правильна. На наш погляд, це звужує саме поняття тесту (test – перевірка, випробування), зводячи його до спроби «вгадати» правильну відповідь. Саме тому під час підготовки тестових завдань автор віддала перевагу відкритій формі, коли студент сам отримує правильну відповідь у вигляді довільного числа (або виразу, що допускає, зокрема, й комп’ютерне тестування.

На початку кожного розділу наведені приклади розв’язання типового варіанта з посиланням на формули, розділи, сторінки навчального посібника «Вища математика для менеджерів».

Автор сподівається, що запропонований «Збірник тестових завдань з вищої математики для менеджерів» у комплексі з навчальним посібником «Вища математика для менеджерів» дозволить підвищити якість навчання та рівень освіти, та стане до нагоди як студентам, так і викладачам.

Розділ 1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. ВИЗНАЧНИКИ. МАТРИЦІ

Розділ 1 «Збірника тестових завдань» присвячений темі «Лінійна алгебра. Визначники. Матриці». Для успішного розв'язання пропонуємо читачеві звернутися до відповідного розділу підручника «Вища математика для менеджерів» (стор. 10-30) і повторити необхідний теоретичний матеріал.

Приклади розв'язання типового варіанта

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & 2 \end{vmatrix}.$$

Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{32}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 1-го рядка;
б) за елементами 3-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 2-му рядку.

Розв'язання: Скористаємося правилом (1.2) посібника «Вища математика для менеджерів» обчислення визначників розкладанням за елементами обраного рядку (стовпця):

а) $$\begin{vmatrix} \boxed{5 \quad -2 \quad 0 \quad 3} \\ 1 \quad 1 \quad -4 \quad 2 \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 4 \\ 1 \quad -1 \quad 8 \quad 2 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} -$$
$$-2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix} =$$
$$= 5(2+16+32+2+16-32) + 2(2-16+48-2+24-$$
$$-32) - 3(16+1+12+8-24+1) = 5\cdot 36 + 2\cdot 24 + 3\cdot 14 =$$
$$= 180 + 48 - 42 = 186;$$

б) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & \boxed{0} & 3 \\ 1 & 1 & \boxed{-4} & 2 \\ 3 & 2 & \boxed{1} & 4 \\ 1 & -1 & \boxed{8} & 2 \end{vmatrix} = 0 - 4\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} +$

$+1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 8\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$

$= 4(20-8-9-6+12+20) + 1(10-4-3-3+4+10) -$

$-8(20-12+6-9+8-20) = 4\cdot 33 + 14 - 8\cdot(-7) = 186;$

в) скористаємося властивістю 7 «Основних властивостей визначників» (см. п.1.1):

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 3 \\ \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 20 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 13 & -2 \\ 1 & -2 & 12 & 0 \end{vmatrix} =$$

$(-1)\longrightarrow$
$4\longrightarrow$
$(-2)\longrightarrow$

$= 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -7 & 20 & -7 \\ -1 & 13 & -2 \\ -2 & 12 & 0 \end{vmatrix} = -(0+80+84-182-0-168)$
$= 186.$

Ми розв’язали задачу трьома різними способами і отримали однаковий результат. Ця самоперевірка надає нам впевненості у правильності відповіді.

Відповідь: $\Delta = 186.$

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} x & 5 & 3 \\ 3 & 4 & x \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -37.$$

Розв'язання: Розкриємо визначник за правилом Саррюса (стор. 6).

$$4x + 10x + 18 - 24 - 2x^2 - 15 = 37;$$

Ми отримали квадратне рівняння, розв'яжемо його:

$2x^2 - 14x - 16 = 0;$

$x^2 - 7x - 8 = 0;$

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 48 + 32 = 81;$

$x_{1,2} = \frac{7 \pm 9}{2} = \left[\begin{matrix} -1 \\ 8 \end{matrix}\right.$

Відповідь: $x_1 = -1; \quad x_2 = 8.$

3. Знайти ранг матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 7 \\ -1 & 5 & 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: Для обчислення рангу матриці скористаємося, наприклад, методом відокремлювальних мінорів (визн. 1.17).

Складемо мінор першого порядку:

$$\Delta_1 = |2| \neq 0,$$

він відрізняється від нуля, отже ранг матриці не менше 1.

Складемо мінор другого порядку:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 21 = 21 \neq 0,$$

він відрізняється від нуля, отже ранг матриці не менше 2.

Складемо мінор третього порядку:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 42 + 15 - 0 - 60 + 84 = 81 \neq 0,$$

він відрізняється від нуля, отже ранг матриці не менше 3.

Скласти мінор четвертого порядку неможливо, тому що матриця має розмір $[3 \times 5]$, отже ранг матриці дорівнює трьом.

Відповідь: $rangA = 3$.

4. Знайти матрицю $A = (2B + C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Виконаємо послідовно дії: множення матриці на число, додавання матриць

$$2B + C = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 6 & 14 \\ 4 & 0 & 10 & -12 \\ -2 & 4 & 8 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 3 & 11 & 13 \\ 2 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

і множення матриць

$$(2B + C) \cdot D = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 11 & 13 \\ 2 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 99 + 3 + 0 - 52 & 33 + 6 - 55 + 13 \\ 18 + 4 + 0 + 16 & 6 + 8 - 20 - 4 \\ 0 - 1 + 0 - 40 & 0 - 2 - 55 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & -3 \\ 38 & -10 \\ -41 & -47 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A = \begin{pmatrix} 50 & -3 \\ 38 & -10 \\ -41 & -47 \end{pmatrix}$.

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Скористаємося схемою знаходження оберненої матриці, запропонованою на сторінці 17:

- ✓ обчислимо визначник матриці

$$detA = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 21 + 0 + 28 - 0 - 9 = 22,$$

отже, матриця не вироджена і обернена до неї існує;

- ✓ знаходимо транспоновану матрицю

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

- ✓ обчислимо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(9 - 0) = -9;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 + 7) = -10;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 14 = 26;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(-4 + 2) = 2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 14 = -14;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -(0 + 21) = -21;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5;$$

- ✓ складемо обернену матрицю за правилом (1.9)

$$A^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 6 & -9 & 1 \\ -10 & 26 & 2 \\ -14 & 21 & 5 \end{pmatrix};$$

- ✓ виконаємо перевірку за визначенням 1.15

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 6 & -9 & 1 \\ -10 & 26 & 2 \\ -14 & 21 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 24 - 9 + 7 & 18 - 18 + 0 & -12 + 9 + 3 \\ -40 + 26 + 14 & -30 + 52 + 0 & 20 - 26 + 6 \\ -56 + 21 + 35 & -42 + 42 + 0 & 28 - 21 + 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 6 & -9 & 1 \\ -10 & 26 & 2 \\ -14 & 21 & 5 \end{pmatrix}.$

Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів

Завдання 1.1

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & -7 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 9 & -4 \end{vmatrix}.$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{32}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 2-го рядка;
б) за елементами 4-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 4-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} x & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} = 8.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -7 & 6 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -6 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ -5 & 7 & 11 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = (5B - 4C) \cdot D$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 & -2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 6 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -4 \\ 2 & -3 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \\ 7 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & -5 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -7 \\ 1 & 11 & 0 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Властивості визначників.

Завдання 1.2

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -6 & -2 \\ -3 & 9 & 4 & -8 \\ 5 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{21}. Обчислити визначник, розкриваючи його
   а) за елементами 3-го рядка;
   б) за елементами 1-го стовпця;
   в) попередньо отримавши нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ -4 & x & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -68.$

3. Знайти ранг матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 13 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \\ 7 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (6C + 2D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -2 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & 5 & 6 & -1 \\ -4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & -5 \\ 4 & 2 & -8 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Додавання та віднімання матриць.

Завдання 1.3

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 & 12 \\ 2 & 0 & -6 & -3 \\ -5 & 9 & 10 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{41}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 2-го рядка;
б) за елементами 4-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ x & 3 & -1 \\ 2 & x & 2 \end{vmatrix} = 84.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & -6 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 3 \\ -7 & -8 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = 2B + C \cdot D$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 8 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -1 \\ -2 & 3 \\ -1 & 7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Добуток матриць.

Завдання 1.4

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -6 & -5 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 8 & 9 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{34}. Обчислити визначник, розкриваючи його

   а) за елементами 2-го рядка;
   б) за елементами 4-го стовпця;
   в) попередньо отримавши нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & x \\ -3 & x & 4 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 11.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C - 5D$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 5 & 1 & -8 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ -6 & 0 & 8 & -11 & 2 \\ 1 & 2 & 9 & 5 & 8 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -7 & 4 & 9 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -3 & 8 & -2 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Правила обчислення визначників.

Завдання 1.5

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 8 & -6 \\ 4 & -1 & 3 & 11 \\ 5 & 2 & -6 & 7 \end{vmatrix}$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{11}. Обчислити визначник, розкриваючи його

а) за елементами 3-го рядка;
б) за елементами 2-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ x & 7 & 2 \\ 0 & x & 4 \end{vmatrix} = -92.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = (3B + 2C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -7 \\ 0 & 4 \\ -4 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 8 & 9 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Обернена матриця. Алгоритм знаходження оберненої матриці.

Завдання 1.6

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 8 & -6 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 8 \\ 10 & 6 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{41}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 3-го рядка;
б) за елементами 4-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 1 & x & 4 \\ x & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -42.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 3 & 2 \\ - & 1 & 6 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & -4 & -1 \\ -5 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (2C - 7D)$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 7 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & -2 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 9 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Правила обчислення визначників другого та третього порядку.

Завдання 1.7

1. Дано визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 7 & -9 \\ -3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{24}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 1-го рядка;
б) за елементами 2-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 4-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & x \\ x & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 125.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 & 6 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -5 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = 8B - C \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & 8 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Ранг матриці.

Завдання 1.8

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} -5 & 4 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 9 & 15 \\ -1 & 6 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{31}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 2-го рядка;
б) за елементами 4-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & x \\ 2 & x & 5 \end{vmatrix} = 88.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & -9 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C + 5D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 2 & 8 & -1 \\ 0 & 7 & 5 & -1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \\ 4 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0 & -9 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Властивості визначників.

Завдання 1.9

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 3 & -6 & -2 & 0 \\ -5 & 4 & 1 & -1 \\ 7 & -11 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 9 & -6 \end{vmatrix}.$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{31}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 4-го рядка;
б) за елементами 2-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & x \\ x & 6 & 1 \end{vmatrix} = -80.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & -5 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (6C - 7D)$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 9 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Мінор та алгебраїчне доповнення.

Завдання 1.10

1. Дано визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{34}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 4-го рядка;
б) за елементами 3-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} x & -2 & 5 \\ 3 & -1 & -4 \\ x & 6 & 1 \end{vmatrix} = -80.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 & 1 & 4 & -2 \\ 10 & 3 & -8 & -5 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = (2B + 5C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 0 & 5 & -8 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & -2 & 7 \\ -1 & -8 & 4 & -5 & -6 & 3 \\ 4 & 0 & -3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 10 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Правило обчислення визначника n-порядку.

Завдання 1.11

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 & 8 \\ 9 & -8 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{33}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 2-го рядка;
б) за елементами 4-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 1 & x & -3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & x \end{vmatrix} = 4.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & -2 & -1 \\ -4 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = 6B + C \cdot D$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 2 & -8 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \\ -2 & 5 \\ 6 & 4 \\ 3 & 9 \\ -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Правила обчислення обсягів продукції за певний період, приросту обсягів виробництва, вартості виробленої продукції за допомогою матриць.

Завдання 1.12

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 4 & -4 & 6 & 5 \\ 1 & -3 & 9 & 2 \\ 7 & 0 & 5 & -6 \\ -5 & 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{11}. Обчислити визначник, розкриваючи його
   а) за елементами 3-го рядка;
   б) за елементами 1-го стовпця;
   в) попередньо отримавши нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} x & 5 & -3 \\ -2 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & x \end{vmatrix} = 184.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 8 \\ -5 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C - 4D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 7 & 2 \\ -1 & 8 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 7 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 \\ -5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Властивості визначників.

Завдання 1.13

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 & -5 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 9 & 2 \\ 7 & -6 & -9 & 4 \end{vmatrix}.$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{22}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 1-го рядка;
б) за елементами 4-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} x & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 7 \\ 6 & x & 1 \end{vmatrix} = -14.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & -7 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ -7 & 1 & 5 & -2 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (3C + 2D)$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 6 & 7 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \\ 8 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Мінор та алгебраїчне доповнення.

Завдання 1.14

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 9 \end{vmatrix}.$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{44}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 4-го рядка;
б) за елементами 3-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & x \\ 4 & 2 & -2 \\ x & -6 & -1 \end{vmatrix} = -166.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ -5 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = (6B - 4C) \cdot D$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 6 & -4 \\ -3 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & 6 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Дії над матрицями. Транспонування матриць.

Завдання 1.15

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 10 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{41}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 3-го рядка;
б) за елементами 1-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & x \\ 5 & x & 1 \end{vmatrix} = 40.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & -1 & -4 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = 7B - C \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ -5 & 0 \\ 8 & 6 \\ 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Дії над матрицями. Множення матриці на число.

Завдання 1.16

1. Дано визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -9 & 5 \\ 7 & 1 & 7 & -8 \\ 4 & 8 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{32}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 4-го рядка;
б) за елементами 3-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 & 3 \\ x & 2 & -1 \\ 6 & x & 4 \end{vmatrix} = -119.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 8 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C + 3D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 7 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & -6 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \\ -6 & 0 & 5 & 1 \\ -4 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 9 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 & 3 \\ 4 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -7 & 9 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Правила обчислення обсягів продукції за певний період, приросту обсягів виробництва, вартості виробленої продукції за допомогою матриць.

Завдання 1.17

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 9 \\ -5 & 10 & -6 & -7 \end{vmatrix}.$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{22}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 4-го рядка;
б) за елементами 3-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & x \\ 1 & -2 & 4 \\ x & -1 & 0 \end{vmatrix} = 99.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 11 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & -6 & -1 \\ -5 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (4C - 3D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 8 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 & 1 & 4 \\ 8 & -1 & 6 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Правило обчислення визначників *n*-го порядку.

Завдання 1.18

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 13 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -6 \\ 6 & 4 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{43}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 3-го рядка;
б) за елементами 3-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 2 & x & -2 \\ x & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -26.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -4 & -7 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -9 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = (7B + 2C) \cdot D$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 6 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 0 & 1 \\ -5 & 6 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & -1 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Обернена матриця.

Завдання 1.19

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -9 & 8 \\ 1 & 6 & -5 & 3 \\ -3 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & -5 \end{vmatrix}.$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{14}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 1-го рядка;
б) за елементами 4-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ x & -4 & 5 \end{vmatrix} = -30.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = 6B + C \cdot D$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 2 & -8 \\ 1 & 4 \\ -5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} -11 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Додавання та віднімання визначників.

Завдання 1.20

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ -7 & 3 & -4 & 6 \\ -6 & 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{41}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 3-го рядка;
б) за елементами 2-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 4-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ -3 & 4 & -2 \\ -1 & x & 1 \end{vmatrix} = 27.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & -9 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & -3 & -2 \\ 4 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C - 2D$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 8 \\ 6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & 9 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & -2 \\ 8 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Мінор і алгебраїчне доповнення.

Завдання 1.21

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 7 \\ 10 & 3 & -8 & 9 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{11}. Обчислити визначник, розкриваючи його
   а) за елементами 4-го рядка;
   б) за елементами 3-го стовпця;
   в) попередньо отримавши нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 1 & 5 & x \\ 2 & x & 3 \end{vmatrix} = 23.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -6 & 2 & -4 & 1 \\ -1 & 9 & 2 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & -3 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = (5B - 2C) \cdot D$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \\ -5 & -1 \\ 7 & -2 \\ -6 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 7 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Правила обчислення визначників другого і третього порядків.

Завдання 1.22

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 3 & 10 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \\ 9 & 1 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{34}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 1-го рядка;
б) за елементами 2-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 1 & x & 4 \\ -2 & -3 & x \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 66.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 7 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (3C + 4D)$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 2 & -1 \\ -6 & 4 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 0 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -7 \\ 4 & -2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Обернена матриця.

Завдання 1.23

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & 0 & 3 \\ 11 & -1 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{44}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 2-го рядка;
б) за елементами 3-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & x \\ 1 & 3 & 2 \\ x & -1 & -3 \end{vmatrix} = -70.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = 6B - C \cdot D$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Властивості визначників.

Завдання 1.24

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 4 & -7 & 2 & 0 \\ 7 & -3 & -1 & 4 \\ 9 & -9 & -6 & 4 \end{vmatrix}.$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{14}.
Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 1-го рядка;
б) за елементами 2-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & x & 9 \\ x & -1 & 2 \end{vmatrix} = -111.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \\ -4 & 6 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C + 3$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 4 & 1 & -7 \\ 2 & -3 & -3 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -3 & 9 & 2 \\ 7 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Мінор і алгебраїчне доповнення.

Завдання 1.25

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 2 & -8 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 15 & 2 & 6 \\ 3 & -3 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{21}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 4-го рядка;
б) за елементами 3-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 5 & -5 & x \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 23.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -1 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 9 \\ -1 & 2 & -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (2C + 5D)$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ -4 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -5 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Дії над матрицями. Транспонування матриць.

Завдання 1.26

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 & 3 \\ -1 & 6 & -7 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & -5 \\ 10 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{33}. Обчислити визначник, розкриваючи його
   а) за елементами 4-го рядка;
   б) за елементами 2-го стовпця;
   в) попередньо отримавши нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} -1 & -7 & x \\ x & 4 & 2 \\ 8 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -138.$

3. Знайти ранг матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ -8 & 7 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = (4B - 3C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 8 \\ 0 & -6 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 2 & 8 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 11 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 10 \\ -6 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Правило обчислення визначників n-го порядку.

Завдання 1.27

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 9 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ -4 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{42}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 1-го рядка;
б) за елементами 4-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 8 \\ 2 & x & 1 \\ x & -1 & 5 \end{vmatrix} = -204.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 & 2 \\ 11 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ -5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C - 5D$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 8 \\ -6 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ -4 & 5 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & 8 & -2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & -7 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & -4 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Правила обчислення обсягів продукції за певний період, приросту обсягів виробництва, вартості виробленої продукції за допомогою матриць.

Завдання 1.28

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ -11 & -4 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 6 & -2 \\ 8 & 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{12}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 4-го рядка;
б) за елементами 2-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & x \\ 9 & x & 3 \end{vmatrix} = 223.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 & -5 & 3 & 6 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & 2 & 7 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = 7B + C \cdot D$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -7 & -2 \\ 0 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ -5 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Добуток матриць.

Завдання 1.29

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 4 & -6 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 11 \\ 6 & -6 & 4 & -1 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{32}. Обчислити визначник, розкриваючи його
   а) за елементами 1-го рядка;
   б) за елементами 2-го стовпця;
   в) попередньо отримавши нулі у 4-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ x & 4 & 2 \\ -1 & 7 & x \end{vmatrix} = -44.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -8 & -1 & 4 \\ 1 & -5 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (3C - 5D)$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -6 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ -2 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 8 \\ 0 & 13 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Обернена матриця. Алгоритм знаходження оберненої матриці.

Завдання 1.30

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 7 & 9 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 8 \\ -6 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & -4 & -1 \end{vmatrix}.$$
Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{11}. Обчислити визначник, розкриваючи його
а) за елементами 4-го рядка;
б) за елементами 2-го стовпця;
в) попередньо отримавши нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & x \\ 10 & x & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 110.$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ -8 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = (2B + 4C) \cdot D$, якщо
$$B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 6 \\ -7 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -9 & 5 \\ -2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Ранг матриці.

Розділ 2 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

У другому розділі спробуємо навчитися використовувати отримані раніше навички з обчислення визначників і роботи з матрицями для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Необхідний теоретичний матеріал читач може знайти на сторінці 35-51 підручника.

Приклади розв'язання типового варіанта

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - \ x_2 + \ 2x_3 = 9 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12 \\ \ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -3 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом.

Розв'язання:

а) розв'яжемо систему за правилами Крамера. Для цього обчислимо визначник системи (1.15):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -36 + 5 - 16 - 6 - 30 - 16 = -99$$

й три допоміжних визначника:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 2 \\ -12 & 3 & -5 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -108 - 15 + 48 + 18 - 90 + 48 = -99,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 4 & -12 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 144 - 45 - 24 + 24 - 45 + 144 = 198,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 9 \\ 4 & 3 & -12 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -27 + 12 - 72 - 27 - 72 - 12 = -198.$$

За формулами Крамера (1.16) отримаємо результат:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-99}{-99} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{198}{-99} = -2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-198}{-99} = 2.$$

Зробимо перевірку, підставимо отримані значення, наприклад, в перше рівняння системи:

$$3 \cdot 1 - (-2) + 2 \cdot 2 = 3 + 2 + 4 = 9; \quad 9 = 9.$$

Відповідь: $x_1 = 1;\ x_2 = -2;\ x_3 = 2.$

б) розв'яжемо систему матричним методом. Випишемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену до A матрицю:

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -36 + 5 - 16 - 6 - 30 - 16 = -99,$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 10 = -22,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(4 + 4) = -8,$$

$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -(-16 + 5) = 11,$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 2 = -14,$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -(-15 - 8) = 23,$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 3 = -11,$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 + 1) = 5,$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 = 13;$

$$A^{-1} = -\frac{1}{99}\begin{pmatrix} -22 & -8 & -1 \\ 11 & -14 & 23 \\ -11 & 5 & 13 \end{pmatrix};$$

і скористаємося формулою (1.20):

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{99}\begin{pmatrix} -22 & -8 & -1 \\ 11 & -14 & 23 \\ -11 & 5 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{99}\begin{pmatrix} -198 + 96 + 3 \\ 99 + 168 - 69 \\ -99 - 60 - 39 \end{pmatrix} = -\frac{1}{99}\begin{pmatrix} -99 \\ 198 \\ -198 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо перевірку, підставимо отримані значення, наприклад, в перше рівняння системи:

$$3 \cdot 1 - (-2) + 2 \cdot 2 = 3 + 2 + 4 = 9; \quad 9 = 9.$$

Відповідь: $x_1 = 1;\ x_2 = -2;\ x_3 = 2.$

2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - \ x_3 + 4x_4 = 23 \\ x_1 - \ x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -1 \end{cases}$$

Розв’язання. Для зручності запису скористаємося розширеною матрицею (1.18) і виконаємо елементарні перетворення, а саме: поміняємо місцями перший та другий рядки;

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & -1 & 4 & 23 \\ 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right) \sim$$

помножимо перший рядок на $(-2), (-5), (-3)$ та додамо його до другого, третього, четвертого рядків відповідно;

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & 4 & 23 \\ 5 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right) (-2), (-5), (-3) \sim$$

помножимо другий рядок на $\frac{7}{3}$ та додамо до третього рядка, а четвертий рядок скоротимо на 2;

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 7 & -33 & 11 & -14 \\ 0 & 0 & -16 & 2 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \frac{7}{3} \\ \\ :2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -\frac{190}{3} & \frac{89}{3} & \frac{77}{3} \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \end{array}\right) \cdot 3 \sim$$

помножимо третій рядок на 3, щоб позбутися знаменників; поміняємо місцями третій та четвертий рядки; помножимо третій рядок на $-\frac{190}{8} = -\frac{95}{4}$ і додамо до четвертого рядка;

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -190 & 89 & 77 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -190 & 89 & 77 \end{array}\right) - \frac{95}{4} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{261}{4} & \frac{783}{4} \end{array}\right) : \frac{261}{4} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Нагадаємо, що першому стовпцю відповідають коефіцієнти при невідомому x_1, другому – при x_2, третьому – при x_3, четвертому – при x_4.

Отже, з четвертого рядка розширеної матриці отримаємо невідоме :

$$x_4 = 3.$$

З третього рядка, після підстановки знайденого x_4 обчислимо x_3:

$$-8x_3 + x_4 = -5; \quad -8x_3 + 3 = -5; \quad -8x_3 = -8;$$

$$x_3 = 1.$$

З другого, відповідно – x_2:

$$-3x_2 - 13x_3 + 8x_4 = 17; \quad -3x_2 - 13 \cdot 1 + 8 \cdot 3 = 17;$$

$$x_2 = -2$$

І, нарешті, x_1:

$$x_1 - \ (-2) + 6 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = 3;$$

$$x_1 = 1.$$

Виконаємо перевірку. Для цього підставимо отримані значення невідомих у перше рівняння системи:

$$2\cdot 1-5\cdot(-2)-1+4\cdot 3=23; \qquad 23=23.$$

Ми отримали тотожність.

Відповідь: $x_1=1,\ x_2=-2,\ x_3=1,\ x_4=3.$

3. Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=0 \\ 2x_1+x_2-4x_3=0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+x_2+5x_3=0 \\ 4x_1+2x_2+2x_3=0 \\ 14x_1+9x_2-7x_3=0 \end{cases}$

Розв’язання: Для розв’язку однорідних систем будемо посилатися до теореми 1.4.

а) Обчислимо визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}=40+16-3-4-20+24=53\neq 0.$$

Отже, ранг матриці системи дорівнює трьом $(r=n)$, а за теоремою 4.1 відповідна однорідна система має лише тривіальний розв’язок $x_1=x_2=x_3=0$.

Відповідь: $x_1=x_2=x_3=0.$

б) Обчислимо визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -14 & -9 & 7 \end{vmatrix}=42-28-180+140+54-28=0.$$

Ранг матриці менший 3 (кількості невідомих), тому за умовою теореми 1.4 така система має нетривіальний розв’язок. Виключимо із системи, наприклад, третє рівняння:

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+5x_3=0 \\ 4x_1+2x_2+2x_3=0 \end{cases}.$$

Положимо $x_3=k$, де k - довільне дійсне число. Виразимо x_1 і x_2 через k:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -5k \\ 4x_1 + 2x_2 = -2k \end{cases}.$$

Розв'яжемо отриману систему за формулами Крамера:

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2;$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5k & 1 \\ -2k & 2 \end{vmatrix} = -10k + 2k = -8k;$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -5k \\ 4 & -2k \end{vmatrix} = -6k + 20k = 14k.$

Остаточно маємо:

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8k}{2} = -4k;$

$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{14k}{2} = 7k.$

Відповідь: $x_1 = -4k$; $x_2 = 7k$; $x_3 = k$, де $k \in R$.

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: Знайдемо матрицю $A - \lambda E$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{pmatrix}.$$

Запишемо характеристичне рівняння

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(1-\lambda)(4-\lambda) - 10 = 0;$$

або $$\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0;$$

звідси маємо власні числа матриці $\lambda_1 = -1;\ \lambda_2 = 6.$

Власний вектор матриці знайдемо з системи (1.26):

$$(A - \lambda E)X = 0$$

а) підставимо значення власного числа $\lambda_1 = -1$:

$$(A + E)X = 0.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0; \\ 5x_1 + 5x_2 = 0. \end{cases}$$

Обчислимо визначник цієї однорідної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 10 = 0.$$

Він дорівнює нулю, отже, ранг матриці менший кількості невідомих, тому за умовою теореми 1.4 така система має нетривіальний розв’язок. Його легко визначити з умови: $x_1 = -x_2 = k$.

Отже, власний вектор матриці $X = \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

б) підставимо значення власного числа $\lambda_2 = 6$:

$$(A - 6E)X = 0.$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 = 0; \\ 5x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Обчислимо визначник цієї однорідної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 10 - 10 = 0.$$

Він дорівнює нулю, отже, ранг матриці менший кількості невідомих, тому за умовою теореми 1.4 така система має нетривіальний розв’язок. Його легко визначити з умови: $x_1 = \frac{2}{5}x_2$ або $x_1 = 2k$; $x_2 = 5k$.

Отже, власний вектор матриці $X = \begin{pmatrix} 2k \\ -5k \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Відповідь: при власному значені $\lambda_1 = -1$ власний вектор матриці має вигляд $X = \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; при власному значені $\lambda_1 = 6$ власний вектор матриці має вигляд $X = \begin{pmatrix} 2k \\ -5k \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів

Завдання 2.1

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 = 10 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 58 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 24 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 = -12 \\ x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 + 5x_4 = -10 \\ 5x_1 - \ \ x_2 - \ \ x_3 + 4x_4 = -18 \\ -2x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 = \ \ 29 \end{cases}.$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.2

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -48 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 36 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 35 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 - 5x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + \ \ x_4 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 - \ \ x_4 = -11 \\ 3x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 - 4x_4 = \ \ 2 \end{cases}$$

3. Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} -8x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 9x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.3

1. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 7x_3 = -39 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 = -27 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$ а) за правилами Крамера; б) матричним методом.

2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = -8 \\ -3x_1 + 4x_3 + 2x_4 = -3 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 9 \end{cases}$$

3. Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 7x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 29x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.4

1. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 7x_3 = 33 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ -3x_1 + 7x_2 - 6x_3 = -39 \end{cases}$ а) за правилами Крамера; б) матричним методом.

2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - \ \ x_3 - \ \ x_4 = -18 \\ -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + \ \ x_4 = -19 \\ 3x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 - \ \ x_4 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 \qquad\quad + 5x_4 = -3 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 12x_1 - 6x_2 - 23x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.5

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 = -20 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -39 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -23 \end{cases}$ а) за правилами Крамера; б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 = -20 \\ 3x_1 \qquad\quad + 2x_3 + 4x_4 = -9 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - \ \ x_4 = -7 \\ -2x_1 - 5x_2 + \ \ x_3 + 3x_4 = \ \ 3 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 19x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ -16x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.6

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 19 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 32 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -24 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 35 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 6 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 7x_1 - x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.7

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 7 \\ -2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 1 \\ 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 51 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -5 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 32 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 5x_4 = -16 \end{cases}$$

3. Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 9x_1 + 9x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.8

1. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -43 \\ -3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 45 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 11 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -8 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -27 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

3. Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 29x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.9

1. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 5x_3 = 13 \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 43 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 8 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -21 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 12 \end{cases}$$

3. Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+4x_3=0 \\ 2x_1-11x_2+x_3=0 \\ 4x_1-4x_2-3x_3=0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 13x_1-12x_2+4x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 4x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.10

1. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$\begin{cases} 6x_1+2x_2-\ \ x_3=12 \\ 5x_1-\ \ x_2+4x_3=-28 \\ x_1+3x_2+6x_3=-4 \end{cases}$ а) за правилами Крамера; б) матричним методом.

2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1+5x_2-3x_3+\ \ x_4=-13 \\ 3x_1-4x_2+\ \ x_3+5x_4=5 \\ 2x_1+3x_2+4x_3-x_4=7 \\ 5x_1+6x_2-x_3+4x_4=-10 \end{cases}$$

3. Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 4x_1-6x_2-x_3=0 \\ 9x_1+2-7x_3=0 \\ x_1-5x_2-4x_3=0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -7x_1+x_2-2x_3=0 \\ -2x_1+5x_2+x_3=0 \\ 4x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.11

1. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$\begin{cases} 5x_1+2x_2+\ \ x_3=22 \\ 2x_1-3x_2-4x_3=-15 \\ x_1+7x_2-2x_3=-33 \end{cases}$ а) за правилами Крамера; б) матричним методом.

2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 15 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 6x_4 = -4 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = -33 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 13 \end{cases}$$
3. Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.12

1. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 + x_3 = -26 \\ x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 35 \\ -3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 30 \end{cases}$$
а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ -4x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 15 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -16 \end{cases}$$
3. Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 31x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.13

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 6 \\ 3x_1 - 6x_2 - 8x_3 = -63 \\ 2x_1 + \ x_2 + 9x_3 = 3 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + \ x_3 - 5x_4 = 19 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - \ x_4 = -13 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 7 \\ -2x_1 - \ x_2 + 6x_3 + \ x_4 = -20 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 9x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 13x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 11 & -9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.14

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + \ x_2 - 7x_3 = 28 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 19 \\ x_1 + 9x_2 + 5x_3 = -14 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - \ x_4 = 8 \\ -3x_1 - 2x_2 - \ x_3 + 4x_4 = -3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 + \ x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -17 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x_1 - 11x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.15

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -54 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -28 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 23 \end{cases}$$
а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 3 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = -13 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20 \end{cases}$$
3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ -27x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$
4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.16

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -9 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 15 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 27 \end{cases}$$
а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -6 \\ -2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = -3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Завдання 2.17

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - \ x_3 = -7 \\ -2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 1 \\ 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 51 \end{cases}$ а) за правилами Крамера; б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - \ x_4 = -5 \\ 5x_1 + \ x_2 - \ x_3 + 4x_4 = 32 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 5x_4 = -16 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ -19x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.18

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 = 24 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 20 \end{cases}$ а) за правилами Крамера; б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + \ x_3 - 5x_4 = -7 \\ -2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -20 \\ 3x_1 + 5x_2 - \ x_3 - 3x_4 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = \ -6 \end{cases}$$

3. Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 9x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 15x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Завдання 2.19

1. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 5\,x_3 = 23 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -36 \\ 2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -15 \end{cases}$ а) за правилами Крамера; б) матричним методом.

2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 18 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 4 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 10 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

3. Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 9x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 23x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та вектори матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.20

1. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 23 \end{cases}$ а) за правилами Крамера; б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 - x_4 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 10 \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 - 3x_4 = -3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -16 \end{cases}$$
3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ 8x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 13x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$
4. Знайти власні числа та власні вектори матриці
$$A = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Завдання 2.21

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 4x_3 = -6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 17 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -33 \end{cases}$$
а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -25 \end{cases}$$
3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 + 26x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$
4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.22

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 29 \\ 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 28 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases}$$
а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -25 \end{cases}$$
3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
а) $\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 8x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 16x_1 + 9x_2 - 24x_3 = 0 \end{cases}$
4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.23

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 30 \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 19 \\ 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 17 \end{cases}$$
а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 - 7x_2 - x_3 + 5x_4 = -15 \\ -6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 4 \end{cases}$$
3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
а) $\begin{cases} 7x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 + 10x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.24

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - x_3 = 43 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 12 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -10 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 14x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.25

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -10 \\ 2x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 35 \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 = -3 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 21 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -9 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \\ 6x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 8x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.26

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 9x_3 = -4 \\ x_1 - 6x_2 - 5x_3 = -26 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ а) за правилами Крамера; б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 17 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 = 20 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = -7 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 = 0 \\ 11x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.27

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -9 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$ а) за правилами Крамера; б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 - x_4 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -20 \\ -2x_1 + 2x_2 - 7x_3 + x_4 = 19 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 9x_1 - x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.28

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 4\,x_3 = -2 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$ а) за правилами Крамера; б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -8 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -15 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та вектори матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.29

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - x_3 = -29 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10 \\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -11 \end{cases}$ а) за правилами Крамера; б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -7 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 10 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 - x_3 = 0 \\ 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 18x_1 + 12x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.30

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 4\,x_3 = 5 \\ 7x_1 + 3x_2 - x_3 = 26 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$ а) за правилами Крамера; б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 1 \\ -3x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -8 \\ -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = -22 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 9 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -8x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 27x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

4. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Розділ 3 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ В РОЗВ'ЯЗАННІ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

За допомогою дій над матрицями ми навчимося розв'язувати задачі з економіки: обчислювати обсяги продукції; приріст обсягів виробництв, вартість виробленої продукції, виручку по підприємствам і т. п. Читачу, який успішно впорався з задачами розділу 1, розв'язання запропонованих прикладів не становить проблеми. Однак звернемо вашу увагу на необхідність використання відповідних формул з п. 1.3.8, 1.3.10 підручника «Вища математика для менеджерів».

Побудова моделі Леонтьєва багатогалузевої економіки (п. 1.3.9) потребує від нас використання навичок у розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Приклади розв'язання типового варіанта

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому півріччях задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 32 & 9 \\ 8 & 7 & 28 & 7 \\ 6 & 11 & 31 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 38 & 7 \\ 10 & 12 & 33 & 6 \\ 6 & 7 & 27 & 15 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції за рік;

б) приріст обсягів продукції в другому півріччі порівняно з першим по видам та по підприємствам;

в) вартість виробленої продукції за перше півріччя (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 5$ - курс умовної одиниці відносно до гривні.

Розв'язання:

а) обсяг продукції за рік знайдемо як суму матриць:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 32 & 9 \\ 8 & 7 & 28 & 7 \\ 6 & 11 & 31 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 14 & 38 & 7 \\ 10 & 12 & 33 & 6 \\ 6 & 7 & 27 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 26 & 70 & 16 \\ 18 & 19 & 61 & 13 \\ 12 & 18 & 58 & 27 \end{pmatrix};$$

б) приріст обсягів продукції в другому півріччі порівняно з першим по видам та по підприємствам знайдемо як різницю матриць:

$$D = B - A = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 38 & 7 \\ 10 & 12 & 33 & 6 \\ 6 & 7 & 27 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 12 & 32 & 9 \\ 8 & 7 & 28 & 7 \\ 6 & 11 & 31 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

З отриманого результату бачимо, на першому та другому підприємствах обсяги виробництва першого, другого та третього видів продукції зросли, а четвертого – зменшились. На третьому підприємстві виробництво першого виду продукції не змінилося, другого і третього – зменшилося, а четвертого – зросло;

в) вартість виробленої продукції за перше півріччя знайдемо як добуток матриці на число:

$$K = 5 \cdot A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 & 32 & 9 \\ 8 & 7 & 28 & 7 \\ 6 & 11 & 31 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 60 & 160 & 45 \\ 40 & 35 & 140 & 35 \\ 30 & 55 & 155 & 60 \end{pmatrix}.$$

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 130 & 225 & 480 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 8 \\ 4 & 9 & 11 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

Розв'язання: Матрицю виручки по регіонах обчислимо за формулою (1.10):

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 130 & 225 & 480 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 8 \\ 4 & 9 & 11 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\,040 + 1\,100 + 1\,440 & 910 + 2\,025 + 2\,400 & 520 + 2\,475 + 3\,360 & 1\,040 + 1\,650 + 2\,400 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\,580 & 5\,335 & 6\,355 & 5\,090 \end{pmatrix}.$$

З отриманого результату бачимо, що, наприклад, в третьому регіоні виручка складає 6 355 грошових одиниць.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 210 \\ 195 \\ 330 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 125 & 40 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

Розв'язання:

а) матриця повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період знаходиться за формулою (1.11):

$$S = A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ 195 \\ 330 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 630 + 1\,560 + 1\,650 \\ 840 + 390 + 2\,310 \\ 1\,260 + 780 + 1\,650 \\ 420 + 1\,365 + 990 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\,840 \\ 3\,540 \\ 3\,690 \\ 2\,775 \end{pmatrix}.$$

б) повну вартість усіх витрачених ресурсів зможемо знайти за формулою (1.12):

$$C = P \cdot A \cdot X = P \cdot S = (50 \quad 60 \quad 125 \quad 40) \cdot \begin{pmatrix} 3\,840 \\ 3\,540 \\ 3\,690 \\ 2\,775 \end{pmatrix} =$$

$$= (192\,000 + 212\,400 + 461\,250 + 111\,000) = (976\,650).$$

Отже, повна вартість витрачених ресурсів складає 976 650 грошових одиниць.

4. М’ясокомбінат спеціалізується на випуску трьох видів виробів: сосисок, сардельок та м’ясних рулетів. Водночас на виробництві використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3. Норми затрат сировини на кожну одиницю виробів та об’єм затрат сировини на 1 день задані таблицею 3.1. Знайти щоденний об’єм випуску кожного виду кондитерських виробів.

Таблиця 3.1 – Норми та обсяги затрат сировини

Вид сировини	Норми затрат на одну одиницю виробів			Затрати сировини за 1 день
	Сосиски	Сардельки	М’ясні рулети	
S_1	4	5	3	4 900
S_2	3	6	4	5 100
S_3	7	3	1	5 000

Розв'язання: Зрозуміло, що як невідомі виступає шукана кількість кожного виду м'ясних виробів. Тому позначимо x_1 - обсяг випуску сосисок, x_2 – обсяг випуску сардельок, x_3 - обсяг випуску м'ясних рулетів. Відповідно до таблиці 1.1 можна записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4\,900 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 5\,100. \\ 7x_1 + 3x_2 + x_3 = 5\,600 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему, наприклад, методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 24 + 140 + 27 - 126 - 48 - 15 = 2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4\,900 & 5 & 3 \\ 5\,100 & 6 & 4 \\ 5\,000 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 29\,400 + 100\,000 + 45\,900 -$$

$$-90\,000 - 25\,500 - 58\,800 = 1000;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 4\,900 & 3 \\ 3 & 5\,100 & 4 \\ 7 & 5\,000 & 1 \end{vmatrix} = 20\,400 + 137\,200 + 45\,000 -$$

$$-107100 - 14\,700 - 80\,000 = 800;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 4\,900 \\ 3 & 6 & 5\,100 \\ 7 & 3 & 5\,000 \end{vmatrix} = 120\,000 + 178\,500 + 44\,100 -$$

$$-205800 - 75\,000 - 61\,200 = 600;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1000}{2} = 500;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{800}{2} = 400;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{600}{2} = 300.$$

Отже, м'ясокомбінат щоденно випускає 500 сосисок, 400 сардельок і 300 м'ясних рулетів.

5. У таблиці наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.2 – Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях)

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,3	0,25	400
	Галузь 2	0,2	0,15	100

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 5 %, а другої – на 10 %.

Розв'язання: Для розв'язання задачі звернемося до п. 1.3.9 посібника.

1) запишемо матрицю коефіцієнтів прямих витрат A і вектор кінцевої продукції Y:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,25 \\ 0,2 & 0,15 \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи є матриця A продуктивною. Усі елементи матриці A додатні, сума елементів у кожному стовпці не перевищує одиниці. Отже, матриця продуктивна.

Щоб знайти матрицю повних витрат $S = (E - A)^{-1}$, знайдемо спочатку матрицю $E - A$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,25 \\ 0,2 & 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,25 \\ -0,2 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм знаходження оберненої матриці нам добре відомий:

$$det(E-A)=\begin{vmatrix}0,7 & -0,25\\ -0,2 & 0,85\end{vmatrix}=0,595-0,05=0,545;$$

$$(E-A)^T=\begin{pmatrix}0,7 & -0,2\\ -0,25 & 0,85\end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T=0,85;\quad A_{12}^T=0,25;\quad A_{21}^T=0,2;\quad A_{22}^T=0,7.$$

Остаточно маємо матрицю повних витрат

$$S=\frac{1}{0,545}\begin{pmatrix}0,85 & 0,25\\ 0,2 & 0,7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,56 & 0,46\\ 0,37 & 1,28\end{pmatrix}.$$

Вектор валового продукту X обчислимо за формулою (1.32):

$$X=S\cdot Y=\begin{pmatrix}1,56 & 0,46\\ 0,37 & 1,28\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}400\\ 100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}624+46\\ 148+128\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}670\\ 176\end{pmatrix},$$

Отже, валовий продукт першої галузі складає 670 одиниць, а другої – 176.

Міжгалузеві поставки зможемо обчислити за формулою (1.28): $x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j$.

$$x_{11}=a_{11}\cdot x_1=0,3\cdot 670=201;$$

$$x_{12}=a_{12}\cdot x_2=0,25\cdot 176=44;$$

$$x_{21}=a_{21}\cdot x_1=0,2\cdot 670=134;$$

$$x_{22}=a_{22}\cdot x_2=0,15\cdot 176=26,4.$$

Обчислимо витрати продукції всіх галузей на виробництво:

- ✓ першої галузі
  $$x_{11}+x_{21}=201+134=335;$$
- ✓ другої галузі
  $$x_{12}+x_{22}=44+26,4=70,4.$$

Чиста продукція галузі дорівнює різниці між валовою продукцією цієї галузі і витратами продукції всіх галузей на виробництво цієї галузі:

- ✓ першої галузі: $670-335=335$;
- ✓ другої галузі: $176-70,4=105,6$.

Всі отримані результати зведемо в таблицю:

Таблиця 3.3 – Плановані об’єми валової продукції галузей, чиста продукція галузей

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Галузь</th><th colspan="2">Споживання</th><th rowspan="2">Кінцева продук-ція</th><th rowspan="2">Валова продукція</th></tr>
<tr><th>Галузь 1</th><th>Галузь 2</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Виробництво</td><td>Галузь 1</td><td>201</td><td>44</td><td>400</td><td>670</td></tr>
<tr><td>Галузь 2</td><td>134</td><td>26,4</td><td>100</td><td>176</td></tr>
<tr><td colspan="2">Чиста продукція</td><td>335</td><td>105,8</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Валова продукція</td><td>670</td><td>176</td><td></td><td></td></tr>
</table>

1) Вектор кінцевого споживання Y обчислимо з урахуванням того, що кінцеве споживання першої галузі збільшиться на 5 %, а другої – на 10 %:

$$Y = \begin{pmatrix} 400 \cdot 1{,}05 \\ 100 \cdot 1{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

Вектор валового випуску X, який при відомій матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y, знайдемо за формулою (1.32):

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1{,}56 & 0{,}46 \\ 0{,}37 & 1{,}28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 420 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 655{,}2 + 50{,}6 \\ 155{,}4 + 140{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 705{,}8 \\ 296{,}2 \end{pmatrix}$$

Отже, випуск у першій галузі потрібно збільшити до 705,8 умовних грошових одиниць, а в другий – до 296,2.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання: Всі елементи матриці A додатні. Обчислимо суму елементів у кожному стовпці матриці A:

- ✓ перший стовпець: $\sum_{i=1}^{3} a_{i1} = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}6$;
- ✓ другий стовпець: $\sum_{i=1}^{3} a_{i2} = 0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1{,}0$;

✓ третій стовпець: $\sum_{i=1}^{3} a_{i3} = 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}8$.

Всі стовпці задовольняють умові $\max_{j=1,2,3} \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \leq 1$ і існує такий номер j $(j = 1{,}3)$ такий, що виконується умова $\sum_{i=1}^{3} a_{ij} < 1$. Отже, матриця A продуктивна.

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валовому випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 1{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Скористаємося формулою (1.32) яка пов'язує вектор валового випуску X, матрицю прямих витрат A і вектор кінцевого продукту Y:

$$X = S \cdot Y.$$

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1 обчислимо як

$$\Delta X_1 = S \cdot \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 1{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 + 8 + 9 \\ 3 + 4 + 33 \\ 6 + 10 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 40 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валовому випуску ΔX_2 обчислимо як:

$$\Delta Y_2 = S^{-1} \cdot \Delta X_2.$$

Знайдемо матрицю, обернену до S:

$$detS = \begin{vmatrix} 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 1{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}024 + 0{,}264 + 0{,}045 - 0{,}036 -$$

$$-0{,}66 - 0{,}012 = -0{,}375;$$

$$S^T = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 1{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T = \begin{vmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 \\ 1{,}1 & 0{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}02 - 0{,}55 = -0{,}53;$$

$$A_{12}^T = -\begin{vmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}1 \end{vmatrix} = -(0{,}04 - 0{,}15) = 0{,}11;$$

$$A_{13}^T = \begin{vmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 1{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}44 - 0{,}06 = 0{,}38;$$

$$A_{21}^T = -\begin{vmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 \\ 1{,}1 & 0{,}1 \end{vmatrix} = -(0{,}03 - 0{,}66) = 0{,}63;$$

$$A_{22}^T = \begin{vmatrix} 1{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}12 - 0{,}18 = -0{,}06;$$

$$A_{23}^T = -\begin{vmatrix} 1{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 1{,}1 \end{vmatrix} = -(1{,}32 - 0{,}09) = -1{,}23;$$

$$A_{31}^T = \begin{vmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 0{,}15 - 0{,}12 = 0{,}03;$$

$$A_{32}^T = -\begin{vmatrix} 1{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}5 \end{vmatrix} = -(0{,}6 - 0{,}24) = -0{,}36;$$

$$A_{33}^T = \begin{vmatrix} 1{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{vmatrix} = 0{,}24 - 0{,}12 = 0{,}12;$$

$$S^{-1} = -\frac{1}{0{,}375}\begin{pmatrix} -0{,}53 & 0{,}11 & 0{,}38 \\ 0{,}63 & -0{,}06 & -1{,}23 \\ 0{,}03 & -0{,}36 & 0{,}12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}41 & -0{,}29 & -1{,}01 \\ -1{,}68 & 0{,}16 & 3{,}28 \\ -0{,}08 & 0{,}96 & -0{,}32 \end{pmatrix}.$$

Приріст кінцевої продукції ΔY_2 знайдемо як добуток матриць:

$$\Delta Y_2 = S^{-1} \cdot \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 1{,}41 & -0{,}29 & -1{,}01 \\ -1{,}68 & 0{,}16 & 3{,}28 \\ -0{,}08 & 0{,}96 & -0{,}32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7{,}05 + 2{,}9 - 15{,}15 \\ -8{,}4 - 1{,}6 + 49{,}2 \\ -0{,}4 - 9{,}6 - 4{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5{,}2 \\ 39{,}2 \\ -5{,}8 \end{pmatrix}.$$

Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів

Завдання 3.1

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 15 & 35 & 6 \\ 6 & 17 & 44 & 6 \\ 3 & 8 & 11 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 22 & 7 \\ 7 & 12 & 35 & 6 \\ 6 & 6 & 23 & 10 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в першому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в другому кварталі в порівнянні з першим по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 3$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 255 & 380 & 495 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 & 5 \\ 9 & 6 & 3 & 10 \\ 2 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 376 \\ 229 \\ 425 \end{pmatrix}, \quad P = (60 \quad 90 \quad 115 \quad 35).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Швацький цех спеціалізується на випуску трьох видів виробів: халатів, медичних костюмів та робочих комбінезонів. Водночас на виробництві використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3. Норми затрат сировини на кожну одиницю виробів та обсяг затрат сировини на 1 день задані таблицею 3.4. Знайти щоденний обсяг випуску кожного виду кондитерських виробів.

Таблиця 3.4 – Норми та обсяги затрат сировини

Вид сировини	Норми затрат на одну одиницю виробів			Затрати сировини за 1 день
	Халати	Медичні костюми	Робочі комбінезони	
S_1	7	5	2	4 800
S_2	3	6	4	4 400
S_3	2	1	8	5 000

5. У таблиці 3.5 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.5 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,3	0,25	200
	Галузь 2	0,4	0,35	300

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 5 %.

6. З'ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуска ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 1{,}1 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Теорема Кронекера-Капеллі.

Завдання 3.2

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в третьому та четвертому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 15 & 9 & 25 \\ 12 & 8 & 17 & 31 \\ 21 & 6 & 23 & 29 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 & 15 & 10 & 30 \\ 11 & 10 & 18 & 31 \\ 20 & 9 & 22 & 25 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в другому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в четвертому кварталі в порівнянні з третім по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за четвертий квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 5$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 649 & 225 & 301 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 9 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 3 \\ 5 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 12 & 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 225 \\ 390 \\ 128 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 45 & 65 & 90 & 35 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Два заводи поставляють автомобілі для двох автогосподарств, потреби яких відповідно 150 та 350 машин. Перший завод випустив 200 машин, а другий - 300 машин.

Відомі витрати на транспортування машин із заводів у кожне автогосподарство (см. табл. 3.6).

Таблиця 3.6 – Витрати та транспортування машин із заводів в автогосподарства

<table>
<tr><td rowspan="2">Завод</td><td colspan="2">Витрати на перевозку в автогосподарство, грош. од.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>15</td><td>20</td></tr>
<tr><td>2</td><td>10</td><td>25</td></tr>
</table>

Мінімальні витрати на транспортування складають 11 000 грошових одиниць. Визначити оптимальний план перевозки машин.

5. В таблиці 3.7 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.7 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Галузь</td><td colspan="2">Споживання</td><td rowspan="2">Кінцева продукція</td></tr>
<tr><td>Галузь 1</td><td>Галузь 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Виробництво</td><td>Галузь 1</td><td>0,25</td><td>0,4</td><td>400</td></tr>
<tr><td>Галузь 2</td><td>0,55</td><td>0,15</td><td>100</td></tr>
</table>

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 20 %, а другої – на 15 %.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0,9 & 1,2 & 0,3 \\ 0,5 & 1,1 & 0,6 \\ 0,8 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

7. *Теоретичне питання.* Система лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні визначення.

Завдання 3.3

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому півріччях задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 14 & 12 & 9 \\ 37 & 5 & 18 & 7 \\ 16 & 19 & 19 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 23 & 12 & 15 & 10 \\ 37 & 6 & 25 & 11 \\ 17 & 19 & 22 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції за рік;

б) приріст обсягів продукції в другому півріччі в порівнянні з першим по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за рік (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 9$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 310 & 405 & 290 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 6 & 4 \\ 3 & 8 & 8 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 435 \\ 220 \\ 375 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 110 & 95 & 60 & 85 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. У кожному з трьох банків, між якими вибирає вкладник, нараховується свій щорічний відсоток на депозитний вклад. Вкладник має суму в 12 000 грошових одиниць. Якщо $\frac{1}{3}$ вкладу він розмістить у банку 1, $\frac{1}{4}$ - у банку 2, а решту – у банку 3, наприкінці року сума вкладу зросте до 13 700 грош. од. Якщо $\frac{1}{4}$ вкладу покласти у банк 1, $\frac{1}{6}$ - у банк 2, та $\frac{7}{12}$ - у банк 3, то сума, яку може отримати вкладник зросте до 13 750 грош. од. У випадку, коли схема розміщення вкладів: $\frac{2}{3}$ - у перший банк, $\frac{1}{6}$ - у другий банк, $\frac{1}{6}$ - у третій банк, то сума, отримана наприкінці року складала би 14 000 грош. од.

Визначити ставку по депозитах кожного банку.

5. В таблиці 3.8 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.8 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,25	0,4	200
	Галузь 2	0,15	0,3	400

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 20 %.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}3 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 1{,}1 \\ 1{,}0 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Теорема Крамера.

Завдання 3.4

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A=\begin{pmatrix}15 & 22 & 17 & 14\\ 9 & 29 & 13 & 19\\ 40 & 16 & 25 & 22\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}15 & 25 & 17 & 13\\ 10 & 23 & 15 & 18\\ 33 & 19 & 25 & 28\end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в першому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в другому кварталі в порівнянні з першим по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 4$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A=\begin{pmatrix}175 & 220 & 390\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}7 & 6 & 9 & 2\\ 4 & 5 & 8 & 8\\ 3 & 7 & 6 & 5\end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 5\\ 4 & 8 & 8\\ 7 & 3 & 1\\ 9 & 2 & 4\end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix}650\\ 285\\ 445\end{pmatrix}, \quad P=(205 \quad 90 \quad 110 \quad 85).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Знайти національні доходи країн для збалансованої торгівлі.

5. В таблиці 3.9 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.9 – Плановані об’єми валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,5	0,15	300
	Галузь 2	0,2	0,45	400

Знайти:

1) плановані об’єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний об’єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 20 %, а другої – на 10 %.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,5 & 0,1 & 0,7 \\ 0,1 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валовому випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,7 & 0,3 \\ 1,2 & 0,2 & 0,8 \\ 0,3 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 25 \\ -10 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Метод послідовного виключення невідомих. Метод Гауса.

Завдання 3.5

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в третьому та четвертому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 13 & 22 & 19 \\ 15 & 31 & 25 & 10 \\ 14 & 19 & 33 & 15 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 23 & 15 & 20 & 18 \\ 17 & 28 & 26 & 10 \\ 19 & 18 & 33 & 16 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в другому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в четвертому кварталі в порівнянні з третім по видам та по підприємствам;

в) вартість виробленої продукції за четвертий квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 6$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = (305 \quad 440 \quad 195), \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 6 \\ 9 & 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i–го товару на виробництво одиниці продукції j–го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 7 & 2 & 8 \\ 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 430 \\ 250 \\ 535 \end{pmatrix}, \qquad P = (70 \quad 85 \quad 105 \quad 90).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Цех картонно-тарного комбінату спеціалізується на випуску трьох видів виробів: пакувальна коробка, подарункова коробка та коробка для поштових посилок. Водночас на виробництві використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3. Норми затрат сировини на кожну одиницю виробів та об'єм

затрат сировини на 1 день задані таблицею 3.4. Знайти щоденний об'єм випуску кожного виду картонних виробів.

Таблиця 3.10 – Норми та об'єми затрат сировини

Вид сировини	Норми затрат на одну одиницю виробів			Затрати сировини за 1 день
	пакувальна коробка	подарункова коробка	коробка для поштових посилок	
S_1	2	8	5	5 700
S_2	1	10	2	5 700
S_3	3	4	6	4 100

5. В таблиці 3.11 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.11 – Плановані об'єми валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,25	0,4	400
	Галузь 2	0,35	0,2	100

Знайти:

1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 25 %.

6. З'ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валовому випуску ΔX_2:

$$S=\begin{pmatrix}0{,}4 & 1{,}3 & 0{,}5\\ 0{,}8 & 0{,}3 & 1{,}1\\ 0{,}6 & 0{,}9 & 0{,}1\end{pmatrix},\quad \Delta Y_1=\begin{pmatrix}15\\ 25\\ 40\end{pmatrix},\quad \Delta X_2=\begin{pmatrix}30\\ 10\\ -10\end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Матричних метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Завдання 3.6

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому півріччях задаються матрицями A і B відповідно:

$$A=\begin{pmatrix}12 & 15 & 30 & 29\\ 10 & 18 & 28 & 22\\ 9 & 14 & 35 & 31\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}14 & 16 & 32 & 30\\ 8 & 17 & 15 & 19\\ 13 & 20 & 33 & 28\end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції за рік;

б) приріст обсягів продукції в другому півріччі в порівнянні з першим по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за рік (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 7$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 420 & 190 & 375 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 & 8 \\ 5 & 8 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 8 \\ 6 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & 8 \\ 2 & 12 & 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 180 \\ 235 \\ 640 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 75 & 60 & 110 & 85 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Два заводи поставляють автомобілі для двох автогосподарств, потреби яких відповідно 450 та 400 машин. Перший завод випустив 500 машин, а другий - 350 машин. Відомі витрати на транспортування машин із заводів у кожне автогосподарство (см. табл. 3.12).

Таблиця 3.12 – Витрати та транспортування машин із заводів в автогосподарства

Завод	Витрати на перевозку в автогосподарство, грош. од.	
	1	2
1	15	10
2	20	25

Мінімальні витрати на транспортування складають 13 500 грошових одиниць. Визначити оптимальний план перевозки машин.

5. В таблиці 3.6 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.13 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукцію галузей

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Галузь</td><td colspan="2">Споживання</td><td rowspan="2">Кінцева продукція</td></tr>
<tr><td>Галузь 1</td><td>Галузь 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Виробництво</td><td>Галузь 1</td><td>0,35</td><td>0,2</td><td>200</td></tr>
<tr><td>Галузь 2</td><td>0,45</td><td>0,3</td><td>500</td></tr>
</table>

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 20 %.

6. З'ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,5 \\ 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валовому випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0,9 & 1,1 & 0,1 \\ 0,8 & 0,3 & 0,4 \\ 1,4 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 35 \\ 40 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Завдання 3.7

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 27 & 9 \\ 19 & 6 & 33 & 9 \\ 25 & 5 & 29 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 20 & 11 \\ 20 & 4 & 32 & 10 \\ 25 & 6 & 30 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в першому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в другому кварталі в порівнянні з першим по видам та по підприємствам;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 10$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = (775 \quad 800 \quad 285), \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 8 & 5 \\ 1 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 8 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 680 \\ 390 \\ 485 \end{pmatrix}, \quad P = (220 \quad 130 \quad 55 \quad 95).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. У кожному з трьох банків, між якими вибирає вкладник, нараховується свій щорічний відсоток на депозитний вклад. Вкладник має суму в 9 000 грошових одиниць. Якщо $\frac{1}{6}$ вкладу він розмістить у банку 1, $\frac{1}{2}$ - у банку 2, а решту – у банку 3, наприкінці року сума вкладу зросте до 10 425 грош. од. Якщо $\frac{1}{4}$ вкладу покласти у банк 1, $\frac{1}{3}$ - у банк 2, та $\frac{5}{12}$ - у банк 3, то сума, яку може отримати вкладник зросте до 10 425 грош. од. У випадку, коли схема розміщення вкладів: $\frac{1}{2}$ - у перший банк, $\frac{1}{5}$ - у другий банк, $\frac{3}{10}$ - у третій банк, то сума, отримана наприкінці року складала би 10 260 грош. од.

Визначити ставку по депозитах кожного банку.

5. В таблиці 3.14 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.14 – Плановані об’єми валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,45	0,4	500
	Галузь 2	0,35	0,2	100

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 30 %, а другої – на 5 %.

6. З'ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}5 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 1{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 1{,}2 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки. Співвідношення балансу.

Завдання 3.8

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в третьому та четвертому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 28 & 32 \\ 10 & 19 & 22 & 19 \\ 8 & 20 & 35 & 27 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 25 & 30 \\ 11 & 16 & 22 & 15 \\ 10 & 20 & 37 & 22 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в другому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в четвертому кварталі в порівнянні з третім по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 9$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 690 & 180 & 375 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 5 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 9 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 190 \\ 485 \\ 335 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 75 & 95 & 130 & 60 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Знайти національні доходи країн для збалансованої торгівлі.

5. В таблиці 3.15 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.15 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,5	0,15	100
	Галузь 2	0,2	0,45	400

Знайти:

1) плановані обсяг валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 15 %, а другої – на 10 %.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0,4 & 1,2 & 0,3 \\ 0,5 & 1,1 & 0,7 \\ 0,2 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Головна задача міжгалузевого балансу.

Завдання 3.9

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 7 & 44 & 9 \\ 27 & 9 & 40 & 7 \\ 30 & 8 & 28 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 44 & 10 \\ 30 & 10 & 42 & 7 \\ 28 & 8 & 31 & 6 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в першому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в другому кварталі в порівнянні з першим по видам та по підприємствам;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 2$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 740 & 195 & 550 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 630 \\ 190 \\ 445 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 70 & 110 & 35 & 125 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Цех по виготовленню пластмасових виробів спеціалізується на випуску трьох видів найменувань: банок для сипучих продуктів, ланч-боксів та стаканів. Водночас на виробництві використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3. Норми затрат сировини на кожну одиницю виробів та обсяги затрат сировини на 1 день задані таблицею 3.16. Знайти щоденний об'єм випуску кожного виду пластмасових виробів.

Таблиця 3.16 – Норми та обсяги затрат сировини

Вид сировини	Норми затрат на одну одиницю виробів			Затрати сировини за 1 день
	Банки для сипучих продуктів	Ланч-бокси	Стакани	
S_1	7	6	3	6 200
S_2	5	4	2	4 200
S_3	2	5	8	9 900

5. В таблиці 3.17 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.17 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Галузь</td><td colspan="2">Споживання</td><td rowspan="2">Кінцева продукція</td></tr>
<tr><td>Галузь 1</td><td>Галузь 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Виробництво</td><td>Галузь 1</td><td>0,35</td><td>0,4</td><td>300</td></tr>
<tr><td>Галузь 2</td><td>0,25</td><td>0,6</td><td>400</td></tr>
</table>

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 15 %.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,7 & 1,3 \\ 0,5 & 1,2 & 0,9 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Теорема Кронекера-Капеллі.

Завдання 3.10

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в третьому та четвертому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A=\begin{pmatrix}10 & 6 & 15 & 11\\ 24 & 9 & 12 & 18\\ 19 & 7 & 20 & 16\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}13 & 9 & 22 & 15\\ 22 & 11 & 19 & 10\\ 17 & 5 & 18 & 16\end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в другому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в четвертому кварталі в порівнянні з третім по видам та по підприємствам;

в) вартість виробленої продукції за третій квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 7$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A=\begin{pmatrix}290 & 435 & 630\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}9 & 2 & 5 & 8\\ 7 & 6 & 8 & 4\\ 3 & 3 & 9 & 5\end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ 9 & 8 & 3\\ 7 & 5 & 7\\ 4 & 2 & 2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}455\\ 390\\ 610\end{pmatrix},\qquad P=(40\quad 105\quad 75\quad 80).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Два заводи поставляють автомобілі для двох автогосподарств, потреби яких відповідно 450 та 700 машин. Перший завод випустив 500 машин, а другий - 650 машин. Відомі витрати на транспортування машин із заводів у кожне автогосподарство (см. табл. 3.18).

Таблиця 3.18 – Витрати та транспортування машин із заводів в автогосподарства

Завод	Витрати на перевозку в автогосподарство, грош. од.	
	1	2
1	20	10
2	15	25

Мінімальні витрати на транспортування складають 22 750 грошових одиниць. Визначити оптимальний план перевозки машин.

5. В таблиці 3.19 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.19 – Плановані обсяг валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,3	0,35	200
	Галузь 2	0,4	0,25	300

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 20 %, а другої – на 15 %.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 1{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 1{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

7. *Теоретичне питання.* Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні визначення.

Завдання 3.11

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому півріччях задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 25 & 9 \\ 4 & 18 & 26 & 7 \\ 9 & 20 & 30 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 & 15 & 32 & 9 \\ 5 & 16 & 26 & 7 \\ 8 & 20 & 37 & 9 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції за рік;

б) приріст обсягів продукції в другому півріччі в порівнянні з першим по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 11$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 710 & 215 & 540 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайти C – матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 9 \\ 1 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 180 \\ 930 \\ 225 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 35 & 85 & 90 & 110 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. У кожному з трьох банків, між якими вибирає вкладник, нараховується свій щорічний відсоток на депозитний

вклад. Вкладник має суму в 15 000 грошових одиниць. Якщо $\frac{1}{3}$ вкладу він розмістить у банку 1, $\frac{1}{5}$ - у банку 2, а решту – у банку 3, наприкінці року сума вкладу зросте до 16 400 грош. од. Якщо $\frac{1}{2}$ вкладу покласти у банк 1, $\frac{1}{5}$ - у банк 2, та $\frac{3}{10}$ - у банк 3, то сума, яку може отримати вкладник зросте до 16 275 грош. од. У випадку, коли схема розміщення вкладів: $\frac{1}{3}$ - у перший банк, $\frac{1}{2}$ - у другий банк, $\frac{1}{6}$ - у третій банк, то сума, отримана наприкінці року складала би 16 625 грош. од.

Визначити ставку по депозитах кожного банку.

5. В таблиці 3.20 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.20 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,5	0,25	200
	Галузь 2	0,4	0,15	200

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 5 %, а другої – на 10 %.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,5 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 1{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 1{,}0 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Приклади застосування матриць у розв'язанні економічних задач.

Завдання 3.12

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 27 & 8 \\ 22 & 9 & 22 & 8 \\ 18 & 7 & 30 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 27 & 7 & 30 & 10 \\ 22 & 10 & 20 & 8 \\ 20 & 4 & 37 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в першому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в другому кварталі в порівнянні з першим по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 9$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = (165 \quad 430 \quad 395), \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 3 \\ 8 & 2 & 5 & 2 \\ 7 & 9 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 420 \\ 190 \\ 555 \end{pmatrix}, \qquad P = (120 \quad 35 \quad 75 \quad 80).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{24} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Знайти національні доходи країн для збалансованої торгівлі.

5. В таблиці 3.21 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.21 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,5	0,15	300
	Галузь 2	0,2	0,35	100

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 20 %.

6. З'ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 1{,}0 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Матриця повних затрат, повна вартість витрачених ресурсів.

Завдання 3.13

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в третьому та четвертому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A=\begin{pmatrix}17&6&32&7\\19&5&28&3\\23&9&29&9\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}25&9&32&7\\20&9&28&9\\27&7&33&5\end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в другому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в четвертому кварталі в порівнянні з третім по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda=5$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A=\begin{pmatrix}415&280&675\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}8&9&2&2\\5&5&4&8\\3&1&7&6\end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A=\begin{pmatrix}4&7&5\\3&2&8\\2&3&9\\5&6&3\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}270\\315\\440\end{pmatrix},\qquad P=\begin{pmatrix}80&210&45&75\end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Трикотажний цех спеціалізується на випуску трьох видів найменувань: шапочок, шарфів та рукавичок. Водночас на виробництві використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3. Норми затрат сировини на кожну одиницю виробів та об'єм затрат сировини на 1 день задані таблицею 3.22. Знайти щоденний обсяг випуску кожного виду трикотажних виробів.

Таблиця 3.22 – Норми та обсяги затрат сировини

Вид сировини	Норми затрат на одну одиницю виробів			Затрати сировини за 1 день
	Шапочки	Шарфи	Рукавички	
S_1	5	7	2	5 800
S_2	6	5	8	8 400
S_3	3	9	5	7 300

5. В таблиці 3.23 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.23 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,25	0,4	400
	Галузь 2	0,15	0,3	300

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 5 %, а другої – на 25 %.

6. З'ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,5 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 & 0,7 \\ 0,3 & 1,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 1,1 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Теорема Крамера.

Завдання 3.14

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому півріччях задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 45 & 22 & 31 & 6 \\ 37 & 20 & 19 & 7 \\ 48 & 31 & 25 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 39 & 25 & 35 & 9 \\ 41 & 26 & 22 & 7 \\ 48 & 28 & 25 & 18 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції за рік;

б) приріст обсягів продукції в другому півріччі в порівнянні з першим по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за друге півріччя (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 4$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 195 & 720 & 445 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 & 9 \\ 3 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \\ 8 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 325 \\ 905 \\ 440 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 95 & 120 & 75 & 30 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Два заводи поставляють автомобілі для двох автогосподарств, потреби яких відповідно 650 та 450 машин. Перший завод випустив 600 машин, а другий - 500 машин. Відомі витрати на транспортування машин із заводів у кожне автогосподарство (см. табл. 3.24).

Таблиця 3.24 – Витрати та транспортування машин із заводів в автогосподарства

Завод	Витрати на перевозку в автогосподарство, грош. од.	
	1	2
1	10	5
2	15	20

Мінімальні витрати на транспортування складають 12 250 грошових одиниць. Визначити оптимальний план перевозки машин.

5. В таблиці 3.25 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.25 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Галузь</th><th colspan="2">Споживання</th><th rowspan="2">Кінцева продукція</th></tr>
<tr><th>Галузь 1</th><th>Галузь 2</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Виробництво</td><td>Галузь 1</td><td>0,4</td><td>0,25</td><td>200</td></tr>
<tr><td>Галузь 2</td><td>0,3</td><td>0,15</td><td>100</td></tr>
</table>

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 20 %, а другої – на 5 %.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 1{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 40 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Матричний метод розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Завдання 3.15

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A=\begin{pmatrix}26&31&11&13\\31&22&19&9\\27&29&15&15\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}25&34&12&13\\31&23&22&10\\25&29&18&9\end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в першому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в другому кварталі в порівнянні з першим по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda=8$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A=\begin{pmatrix}490&810&265\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&7&5&7\\4&8&8&3\\2&5&6&4\end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \\ 9 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 710 \\ 255 \\ 305 \end{pmatrix}, \quad P = (55 \quad 70 \quad 125 \quad 30).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. У кожному з трьох банків, між якими вибирає вкладник, нараховується свій щорічний відсоток на депозитний вклад. Вкладник має суму в 18 000 грошових одиниць. Якщо $\frac{1}{5}$ вкладу він розмістить у банку 1, $\frac{1}{4}$ - у банку 2, а решту – у банку 3, наприкінці року сума вкладу зросте до 20 745 грош. од. Якщо $\frac{1}{3}$ вкладу покласти у банк 1, $\frac{1}{2}$ - у банк 2, та $\frac{1}{6}$ - у банк 3, то сума, яку може отримати вкладник зросте до 20 850 грош. од. У випадку, коли схема розміщення вкладів: $\frac{1}{2}$ - у перший банк, $\frac{1}{3}$ - у другий банк, $\frac{1}{6}$ - у третій банк, то сума, отримана наприкінці року складала би 20 550 грош. од.

Визначити ставку по депозитах кожного банку.

5. В таблиці 3.26 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.26 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,5	0,35	400
	Галузь 2	0,2	0,25	300

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 15 %, а другої – на 20 %.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 1{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 1{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Метод послідовного виключення невідомих. Метод Гауса.

Завдання 3.16

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в третьому та четвертому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 17 & 29 & 15 \\ 25 & 14 & 33 & 28 \\ 28 & 8 & 37 & 14 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 19 & 18 & 30 & 15 \\ 21 & 14 & 37 & 25 \\ 23 & 10 & 34 & 19 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в другому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в четвертому кварталі в порівнянні з третім по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 9$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 690 & 375 & 880 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 7 \\ 6 & 8 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 530 \\ 115 \\ 245 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 40 & 95 & 65 & 130 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{16}{45} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Знайти національні доходи країн для збалансованої торгівлі.

5. В таблиці 3.27 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.27 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,35	0,3	300
	Галузь 2	0,25	0,4	100

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 25 %.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,8 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 1{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 1{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Завдання 3.17

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому півріччях задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 36 & 27 & 10 \\ 9 & 26 & 32 & 9 \\ 10 & 25 & 18 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 40 & 25 & 9 \\ 10 & 29 & 35 & 7 \\ 8 & 33 & 20 & 10 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції за рік;

б) приріст обсягів продукції в другому півріччі в порівнянні з першим по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за друге півріччя (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 11$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 445 & 210 & 975 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 & 4 \\ 8 & 5 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 485 \\ 810 \\ 315 \end{pmatrix}, \quad P = (205 \quad 65 \quad 50 \quad 70).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Цех по виробництву лаків і фарб спеціалізується на випуску трьох видів виробів: фарба для внутрішніх робіт, фарба для зовнішніх робіт та лак для деревини. Водночас на виробництві використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3. Норми затрат сировини на кожну одиницю виробів та обсяг затрат сировини на 1 день задані таблицею 3.28. Знайти щоденний обсяг випуску кожного виду лако-фарбових виробів.

Таблиця 3.28 – Норми та обсяги затрат сировини

Вид сировини	Норми затрат на одну одиницю виробів			Затрати сировини за 1 день
	фарба для внутрішніх робіт	фарба для зовнішніх робіт	лак для деревини	
S_1	7	9	2	3 350
S_2	3	5	4	2 550
S_3	2	3	8	3 350

5. В таблиці 3.29 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.29 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,25	0,2	400
	Галузь 2	0,45	0,1	300

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 5 %, а другої – на 20 %.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}4 & 1{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки. Співвідношення балансу.

Завдання 3.18

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:
$$A=\begin{pmatrix}7 & 18 & 25 & 4\\ 10 & 26 & 33 & 7\\ 9 & 15 & 29 & 9\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}9 & 20 & 25 & 5\\ 8 & 26 & 39 & 10\\ 5 & 16 & 39 & 4\end{pmatrix}.$$
Знайти:

а) обсяг продукції в першому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в другому кварталі в порівнянні з першим по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 9$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:
$$A=\begin{pmatrix}375 & 995 & 160\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6 & 7 & 9 & 3\\ 8 & 5 & 3 & 2\\ 4 & 6 & 4 & 4\end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 8 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 870 \\ 355 \\ 410 \end{pmatrix}, \quad P = (30 \quad 80 \quad 215 \quad 75).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Два заводи поставляють автомобілі для двох автогосподарств, потреби яких відповідно 750 та 350 машин. Перший завод випустив 500 машин, а другий - 600 машин. Відомі витрати на транспортування машин із заводів у кожне автогосподарство (см. табл. 3.6).

Таблиця 3.30 – Витрати та транспортування машин із заводів в автогосподарства

Завод	Витрати на перевозку в автогосподарство, грош. од.	
	1	2
1	25	10
2	10	15

Мінімальні витрати на транспортування складають 18 250 грошових одиниць. Визначити оптимальний план перевозки машин.

5. В таблиці 3.31 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.31 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,45	0,2	100
	Галузь 2	0,25	0,3	500

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 15 %, а другої – на 25 %.

6. З'ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,9 & 1,3 \\ 0,2 & 1,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} -15 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Застосування матриць у розв'язанні економічних задач.

Завдання 3.19

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в третьому та четвертому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 25 & 13 & 9 \\ 8 & 35 & 17 & 10 \\ 6 & 22 & 20 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 24 & 22 & 7 \\ 7 & 35 & 15 & 6 \\ 6 & 19 & 23 & 18 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в другому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в четвертому кварталі в порівнянні з третім по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за другий квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 11$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 305 & 740 & 655 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 & 2 \\ 8 & 5 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 7 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 290 \\ 950 \\ 335 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 115 & 75 & 80 & 20 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. У кожному з трьох банків, між якими вибирає вкладник, нараховується свій щорічний відсоток на депозитний

вклад. Вкладник має суму в 8 000 грошових одиниць. Якщо $\frac{1}{4}$ вкладу він розмістить у банку 1, $\frac{1}{5}$ - у банку 2, а решту – у банку 3, наприкінці року сума вкладу зросте до 8 940 грош. од. Якщо $\frac{1}{2}$ вкладу покласти у банк 1, $\frac{1}{8}$ - у банк 2, та $\frac{3}{8}$ - у банк 3, то сума, яку може отримати вкладник зросте до 8 900 грош. од. У випадку, коли схема розміщення вкладів: $\frac{1}{4}$ - у перший банк, $\frac{1}{2}$ - у другий банк, $\frac{1}{4}$ - у третій банк, то сума, отримана наприкінці року складала би 11 000 грош. од.

Визначити ставку по депозитах кожного банку.

5. В таблиці 3.32 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.32 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,4	0,15	500
	Галузь 2	0,2	0,45	100

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 15 %.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 1{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 1{,}1 & 0{,}9 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Матриця повних затрат, повна вартість витрачених ресурсів.

Завдання 3.20

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому півріччях задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 43 & 22 & 6 \\ 18 & 39 & 25 & 9 \\ 20 & 35 & 27 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 19 & 42 & 20 & 7 \\ 22 & 35 & 29 & 5 \\ 15 & 32 & 30 & 10 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції за рік;

б) приріст обсягів продукції в другому півріччі в порівнянні з першим по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за перше півріччя (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 9$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 880 & 285 & 360 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 6 & 9 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 555 \\ 325 \\ 480 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 50 & 120 & 75 & 85 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Знайти національні доходи країн для збалансованої торгівлі.

5. В таблиці 3.33 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.33 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Галузь</td><td colspan="2">Споживання</td><td rowspan="2">Кінцева продукція</td></tr>
<tr><td>Галузь 1</td><td>Галузь 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Виробництво</td><td>Галузь 1</td><td>0,3</td><td>0,25</td><td>200</td></tr>
<tr><td>Галузь 2</td><td>0,4</td><td>0,15</td><td>400</td></tr>
</table>

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 5 %, а другої – на 25 %.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 1{,}2 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Приклади застосування матриць у розв’язанні економічних задач.

Завдання 3.21

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 23 & 7 \\ 14 & 10 & 18 & 4 \\ 7 & 16 & 29 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 25 & 10 \\ 14 & 15 & 17 & 5 \\ 13 & 18 & 32 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в першому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в другому кварталі в порівнянні з першим по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 12$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 425 & 680 & 290 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 3 & 9 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 380 \\ 245 \\ 925 \end{pmatrix}, \quad P = (80 \quad 95 \quad 140 \quad 75).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Цех по виробництву будівельних сумішей спеціалізується на випуску трьох видів виробів. Водночас на виробництві використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3. Норми затрат сировини на кожну одиницю виробів та обсяг затрат сировини на 1 день задані таблицею 3.34. Знайти щоденний обсяг випуску кожного виду будівельних сумішей.

Таблиця 3.34 – Норми та обсяг затрат сировини

Вид сировини	Норми затрат на одну одиницю виробів			Затрати сировини за 1 день
	Будівельна суміш №1	Будівельна суміш №2	Будівельна суміш №3	
S_1	3	4	5	2 000
S_2	5	1	4	2 300
S_3	4	6	3	3 900

5. В таблиці 3.35 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.35 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,3	0,45	500
	Галузь 2	0,2	0,35	300

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 15 %, а другої – на 5 %.

6. З'ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валовому випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & 1,6 \\ 0,3 & 0,5 & 0,4 \\ 1,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 25 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Матричний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Завдання 3.22

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 27 & 8 & 35 & 6 \\ 24 & 9 & 27 & 5 \\ 30 & 12 & 33 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 25 & 8 & 33 & 6 \\ 28 & 10 & 27 & 4 \\ 32 & 17 & 42 & 10 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в першому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в другому кварталі в порівнянні з першим по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 2$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 465 & 190 & 780 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 2 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 9 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 8 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 475 \\ 830 \\ 120 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 215 & 310 & 25 & 40 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Два заводи поставляють автомобілі для двох автогосподарств, потреби яких відповідно 400 та 750 машин.

Перший завод випустив 600 машин, а другий - 550 машин. Відомі витрати на транспортування машин із заводів у кожне автогосподарство (см. табл. 3.36).

Таблиця 3.36 – Витрати та транспортування машин із заводів в автогосподарства

Завод	Витрати на перевозку в автогосподарство, грош. од.	
	1	2
1	10	20
2	5	15

Мінімальні витрати на транспортування складають 16 250 грошових одиниць. Визначити оптимальний план перевозки машин.

5. В таблиці 3.37 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.37 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,4	0,15	200
	Галузь 2	0,1	0,35	100

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 15 %.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 1{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 35 \\ 20 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Теорема Крамера.

Завдання 3.23

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в третьому та четвертому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 19 & 27 & 14 \\ 10 & 22 & 35 & 22 \\ 8 & 16 & 30 & 19 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 17 & 32 & 17 \\ 7 & 22 & 35 & 16 \\ 16 & 16 & 23 & 20 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в другому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в четвертому кварталі в порівнянні з третім по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 6$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = (955 \quad 320 \quad 435), \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 3 \\ 7 & 2 & 8 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 215 \\ 435 \\ 220 \end{pmatrix}, \qquad P = (70 \quad 130 \quad 25 \quad 35).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. У кожному з трьох банків, між якими вибирає вкладник, нараховується свій щорічний відсоток на депозитний вклад. Вкладник має суму в 21 000 грошових одиниць. Якщо $\frac{1}{7}$ вкладу він розмістить у банку 1, $\frac{1}{3}$ - у банку 2, а решту – у банку 3, наприкінці року сума вкладу зросте до 23 750 грош. од. Якщо $\frac{1}{2}$ вкладу покласти у банк 1, $\frac{1}{5}$ - у банк 2, та $\frac{3}{10}$ - у банк 3, то сума, яку може отримати вкладник зросте до 24 360 грош. од. У випадку, коли схема розміщення вкладів: $\frac{1}{4}$ - у перший банк, $\frac{1}{2}$ - у другий банк, $\frac{1}{4}$ - у третій банк, то сума, отримана наприкінці року складала би 24 150 грош. од.

5. В таблиці 3.38 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.38 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,35	0,2	600
	Галузь 2	0,45	0,1	100

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 5 %.

6. З'ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 1{,}1 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Метод послідовного виключення невідомих. Метод Гауса.

Завдання 3.24

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому півріччях задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 23 & 34 & 16 & 9 \\ 28 & 29 & 15 & 4 \\ 19 & 17 & 19 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 23 & 22 & 20 & 12 \\ 25 & 29 & 15 & 5 \\ 23 & 14 & 20 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції за рік;

б) приріст обсягів продукції в другому півріччі в порівнянні з першим по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 7$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 560 & 310 & 285 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 7 & 7 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 730 \\ 115 \\ 210 \end{pmatrix}, \quad P = (50 \quad 80 \quad 415 \quad 25).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{8} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Знайти національні доходи країн для збалансованої торгівлі.

5. В таблиці 3.39 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.39 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,3	0,45	200
	Галузь 2	0,1	0,55	300

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 30 %, а другої – на 5 %.

6. З'ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 1{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 1{,}0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Завдання 3.25

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 18 & 32 & 6 \\ 6 & 23 & 40 & 9 \\ 5 & 18 & 17 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 24 & 32 & 7 \\ 7 & 23 & 45 & 6 \\ 6 & 16 & 28 & 9 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в першому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в другому кварталі в порівнянні з першим по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 4$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 710 & 295 & 535 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \\ 8 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 410 \\ 280 \\ 175 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 70 & 60 & 305 & 45 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Меблевий цех спеціалізується на випуску трьох видів виробів: крісел, стільців та диванів. Водночас на виробництві використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3. Норми затрат сировини на кожну одиницю виробів та обсяг затрат сировини на 1 день задані таблицею 3.40. Знайти щоденний обсяг випуску кожного виду будівельних сумішей.

Таблиця 3.40 – Норми та обсяги затрат сировини

Вид сировини	Норми затрат на одну одиницю виробів			Затрати сировини за 1 день
	Крісла	Стільці	Дивани	
S_1	5	3	13	1 120
S_2	9	4	22	1 820
S_3	4	3	15	1 060

5. В таблиці 3.41 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.41 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,35	0,2	600
	Галузь 2	0,25	0,1	300

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 20 %.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}3 & 0{,}4 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 1{,}0 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки. Співвідношення балансу.

Завдання 3.26

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в третьому та четвертому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 23 & 47 & 2 & 18 \\ 15 & 43 & 7 & 12 \\ 26 & 39 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 23 & 44 & 2 & 17 \\ 27 & 52 & 10 & 16 \\ 26 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в другому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в четвертому кварталі в порівнянні з третім по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 9$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 815 & 315 & 220 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \\ 8 & 9 & 9 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 380 \\ 235 \\ 725 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 120 & 30 & 705 & 35 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Два заводи поставляють автомобілі для двох автогосподарств, потреби яких відповідно 300 та 800 машин. Перший завод випустив 600 машин, а другий - 500 машин. Відомі витрати на транспортування машин із заводів у кожне автогосподарство (см. табл. 3.42).

Таблиця 3.42 – Витрати та транспортування машин із заводів в автогосподарства

Завод	Витрати на перевозку в автогосподарство, грош. од.	
	1	2
1	15	20
2	30	15

Мінімальні витрати на транспортування складають 22 000 грошових одиниць. Визначити оптимальний план перевозки машин.

5. В таблиці 3.43 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.43 – Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукцію галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,5	0,15	400
	Галузь 2	0,1	0,35	300

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 5 %, а другої – на 25 %.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 1{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Теорема Кронекера-Капеллі.

Завдання 3.27

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому півріччях задаються матрицями A і B відповідно:

$$A=\begin{pmatrix}27 & 23 & 41 & 16\\ 22 & 30 & 39 & 12\\ 29 & 33 & 45 & 10\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}22 & 23 & 40 & 12\\ 29 & 37 & 39 & 10\\ 25 & 36 & 51 & 10\end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції за рік;

б) приріст обсягів продукції в другому півріччі в порівнянні з першим по видах та по підприємствам;

в) вартість виробленої продукції за перше півріччя (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 6$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A=\begin{pmatrix}855 & 430 & 995\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 9 & 5\\ 7 & 2 & 1 & 9\end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 7 & 3 & 9 \\ 4 & 4 & 7 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 640 \\ 535 \\ 710 \end{pmatrix}, \quad P = (80 \quad 220 \quad 25 \quad 45).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. У кожному з трьох банків, між якими вибирає вкладник, нараховується свій щорічний відсоток на депозитний вклад. Вкладник має суму в 14 000 грошових одиниць. Якщо $\frac{1}{7}$ вкладу він розмістить у банку 1, $\frac{1}{5}$ - у банку 2, а решту – у банку 3, наприкінці року сума вкладу зросте до 16 080 грош. од. Якщо $\frac{1}{4}$ вкладу покласти у банк 1, $\frac{1}{8}$ - у банк 2, та $\frac{5}{8}$ - у банк 3, то сума, яку може отримати вкладник зросте до 16 275 грош. од. У випадку, коли схема розміщення вкладів: $\frac{1}{2}$ - у перший банк, $\frac{1}{4}$ - у другий банк, $\frac{1}{4}$ - у третій банк, то сума, отримана наприкінці року складала би 17 150 грош. од.

5. В таблиці 3.44 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.44 - Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,35	0,4	300
	Галузь 2	0,25	0,2	100

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 5 %.

6. З'ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0,8 & 1,5 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 1,2 \\ 0,7 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Теорема Крамера.

Завдання 3.28

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому кварталах задаються матрицями A і 1B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 25 & 35 & 6 \\ 16 & 27 & 44 & 6 \\ 13 & 28 & 11 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 & 24 & 35 & 7 \\ 17 & 22 & 35 & 6 \\ 16 & 26 & 23 & 10 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в першому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в другому кварталі в порівнянні з першим по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 12$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = (605 \quad 310 \quad 185), \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 5 \\ 9 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 8 \\ 4 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 210 \\ 656 \\ 710 \end{pmatrix}, \qquad P = (85 \quad 30 \quad 205 \quad 70).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{20}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

Знайти національні доходи країн для збалансованої торгівлі.

5. В таблиці 3.45 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.45 - Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,35	0,2	400
	Галузь 2	0,25	0,5	200

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 5 %.

5. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}2 & 1{,}4\\ 0{,}5 & 1{,}3 & 0{,}8\\ 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}2\end{pmatrix},\quad \Delta Y_1=\begin{pmatrix}10\\ 10\\ 60\end{pmatrix},\quad \Delta X_2=\begin{pmatrix}-10\\ 20\\ 10\end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Матричний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Завдання 3.29

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в третьому та четвертому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 35 & 22 & 5\\ 6 & 37 & 28 & 3\\ 3 & 38 & 20 & 8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 24 & 22 & 7\\ 7 & 42 & 35 & 3\\ 6 & 38 & 23 & 10\end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в другому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в четвертому кварталі в порівнянні з третім по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за четвертий квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda=7$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A=\begin{pmatrix}805 & 180 & 495\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}7 & 4 & 8 & 5\\ 5 & 6 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 9 & 4\end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу

i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \\ 7 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 110 \\ 535 \\ 880 \end{pmatrix}, \quad P = (30 \quad 65 \quad 130 \quad 25).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Цех по виробництву макаронних виробів спеціалізується на випуску трьох видів виробів: спагеті, ріжки, феттуччіне. Водночас на виробництві використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3. Норми затрат сировини на кожну одиницю виробів та обсяг затрат сировини на 1 день задані таблицею 3.46. Знайти щоденний обсяг випуску кожного виду макаронних виробів.

Таблиця 3.46 – Норми та обсяги затрат сировини

Вид сировини	Норми затрат на одну одиницю виробів			Затрати сировини за 1 день
	Спагеті	Ріжки	Феттуччіне	
S_1	2	3	3	4 000
S_2	5	4	6	6 500
S_3	7	8	7	10 900

5. В таблиці 3.47 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.47 - Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукція галузей

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Галузь</td><td colspan="2">Споживання</td><td rowspan="2">Кінцева продукція</td></tr>
<tr><td>Галузь 1</td><td>Галузь 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Виробництво</td><td>Галузь 1</td><td>0,3</td><td>0,35</td><td>300</td></tr>
<tr><td>Галузь 2</td><td>0,4</td><td>0,15</td><td>200</td></tr>
</table>

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 5 %.

6. З'ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0,5 & 1,0 & 0,3 \\ 1,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,8 & 0,6 & 0,9 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 25 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Метод послідовного виключення невідомих. Метод Гауса.

Завдання 3.30

1. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому півріччях задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 32 & 15 & 25 & 9 \\ 28 & 17 & 24 & 6 \\ 30 & 18 & 21 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 37 & 14 & 22 & 9 \\ 27 & 22 & 35 & 10 \\ 26 & 18 & 23 & 9 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції за рік;

б) приріст обсягів продукції в другому півріччі в порівнянні з першим по видах та по підприємствах;

в) вартість виробленої продукції за друге півріччя (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 10$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 175 & 290 & 305 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го товару на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 8 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 275 \\ 230 \\ 495 \end{pmatrix}, \quad P = (160 \quad 10 \quad 25 \quad 45).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. Два заводи поставляють автомобілі для двох автогосподарств, потреби яких відповідно 700 та 900 машин. Перший завод випустив 800 машин, а другий - 800 машин. Відомі витрати на транспортування машин із заводів у кожне автогосподарство (см. табл. 3.48).

Таблиця 3.48 – Витрати та транспортування машин із заводів в автогосподарства

Завод	Витрати на перевозку в автогосподарство, грош. од.	
	1	2
1	10	25
2	15	20

Мінімальні витрати на транспортування складають 30 500 грошових одиниць. Визначити оптимальний план перевозки машин.

5. В таблиці 3.49 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.49 - Плановані обсяги валової продукції галузей, чиста продукцію галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,2	0,45	200
	Галузь 2	0,4	0,25	100

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 25 %.

6. З’ясувати, чи продуктивна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

7. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 1{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 1{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

8. *Теоретичне питання.* Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розділ 4 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ. ПРЯМА ЛІНІЯ

У четвертому розділі ми навчимося застосовувати на практиці отриманні теоретичні знання з теми «Аналітична геометрія на площині. Пряма лінія». Для розв'язання задач пропонуємо повторити відповідні визначення і формули з розділу 2 підручника «Вища математика для менеджерів».

Приклади розв'язання типового варіанта

1. Довести, що рівняння $\frac{6x-2}{3}+\frac{y-2}{5}=2$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння:

$$\frac{6x-2}{3}+\frac{y-2}{5}=2 \quad \Big| \cdot 15;$$

$$30x-10+3y-6-30=0;$$

$$30x+3y-40=0.$$

Ми отримали рівняння першого ступеня, а згідно з т. 2.2 такому рівнянню відповідає пряма. Отже, *загальне рівняння прямої* (2.15) $(A=30, B=3, C=-40)$:

$$30x+3y-40=0.$$

Відповідні коефіцієнти $(A=30, B=3, C=-40)$.

Перепишемо отримане рівняння у вигляді (2.15):

$$3y=-30x+40;$$

$$y=-10x+\frac{40}{3}.$$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд:

$$y=-10x+\frac{40}{3},$$

Кутовий коефіцієнт прямої $k = -10$, а відрізок, який відсікає пряма на осі ординат, $b = \frac{40}{3}$.

Для отримання рівняння прямої у відрізках (2.16) перетворимо загальне рівняння:

$$30x + 3y - 40 = 0;$$
$$30x + 3y = 40|:40;$$
$$\frac{30x}{40} + \frac{3y}{40} = 1;$$
$$\frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{\frac{40}{3}} = 1.$$

Рівняння прямої у відрізках має вигляд:

$$\frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{\frac{40}{3}} = 1.$$

Пряма відсікає на осі абсцис відрізок у $a = \frac{4}{3}$ одиниць, а на осі ординат – у $b = \frac{40}{3}$ одиниць.

Для того, щоб записати нормальне рівняння прямої (2.24), обчислимо нормувальний множник (2.25), і оберемо його знак, оберненим до знаку C у загальному рівнянні прямої, тобто знак «+».

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{30^2+3^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{99}} = \pm\frac{1}{3\sqrt{11}};$$
$$M = \frac{1}{3\sqrt{11}}.$$

Помножимо загальне рівняння на нормувальний множник:

$30x + 3y - 40 = 0| \cdot \frac{1}{3\sqrt{11}}.$

Остаточно маємо *нормальне рівняння прямої*:

$$\frac{10}{\sqrt{11}}x + \frac{1}{\sqrt{11}}y - \frac{40}{3\sqrt{11}} = 0.$$

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(-1;3); B(7,2); C(3,8)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.
2.2. Рівняння сторін.
2.3. Кути трикутника.
2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).
2.5. Координати центра мас трикутника.
2.6. Рівняння медіани AF.
2.7. Рівняння та довжину висоти CN.
2.8. Рівняння бісектриси BT.
2.9. Координати центра та радіус описаного кола.
2.10. Координати точки перетину медіани AF та прямої, що проходить через точку C паралельно AB.

Розв'язання: Побудуємо трикутник ABC (рис. 4.1).

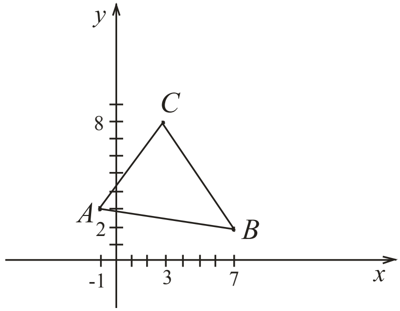

Рисунок 4.1 – Трикутник ABC

2.1. За визначенням периметра як суми довжин всіх сторін, знайдемо довжини сторін трикутника за формулою (2.1):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}.$$

$$AB = \sqrt{\left(7 - (-1)\right)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65} \text{ (од.)};$$
$$BC = \sqrt{(3 - 7)^2 + (8 - 2)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ (од.)};$$
$$AC = \sqrt{\left(3 - (-1)\right)^2 + (8 - 3)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \text{ (од.)}.$$

Отже, периметр трикутника

$$P = \sqrt{65} + 2\sqrt{13} + \sqrt{41} \text{ (од.)}.$$

Для обчислення площі трикутника звернемося до формули (2.10) і скористаємося запропонованим мнемонічним правилом:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$-$ $+$

Рисунок 4.2 – Мнемонічне правило для обчислення площі трикутника за відомими координатами вершин

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \\ 3 & 8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-2+56+9-21-6+8| = \frac{1}{2}\cdot 44 = 22 \text{ од}^2.$$

2.2. Для знаходження рівняння сторін трикутника скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві точки (2.18):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

і запишемо отримані рівняння у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Рівняння прямої AB:

$$\frac{x+1}{7+1} = \frac{y-3}{2-3}; \qquad \frac{x+1}{8} = \frac{y-3}{-1}; \qquad 8(y-3) = -1(x+1);$$

$$8y - 24 = -x - 1; \qquad 8y = -x + 23;$$

Остаточно маємо рівняння AB:

$$y = -\frac{1}{8}x + \frac{23}{8} \qquad \left(k = -\frac{1}{8};\ \ b = \frac{23}{8}\right).$$

Проаналізуємо отриманий результат. Коефіцієнт k від'ємний, дійсно, пряма утворює з додатнім напрямком осі абсцис тупий кут, $b = \frac{23}{8}$ - пряма відсікає на осі ординат відрізок майже в три одиниці.

Рівняння прямої BC:

$\frac{x-7}{3-7}=\frac{y-2}{8-2};\qquad \frac{x-7}{-4}=\frac{y-2}{6};\qquad -4(y-2)=6(x-7)|\ :(-2);$

$2y-4=-3x+21;\qquad 2y=-3x+25;$

Остаточно маємо рівняння BC:

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{25}{2}\qquad \left(k=-\frac{3}{2};\ \ b=\frac{25}{2}\right).$$

Проаналізуємо отриманий результат. Коефіцієнт k від'ємний, дійсно, пряма утворює з додатнім напрямком осі абсцис тупий кут, $b=\frac{25}{2}$ - пряма відсікає на осі ординат відрізок майже в 12,5 одиниць.

Рівняння прямої AC:

$\frac{x+1}{3+1}=\frac{y-3}{8-3};\qquad \frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{5};\qquad 4(y-3)=5(x+1);$

$4y-12=5x+5;\qquad 4y=5x+17;$

Остаточно маємо рівняння AC:

$$y=\frac{5}{4}x+\frac{17}{4}\qquad \left(k=\frac{5}{4};\ \ b=\frac{17}{4}\right).$$

Проаналізуємо отриманий результат. Коефіцієнт k додатній, дійсно, пряма утворює з додатнім напрямком осі абсцис гострий кут, $b=\frac{17}{4}$ - пряма відсікає на осі ординат відрізок майже в чотири з четвертю одиниці.

2.3. Кути трикутника знайдемо за формулою (2.23):

$$tg\vartheta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}.$$

Пригадаємо кутові коефіцієнти сторін трикутника:

$$k_{AB}=-\frac{1}{8};\quad k_{BC}=-\frac{3}{2};\quad k_{AC}=\frac{5}{4}.$$

За формулою (2.23) маємо:

$$tg\angle BAC=\frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}\cdot k_{AB}}=\frac{\frac{5}{4}-\left(-\frac{1}{8}\right)}{1+\frac{5}{4}\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)}=\frac{\frac{5\cdot 8+1\cdot 4}{32}}{\frac{32-5\cdot 1}{32}}=\frac{44}{27};$$

$\angle BAC = arctg\frac{44}{27}$;

$tg\angle ABC = \frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}\cdot k_{BC}} = \frac{-\frac{1}{8}-\left(-\frac{3}{2}\right)}{1+\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{-1\cdot 2+3\cdot 8}{16}}{\frac{1\cdot 32+3}{32}} = \frac{22}{35}$;

$\angle ABC = arctg\frac{22}{35}$;

$tg\angle ACB = \frac{k_{CB}-k_{AC}}{1+k_{CB}\cdot k_{AC}} = \frac{-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}}{1+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{5}{4}} = \frac{\frac{-3\cdot 4-5\cdot 2}{8}}{\frac{1\cdot 8-15}{8}} = \frac{-22}{-7} = \frac{22}{7}$;

$\angle ABC = arctg\frac{22}{7}$.

2.4. Визначимо тип трикутника. В п. 2.1 ми обчислили довжини сторін трикутника. З результатів прямує, що трикутник *різносторонній*.

З умови $c^2 < a^2 + b^2$ $(AB^2 < BC^2 + AC^2;\quad 65 < 52 + 41)$ прямує, що трикутник *гострокутний*. Зауважимо, що в згаданій нерівності за c вважаємо найдовшу з сторін.

2.5. Координати центра мас трикутника обчислимо за формулами (2.8), (2.9):

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{-1+7+3}{3} = 3;$$
$$y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = \frac{3+2+8}{3} = \frac{13}{3}.$$

Центр мас трикутника розташований у точці $O_1\left(3;\frac{13}{3}\right)$.

2.6. Для того щоб записати рівняння медіани AF, згадаємо, що за визначенням, медіана поділяє протилежну сторону навпіл. Медіана AF поділяє навпіл сторону BC (рис. 4.3). Знайдемо координати точки F як середини BC за формулами (2.6), (2.7):

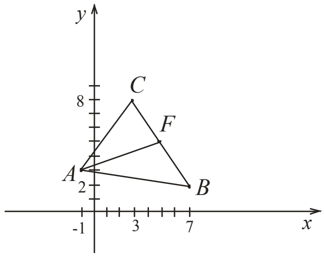

Рисунок 4.3 – Медіана трикутника ABC

$$x_F = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{7+3}{2} = 5;$$
$$y_F = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{2+8}{2} = 5.$$

Точка F має координати: $F(5;5)$. Рівняння прямої AF запишемо за вже згаданою нами формулою (2.18):

$$\frac{x-(-1)}{5-(-1)}=\frac{y-3}{5-3};\qquad \frac{x+1}{6}=\frac{y-3}{2};\qquad 6(y-3)=2(x+1)|:2;$$
$$3y-9=x+1;\qquad 3y=x+10.$$

Остаточно маємо AF: $y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$.

2.7. Рівняння висоти CN знаходимо за визначенням висоти. З нього прямує, що висота CN перпендикулярна стороні AB. За умовою перпендикулярності (2.22) маємо:

$$k_{CN}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{-\frac{1}{8}}=8.$$

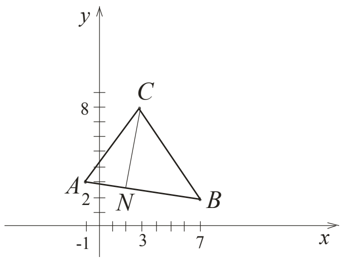

Рисунок 4.4 – Висота трикутника ABC

Про висоту CN нам відомі кутовий коефіцієнт та координати однієї точки – C. Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямку (2.20):

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

Підставимо у рівняння $k_{CN}=8$ та координати точки $C(3,8)$:

$$y-8=8(x-3);\qquad y=8x-24+8.$$

Остаточно маємо рівняння CN:

$$y=8x-16.$$

Щоб знайти довжину висоти CN, згадаємо, що найкоротша відстань між точкою та прямою лягає по перпендикуляру. Отже, довжина висоти CN дорівнює відстані від точки C до прямої AB. У формулі (2.27) рівняння прямої має вигляд загального:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Перепишемо рівняння AB у вигляді загального і підставимо у формулу:

$$AB: \quad x + 8y - 23 = 0;$$

$$|CN| = d = \frac{|1\cdot3+8\cdot8-23|}{\sqrt{1^2+8^2}} = \frac{44}{\sqrt{65}} \text{ (од.).}$$

2.8. Знайдемо рівняння бісектриси BT. За визначенням бісектриси, вона поділяє кут навпіл (рис. 4.5). Для розв'язання задачі скористаємося властивістю бісектрис, а саме: бісектриса поділяє протилежну сторону у відношенні, яке дорівнює відношенню прилеглих сторін. Стосовно бісектриси BT, ця властивість має вигляд:

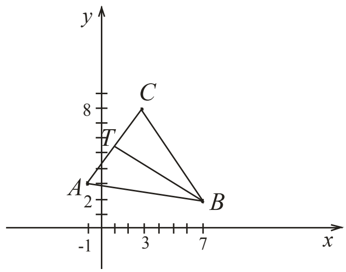

Рисунок 4.5 – Бісектриса трикутника ABC

$$\frac{AT}{TC} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{65}}{2\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \lambda.$$

За формулами (2.4), (2.5) знайдемо координати точки T:

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{-1+\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot3}{1+\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{-2+3\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{(-2+3\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = 19 - 8\sqrt{5};$$

$$y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{3+\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot8}{1+\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{6+8\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{(6+8\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = 28 - 10\sqrt{5};$$

Координати точки $T(19-8\sqrt{5};\ 28-10\sqrt{5})$. Рівняння бісектриси BT за формулою (2.18) набуває вигляду:

$$\frac{x-7}{19-8\sqrt{5}-7} = \frac{y-2}{28-10\sqrt{5}-2};$$

$$\frac{x-7}{12-8\sqrt{5}} = \frac{y-2}{26-10\sqrt{5}};$$

$$y - 2 = \frac{26-10\sqrt{5}}{12-8\sqrt{5}}(x-7);$$

$$y - 2 = \frac{61+4\sqrt{5}}{22}(x-7);$$

і, нарешті, BT:

$$y = \frac{61+4\sqrt{5}}{22}x - \frac{383+28\sqrt{5}}{22}.$$

2.9. Координати центра та радіус описаного кола можна знайти двома різними способами. Опишемо кожний з них, а розв'яжемо задачу лише одним, запропонував інший розв'язок другим способом читачеві.

По-перше, за визначенням, відомим нам з курсу середньої школи, центр описаного кола лежить у точці перетину серединних перпендикулярів. Отже, щоб знайти координати центра, необхідно скласти рівняння двох серединних перпендикулярів (знайти координати середин протилежних сторін та, з умови перпендикулярності, кутові коефіцієнти, рівняння – за формулою (2.20)) та точку їх перетину (як результат розв'язку системи).

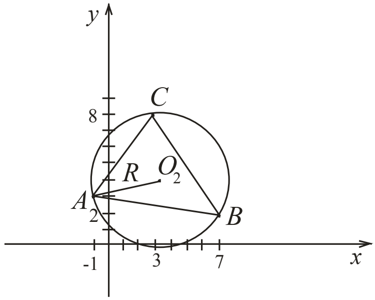

Рисунок 4.6 – Описане навколо трикутника ABC коло

По-друге, за визначенням кола, центр – точка, рівновіддалена від всіх точок, що належать колу, тобто від всіх вершин трикутника. На наш погляд, розв'язання задачі цим методом потребує від нас менших зусиль та використання меншої кількості формул. Тому розв'яжемо задачу саме так.

Нехай точка $O_2(x,y)$ - центр описаного кола. За приведеним визначенням $AO_2 = BO_2 = CO_2$. Отже, за формулою (2.1) маємо

$$AO_2 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2};$$
$$BO_2 = \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2};$$
$$CO_2 = \sqrt{(x-3)^2 + (y-8)^2}.$$

Перепишемо тотожність $AO_2 = BO_2 = CO_2$ у вигляді двох рівнянь $AO_2 = BO_2$ і $AO_2 = CO_2$ - отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими, які відразу підведемо до квадрата:

$$\begin{cases}(x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-7)^2 + (y-2)^2\\(x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y-8)^2\end{cases};$$

За формулами квадрат суми та квадрат різниці спростимо отримані рівняння:

$$\begin{cases} x^2+2x+1+y^2-6y+9=x^2-14x+49+y^2-4y+4 \\ x^2+2x+1+y^2-6y+9=x^2-6x+9+y^2-16y+64 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 16x-2y=43 \\ 8x+10y=63 \end{cases};$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 16 & -2 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}=160+16=176;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 43 & -2 \\ 63 & 10 \end{vmatrix}=430+126=556;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 16 & 43 \\ 8 & 63 \end{vmatrix}=1008-344=664;$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{556}{176}=\frac{139}{44};$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{664}{176}=\frac{83}{22}.$$

Отже, розв’язок системи: $x=\frac{139}{44}$; $y=\frac{83}{22}$. Звідси координати центра описаного кола $O_2\left(\frac{139}{44};\frac{83}{22}\right)$. А радіус знайдемо, наприклад, як $R=AO_2$

$$R=\sqrt{\left(\frac{139}{44}+1\right)^2+\left(\frac{83}{22}-3\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{183}{44}\right)^2+\left(\frac{17}{22}\right)^2}=\frac{\sqrt{34645}}{44}\text{ (од.)}$$

Відповідь: Координати центру описаного кола $O_2\left(\frac{139}{44};\frac{83}{22}\right)$, радіус $R=\frac{\sqrt{34645}}{44}$ (од.).

2.10. Координати точки перетину медіани AF та прямої, що проходить через точку C паралельно AB знаходяться як результат розв’язку системи, яка складається з рівнянь, що описують вказані лінії. Нагадаємо, що рівняння медіани AF ми вже знайшли у п. 2.6: $y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$.

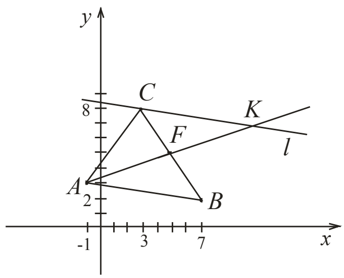

Рисунок 4.7 – Точка перетину медіани трикутника ABC з прямою, паралельною стороні

Рівняння прямої l, що

проходить через точку C паралельно AB знайдемо з умови паралельності прямих AB і l: $k_l = k_{AB} = -\frac{1}{8}$ (2.21). Нам відомий кутовий коефіцієнт $k_l = -\frac{1}{8}$ і координати точки $C(3,8)$, тому за формулою(2.20) маємо:

$$y - 8 = -\frac{1}{8}(x - 3);$$
$$y = -\frac{1}{8}x + \frac{67}{8}.$$

Отже система набуває вигляду:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \\ y = -\frac{1}{8}x + \frac{67}{8} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x - 3y = -10 \\ x + 8y = 67 \end{cases}.$$

За правилами Крамера маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11;$$
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -10 & -3 \\ 67 & 8 \end{vmatrix} = -80 + 201 = 121;$$
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 1 & 67 \end{vmatrix} = 67 + 10 = 77;$$
$$x = \frac{121}{11} = 11; \quad y = \frac{77}{11} = 7.$$

Відповідь: Точка перетину має координати $K(11,7)$.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромба, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 8 та 14 одиницям довжини.

Розв'язання: За властивостями ромбу, його діагоналі перпендикулярні і точкою перетину поділяються навпіл. Звідси прямує, що осі координат можуть утворювати діагоналі ромба, й відсікають на осі абсцис по 4 одиниці, а на осі ординат – по 7. Підставимо отримані результати в рівняння прямої у відрізках (2.16):

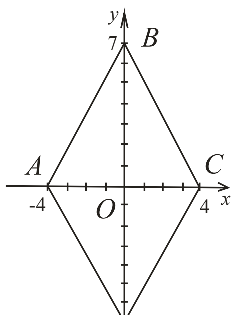

Рисунок 4.8 – Ромб ABCD

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

$$AB: \quad \frac{x}{-4}+\frac{y}{7}=1;$$
$$BC: \quad \frac{x}{4}+\frac{y}{7}=1;$$
$$CD: \quad \frac{x}{4}+\frac{y}{-7}=1;$$
$$DA: \quad \frac{x}{-4}+\frac{y}{-7}=1.$$

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $3x-2y+5=0$ та $4x+y-1=0$ з точкою $O(0,0)$.

Розв'язання: Знайдемо точку перетину прямих Q як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь за правилами Крамера:

$$\begin{cases} 3x-2y=-5 \\ 4x+y=1 \end{cases};$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=3+8=11;$$
$$\Delta_x=\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-5+2=-3;$$
$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=6+20=26;$$
$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=-\frac{3}{11}; \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{26}{11};$$
$$Q\left(-\frac{3}{11};\ \frac{26}{11}\right).$$

Рівняння шуканої прямої OQ знайдемо за формулою (2.18):

$$\frac{x-0}{-\frac{3}{11}-0}=\frac{y-0}{\frac{26}{11}-0};$$
$$-\frac{3}{11}y=\frac{26}{11}x;$$
$$y=-\frac{26}{3}x.$$

Відповідь: $OQ: \quad y=-\frac{26}{3}x.$

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2{,}3), B(5{,}4),\ C(10{,}1), D(1,-2)$ є трапеція.

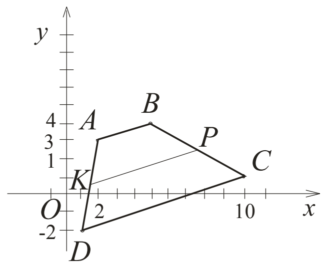

Рисунок 4.8 – Трапеція ABCD

Розв'язання. За визначенням, трапеція – це чотирикутник, у якого дві протилежних сторони паралельні. Обчислимо кутові коефіцієнти сторін чотирикутника (за формулою (2.17)) й перевіримо, чи є така пара коефіцієнтів, яка б задовольняла умові паралельності (2.21).

$$k_{AB} = \frac{4-3}{5-2} = \frac{1}{3}; \qquad k_{BC} = \frac{1-4}{10-5} = -\frac{3}{5};$$
$$k_{CD} = \frac{-2-1}{1-10} = \frac{1}{3}; \qquad k_{AD} = \frac{-2-3}{1-2} = 5.$$

Бачимо, що $k_{AB} = k_{CD}$, звідси прямує, що $AB||CD$. Отже, $ABCD$ - трапеція.

6. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$ з завдання 5.

Розв'язання. У завданні 5 ми з'ясували, що $AB||CD$, тобто AB і CD - основи трапеції. Шукана середня лінія KP проходить через середині бічних сторін паралельно AB і CD.

Знайдемо точку K - середину AD (2.6), (2.7):

$$x_K = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}; \quad y_K = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}; \quad K\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

З умови паралельності (2.21) $k_{KP} = k_{AB} = \frac{1}{3}$. Підставимо у формулу (2.10):

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right);$$
$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2};$$
$$y = \frac{1}{3}x.$$

Відповідь: KP: $\quad y = \frac{1}{3}x.$

8. Знайти відстань між прямими $3x - 5y + 7 = 0$ та $3x - 5y - 8 = 0$.

Розв'язання. Задані прямі паралельні, тому що $k_1 = k_2 = \frac{3}{5}$. Приведемо рівняння прямих до нормального вигляду:

$$M_1 = M_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{3^2+(-5)^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{34}};$$

$$(1): \quad -\frac{3}{\sqrt{34}}x + \frac{5}{\sqrt{34}}y - \frac{7}{\sqrt{34}} = 0;$$

$$(2): \quad \frac{3}{\sqrt{34}}x - \frac{5}{\sqrt{34}}y - \frac{8}{\sqrt{34}} = 0.$$

Звідси $p_1 = \frac{7}{\sqrt{34}}$, $p_2 = \frac{8}{\sqrt{34}}$.

Прямі розташовані по обидві сторони від початку координат. Відстань між прямими – це сума відстаней від початку координат кожної з прямих:

$$d = p_1 + p_2 = \frac{7}{\sqrt{34}} + \frac{8}{\sqrt{34}} = \frac{15}{\sqrt{34}}.$$

Відповідь: $d = \frac{15}{\sqrt{34}}$.

9. Записати рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо відомі рівняння гіпотенузи (AB) $2x + 3y - 5 = 0$ і координати вершини прямого кута $C(2, -1)$.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт гіпотенузи з умови $k_{AB} = -\frac{2}{3}$. Трикутник ABC - рівнобедрений прямокутний, тому кути при основі дорівнюють

$$\angle ABC = \angle BAC = \frac{180^0 - 90^0}{2} = 45^0.$$

Скористаємося формулою (2.23) і знайдемо кутові коефіцієнти сторін AC і BC:

$$\mathrm{tg}45^0 = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC}\cdot k_{AB}} = \frac{k_{AC} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k_{AC}} = 1;$$

$$k_{AC}+\frac{2}{3}=1-\frac{2}{3}k_{AC};$$
$$\frac{5}{3}k_{AC}=\frac{1}{3}; \qquad \rightarrow \qquad k_{AC}=\frac{1}{5};$$

аналогічно,

$$\text{tg}45^0=\frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{BC}\cdot k_{AB}}=\frac{-\frac{2}{3}-k_{BC}}{1-\frac{2}{3}k_{BC}}=1;$$
$$-\frac{2}{3}-k_{BC}=1-\frac{2}{3}k_{BC};$$
$$-\frac{1}{3}k_{AC}=\frac{5}{3}; \qquad \rightarrow \qquad k_{BC}=-5.$$

За формулою (2.20) шукані рівняння мають вигляд:

$$AC: \quad y+1=\frac{1}{5}(x-2); \quad y=\frac{1}{5}x-\frac{7}{5};$$
$$BC: \quad y+1=-5(x-2); \quad y=-5x+9.$$

Відповідь: AC: $y=\frac{1}{5}x-\frac{7}{5}$; BC: $y=-5x+9$.

Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів

Завдання 4.1

1. Довести, що рівняння $\frac{2x-5}{4}+\frac{y+3}{5}=-1$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1 Загальне рівняння прямої.

2.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

2.3. Рівняння прямої у відрізках.

2.4. Нормальне рівняння прямої.

3. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(-1;-2); B(-2{,}5); C(8{,}1)$. Знайти:

3.2. Периметр та площу трикутника.

3.3. Рівняння сторін.

3.4. Кути трикутника.

3.5. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

3.6. Координати центра мас трикутника.

3.7. Рівняння медіани AF.

3.8. Рівняння та довжину висоти BN.

3.9. Рівняння бісектриси CT.

3.10. Координати центра та радіус описаного кола.

3.11. Координати точки перетину медіани AF та прямої, що проходить через точку C паралельно AB.

4. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромба, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 4 та 6 одиницям довжини.

5. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $y=\frac{1}{2}x+2$ та $y=3x-7$ із початком координат.

6. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1{,}4), B(3{,}5), C(11{,}1), D(-1,-2)$ є трапеція.

7. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$ із завд. 5.

8. Знайти площу трапеції $ABCD$ з завдання 5.

9. Знайти відстань між паралельними прямими

$$y=5x-4 \text{ та } y=5x+13.$$

10. Дано дві вершини трикутника $A(2{,}2)$, $B(3{,}0)$ та точка перетину його медіан $D(3{,}1)$. Знайти третю вершину трикутника.

Завдання 4.2

1. Довести, що рівняння $\frac{3x-1}{2}-\frac{2y+3}{4}=2$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(2,4); B(-3,6); C(5,7)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани BK.

2.7. Рівняння та довжину висоти CF.

2.8. Рівняння бісектриси AL.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани BK та прямої, що проходить через точку A паралельно BC.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромба, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 10 та 3 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $y=3x-4$ та $y=\frac{5}{2}x+1$ з початком координат.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1,2), B(-2,6), C(5,5), D(6,1)$ є паралелограм.

6. Знайти рівняння діагоналей паралелограма $ABCD$ з п. 5.

7. Знайти площу паралелограма $ABCD$ з п. 5.

8. Знайти відстань між прямими $2x-5y-3=0$ та $2x-5y+6=0$.

9. Знайти вершини прямокутного рівнобічного трикутника, якщо відомі вершина прямого кута $C(3,-1)$ та рівняння гіпотенузи $3x-y+2=0$.

Завдання 4.3

1. Довести, що рівняння $\frac{4x-1}{3}+y-\frac{2}{5}=4$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(1{,}5); B(5{,}3); C(-1,-5)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани CL.

2.7. Рівняння та довжину висоти AT.

2.8. Рівняння бісектриси BN.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани CL та прямої, що проходить через точку B паралельно AC.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 8 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $2x-y+5=0$ та $x+3y-2=0$ з точкою $O(0{,}0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-3{,}6), B(-1{,}1), C(4,-1), D(2{,}4)$ є ромб.

6. Знайти точку перетину діагоналей ромба $ABCD$ з завдання 5.

7. Знайти площу ромба $ABCD$ з завдання 5.

8. Знайти відстань між паралельними прямими

$$4x + 3y - 7 = 0 \text{ та } 4x + 3y - 6 = 0.$$

9. Відомі координати двох вершин рівностороннього трикутника ABC: $A(2,1)$ та $B(2,5)$. Знайти координати третьої вершини C.

Завдання 4.4

1. Довести, що рівняння $\frac{x-1}{2} + \frac{2}{5}y = -3$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(5,5); B(1,-6); C(-3,6)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани AN.

2.7. Рівняння та довжину висоти BF.

2.8. Рівняння бісектриси CT.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани AN та прямої, що проходить через точку B паралельно AC.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 15 та 4 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $4x + 3y - 2 = 0$ та $x + 2y + 3 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-4,3), B(1,5), C(3,0), D(-2,-2)$ є прямокутник.

6. Знайти кути перетину діагоналей прямокутника $ABCD$ з п. 5.

7. Знайти площу та периметр прямокутника $ABCD$ з п. 5.

8. Знайти відстань між паралельними прямими

$$3x - 7y - 2 = 0 \text{ та } 3x - 7y + 5 = 0.$$

9. Відомі координати двох вершин трикутника ABC: $A(-4,3)$ та $B(4,-1)$ та точка перетину висот $M(3,3)$. Знайти координати третьої вершини C.

Завдання 4.5

1. Довести, що рівняння $\frac{7x-1}{4} + \frac{2y+3}{5} = -\frac{1}{2}$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(-7,1); B(1,-2); C(6,3)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани BT.

2.7. Рівняння та довжину висоти CR.

2.8. Рівняння бісектриси AT.

2.9. Координати центру та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани BT та прямої, що проходить через точку A паралельно BC.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 8 та 11 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x + 4y - 5 = 0$ та $3x - 5y + 7 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(1,5), B(0,1), C(-4,2), D(-3,6)$ є квадрат.

6. Знайти площу вписаного в квадрат $ABCD$ кола з п. 5.

7. Знайти площу та периметр квадрата $ABCD$ з п. 5.

8. Знайти відстань між прямими $7x-2y+5=0$ та $7x-2y-1=0$.

9. Дві сторони паралелограма задані своїми рівняннями $y=x-2$ $x-5y+6=0$. Його діагоналі перетинаються в початку координат. Написати рівняння двох інших сторін.

Завдання 4.6

1. Довести, що рівняння $6x+\frac{y-3}{7}=\frac{3}{5}$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(3,6); B(6,4); C(3,-5)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани CL.

2.7. Рівняння та довжину висоти AN.

2.8. Рівняння бісектриси BF.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани CL та прямої, що проходить через точку B паралельно AC.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 7 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $4x - 7y + 8 = 0$, $3x - 2y + 11 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(0,7), B(3,6), C(4,1), D(-2,3)$ є трапеція.

6. Знайти рівняння діагоналей трапеції $ABCD$ з п. 5.

7. Знайти площу трапеції $ABCD$ з завдання 5.

8. Знайти відстань між паралельними прямими

$$11x - 2y + 3 = 0 \text{ та } 11x - 2y - 5 = 0.$$

9. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(0,-4)$, $B(3,0)$, $C(0,6)$. Знайти відстань від вершини C до бісектриси кута A.

Завдання 4.7

1. Довести, що рівняння $\frac{5x+1}{3} + \frac{y+1}{4} = \frac{7}{6}$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(-4,4)$; $B(4,1)$; $C(6,5)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани AS.

2.7. Рівняння та довжину висоти BL.

2.8. Рівняння бісектриси CT.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани AS та прямої, що проходить через точку C паралельно AB.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 4 та 10 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x - y - 8 = 0$ та $4x + 3y + 7 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2,1), B(5,-3), C(6,2), D(3,6)$ є паралелограм.

6. Знайти точку перетину діагоналей паралелограма з завдання 5.

7. Знайти площу паралелограма $ABCD$ з завдання 5.

8. Знайти відстань між прямими $5x + 9y - 2 = 0$ та $5x + 9y + 6 = 0$.

9. Обчислити координати вершин ромба, якщо відомі рівняння двох його сторін $x + 2y = 4$ та $x + 2y = 10$, та рівняння однієї з його діагоналей $y = x + 2$.

Завдання 4.8

1. Довести, що рівняння $\frac{7x+8}{2} - \frac{y-1}{6} = -5$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(-6,1); B(-4,6); C(8,1)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани BN.

2.7. Рівняння та довжину висоти CT.

2.8. Рівняння бісектриси AE.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани BN та прямої, що проходить через точку C паралельно AB.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 12 та 7 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $2x - y - 4 = 0$ та $11x = 4y - 7$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(3,6), B(8,6), C(11,2), D(6,2)$ є ромб.

6. Знайти рівняння діагоналей ромба $ABCD$ з завдання 5.

7. Знайти площу ромба $ABCD$ з завдання 5.

8. Знайти відстань між паралельними прямими

$$7x - y + 5 = 0 \text{ та } 7x - y - 1 = 0.$$

9. Записати рівняння сторін трикутника, якщо відома одна з його вершин $A(0,2)$, та рівняння висот $(BM) x + y = 4$ та $(CM) y = 2x$, де M – точка перетину висот.

Завдання 4.9

1. Довести, що рівняння $\frac{5x+3}{4} - 5y = 2$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(-3,3); B(-2,8); C(7,4)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани CT.

2.7. Рівняння та довжину висоти AK.

2.8. Рівняння бісектриси BN.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани CN та прямої, що проходить через точку B паралельно AC.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромба, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 4 та 9 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $y = 8x + 4$ та $3x + 5y + 6 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-3,-2), B(1,-5), C(3,1), D(-1,4)$ є паралелограм.

6. Знайти точку перетину діагоналей паралелограма з завдання 5.

7. Знайти площу паралелограма $ABCD$ з завдання 5.

8. Знайти відстань між $4x - y - 7 = 0$ та $4x - y - 1 = 0$.

9. Дано координати центру квадрата $C(-1,0)$ та рівняння сторони $x + 3y - 5 = 0$. Записати рівняння трьох інших сторін квадрата.

Завдання 4.10

1. Довести, що рівняння $8x + \frac{6y-1}{9} + \frac{1}{5} = 0$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(-7,6); B(-5,2); C(4,7)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани AL.

2.7. Рівняння та довжину висоти BN.

2.8. Рівняння бісектриси CM.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани CN та прямої, що проходить через точку B паралельно AC.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 1 та 11 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $5x - 8y = 9$ та $y = x + 2$ з початком координат.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1,-2), B(-3,3), C(2,5), D(4,0)$ є квадрат.

6. Знайти рівняння та довжину діагоналей квадрата з завдання 5.

7. Знайти площу та периметр квадрата $ABCD$ з завд. 5.

8. Знайти відстань між паралельними прямими

$$3x + 5y + 1 = 0 \text{ та } 3x + 5y - 7 = 0.$$

9. В прямокутному рівнобічному трикутнику відомі рівняння катету $y = 2x$ та середина гіпотенузи $K(4,2)$. Знайти рівняння двох інших сторін трикутника.

Завдання 4.11

1. Довести, що рівняння $\frac{2x-6}{5} + \frac{y-9}{4} - 3 = 0$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(2,1); B(6,5); C(-4,6)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани BN.

2.7. Рівняння та довжину висоти CK.

2.8. Рівняння бісектриси AS.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани BN та прямої, що проходить через точку C паралельно AB.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 10 та 3 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x-5y-9=0$ та $2x-8y-5=0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(6,0), B(7,4), C(-1,6), D(-2,2)$ є прямокутник.

6. Знайти точку перетину діагоналей прямокутника з завдання 5.

7. Знайти площу та периметр прямокутника $ABCD$ з завдання 5.

8. Знайти відстань між $x+y+9=0$ та $x+y-17=0$.

9. Відомі рівняння двох сторін AB та BC паралелограма $2x-y+5=0$ та $x-2y+4=0$, його діагоналі перетинаються в точці $M(1,4)$. Знайти довжини його висот.

Завдання 4.12

1. Довести, що рівняння $4x+\frac{2y-9}{7}-2=0$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(-3,4); B(7,-3); C(4,-4)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани CL.

2.7. Рівняння та довжину висоти AN.

2.8. Рівняння бісектриси BT.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани CL та прямої, що проходить через точку A паралельно BC

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 9 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $9x + y + 1 = 0$ та $4x - 6y - 3 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-3,6), B(2,1), C(3,-6), D(-2,-1)$ є ромб.

6. Знайти точку перетину діагоналей ромба $ABCD$ з завдання 5.

7. Знайти площу та периметр ромба $ABCD$ з завдання 5.

8. Знайти відстань між прямими $3x - 5y - 9 = 0$ та $3x - 5y - 6 = 0$.

9. Точка $H(-3,2)$ є точкою перетину висот трикутника, дві сторони якого належать прямим $y = 2x$ і $y = -x + 3$. Записати рівняння третьої сторони трикутника.

Завдання 4.13

1. Довести, що рівняння $\frac{5x+2}{9} - 2y = \frac{4}{5}$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(8,1); B(9,7); C(1,8)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани AK.

2.7. Рівняння та довжину висоти BH.

2.8. Рівняння бісектриси CT.

2.9. Координати центру та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани AK та прямої, що проходить через точку C паралельно AB.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 3 та 10 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $2x - y - 9 = 0$ та $5x - 6y - 2 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-2,7), B(2,8), C(9,5), D(-3,2)$ є трапеція.

6. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$ з завдання 5.

7. Знайти площу трапеції $ABCD$ з завдання 5.

8. Знайти відстань між $7x + y + 8 = 0$ та $7x + y - 9 = 0$.

9. Дано координати двох вершин трикутника $A(-1,3)$, $B(2,5)$ і точки перетину його висот $H(1,4)$. Знайти координати третьої вершини трикутника і записати рівняння його сторін.

Завдання 4.14

1. Довести, що рівняння $\frac{x+7}{3} - \frac{2y-4}{5} = -3$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(1,8); B(7,9); C(-2,-1)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани BT.

2.7. Рівняння та довжину висоти CR.

2.8. Рівняння бісектриси AL.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани BT та прямої, що проходить через точку A паралельно BC.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 13 та 2 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $5x-4y-9=0$ та $x+7y+2=0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-3,-1), B(-1,6), C(3,5), D(1,-2)$ є прямокутник.

6. Знайти рівняння діагоналей прямокутника $ABCD$ з завдання 5.

7. Знайти площу та периметр прямокутника $ABCD$ з завдання 5.

8. Знайти відстань між $3x+y+2=0$ та $3x+y+6=0$.

9. Відомі точки $K(1,3)$ і $L(-1,1)$ - середини основ рівнобічної трапеції. Точки $P(3,0)$ і $Q(-3,5)$ належать її бічним сторонам. Записати рівняння сторін трапеції.

Завдання 4.15

1. Довести, що рівняння $\frac{5x-1}{3}+\frac{y-3}{9}=5$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(-4{,}3)$; $B(7{,}4)$; $C(9{,}1)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани CT.

2.7. Рівняння та довжину висоти AN.

2.8. Рівняння бісектриси BE.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани CT та прямої, що проходить через точку A паралельно BC

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 11 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x + 4y - 2 = 0$ та $x - y + 5 = 0$ з точкою $O(0{,}0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(4{,}1), B(0{,}4), C(3{,}8), D(7{,}5)$ є квадрат.

6. Знайти рівняння діагоналей квадрата $ABCD$ з завд. 5.

7. Знайти площу та периметр квадрата $ABCD$ з завд. 5.

8. Знайти відстань між прямими $8x - 3y - 1 = 0$ та $8x - 3y + 4 = 0$

9. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(5, -1)$ перпендикулярно відрізку AB, якщо $A(4{,}5)$; $B(3{,}2)$.

Завдання 4.16

1. Довести, що рівняння $\frac{x-1}{8} + \frac{2y+1}{5} - 2 = 0$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(-3,-3); B(-2,3); C(8,1)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани CT.

2.7. Рівняння та довжину висоти AN.

2.8. Рівняння бісектриси BE.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани CT та прямої, що проходить через точку A паралельно BC

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 7 та 4 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $9x-2y-7=0$ та $x-2y+5=0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2,3), B(7,-2), C(8,5), D(3,10)$ є ромб.

6. Знайти точку перетину діагоналей ромба $ABCD$ з завдання 5.

7. Знайти площу та периметр ромба $ABCD$ з завдання 5.

8. Знайти відстань між паралельними прямими

$$2x+3y-11=0 \text{ та } 2x+3y+2=0.$$

9. Точка $A(2,0)$ є вершиною правильного трикутника, а сторона, що лежить проти неї, задана рівнянням $x+y-1=0$. Записати рівняння двох інших сторін трикутника.

Завдання 4.17

1. Довести, що рівняння $\frac{3x-9}{5}+\frac{y+8}{3}-4=0$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(0,-2); B(-5,4); C(11,2)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани AT.

2.7. Рівняння та довжину висоти BK.

2.8. Рівняння бісектриси CL.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани AT та прямої, що проходить через точку C паралельно AB.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 2 та 9 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з’єднує точку перетину прямих $2x-5y-9=0$ та $x+4y+3=0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-3,3), B(5,4), C(4,-1), D(-4,-2)$ є паралелограм.

6. Знайти рівняння діагоналей паралелограма $ABCD$ з завдання 5.

7. Знайти площу паралелограма $ABCD$ з завдання 5.

8. Знайти відстань між прямими $7x+y-4=0$ та $7x+y+12=0$.

9. Дано вершини трикутника $A(3,-2), B(5,2), C(-1,4)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через середину сторони BC перпендикулярно стороні AB.

Завдання 4.18

1. Довести, що рівняння $\frac{4x+1}{3}+\frac{2y-9}{4}=-\frac{4}{5}$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(-6,1); B(5,3); C(-5,4)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани BF.

2.7. Рівняння та довжину висоти CN.

2.8. Рівняння бісектриси AT.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани BF та прямої, що проходить через точку C паралельно AB.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 2 та 9 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з’єднує точку перетину прямих $5x - 2y - 1 = 0$ та $2x + y - 7 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-6,6), B(-4,1), C(2,2), D(6,8)$ є трапеція.

6. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$ з завдання 5.

7. Знайти площу та периметр трапеції $ABCD$ з завд. 5.

8. Знайти відстань між прямими $x + 9y - 3 = 0$ та $x + 9y - 6 = 0$.

9. Дано точка $A(3, -2)$ - вершина квадрата і точка $M(1,1)$ - точка перетину його діагоналей. Записати рівняння сторін квадрата.

Завдання 4.19

1. Довести, що рівняння $5x - \frac{3y-8}{2} = -4$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(-5{,}3)$; $B(6{,}0)$; $C(-7,-4)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани CL.

2.7. Рівняння та довжину висоти AK.

2.8. Рівняння бісектриси BF.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани CL та прямої, що проходить через точку A паралельно BC.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 13 та 2 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $4x + 7y - 2 = 0$ та $5x - y + 1 = 0$ з точкою $O(0{,}0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(4{,}8), B(7{,}3), C(-3,-3), D(-6{,}2)$ є прямокутник.

6. Знайти рівняння діагоналей прямокутника $ABCD$ з завдання 5.

7. Знайти площу прямокутника $ABCD$ з завдання 5.

8. Знайти відстань між прямими $4x - y - 8 = 0$ та $4x - y - 12 = 0$.

9. Відомі дві вершини трикутника $A(-6,2)$, $B(2,-2)$ і точка перетину його висот $H(1,2)$. Знайти координати точки M перетину сторони AC і висоти BH.

Завдання 4.20

1. Довести, що рівняння $\frac{x-2}{6}+\frac{2y-9}{5}=1$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(-4,7)$; $B(-5,2)$; $C(2,-2)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани AT.

2.7. Рівняння та довжину висоти BN.

2.8. Рівняння бісектриси CK.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани AT та прямої, що проходить через точку C паралельно AB.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 9 та 8 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $3x-y-2=0$ та $9x+2y+5=0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(4,2), B(3,-4), C(-3,-3), D(-2,3)$ є квадрат.

6. Знайти точку перетину діагоналей квадрата $ABCD$ з завдання 5.

7. Знайти площу та периметр квадрата $ABCD$ з завд. 5.

8. Знайти відстань між $9x - y - 1 = 0$ та $9x - y + 5 = 0$.

9. Довжина сторони ромба з гострим кутом 60^0 дорівнює 2. Діагоналі ромба перетинаються в т.$M(1,2)$. Більша діагональ ромба паралельна осі Ox. Записати рівняння сторін ромба.

Завдання 4.21

1. Довести, що рівняння $\frac{5x-2}{3} - \frac{3y+1}{2} - 8 = 0$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(9,4); B(-6,6); C(-1,8)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани BT.

2.7. Рівняння та довжину висоти CK.

2.8. Рівняння бісектриси AE.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани BT та прямої, що проходить через точку C паралельно AB.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 12 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з’єднує точку перетину прямих $7x - 5y - 2 = 0$ та $3x + y - 9 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-4,7), B(3,3), C(4,-5), D(-3,-1)$ є ромб.

6. Знайти рівняння та довжину діагоналей ромба з завдання 5.

7. Знайти площу та периметр ромба $ABCD$ з завдання 5.

8. Знайти відстань між прямими $x + 5y - 2 = 0$ та $x + 5y + 15 = 0$.

9. Точка A належить прямій $x + y = 8$. Відомо, що відстань між точками A і $B(2,8)$ дорівнює відстані від точки A до прямої $x - 3y + 2 = 0$. Знайти координати точки A.

Завдання 4.22

1. Довести, що рівняння $\frac{x-1}{11} - 4y = -\frac{7}{3}$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(4,-3); B(3,2); C(-7,1)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани CM.

2.7. Рівняння та довжину висоти AL.

2.8. Рівняння бісектриси BF.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани CM та прямої, що проходить через точку B паралельно AC.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 11 та 1 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $4x + 2y + 3 = 0$ та $5x + y - 4 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(1,3), B(-2,-1), C(-6,2), D(-3,6)$ є квадрат.

6. Знайти рівняння діагоналей квадрата $ABCD$ із завд. 5.

7. Знайти площу та периметр квадрата $ABCD$ із завд. 5.

8. Знайти відстань між прямими $6x-5y-11=0$ та $6x-5y+2=0$.

9. Точка A належить прямій $2x-3y+4=0$. Відомо, що від точки A до прямої $4x-3y=0$ дорівнює 2. Знайти координати точки A.

Завдання 4.23

1. Довести, що рівняння $\frac{5x-1}{8}-\frac{y+4}{2}=6$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(-2,-4); B(-6,4); C(3,5)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани AS.

2.7. Рівняння та довжину висоти BN.

2.8. Рівняння бісектриси CT.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани AS та прямої, що проходить через точку B паралельно AC.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 4 та 12 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x-2y+5=0$ та $2x-7y-2=0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(5,8), B(5,4), C(-3,6), D(1,9)$ є трапеція.

6. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$ з завдання 5.

7. Знайти площу трапеції $ABCD$ з завдання 5.

8. Знайти відстань між прямими $x-2y+7=0$ та $x-2y+13=0$.

9. Знайти координати центра та радіус кола, що проходить крізь точку $A(-1,3)$ та дотикається прямих $7x+y=0$ і $x-y+8=0$.

Завдання 4.24

1. Довести, що рівняння $\frac{3x-7}{4}+\frac{2y+5}{7}=-3$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(5,4); B(-3,-4); C(-6,-2)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани BF.

2.7. Рівняння та довжину висоти CK.

2.8. Рівняння бісектриси AT.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани BF та прямої, що проходить через точку C паралельно AB.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 2 та 10 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $8x - y + 3 = 0$ та $4x + 3y - 5 = 0$ з точкою $O(0{,}0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(4{,}0), B(-4,-2), C(-2,-6), D(6,-4)$ є паралелограм.

6. Знайти рівняння діагоналей паралелограма $ABCD$ з завдання 5.

7. Знайти площу паралелограма $ABCD$ з завдання 5.

8. Знайти відстань між прямими $5x - 2y + 5 = 0$ та $5x - 2y + 2 = 0$.

9. Гіпотенуза прямокутного трикутника площею 2,25 лежить на прямій $2x + y - 2 = 0$, а точка $C(3,-1)$ є вершиною прямого кута. Записати рівняння катетів цього трикутника.

Завдання 4.25

1. Довести, що рівняння $\frac{3x-7}{4} + 4y = \frac{3}{5}$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(6{,}9); B(3{,}3); C(8,-1)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани CL.

2.7. Рівняння та довжину висоти AN.

2.8. Рівняння бісектриси BT.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани CL та прямої, що проходить через точку A паралельно BC.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 3 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $5x + y + 1 = 0$ та $x + 7y - 10 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(8,2), B(7,-3), C(-3,-1), D(-2,4)$ є прямокутник.

6. Знайти рівняння діагоналей прямокутника $ABCD$ з завдання 5.

7. Знайти площу прямокутника $ABCD$ із завдання 5.

8. Знайти відстань між паралельними прямими

$$2x - 5y + 7 = 0 \text{ та } 2x - 5y + 10 = 0.$$

9. Відомі рівняння двох сторін паралелограма $x + y - 1 = 0$, $3x - y + 4 = 0$ і точка перетину його діагоналей $P(3,3)$. Записати рівняння двох інших сторін.

Завдання 4.26

1. Довести, що рівняння $\frac{x+8}{5} + \frac{6y-11}{4} = -1$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(5,10); B(2,3); C(8,-3)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани AL.

2.7. Рівняння та довжину висоти BF.

2.8. Рівняння бісектриси CT.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани AL та прямої, що проходить через точку C паралельно AB.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 7 та 16 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $3x + 2y - 8 = 0$ та $x - 4y + 6 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1,4), B(0,11), C(5,6), D(4,-1)$ є ромб.

6. Знайти точку перетину діагоналей ромба $ABCD$ з завдання 5.

7. Знайти площу ромба $ABCD$ з завдання 5.

8. Знайти відстань між прямими $6x + 5y - 9 = 0$ та $6x + 5y - 12 = 0$.

9. Відомі рівняння двох висот трикутника ABC: $2x - 3y + 1 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$ і координати його вершини $A(2,3)$. Записати рівняння сторін AB і AC.

Завдання 4.27

1. Довести, що рівняння $\frac{x-3}{8} + \frac{2y+5}{4} = 3$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(6,3); B(-7,4); C(-6,1)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани BT.

2.7. Рівняння та довжину висоти CK.

2.8. Рівняння бісектриси AE.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани BT та прямої, що проходить через точку A паралельно BC.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 13 та 3 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x+4y-3=0$ та $6x+3y+2=0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-2,-4), B(4,-3), C(3,3), D(-3,2)$ є квадрат.

6. Знайти точку перетину діагоналей квадрата із завд. 5.

7. Знайти площу і периметр квадрата $ABCD$ із завдання 5.

8. Знайти відстань між $8x+y-3=0$ та $8x+y-7=0$.

9. Відомі рівняння сторони AB трикутника ABC $3x+2y=12$, і рівняння висот (AM) $4x+y=6$ і (BM) $x+2y=4$, де M- точка перетину висот. Записати рівняння сторін AB, BC.

Завдання 4.28

1. Довести, що рівняння $\frac{6x-1}{5}+\frac{y+9}{3}=-2$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(1,4); B(-2,7); C(-9,2)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани CM.

2.7. Рівняння та довжину висоти AT.

2.8. Рівняння бісектриси BN.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани CM та прямої, що проходить через точку A паралельно BC.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 9 та 15 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x - 2y - 1 = 0$ та $2x + 5y + 3 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2,4), B(3,8), C(-6,5), D(-7,1)$ є паралелограм.

6. Знайти рівняння діагоналей паралелограма $ABCD$ із завдання 5.

7. Знайти площу паралелограма $ABCD$ з завдання 5.

8. Знайти відстань між паралельними прямими

$$2x + 5y + 7 = 0 \text{ та } 2x + 5y + 9 = 0.$$

9. Відомі рівняння двох сторін ромба $2x - 5y - 1 = 0$ і $2x - 5y - 34 = 0$ і рівняння $x + 3y - 6 = 0$ - однієї його діагоналі. Записати рівняння другої діагоналі.

Завдання 4.29

1. Довести, що рівняння $\frac{5x+4}{2} - \frac{y-2}{6} = 5$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(2,-3); B(5,1); C(3,8)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани AK.

2.7. Рівняння та довжину висоти BN.

2.8. Рівняння бісектриси CE.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани AK та прямої, що проходить через точку C паралельно AB.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 17 та 6 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $5x - 9y - 2 = 0$ та $4x + y - 3 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1,6), B(4,5)$, $C(5,0), D(1,-4)$ є трапеція.

6. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$ із завдання 5.

7. Знайти площу трапеції $ABCD$ із завдання 5.

8. Знайти відстань між паралельними прямими

$$7x - 4y + 2 = 0 \text{ та } 7x - 4y - 15 = 0.$$

9. Відомі рівняння двох сторін паралелограму $x - 2y = 0$ і $x - y = 1$ і точка перетину його діагоналей $M(3,-1)$. Знайти рівняння двох інших сторін.

Завдання 4.30

1. Довести, що рівняння $\frac{x-3}{7} + \frac{5y-2}{3} = -1$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1.1. Загальне рівняння прямої.

1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3. Рівняння прямої у відрізках.

1.4. Нормальне рівняння прямої.

2. Дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(-1,7); B(-5,7); C(1,-4)$. Знайти:

2.1. Периметр та площу трикутника.

2.2. Рівняння сторін.

2.3. Кути трикутника.

2.4. Визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).

2.5. Координати центра мас трикутника.

2.6. Рівняння медіани BT.

2.7. Рівняння та довжину висоти CF.

2.8. Рівняння бісектриси AK.

2.9. Координати центра та радіус описаного навколо трикутника кола.

2.10. Координати точки перетину медіани BT та прямої, що проходить через точку C паралельно AB.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 2 та 18 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $5x - y - 4 = 0$ та $4x + 6y - 3 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1,6), B(4,5), C(5,0), D(1,-4)$ є трапеція.

6. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$ з завдання 5.

7. Знайти площу трапеції $ABCD$ із завдання 5.

8. Знайти відстань між прямими $8x - 5y + 3 = 0$ та $8x - 5y + 7 = 0$.

9. Відомі рівняння сторони AB трикутника ABC і рівняння двох його висот (BH) $5x - 4y - 12 = 0$ і (AM) $x + y - 6 = 0$. Знайти рівняння двох інших сторін трикутника.

Розділ 5 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розділ 5 Збірника присвячений темі «Аналітична геометрія на площині. Криві другого порядку». Для успішного розв'язання пропонуємо читачеві звернутися до відповідного розділу 2.3 підручника і повторити необхідний теоретичний матеріал.

Приклади розв'язання типового варіанта

1. Дано рівняння кола: $(x-7)^2+(y+2)^2=32$. Знайти координати центра та радіус кола.

Розв'язання. За рівнянням (2.31) маємо:
- ✓ координати центра: $O(7,-2)$;
- ✓ радіус $R=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ (од.).

2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

Розв'язання. З рівняння (2.33) відповідно до визначення:
- ✓ велика вісь $2a=2\cdot 4=8$;
- ✓ мала вісь $2b=2\sqrt{7}$.

Звідси координати вершин: $A_1(-8{,}0)$, $A_2(8{,}0)$, $B_1\left(0,-2\sqrt{7}\right)$, $B_2\left(0{,}2\sqrt{7}\right)$.

Щоб записати координати фокусів, скористаємося основною тотожністю для еліпса і знайдемо параметр c:

$$b^2=a^2-c^2; \quad \Rightarrow \quad c^2=a^2-b^2=16-7=9; \quad c=3.$$

Маємо координати фокусів: $F_1(-3{,}0)$; $F_2(3{,}0)$.

За формулою (2.34) знаходимо ексцентриситет еліпса:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}.$$

Рівняння директрис (2.35) мають вигляд:

$$x = \pm d, \text{ де } d = \frac{a}{e} = \frac{4}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{3}, \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\frac{16}{3}.$$

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{5} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

Розв'язання. З рівняння (2.38) відповідно до визначення:

- ✓ дійсна вісь $2a = 2 \cdot \sqrt{8} = 4\sqrt{2}$;
- ✓ умовна вісь $2b = 2\sqrt{5}$.

Звідси координати вершин: $A_1\left(-4\sqrt{2}, 0\right)$, $A_2\left(4\sqrt{2}, 0\right)$.

Щоб записати координати фокусів, скористаємося основною тотожністю для гіперболи і знайдемо параметр c:

$$b^2 = c^2 - a^2; \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 = 8 + 5 = 13; \quad c = \sqrt{13}.$$

Маємо координати фокусів: $F_1\left(-\sqrt{13}, 0\right)$; $F_2\left(\sqrt{13}, 0\right)$.

За формулою (2.40) знаходимо ексцентриситет гіперболи:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{2}}.$$

Рівняння директрис (2.41) мають вигляд:

$$x = \pm d, \text{ де } d = \frac{a}{e} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{2}}} = \frac{8}{\sqrt{13}}, \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\frac{8}{\sqrt{13}}.$$

Рівняння асимптот гіперболи запишемо, скориставшись формулою (2.39):

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}x.$$

4. Дано рівняння параболи: $y^2 = 8x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

Розв'язання. З рівняння (2.44) відповідно до визначення знаходимо параметр параболи:

$$2p = 8; \quad \Rightarrow \quad p = 4.$$

Фокус має координату $F\left(\frac{p}{2}, 0\right), \quad \Rightarrow \quad F(2{,}0)$. А рівняння директриси має вигляд:

$$x = -\frac{p}{2}; \quad \Rightarrow \quad x = -2.$$

5. Дано рівняння кола: $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 12$. Визначити положення точки $A(2, -7)$ відносно кола: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?

Розв'язання. Підставимо координати точки A у рівняння кола:

$$(2-3)^2 + (-7+4)^2 = 1 + 9 = 10 < 12.$$

Звідси прямує, що точка лежить у середині кола. Якщо б тотожність виконувалася, це б означало, що точка належить колу. У тому ж випадку, коли між лівою та правою частинами рівняння ми б були вимушені поставити знак «>», з цього б прямувало, що точка лежить поза колом.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB: $A(3{,}8)$, $B(-5{,}12)$.

Розв'язання. Щоб записати рівняння кола, необхідно визначити координати центра та радіус кола. За визначенням, центр кола поділяє будь-який з його діаметрів навпіл, тому знайдемо координати центра кола як координати середини відрізка AB (2.6), (2.7):

$$x = \frac{3-5}{2} = -1; \quad y = \frac{8+12}{2} = 10. \quad \Rightarrow \quad O_1(-1{,}10).$$

А радіус знайдемо як довжину відрізка AO_1 (2.1):

$$R = AO_1 = \sqrt{(-1-3)^2 + (10-8)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Отже, канонічне рівняння кола (2.31) має вигляд:

$$(x+1)^2 + (y-10)^2 = 20.$$

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що лівий фокус має координату $F_1(-1{,}0)$, а точка $D\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ належить еліпсу.

Розв'язання. Канонічне рівняння еліпса (2.33) має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

З умови, що точка D належить еліпсу, прямує, що її координати задовольняють рівнянню еліпса:

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2} = 1.$$

Згадаємо основну тотожність для еліпса:

$$b^2 = a^2 - c^2; \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2; \quad a^2 - b^2 = 1.$$

Отже маємо систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \\ a^2 - b^2 = 1 \end{cases}.$$

Розв'яжемо її, щоб знайти довжини великої та малої осей:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + 1 \\ \frac{3}{b^2+1} + \frac{3}{4b^2} = 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} a^2 = b^2 + 1 \\ 12b^2 + 3b^2 + 3 = 4b^4 + 4b^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + 1 \\ 4b^4 - 11b^2 - 3 = 0 \end{cases}; \quad b^2 = \left[\begin{matrix} -1 & \text{не задов.} \\ 3 & \end{matrix}\right. . \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b^2 = 3 \\ a^2 = 3 + 1 = 4 \end{cases}.$$

Шукане рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її ексцентриситет дорівнює $\frac{7}{5}$, а відстань від вершини до найближчого фокуса дорівнює 2.

Розв'язання. Канонічне рівняння гіперболи має вигляд (2.38):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Щоб знайти величини дійсної та умовної півосей, складемо за умовою систему:

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{7}{5} \\ c - a = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} c = a + 2 \\ \frac{a+2}{a} = \frac{7}{5} \end{cases}; \quad \begin{cases} c = a + 2 \\ 5a + 10 = 7a \end{cases}; \quad \begin{cases} c = 5 + 2 = 7 \\ a = 5 \end{cases}.$$

Скористаємося основною тотожністю для гіперболи і знайдемо умовну піввісь: $b^2 = c^2 - a^2 = 49 - 25 = 24$.

Остаточно маємо:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1.$$

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = -\frac{3}{5}$.

Розв'язання. З рівняння директриси робимо висновок, що парабола симетрична відносно осі ординат, тож її рівняння має вигляд (2.45):

$$x^2 = 2py.$$

З рівняння директриси знаходимо параметр параболи:

$$y = -\frac{p}{2}; \quad -\frac{p}{2} = -\frac{3}{5}; \quad \Rightarrow \quad p = \frac{6}{5}.$$

Отже, шукане рівняння параболи:

$$x^2 = \frac{12}{5}y.$$

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $4x^2 + 4y^2 + 8x - 10y - 1 = 0$.

Розв'язання. За визначенням 2.2 будь-яке рівняння другого ступеня (2.10) описує криву другого порядку. Проаналізувавши відомі нам канонічні рівняння кола, еліпса, гіперболи, параболи, зробимо висновок, що загальне рівняння (2.30) відповідає:

- ✓ колу, якщо коефіцієнти $A = B,\ C = 0$;
- ✓ еліпсу, якщо $A \neq B,\ C = 0$, A і B одного знака;
- ✓ гіперболі, якщо $A \neq B,\ C = 0$, A і B різних знаків;
- ✓ параболі або $A = 0$, або $B = 0$.

Отже, ми маємо загальне рівняння кола. Щоб привести його до канонічного вигляду, виділимо повний квадрат (за допомогою формул квадрат суми, квадрат різниці):

$$4x^2 + 8x = 4(x^2 + 2x) = 4\big((x^2 + 2x + 1) - 1\big) = 4(x + 1)^2 - 4$$

$$4y^2 - 10y = 4\left(y^2 - \frac{5}{2}y\right) = 4\left(\left(y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right) - \frac{25}{16}\right) =$$

$$= 4\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{4};$$

підставимо у рівняння

$$4(x + 1)^2 - 4 + 4\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{4} - 1 = 0;$$

$$4(x + 1)^2 + 4\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{45}{4}\Bigg|\ : 4;$$

$$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{45}{16}.$$

Звідси координати центра кола: $O_1\left(-1, \frac{5}{4}\right)$, а радіус $R = \frac{3\sqrt{5}}{4}$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(3, -4)$ і $B(1,3)$ дорівнює 2. Зробити креслення.

Розв'язання. Будь-яка точка M кривої має координати $M(x, y)$. Складемо рівняння за умовою:

$$\frac{AM}{BM} = 2.$$

$$AM = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2};\quad BM = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}}{\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}} = 2.$$

Виконаємо необхідні перетворення:

$$(x-3)^2+(y+4)^2=4((x-1)^2+(y-3)^2);$$

$$x^2-6x+9+y^2+8y+16=4x^2-8x+4+4y^2-24y+36;$$

$$3x^2+3y^2-2x-32y+15=0.$$

Ми отримали загальне рівняння кривої другого порядку. У задачі 10 ми провели його аналіз, отже можемо зробити висновок, що шукана крива - коло. Приведемо його рівняння до канонічного вигляду:

$$3x^2+3y^2-2x-32y+15=0| \ :3;$$

$$x^2+y^2-\frac{2}{3}x-\frac{32}{3}y+5=0;$$

$$\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{9}+\left(y^2-\frac{32}{3}y+\frac{256}{9}\right)-\frac{256}{9}+5=0;$$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{16}{3}\right)^2=\frac{212}{9}.$$

Звідси координати центра кола: $O_1\left(\frac{1}{3},\frac{16}{3}\right)$, а радіус $R=\frac{2\sqrt{53}}{3}$. Ескіз кривої подано на рисунку 5.1

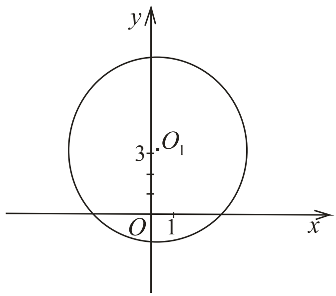

Рисунок 5.1 -Коло

Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів

Завдання 5.1

1. Дано рівняння кола: $(x-3)^2+(y+8)^2=49$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{4}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2=9x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння кола: $x^2+(y+7)^2=15$. Визначити положення точки $A(-5{,}3)$ відносно кола: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомо, що його центр знаходиться в точці $A(-2{,}9)$, а радіус дорівнює 7.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що його мала вісь дорівнює 6, а один з фокусів має координати $F(-4{,}0)$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її дійсна піввісь дорівнює 3 і точка $A\left(6,\ 4\sqrt{3}\right)$ належить гіперболі.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x=\frac{7}{4}$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $9x^2+4y^2+6x-4y-2=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(-3{,}2)$ на відстані, в три рази більше, ніж від прямої $y=1$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Коло. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.2

1. Дано рівняння кола: $(x+5)^2+(y-1)^2=13$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{15}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $x^2=8y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$. Визначити положення точки $A\left(0,\sqrt{3}\right)$ відносно еліпса: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB: $A(-6,11)$, $B(2,-9)$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 16 і точка $D\left(8,\frac{18}{5}\right)$ належить еліпсу.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її уявна піввісь дорівнює 3 і ексцентриситет дорівнює $\frac{5}{4}$.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y=-\frac{5}{3}$.

10. Визначити тип кривої другого порядку, привести до канонічного вигляду рівняння: $9x^2-16y^2-6x+8y-144=$ $=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(1,-4)$ на відстані, в два рази менше, ніж від прямої $x=-3$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Еліпс. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.3

1. Дано рівняння кола: $(x-8)^2+(y-5)^2=29$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{9}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2=3x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$. Визначити положення точки $A(4,-7)$ відносно гіперболи.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(5,-11)$ і радіус $R=13$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет дорівнює $\frac{\sqrt{56}}{9}$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що один з фокусів має координати $F(5,0)$, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{4}{3}$.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x=7$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $7x^2+7y^2-2x-7y-1=$ $=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(2,5)$ і $B(-3,4)$ дорівнює 34. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Гіпербола. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.4

1. Дано рівняння кола: $(x+1)^2+(y-7)^2=49$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{12}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $x^2=5y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння параболи: $y^2=\frac{3}{2}x$. Визначити положення точки $A(6,-3)$ відносно параболи.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів: $A(2,5), B(-3,12)$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює $\frac{3}{5}$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M(7\sqrt{2},5)$ належить гіперболі, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{5}{7}$.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y=-\frac{3}{8}$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $12x^2-12x-32y-29=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(-2,7)$ і $B(5,9)$ дорівнює $\frac{3}{2}$. Зробити малюнок.

12. *Теоретичне питання.* Парабола. Визначення, характеристики, малюнок.

Завдання 5.5

1. Дано рівняння кола: $x^2 + (y+3)^2 = 28$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{8} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{5} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -\frac{7}{3}x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння кола: $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 43$. Визначити положення точки $A(7,15)$ відносно кола.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(-4,8)$ і радіус $R = 12$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика піввісь дорівнює 5, а ексцентриситет дорівнює $\frac{3}{5}$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M\left(9\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right)$ належить гіперболі, а уявна вісь дорівнює 4.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -\frac{2}{9}$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $2x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M відстоїть від точки $A(3,-4)$ на відстані у двічі більше ніж від прямої $y=5$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Рівняння дотичних до кривих другого порядку.

Завдання 5.6

1. Дано рівняння кола: $(x+11)^2+(y-7)^2=12$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{29}+\frac{y^2}{16}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{81}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $x^2=\frac{6}{5}y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{2}=1$. Визначити положення точки $A(0,3)$ відносно еліпса.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB: $A(5,3)$ і $B(-7,-1)$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 10, а ексцентриситет дорівнює $\frac{5}{13}$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює $2\sqrt{74}$, а уявна вісь - 10.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата її фокуса $F(0,-7)$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $45x^2-36y^2-90x-24y+41=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M відстоїть від точки $A(2,1)$ на відстані у п’ять разів менше ніж від прямої $x = -4$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Коло. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.7

1. Дано рівняння кола: $(x-1)^2 + (y+11)^2 = 33$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{19} - \frac{y^2}{36} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -4x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{12} = 1$. Визначити положення точки $A(5,-6)$ відносно гіперболи.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра кола $A(-7,-9)$ і його радіус $R = 17$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика піввісь дорівнює 13, а відстань між фокусами дорівнює 24 одиницям.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що ексцентриситет дорівнює $\frac{5}{3}$, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{4}{3}$.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата її фокуса $F(3,0)$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точок $A(-1,-5)$ і $B(-3,4)$ дорівнює 26. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Еліпс. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.8

1. Дано рівняння кола: $(x-5)^2+(y-6)^2=29$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{56}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{12}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $x^2=-12y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння параболи: $y^2=\frac{13}{7}x$.
Визначити положення точки $A(7,-5)$ відносно параболи.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB: $A(2,-7)$ і $B(5,14)$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика вісь дорівнює 14, а точка $M\left(\frac{7}{\sqrt{3}},4\right)$ належить еліпсу.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що уявна вісь дорівнює 24, а ексцентриситет $e=\frac{13}{5}$.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата її фокуса $F(\frac{5}{2},0)$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $y^2-4x+4y+16=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(9{,}0)$ і $B(-5{,}3)$ дорівнює $\frac{4}{3}$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Гіпербола. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.9

1. Дано рівняння кола: $(x+13)^2+(y-1)^2=47$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{58}+\frac{y^2}{9}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2=\frac{3}{13}x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$. Визначити положення точки $A(-2{,}10)$ відносно еліпса.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра $A(14{,}0)$ і радіус $R=2\sqrt{7}$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 3, а ексцентриситет $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що дійсна вісь дорівнює 8, а точка $M\left(4\sqrt{3},9\sqrt{2}\right)$ належить гіперболі.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата її фокуса $F(0,-17)$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $x^2-4y^2+8x-24y-24=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від прямої $x = -4$ на відстані в чотири рази більше ніж від точки $A(-2,6)$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Парабола. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.10

1. Дано рівняння кола: $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 82$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{5} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{22} - \frac{y^2}{3} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $x^2 = -\frac{7}{5}y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{14} = 1$. Визначити положення точки $A(5,3)$ відносно гіперболи.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB: $A(-9,13), B(15,-4)$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика вісь дорівнює 10, а точка $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$ належить еліпсу.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що уявна піввісь дорівнює 4, а ексцентриситет $e = \frac{5}{3}$.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відоме рівняння директриси $x = \frac{11}{2}$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $x^2 + 4x + 2y + 4 = 0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(9,5)$ і $B(-3,12)$ дорівнює 37. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Рівняння дотичних до кривих другого порядку.

Завдання 5.11

1. Дано рівняння кола: $(x+2)^2+y^2=19$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{19}+\frac{y^2}{3}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{20}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2=5{,}2x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння параболи: $x^2=-\frac{7}{4}y$. Визначити положення точки $A\left(-\sqrt{14},-8\right)$ відносно параболи.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра $A(16,-5)$ і радіус кола $R=5\sqrt{3}$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика вісь дорівнює 14, а ексцентриситет $e=\frac{2\sqrt{6}}{7}$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{3}{4}$, а ексцентриситет $e=\frac{5}{4}$.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата фокуса $F(-6,0)$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $x^2+4y^2-4x+8y+7=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(-3,-2)$ і $B(-1{,}5)$ дорівнює $\frac{1}{5}$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Коло. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.12

1. Дано рівняння кола: $(x-8)^2+(y-3)^2=43$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{39}+\frac{y^2}{3}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $x^2=13y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння кола: $(x-1)^2+(y+3)^2=15$. Визначити положення точки $A(-4{,}1)$ відносно кола.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з діаметрів кола AB: $A(-4{,}9), B(11,-15)$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 6, а ексцентриситет $e=\frac{4}{5}$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{5}{7}$ і точка $M\left(7\sqrt{2},5\right)$ належить гіперболі.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відоме рівняння директриси $y=-\frac{3}{11}$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $x^2-2y^2-6x+4y+1=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої віддалена від прямої $x = -5$ на відстані в чотири рази менше ніж від точки $A(-6,0)$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Еліпс. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.13

1. Дано рівняння кола: $(x+6)^2 + (y-12)^2 = 11$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{2} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -\frac{3}{7}x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{7} = 1$. Визначити положення точки $A(0,7)$ відносно еліпса.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра $A(-10,7)$ і радіус $R = \sqrt{5}$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 12 і точка $A(-5,4\sqrt{3})$ належить еліпсу.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що уявна піввісь дорівнює 12, а відстань між фокусами дорівнює 26.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відоме рівняння директриси $x = 7{,}3$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $x^2 + y^2 - 16x - 36y + 75 = 0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(7,1)$ і $B(2,-5)$ дорівнює $\frac{1}{6}$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Рівняння дотичних до кривих другого порядку.

Завдання 5.14

1. Дано рівняння кола: $(x-9)^2+(y-1)^2=99$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{13}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{37}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $x^2=\frac{6}{11}y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$. Визначити положення точки $A\left(-6\sqrt{5},4\right)$ відносно гіперболи.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з діаметрів кола AB: $A(0,18), B(-7,13)$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 24, а ексцентриситет $e=\frac{5}{13}$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що дійсна вісь дорівнює 18, а точка $A\left(9\sqrt{3},2\sqrt{2}\right)$ належить гіперболі.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата фокуса $F(0,-15)$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $x^2+10x-7y+53=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від прямої $x = -2$ на відстані в сім разів більше ніж від точки $A(-5{,}8)$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Гіпербола. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.15

1. Дано рівняння кола: $(x + 14)^2 + (y - 5)^2 = 63$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{18} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -\frac{17}{2}x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння параболи: $(x + 5)^2 = 12y + 1$. Визначити положення точки $A(-10{,}2)$ відносно параболи.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра $A(19, -3)$ і радіус кола $R = 7$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 3, а точка $M\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}, 1\right)$ належить еліпсу.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 10, а кутовий коефіцієнт асимптоти гіперболи $k = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата фокуса $F(9{,}0)$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння:

$$3x^2 + 5y^2 + 54x - 40y + 308 = 0.$$

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(3,3)$ і $B(-7,6)$ дорівнює 38. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Парабола. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.16

1. Дано рівняння кола: $(x+6)^2+(y-19)^2=20$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{36}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $x^2=8y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння кола: $(x-4)^2+(y-7)^2=15$. Визначити положення точки $A(5,12)$ відносно кола.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного із діаметрів кола $AB: A(13,1), B(-19,8)$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 8, а відстань між фокусами дорівнює 6.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що дійсна піввісь дорівнює $2\sqrt{5}$, а ексцентриситет $e=\sqrt{1,2}$

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відоме рівняння директриси $y=4,7$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду рівняння: $3x^2-2y^2-42x-8y+12=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(-8,-3)$ і $B(2,5)$ дорівнює $\frac{3}{4}$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Еліпс. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.17

1. Дано рівняння кола: $(x+3)^2+(y+17)^2=5$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{441}+\frac{y^2}{81}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{55}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2=-3{,}5x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{12}=1$. Визначити положення точки $A(-1,-6)$ відносно еліпса.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра $A(8,-13)$ і радіус кола $R=\sqrt{11}$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що ексцентриситет дорівнює $\frac{3}{4}$, а точка $M\left(-4,\sqrt{21}\right)$ належить еліпсу.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що відстань між вершинами дорівнює 8, а відстань між фокусами – 10.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомі координати фокуса $F(17{,}0)$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $y^2-7x+18y+102=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(5,-9)$ на відстані у шість разів більше ніж від прямої $y=-3$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Гіпербола. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.18

1. Дано рівняння кола: $(x-7)^2+(y+3)^2=40$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2=8x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння кола: $(x+2)^2+(y-3)^2=74$. Визначити положення точки $A(5,-2)$ відносно кола: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомо, що його центр знаходиться в точці $A(3,8)$, а радіус дорівнює 6.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що його мала вісь дорівнює 5, а один з фокусів має координати $F(-3,0)$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її уявна піввісь дорівнює 3 і точка $A(7,\ 9)$ належить гіперболі.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x=-\frac{3}{5}$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $9x^2+y^2+6x-4y-7=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(5,-4)$ на відстані, в три рази більше, ніж від прямої $y=2$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Коло. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.19

1. Дано рівняння кола: $(x-4)^2+(y-7)^2=3$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{14}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{5}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $x^2=-3y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1$. Визначити положення точки $A\left(0,\sqrt{7}\right)$ відносно еліпса: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного із його діаметрів AB: $A(-9,12)$, $B(5,-4)$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 12 і точка $D(5,3)$ належить еліпсу.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її дійсна піввісь дорівнює 10 і ексцентриситет дорівнює $\frac{8}{5}$.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y=\frac{5}{2}$.

10. Визначити тип кривої другого порядку, привести до канонічного вигляду її рівняння: $4x^2-y^2-4x+8y-16=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(-2,3)$ на відстані, в два рази менше, ніж від прямої $x=5$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Еліпс. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.20

1. Дано рівняння кола: $(x+3)^2+(y-4)^2=11$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{16}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{12}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2=-6x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$. Визначити положення точки $A(5,-8)$ відносно гіперболи.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(6,-3)$ і радіус $R=\sqrt{5}$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 16, а ексцентриситет дорівнює $\frac{7}{8}$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що один з фокусів має координати $F(-8,0)$, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{3}{5}$.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x=-2$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $5x^2+5y^2-2x+4y-13=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(1,5)$ і $B(-2,3)$ дорівнює 7. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Гіпербола. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.21

1. Дано рівняння кола: $(x+10)^2+(y-2)^2=35$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{12}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{9}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $x^2=-8y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння параболи: $y^2=\frac{7}{4}x$. Визначити положення точки $A(6,-3)$ відносно параболи.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного із його діаметрів: $A(6,3), B(4,-9)$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 7, а ексцентриситет дорівнює $\frac{2}{5}$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M(8,-3)$ належить гіперболі, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{3}{2}$.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y=\frac{5}{8}$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $2x^2-2x-32y-95=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(3,-7)$ і $B(2,6)$ дорівнює 5. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Парабола. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.22

1. Дано рівняння кола: $(x-9)^2+(y-7)^2=19$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{12}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{15}=1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2=\frac{6}{5}x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння кола: $(x+3)^2+(y+10)^2=8$. Визначити положення точки $A(-5,-8)$ відносно кола.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(-3,11)$ і радіус $R=15$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика піввісь дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює $\frac{7}{4}$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M(7,-2)$належить гіперболі, а уявна вісь дорівнює 4.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x=\frac{2}{15}$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $4x^2+y^2+4x-8y-4=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M відстоїть від точки $A(-7,-1)$ на відстані у двічі більше ніж від прямої $y=-2$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Рівняння дотичних до кривих другого порядку.

Завдання 5.23

1. Дано рівняння кола: $(x-4)^2+(y+5)^2=103$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{4}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2=-3x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння кола: $x^2+(y-6)^2=33$. Визначити положення точки $A(-5{,}3)$ відносно кола: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомо, що його центр знаходиться в точці $A(-5{,}12)$, а радіус дорівнює 14.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що його мала вісь дорівнює 8, а один з фокусів має координати $F(-6{,}0)$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її дійсна піввісь дорівнює 7 і точка $A\left(\sqrt{7},6\right)$ належить гіперболі.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x=-4$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $x^2+4y^2+8x-4y-12=$ $=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(-5{,}1)$ на відстані, в три рази більше, ніж від прямої $y=3$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Коло. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.24

1. Дано рівняння кола: $(x-5)^2+(y+7)^2=16$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{16}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{45}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $x^2=-12y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{13}=1$. Визначити положення точки $A\left(0,\sqrt{3}\right)$ відносно еліпса: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного із його діаметрів AB: $A(-10,7)$, $B(2,3)$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 14 і точка $D(7,2)$ належить еліпсу.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її уявна піввісь дорівнює 8 і ексцентриситет дорівнює $\frac{7}{5}$.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y=\frac{5}{6}$.

10. Визначити тип кривої другого порядку, привести до канонічного вигляду рівняння: $16x^2-9y^2-16x+6y-25=$ $=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(-1,-2)$ на відстані, в два рази менше, ніж від прямої $x=-5$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Еліпс. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.25

1. Дано рівняння кола: $(x-1)^2+(y-7)^2=79$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{6}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2=-5x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{9}=1$. Визначити положення точки $A(4,-7)$ відносно гіперболи.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(-3,-2)$ і радіус $R=5$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що один з фокусів має координати $F(-6,0)$, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{3}{5}$.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x=-10$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $2x^2+2y^2-4x-6y-5=$ $=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-2,5)$ і $B(3,1)$ дорівнює 22. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Гіпербола. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.26

1. Дано рівняння кола: $(x+2)^2+(y+3)^2=14$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{10}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $x^2=-6y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння параболи: $y^2=\frac{3}{8}x$. Визначити положення точки $A(4,-2)$ відносно параболи.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів: $A(12,-5), B(-4,-3)$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 10, а ексцентриситет дорівнює $\frac{5}{6}$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M(\sqrt{3},-2)$ належить гіперболі, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{4}{3}$.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y=\frac{5}{9}$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $6x^2-6x-12y-19=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(-2,-3)$ і $B(-4,1)$ дорівнює $\frac{5}{2}$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Парабола. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.27

1. Дано рівняння кола: $x^2 + (y - 11)^2 = 8$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{4} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2 = \frac{5}{21}x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння кола: $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 22$. Визначити положення точки $A(7, -3)$ відносно кола.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(-1,9)$ і радіус $R = 16$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика піввісь дорівнює 14, а ексцентриситет дорівнює $\frac{3}{7}$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M\left(-5, -2\sqrt{2}\right)$належить гіперболі, а уявна вісь дорівнює 4.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -\frac{7}{8}$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $x^2 + 2y^2 + 4x - 6y - 10 = 0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M відстоїть від точки $A(3, -5)$ на відстані у двічі більше ніж від прямої $y = -2$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Рівняння дотичних до кривих другого порядку.

Завдання 5.28

1. Дано рівняння кола: $(x-13)^2+(y-2)^2=53$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{45}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{75}-\frac{y^2}{64}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2=-8x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння кола: $x^2+(y-9)^2=24$. Визначити положення точки $A(5,-3)$ відносно кола: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомо, що його центр знаходиться в точці $A(9,1)$, а радіус дорівнює 13.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що його мала вісь дорівнює 4, а один з фокусів має координати $F(-5,0)$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її дійсна піввісь дорівнює 5 і точка $A\left(-5,\ 4\sqrt{2}\right)$ належить гіперболі.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x=-\frac{9}{4}$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $4x^2+9y^2+8x-6y-5=$ $=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(-1,1)$ на відстані, в три рази більше, ніж від прямої $y=-5$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Коло. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.29

1. Дано рівняння кола: $(x-5)^2+(y-7)^2=23$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{8}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{39}-\frac{y^2}{45}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $x^2=-13y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{24}=1$. Визначити положення точки $A\left(-3,\sqrt{6}\right)$ відносно еліпса: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB: $A(-8,1)$, $B(-2,9)$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 14 і точка $D(3,-1)$ належить еліпсу.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її уявна піввісь дорівнює 8 і ексцентриситет дорівнює $\frac{9}{4}$.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y=-12$.

10. Визначити тип кривої другого порядку, привести до канонічного вигляду її рівняння: $9x^2-y^2-6x+10y-48=0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(1,3)$ на відстані, в два рази менше, ніж від прямої $x=-2$. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Еліпс. Визначення, характеристики, рисунок.

Завдання 5.30

1. Дано рівняння кола: $(x-12)^2+(y-3)^2=9$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{42}+\frac{y^2}{25}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{16}=1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2=7x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{15}=1$. Визначити положення точки $A(4,3)$ відносно гіперболи.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(-9,-3)$ і радіус $R=11$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що один з фокусів має координати $F(-5,0)$, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{5}{2}$.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x=-14$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $x^2+y^2-12x-4y-17==0$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-2,-3)$ і $B(-3,5)$ дорівнює 21. Зробити рисунок.

12. *Теоретичне питання.* Гіпербола. Визначення, характеристики, рисунок.

Розділ 6 ГРАНИЦІ

У цьому розділі ми познайомимося з границями. Навчимося їх обчислювати, позбавлятися від невизначеностей. Для роботи над запропонованими прикладами, радимо повторити теорію границь (розділ 3.2 підручника).

Приклади розв'язання типового варіанта

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to -4}\frac{2x^3-x^2+8x-3}{3x^2-7x-45}$.

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію:

$$\lim_{x\to -4}\frac{2x^3-x^2+8x-3}{3x^2-7x-45}=\frac{2(-4)^3-(-4)^2+8\cdot(-4)-3}{3(-4)^2-7\cdot(-4)-45}=$$
$$=\frac{-128-16-32-3}{48+28-45}=-\frac{179}{31}.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $-\frac{179}{31}$.

2. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^3-8}$.

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left|\frac{0}{0}\right|$, функція подана у вигляді відношення многочленів, отже за правилом зі сторінки 106, розкладемо многочлени на множники, скоротимо й отримаємо результат:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^3-8}=\left|\frac{4-6+2}{8-8}\right|=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)}{(x^2+2x+4)}=\frac{2-1}{4+4+4}=\frac{1}{12}.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{1}{12}$.

3. $\lim_{x\to \infty}\frac{7x^3-6x+4}{2x^3-x^2-5}$.

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, функція подана у вигляді відношення многочленів, отже за правилом зі сторінки 107, скоротимо чисельник та знаменник на найбільший степінь - x^3. Скористаємося таблицею 3.2, маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-6x+4}{2x^3-x^2-5}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{7-\frac{6}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{2-\frac{1}{x}-\frac{5}{x^3}}=\frac{7}{2}.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{7}{2}$.

4. $\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^3+3x^2-9}{5x^8-4x^5-13x}$.

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, функція подана у вигляді відношення многочленів, отже за правилом зі сторінки 107, скоротимо чисельник та знаменник на найбільший степінь - x^8. Скористаємося таблицею 3.2, маємо:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^3+3x^2-9}{5x^8-4x^5-13x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{8}{x^5}+\frac{3}{x^6}-\frac{9}{x^8}}{5-\frac{4}{x^3}-\frac{13}{x^7}}=\frac{0}{5}=0.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює 0.

5. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+2x+11}{x^2-3x-9}$.

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, функція подана у вигляді відношення многочленів, отже за правилом зі сторінки 107, скоротимо чисельник та знаменник на найбільший степінь - x^4. Скористаємося таблицею 3.2, маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+2x+11}{x^2-3x-9}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{2}{x^3}+\frac{11}{x^4}}{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}-\frac{9}{x^2}}=\frac{4}{0}=\infty.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює ∞.

6. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^5+3x}-3\sqrt[7]{x^9}}{\sqrt[9]{x^{13}+5x}-6\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, отже за формулою (3.9), нам достатньо порівняти максимальні степені чисельника і знаменника:

- ✓ в чисельнику $\frac{5}{2}$ і $\frac{9}{7}$;
- ✓ в знаменнику $\frac{13}{9}$ і $\frac{1}{3}$.

Максимальний степінь $\frac{5}{2}$ - у чисельнику, тому за формулою (3.9), функція прямує до нескінченності.

Відповідь. Границя функції дорівнює ∞.

7. $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x^2-x-6}$.

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left|\frac{0}{0}\right|$, функція має ірраціональність, тому за правилом зі сторінки 109, позбавимося ірраціональності в чисельнику розкладемо знаменник на множники, скоротимо отриманий вираз на $(x-3)$, маємо:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x^2-x-6}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x^2-5}-2\right)\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}{(x-3)(x+2)\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5-4}{(x-3)(x+2)\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(x+2)\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=\frac{3+3}{(2+3)\cdot\left(\sqrt{3^2-5}+2\right)}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{3}{10}$.

8. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 7x}{9x^2}$.

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left|\frac{0}{0}\right|$; функція тригонометрична, тому для позбавлення невизначеності необхідно скористатися першою чудовою границею (3.10). Для того, щоб функцію, границю якої ми обчислюємо, звести до першої чудової границі, необхідно виконати певні перетворення, а саме: скористатися формулою різниці косинусів:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 7x}{9x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{3x+7x}{2}\sin\frac{3x-7x}{2}}{9x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 5x\sin 2x}{9x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin 5x\cdot\sin 2x\cdot 5\cdot 2}{9\cdot 5x\cdot 2x}=\frac{2\cdot 5\cdot 2}{9}=\frac{20}{9}.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{20}{9}$.

9. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{ctg}x}{\pi-2x}$.

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left|\frac{0}{0}\right|$; функція тригонометрична, тому для позбавлення невизначеності необхідно скористатися першою чудовою границею (3.10). Проте першою чудовою границею ми можемо скористатися лише в тому випадку, коли аргумент прямує до нуля. Тому спочатку зробимо заміну змінної, а далі, скориставшись формулами зведення, тригонометричними тотожностями, зведемо границю до першої чудової:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{ctg}x}{\pi-2x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\begin{bmatrix}y=\frac{\pi}{2}-x\\ x=\frac{\pi}{2}-y\\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}y}{2y}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\cos y\cdot y}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{1}{2}$.

10. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x+4}{6x-3}\right)^{5x-1}$.

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $|1^{\infty}|$. Саме друга чудова границя допоможе нам впоратися з цією проблемою. Виконаємо необхідні перетворення:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x+4}{6x-3}\right)^{5x-1} = |1^{\infty}| = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6x+4}{6x-3}-1\right)^{5x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6x+4-6x+3}{6x-3}\right)^{5x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{6x-3}\right)^{5x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{7}{6x-3}\right)^{\frac{6x-3}{7}}\right)^{\frac{7}{6x-3}\cdot(5x-1)} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{7(5x-1)}{6x-3}} = e^{\frac{35}{6}}.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $e^{\frac{35}{6}}$.

11. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x-3}{3x+2}\right)^{4x+5}$.

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію. Бачимо, незважаючи на те, що функція, границю якої ми обчислюємо, за структурою нам нагадує приклад 10, ніякої невизначеності тут нема, тому що дріб прямує до $\frac{8}{3}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x-3}{3x+2}\right)^{4x+5} = \left(\frac{8}{3}\right)^{\infty} = \infty.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює ∞.

12. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+5x}-1}{12x}$.

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left|\frac{0}{0}\right|$. Зведемо функцію до вигляду (3.14) й скористаємося теоремою 3 з теми «Три чудових границі»:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+5x}-1}{12x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(1+5x)^{\frac{1}{7}}-1}{12x}=$$

$$=\frac{5}{12}\lim_{x\to 0}\frac{(1+5x)^{\frac{1}{7}}-1}{5x}=\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{7}=\frac{5}{84}.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{5}{84}$.

Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів

Завдання 6.1

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to 5}\frac{x^3+3x^2-14x+7}{2x^2+7x+13}$;
2. $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}$;
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-7x-1}{5x^2+4x+12}$;
4. $\lim_{x\to \infty}\frac{x^4-3x^2+4x}{4x^3+2x^2-6}$;
5. $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2-6x-13}{5x^3+4x-7}$;
6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^3+x}-2x}$;
7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$;
8. $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{4x^2}$;
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-sinx}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$;
10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2x+1}{2x-7}\right)^{3x+4}$;
11. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{4x+2}{3x-7}\right)^{2x+5}$;
12. $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+4x)}{5x}$.

Завдання 6.2

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to -4}\frac{2x^2+6x-15}{x^3-3x^2+7}$;
2. $\lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^2+4x+3}$;
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{7x^3+6x+13}{x^2-2x^3+5}$;
4. $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^7-3x^5+4x^4}{6x^3+3x^2+14}$;
5. $\lim_{x\to \infty}\frac{4x^2-8x+1}{3x^4-4x^3+2x}$;
6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[5]{x^{10}+3x}+7x^2}{\sqrt[3]{x^4-7x}+2\sqrt{x}}$;
7. $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{3x+4}-4}{x^2-5x+4}$;
8. $\lim_{x\to 0}\frac{sin6x}{sin3x}$;
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)tg2x$;
10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x-5}{x+2}\right)^{x+3}$;
11. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{3x-6}{5x+4}\right)^{x-12}$;
12. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{6x}$.

Завдання 6.3

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to -2}\frac{4x^2+7x+9}{3x^4-15}$;
2. $\lim_{x\to -2}\frac{x^4-16}{x^2+x-2}$;
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{5x^2+7x+2}{3x^3+x-15}$;
4. $\lim_{x\to \infty}\frac{5x^3-6x^2+4}{2x^2-3x-17}$;
5. $\lim_{x\to \infty}\frac{2-x^3-3x^4}{2x^4+7x^3+5}$;
6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+4}+\sqrt[4]{3x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+7x^7+3}-x}$;
7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+16}-4}$;
8. $\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 3x-sin^2 x}{5x^2}$;
9. $\lim_{x\to \pi}\frac{sinx}{x^2-\pi^2}$;
10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{5x-4}{5x+3}\right)^{2x+1}$;
11. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{4x-7}{9x+2}\right)^{4x+5}$;
12. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+4x}-1}{7x}$.

Завдання 6.4

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to 7}\frac{x^2+6x-1}{3x^2+5x+14}$;
2. $\lim_{x\to \frac{1}{3}}\frac{27x^3-1}{3x^2+5x-2}$;
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{5x^2-x-12}{7x^2+3x+8}$;
4. $\lim_{x\to \infty}\frac{13x^6+2x^5-7x^3}{2x^4+4x^2+5}$;
5. $\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^3-x^2-17}{5x^4-6x^3+14x}$;
6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[4]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^3+2}}$;
7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$;
8. $\lim_{x\to 0}\frac{cos4x-cos2x}{7x^2}$;
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)tgx$;
10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x+6}{x-5}\right)^{7x-1}$;
11. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{5x-4}{3x-2}\right)^{7x+9}$;
12. $\lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{4x}$.

Завдання 6.5

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to -3}\frac{5x^3+3x^2+14}{2x^2+7x-9}$;
2. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+5x-5}{x^2+x-2}$;
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{11x^2-4x+13}{5x^3+x^2+24}$;
4. $\lim_{x\to \infty}\frac{6x^4+2x^2-7x}{3x^2+4x+8}$;
5. $\lim_{x\to \infty}\frac{4-7x+2x^3}{4x^3+6x^2+15}$;
6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+5}+\sqrt[5]{x^3+2}}{\sqrt[3]{x^7+4}}$;
7. $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-3x-10}$;
8. $\lim_{x\to 0}\frac{1-cos8x}{3x^2}$;
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-cosx}$;
10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{4x+1}{4x+3}\right)^{9x-11}$;
11. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{5x+3}{2x-1}\right)^{3x-9}$;
12. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{3x^2-5x}$.

Завдання 6.6

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to 1}\frac{21x^2+6x-17}{3x^4+9x^2+5}$;
2. $\lim_{x\to 7}\frac{x^2-9x+14}{49-x^2}$;
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{7x^2+x+8}{3x^3+2x+1}$;
4. $\lim_{x\to -\infty}\frac{9x+2x^5-7x^3}{3x^2+7x-9}$;
5. $\lim_{x\to \infty}\frac{6x-x^5+3x^2}{9x^5+4x^2+13x}$;
6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[7]{x^6+2}-\sqrt[3]{x^5+4}}{\sqrt[8]{x^4+3x}+\sqrt[3]{x^2+13}}$;
7. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{x^2-3x+2}$;
8. $\lim_{x\to 0}\frac{arcsin5x}{x^2+6x}$;
9. $\lim_{x\to \pi}\frac{1-sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}}$;
10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2x+1}{2x+4}\right)^{3x+5}$;
11. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{7x-3}{2x+5}\right)^{2x-1}$;
12. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{(1+x)^3}-1}{5x}$.

Завдання 6.7

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to -8}\frac{5x^2+4x-35}{324-x^2}$;
2. $\lim_{x\to -5}\frac{125+x^3}{x^2+8x+15}$;
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{6x^3+9x^2-4x}{5x^2-x-24}$;
4. $\lim_{x\to \infty}\frac{13x^4-3x^2-5x}{3x^2+7x-9}$;
5. $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+5x+9}{8x^3+3x^2+14x}$;
6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[5]{x^7-13}+\sqrt{x^4+9}}{2x^2-\sqrt[6]{x^5+3}}$;
7. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{4x+5}-5}$;
8. $\lim_{x\to 0}\frac{tg7x}{tg4x}$;
9. $\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$;
10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{5x+3}{5x-1}\right)^{4x+2}$;
11. $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{4x-1}{9x+13}\right)^{7x+2}$;
12. $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+8x)}{x^2+5x}$.

Завдання 6.8

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to 4}\frac{x^4-13x}{2x^2++5x-11}$;
2. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}$;
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{4x^2-5x+9}{7x^2+3x-1}$;
4. $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^5-7x^4+3x^2}{4x^3+6x+15}$;
5. $\lim_{x\to -\infty}\frac{6x^3-7x-9}{2x^4+9x^3+3x}$;
6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[6]{x^4+2}-\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt{x+7}+9x}$;
7. $\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{3x-5}-4}{x^2-49}$;
8. $\lim_{x\to 0}\frac{arctg5x}{sin4x}$;
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)tg2x$;
10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{7x+1}{7x+3}\right)^{x+2}$;
11. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{4x-8}{6x+5}\right)^{-2x+3}$;
12. $\lim_{x\to 0}\frac{6^x-2^x}{3x}$.

Завдання 6.9

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to 2}\frac{3x^3-2x^2+7x-1}{2x^4+15}$;

2. $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2+9x-5}{4x^2-1}$;

3. $\lim_{x\to-\infty}\frac{6-2x^2+x^4}{3x^4-5x^3-11x}$;

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{8x^4-4x^2-9}{3x^3+2x+11}$;

5. $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-5}{3x^4-6x^2+7}$;

6. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3+7}+4x}{\sqrt[6]{x^5+14x}-2\sqrt[9]{x^{10}}}$;

7. $\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{2x+15}-3}{x^2-x-12}$;

8. $\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2 4x}{9x^2}$;

9. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-sin2x}{\left(\frac{\pi}{4}-x\right)^2}$;

10. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x+5}{8x+3}\right)^{x-9}$;

11. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x-1}{9x+5}\right)^{x+8}$;

12. $\lim_{x\to 0}\frac{ln(3+x)-ln3}{x}$.

Завдання 6.10

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to-6}\frac{4x^3+2x+17}{3x^2-2x-11}$;

2. $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-7x+6}{x^2-5x-6}$;

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x-17}{2x^2+4x^3-5x}$;

4. $\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^7+6x^5+4x^3}{5x^4+3x-11}$;

5. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+9x+1}{x^5-6x^4+x}$;

6. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^3}+2\sqrt[4]{x^6+3x}}{\sqrt[7]{x^6+2x}+\sqrt[8]{x^9+5}}$;

7. $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x+10}-3}$;

8. $\lim_{x\to 0}\frac{6x^2+3x}{sin5x+sinx}$;

9. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{cos3x}$;

10. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x+5}\right)^{3x-1}$;

11. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x+7}{9x-3}\right)^{2-5x}$;

12. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{x}$.

Завдання 6.11

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to -5}\frac{2x^3-7x^2+3x+9}{x^2+11x+6}$;
2. $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-7x+12}{x^2-9x+20}$;
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^4-2x^2+6x}{5x^4-7x-12}$;
4. $\lim_{x\to \infty}\frac{5x^3+4x^2-7x}{2x^3+11x-3}$;
5. $\lim_{x\to \infty}\frac{7x^2+3x+2}{5x^3+2x+13}$;
6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x^3+2}}{\sqrt[4]{x^5+7x}-2x}$;
7. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\sqrt{5x-1}-3}$;
8. $\lim_{x\to 0} x\cdot tg7x$;
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)tg2x$;
10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2x-1}{2x-5}\right)^{7x+5}$;
11. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{5x-4}{3x-2}\right)^{8x+9}$;
12. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{(1+2x)^3}-1}{5x}$.

Завдання 6.12

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to 3}\frac{17-6x^2+3x^4}{x^2-9x-1}$;
2. $\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-9x+2}{x^2-4}$;
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{x^4-2x^3+19x}{9x^4-x+15}$;
4. $\lim_{x\to \infty}\frac{4x^5+2x^3-7x}{2x^3+3x-11}$;
5. $\lim_{x\to -\infty}\frac{10x^2+6x+5}{x^7+3x^2+4x}$;
6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[3]{x^5+4}+\sqrt[4]{x^3-2}}{\sqrt[4]{x^6+2x^5-1}-4x}$;
7. $\lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+5}-1}{x^3+64}$;
8. $\lim_{x\to 0}\frac{sin9x-sin7x}{x\cdot cos4x}$;
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{\frac{1}{2}-cosx}$;
10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{5x-1}{5x+5}\right)^{4x+3}$;
11. $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3x+6}{8x-1}\right)^{2x+7}$;
12. $\lim_{x\to 0}\frac{ln(5+x)-ln5}{4x}$.

Завдання 6.13

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to -3} \frac{2x^3-5x-1}{4x^2+5x+10}$;
2. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-8x+15}$;
3. $\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^3-x^2-15}{2x^3+6x-1}$;
4. $\lim_{x\to -\infty} \frac{5x^4+6x^2+3}{3x^3+2x+9}$;
5. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+8x+2}{3x^4-x^3-4x}$;
6. $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt[4]{x^4+2}+\sqrt[3]{x^2+9}}{\sqrt[5]{x^5-2}+\sqrt[6]{x^2+7}}$;
7. $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{5x-4}-3\sqrt{x-4}}{x^2-64}$;
8. $\lim_{x\to 0} \frac{cos^2 5x-cos^2 x}{6x^2}$;
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{cosx-sinx}{cos2x}$;
10. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{9x-1}{9x-3}\right)^{6x+2}$;
11. $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{5x-1}{4x+1}\right)^{9x+8}$;
12. $\lim_{x\to 0} \frac{3^x-7^x}{4x}$.

Завдання 6.14

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to -2} \frac{7x^2-3x-15}{3x^3+2x^2}$;
2. $\lim_{x\to -6} \frac{x^2+4x-12}{x^2-36}$;
3. $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2+6x-9}{5x^2-7x-11}$;
4. $\lim_{x\to \infty} \frac{4x^6+9x^3+5x^2}{3x^3+5x+17}$;
5. $\lim_{x\to \infty} \frac{5x^3+2x^2-7}{x^6+2x^5+8x^3}$;
6. $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt[7]{x^6+3}+\sqrt[4]{x^5+2x}}{4x-\sqrt[6]{x^3+4x}}$;
7. $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+3}}{x^2-5x+6}$;
8. $\lim_{x\to 0} \frac{arctg4x}{sin8x}$;
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{1-sinx}$;
10. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+7}\right)^{x-3}$;
11. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{3x+1}{5x+4}\right)^{2x-3}$;
12. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{x^2+4x}$.

Завдання 6.15

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to 5}\frac{x^3-7x^2+x+15}{2x^2-6x-1}$;

2. $\lim_{x\to 7}\frac{x^2-10x+21}{x^2-4x-21}$;

3. $\lim_{x\to \infty}\frac{7-2x^2-x^3}{13+4x+6x^3}$;

4. $\lim_{x\to \infty}\frac{11x^3+3x^2-4}{2x^2-6x-1}$;

5. $\lim_{x\to \infty}\frac{4x^2+5x+3}{19x^3+7x-8}$;

6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[5]{x^4+6}+\sqrt[10]{x^6+9}}{\sqrt[4]{x^2+4x-1}+3\sqrt{x}}$;

7. $\lim_{x\to -5}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+11}}{x^2+7x+10}$;

8. $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+4x^2}{sin11x+sinx}$;

9. $\lim_{x\to \pi}\frac{sinx}{sin3x}$;

10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{4x-1}{4x-7}\right)^{x+3}$;

11. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{6x-1}{7x+1}\right)^{-4x+3}$;

12. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+7x)^4}-1}{3x}$.

Завдання 6.16

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to -3}\frac{4x^4-265}{3x^2-9x-13}$;

2. $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-5x+4}$;

3. $\lim_{x\to \infty}\frac{6x^3-5x-3}{2x^3+4x^2+3x}$;

4. $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^9-7x-1}{5x^4-13x^2+8x}$;

5. $\lim_{x\to \infty}\frac{6x^2-3x-5}{9x^4-x^3-2x}$;

6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[7]{x^9+14}+3x^2}{\sqrt[5]{x^3+2}+\sqrt{x^4-7}}$;

7. $\lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{3x+16}-2}{x^2+x-12}$;

8. $\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2 5x}{3x^2}$;

9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)tg2x$;

10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2x+3}{2x+6}\right)^{7x+9}$;

11. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{10x+5}{2x-1}\right)^{2x-6}$;

12. $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+7x)}{11x}$.

Завдання 6.17

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to -1}\frac{11x^4+3x^3+18x}{9x^2-6x+5}$;
2. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^3+27}$;
3. $\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^4-2x^2-9}{5x+13x^2+6x^4}$;
4. $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^4-9x^3+8}{5x^2+6x-1}$;
5. $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2-x-11}{5x^3+4x^2+13x}$;
6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x^3+5x}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+2x}+\sqrt[5]{2x^4-3x}}$;
7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{5}}{x^2+6x}$;
8. $\lim_{x\to 0}\frac{sin6x+sinx}{4x}$;
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{x^2-\frac{\pi^2}{4}}$;
10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{7x+5}{7x+4}\right)^{x+13}$;
11. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{4x+9}{5x-1}\right)^{x+3}$;
12. $\lim_{x\to 0}\frac{7^x-2^x}{5x}$.

Завдання 6.18

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to 7}\frac{2x^2-6x+9}{13-x-x^2}$;
2. $\lim_{x\to \frac{1}{4}}\frac{4x^2+11x-3}{16x^2-1}$;
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{4x^5+x^3+3x}{9x^5-x^4-34}$;
4. $\lim_{x\to \infty}\frac{9x^3+7x+14}{x^2-6x-5}$;
5. $\lim_{x\to \infty}\frac{4x^2+3x+9}{4x^4+5x^2+3x}$;
6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[3]{3x^3+4}+\sqrt[5]{x^2+2}}{\sqrt{x^2+7}-\sqrt[6]{x^4+3}}$;
7. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{\sqrt{5x-1}-3}$;
8. $\lim_{x\to 0}\frac{arcsin6x}{x^2+3x}$;
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-sinx}{cosx}$;
10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{4x-3}{4x+1}\right)^{5x-1}$;
11. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{10x-3}{7x-3}\right)^{4x+5}$;
12. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{8x}-e^{4x}}{3x}$.

Завдання 6.19

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to-2}\frac{4x^4-3x^3-2x^2+15}{5x^2-6}$;

2. $\lim_{x\to5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-2x-15}$;

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-9x-11}{5x^2+14x+3}$;

4. $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3-6x+8}{2x^2+3x+19}$;

5. $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-3x-1}{5x^3+4x^2-15}$;

6. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-\sqrt{8x^2-6}}{\sqrt[4]{x^3+2}+\sqrt[5]{x^2-7x}}$;

7. $\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{6x+16}-2}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3}}$;

8. $\lim_{x\to0}\frac{1-cos7x}{5x^2}$;

9. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$;

10. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-11}{x+7}\right)^{4x-13}$;

11. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x+4}{7x-2}\right)^{3x-5}$;

12. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[9]{(1+5x)^2}-1}{4x}$.

Завдання 6.20

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to3}\frac{4x^3+6x^2+13x}{x^3-3x^2+7}$;

2. $\lim_{x\to3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-9}$;

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{3-11x+13x^2}{5x^2+4x-9}$;

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^5+3x^4-x}{4x^2+2x-17}$;

5. $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-3x-8}{2x^4+6x^3-3}$;

6. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3-9}-\sqrt[4]{x^3+2x^2}}{\sqrt[5]{x^6+1}-12}$;

7. $\lim_{x\to0}\frac{x^2+7x}{\sqrt{x+16}-4}$;

8. $\lim_{x\to0}\frac{1-cos5x}{sin^2 4x}$;

9. $\lim_{x\to2\pi}\frac{1-cosx}{(x-2\pi)^2}$;

10. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x+5}\right)^{3x+6}$;

11. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{9x-5}{8x+3}\right)^{4x+12}$;

12. $\lim_{x\to0}\frac{ln(6+x)-ln6}{3x}$.

Завдання 6.21

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to-4}\frac{5x^3+6x-14}{84-x^4}$;
2. $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+5x-14}{x^2-4}$;
3. $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3+7x^2+9}{5-3x-9x^3}$;
4. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+9x}{4x^3+6x^2-15}$;
5. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x^2+5x}{5x^5-x^3+6x}$;
6. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^4+3}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[7]{x^8-3}+5x}$;
7. $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{\sqrt{x+1}-2}$;
8. $\lim_{x\to0}\frac{cos4x-cos6x}{x\cdot arcsinx}$;
9. $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{cos5x}{cosx}$;
10. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x-9}\right)^{2x+5}$;
11. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{10x+3}{7x-5}\right)^{4x-3}$;
12. $\lim_{x\to0}\frac{4^{x^2}-1}{x^3-2x^2}$.

Завдання 6.22

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to2}\frac{7x^3-4x^2+3x+9}{5x^2-6x-1}$;
2. $\lim_{x\to2}\frac{x^2-11x+18}{x^2+3x-10}$;
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-x-15}{4x^2+2x+3}$;
4. $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+5x^2+4}{x^2-11x+3}$;
5. $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-x-11}{2x^5+x^4+9x}$;
6. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3+6}+2\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[6]{x^5+3}+13}$;
7. $\lim_{x\to-7}\frac{\sqrt{x+11}-2}{x^2+6x-7}$;
8. $\lim_{x\to0}\frac{x\cdot tg5x}{1-cos^2 3x}$;
9. $\lim_{x\to\pi}(\pi-x)ctgx$;
10. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+4}\right)^{11x+3}$;
11. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-7}{3x+10}\right)^{5-6x}$;
12. $\lim_{x\to0}\frac{e^{x^3}-1}{5x^3}$.

Завдання 6.23

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to 6}\frac{x^3-9x^2-5}{3x^2-112}$;
2. $\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-4x-1}{x^2-3x+2}$;
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{4x-x^2+13}{5x^2-7x-1}$;
4. $\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^5+2x^2-9x}{3x^4-5x^2+16}$;
5. $\lim_{x\to -\infty}\frac{10x^2-6x-5}{7x^3+4x^2+13}$;
6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+7}+\sqrt[9]{x^2+5}}{\sqrt[5]{x^7+2x+3}+3x}$;
7. $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$;
8. $\lim_{x\to 0}\frac{1-cos5x}{sin^2 4x}$;
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{1-sin\frac{3x}{2}}{\left(\frac{\pi}{3}-x\right)^2}$;
10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{6x+5}{6x-4}\right)^{2x-7}$;
11. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{7x+4}{2x+1}\right)^{10x-1}$;
12. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{(1+5x)^7}-1}{2x}$.

Завдання 6.24

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to 4}\frac{2x^3-9x^2+3x}{5x^2-9x+13}$;
2. $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-8x+12}{x^2-36}$;
3. $\lim_{x\to -\infty}\frac{3-x-x^3}{5x^2+2x^3+4}$;
4. $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^4-9x^2+5}{5x^2+9x-12}$;
5. $\lim_{x\to \infty}\frac{5x^2+7x-12}{3x^3+6x-8}$;
6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[4]{x^3+2x^2}+6\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^4+9x}+\sqrt[12]{x^8+3x}}$;
7. $\lim_{x\to -6}\frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{3}}{x^2+4x-12}$;
8. $\lim_{x\to 0}\frac{cos^2 5x-cos^2 x}{x\cdot tg4x}$;
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{cosx-sinx}{\frac{\pi}{4}-x}$;
10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{4x-1}{4x-7}\right)^{5x-3}$;
11. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{8x+3}{4x-1}\right)^{-3x+12}$;
12. $\lim_{x\to 0}\frac{ln(5+x)-ln5}{x^2+x}$.

Завдання 6.25

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to 7}\frac{x^2+3x-12}{3x^2-9x+42}$;

2. $\lim_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x^2+3x-4}$;

3. $\lim_{x\to \infty}\frac{11x^2+6x+20}{4x^3+7x^2+25x}$;

4. $\lim_{x\to \infty}\frac{8x^3-5x+4}{3x^2+6x+13}$;

5. $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2-14x-13}{5x^2+6x-7}$;

6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x^5-1}+2x^2}{\sqrt[8]{x^7+6}+\sqrt[3]{x^2+4}}$;

7. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+15}-4}{\sqrt{x+8}-3}$;

8. $\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{sin5x}$;

9. $\lim_{x\to \pi}\frac{sinx}{sin3x}$;

10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{3x-7}{3x+2}\right)^{5x+2}$;

11. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{5x-4}{9x-3}\right)^{2x-7}$;

12. $\lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2}-2^{x^2}}{5x^2}$.

Завдання 6.26

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to -1}\frac{13-2x-4x^3-7x^5}{12x^3+16x-9}$;

2. $\lim_{x\to -5}\frac{125+x^3}{x^2+6x+5}$;

3. $\lim_{x\to \infty}\frac{5x^3-7x^2-9}{4-2x+7x^3}$;

4. $\lim_{x\to \infty}\frac{4x^6+7x^3+13x}{2x^3+4x^2+9}$;

5. $\lim_{x\to \infty}\frac{4x^3-8x^2-1}{7x^8+4x^4+2x}$;

6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[5]{x^4-7}+\sqrt[6]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^2+4}+5x}$;

7. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+5x+6}{\sqrt{3x+10}-1}$;

8. $\lim_{x\to 0}\frac{sin4x+sin5x}{6x}$;

9. $\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$;

10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2x+6}{2x-9}\right)^{2x-1}$;

11. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x-4}{3x+6}\right)^{2x+5}$;

12. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{4x}}{3x}$.

Завдання 6.27

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to -2}\frac{5x^3-4x^2+6x-17}{9x^2+7x-2}$;

2. $\lim_{x\to -4}\frac{x^2+5x+4}{x^2-16}$;

3. $\lim_{x\to -\infty}\frac{9x^2+8x+1}{4x^2-10x+3}$;

4. $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^4-7x^2+13x}{2x^3+4x^2+9}$;

5. $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2-x-7}{5x^4+2x^3+6x}$;

6. $\lim_{x\to \infty}\frac{5x+\sqrt[7]{x^8+13}}{\sqrt[5]{x^6+3}+\sqrt[6]{x^8+4x^3}}$;

7. $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{\sqrt{4x+9}-1}$;

8. $\lim_{x\to 0}\frac{arctg3x}{sin2x-sin4x}$;

9. $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{tg\pi x}$;

10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x+9}{x-7}\right)^{8x+1}$;

11. $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{7x+4}{5x+3}\right)^{12x+5}$;

12. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+3x)^2}-1}{4x}$.

Завдання 6.28

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-15x-1}{3x^3+9x+14}$;

2. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-3x-10}{x^2+9x+14}$;

3. $\lim_{x\to \infty}\frac{5x^2-x-1}{7x^2+4x+3}$;

4. $\lim_{x\to \infty}\frac{5x^3+6x+19}{x^2+7x+1}$;

5. $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2+6x-7}{9x^3+8x^2+14}$;

6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[5]{x^4+3x^2+5}+\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[4]{x^3+7x}+\sqrt[9]{x^6+5x}}$;

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2+5x}$;

8. $\lim_{x\to 0}\frac{arcsin4x}{x^2-8x}$;

9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}-cosx}$;

10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x+3}{x+9}\right)^{5x-9}$;

11. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{4x-1}{x+5}\right)^{-3x+7}$;

12. $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+8x)-1}{x^3+3x}$.

Завдання 6.29

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to 2}\frac{4x^3-6x^2+5x-17}{2x^3-9x-3}$;
2. $\lim_{x\to 1}\frac{6x^2-x-5}{x^2-6x+5}$;
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{13x-2x^2-11x^3}{5x^2+x^3-16}$;
4. $\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^4+6x^3+5}{2x^2-11x-1}$;
5. $\lim_{x\to \infty}\frac{8x^3-4x^2+13}{3x^4-14x^3+17}$;
6. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[9]{x^6+5x}+\sqrt[4]{x^2+4}}{\sqrt[7]{x^8+3x^2}+\sqrt{4x}}$;
7. $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{7}}{x^2+x-20}$;
8. $\lim_{x\to 0}\frac{cos^2x-cos^2 3x}{4x^2}$;
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{cos5x}{cos3x}$;
10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{3x-7}{3x+4}\right)^{5x+4}$;
11. $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{6x+2}{8x-5}\right)^{7x+1}$;
12. $\lim_{x\to 0}\frac{5^x-2^x}{3x}$.

Завдання 6.30

Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to 5}\frac{3x^3 2x-7}{2x^2-11x+9}$;
2. $\lim_{x\to -7}\frac{x^2-49}{x^2+2x-35}$;
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2-49x+3}{7x^2+x+15}$;
4. $\lim_{x\to \infty}\frac{5x^4-7x^2+3x}{3x^3-x^2-6}$;
5. $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+7x-1}{2x^5-x^4-3x^2}$;
6. $\lim_{x\to \infty}\frac{8x+\sqrt[6]{x^4+3}}{\sqrt[5]{x^3+2x}+\sqrt[9]{x^8+4}}$;
7. $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{x-4}-2}$;
8. $\lim_{x\to 0}\frac{sin7x-sin5x}{arcsinx}$;
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{1-sin5x}$;
10. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2x+6}{2x-7}\right)^{3x+1}$;
11. $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3x-2}{10x+0}\right)^{x+3}$;
12. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{9x}}{11x}$.

Розділ 7 ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ТЕХНІКА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Цей розділ присвячений похідним функцій. Наша мета – освоїти техніку диференціювання функцій заданих явно, неявно, параметрично; познайомитися з методом логарифмічного диференціювання. Для цього нам, безумовно, знадобиться таблиця похідних та основні правила диференціювання. Перед виконанням завдання радимо перечитати розділ 4.1 Підручника.

Приклади розв'язання типового варіанта

Знайти похідні:

1. $y = \frac{5x^7 - 3x\sqrt{x}}{x^3} + 2x^5 + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - 27.$

Розв'язання. Функція проста, степенева, подана у вигляді алгебраїчної суми (4.5), але перед диференціюванням її треба спростити, скориставшись властивостями степенів. Отже, перепишемо функцію:

$$y = 5x^4 - 3x^{-\frac{3}{2}} + 2x^5 + 4x^{-\frac{1}{3}} - 27.$$

Знайдемо її похідну:

$$y' = 5 \cdot 4x^3 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{5}{2}} + 2 \cdot 5x^4 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{4}{3}} - 0 =$$
$$= 20x^3 + \frac{9}{2\sqrt{x^5}} + 10x^4 - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}}.$$

2. $y = \left(8x^3 + 6\sqrt{x}\right) \cdot \arcsin x.$

Розв'язання. Функція проста, подана у вигляді добутку. Скористаємося формулою (4.6):

$$u = 8x^3 + 6\sqrt{x}; \qquad u' = 24x^2 + \frac{6}{2\sqrt{x}};$$
$$v = \arcsin x; \qquad v' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Підставимо у формулу (4.6):

$$y' = \left(24x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) \cdot \arcsin x + \left(8x^3 + 6\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Зауваження. Тим, хто легко впорався з технікою диференціювання, допоміжні обчислення можна опустити.

3. $y = \log_7(x+3) + 5\cos 4x - 4\mathrm{arctg}8x$.

Розв'язання. Функція подана у вигляді алгебраїчної суми, але звернемо вашу увагу, що кожний доданок – складна функція, тому диференціювати їх будемо за правилом (4.11), згідно з таблицею похідних:

$$y' = \frac{1}{(x+7)\ln 7}(x+7)' + 5(-\cos 4x)\cdot(4x)' - 4\frac{1}{1+(8x)^2}(8x)' =$$
$$= \frac{1}{(x+7)\ln 7} - 20\cos 4x - \frac{32}{1+64x^2}.$$

4. $y = \frac{5\sin x + 6x^2}{3x^3 - 8x + 4}$.

Розв'язання. Функція проста, подана у вигляді частки. Скористаємося формулою (4.9):

$u = 5\sin x + 6x^2$; $u' = 5\cos x + 12x$;
$v = 3x^3 - 8x + 4$; $v' = 9x^2 - 8$.

Підставимо у формулу (4.9):

$$y' = \frac{(5\cos x + 12x)(3x^3 - 8x + 4) - (5\sin x + 6x^2)(9x^2 - 8)}{(3x^3 - 8x + 4)^2}.$$

5. $y = \mathrm{ctg}\, 5\, x^7$.

Розв'язання. Функція складна. Поступово диференціюємо її, спочатку котангенс, а потім його аргумент – степеневу функцію:

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 5x^7}\cdot(5x^7)' = -\frac{1}{\sin^2 5x^7}\cdot 35x^6.$$

6. $y = \arccos^5 9x$.

Розв'язання. Функція складна. Поступово диференціюємо її, спочатку степеневу функцію, потім її аргумент – арккосинус, і, наприкінці, аргумент арккосинусу:

$$y' = 5\arccos^4 9x \cdot (\arccos 9x)' = 5\arccos^4 9x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-(9x)^2}}\right) \cdot (9x)' =$$
$$= -5\arccos^4 9x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-81x^2}} \cdot 9 = -\frac{45\arccos^4 9x}{\sqrt{1-81x^2}}.$$

7. $y = 9^{\mathrm{tg}^3\left(5\sqrt{\ln x}\right)}$.

Розв'язання. Функція складна. Поступово диференціюємо її, спочатку показникову функцію, потім степеневу (степінь тангенса), тригонометричну – тангенс, і його аргумент – корінь квадратний натурального логарифма, і, нарешті, сам логарифм:

$$y' = 9^{\mathrm{tg}^3\left(5\sqrt{\ln x}\right)} \ln 9 \cdot \left(\mathrm{tg}^3\left(5\sqrt{\ln x}\right)\right)' = 9^{\mathrm{tg}^3\left(5\sqrt{\ln x}\right)} \ln 9 \cdot 3\,\mathrm{tg}^2\left(5\sqrt{\ln x}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\mathrm{tg}\left(5\sqrt{\ln x}\right)\right)' = 9^{\mathrm{tg}^3\left(5\sqrt{\ln x}\right)} \ln 9 \cdot 3\,\mathrm{tg}^2\left(5\sqrt{\ln x}\right) \frac{1}{\cos^2\left(5\sqrt{\ln x}\right)} \left(5\sqrt{\ln x}\right)' =$$
$$= 9^{\mathrm{tg}^3\left(5\sqrt{\ln x}\right)} \ln 9 \cdot 3\,\mathrm{tg}^2\left(5\sqrt{\ln x}\right) \frac{1}{\cos^2\left(5\sqrt{\ln x}\right)} \cdot 5\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot (\ln x)' =$$
$$= \frac{15 \cdot 9^{\mathrm{tg}^3\left(5\sqrt{\ln x}\right)} \ln 9 \cdot \mathrm{tg}^2\left(5\sqrt{\ln x}\right)}{2x \cdot \sqrt{\ln x} \cdot \cos^2\left(5\sqrt{\ln x}\right)}.$$

8. $y = \sqrt[7]{e^{\mathrm{arcctg}\, 6x^4} + 12x}$.

Розв'язання. Функція складна. Знаходимо похідну степеневої функції, а потім – похідну кожного з доданків підкореневого виразу:

$$y' = \frac{1}{7}\left(e^{\mathrm{arcctg}\, 6x^4} + 12x\right)^{-\frac{6}{7}} \cdot \left(e^{\mathrm{arcctg}\, 6x^4} + 12x\right)' =$$
$$= \frac{1}{7}\frac{1}{\sqrt[7]{\left(e^{\mathrm{arcctg}\, 6x^4}+12x\right)^6}} \cdot \left(e^{\mathrm{arcctg}\, 6x^4} \cdot (\mathrm{arcctg}\, 6x^4)' + 12\right) =$$
$$= \frac{1}{7\sqrt[7]{\left(e^{\mathrm{arcctg}\, 6x^4}+12x\right)^6}} \cdot \left(e^{\mathrm{arcctg}\, 6x^4} \cdot \left(-\frac{1}{1+(6x^4)^2}\right)(6x^4)' + 12\right) =$$
$$= \frac{1}{7\sqrt[7]{\left(e^{\mathrm{arcctg}\, 6x^4}+12x\right)^6}}\left(12 - \frac{24x^3 \cdot e^{\mathrm{arcctg}\, 6x^4}}{1+36x^8}\right).$$

9. $y=(3x^5+5x)\cdot\log_2(4x^2-6)$.

Розв'язання. Функція складна, подана у вигляді добутку. Скористаємося формулою (4.6):

$$u=3x^5+5x; \qquad u'=15x^4+5;$$
$$v=\log_2(4x^2-6); \qquad v'=\frac{1}{(4x^2-6)\ln 2}\cdot(4x^2-6)'=\frac{8x}{(4x^2-6)\ln 2}.$$

Підставимо у формулу (4.6):

$$y'=(15x^4+5)\cdot\log_2(4x^2-6)+(3x^5+5x)\cdot\frac{8x}{(4x^2-6)\ln 2}.$$

10. $y=\frac{\operatorname{tg}7x^2}{x^4-4x^3}$.

Розв'язання. Функція складна, подана у вигляді частки. Скористаємося формулою (4.9):

$$u=\operatorname{tg}7x^2; \qquad u'=\frac{1}{\cos^2 7x^2}\cdot(7x^2)'=\frac{1}{\cos^2 7x^2}\cdot 14x;$$
$$v=x^4-4x^3; \qquad v'=4x^3-12x^2.$$

Підставимо у формулу (4.9):

$$y'=\frac{\frac{1}{\cos^2 7x^2}\cdot 14x\left(x^4-4x^3\right)-\operatorname{tg}7x^2\left(4x^3-12x^2\right)}{(x^4-4x^3)^2}=$$

приведемо чисельник до загального знаменника, маємо

$$=\frac{14x\left(x^4-4x^3\right)-\operatorname{tg}7x^2\left(4x^3-12x^2\right)\cos^2 7x^2}{(x^4-4x^3)^2\cos^2 7x^2}.$$

11. $y=\ln(\sin 3x)\cdot e^{\sqrt{x^2+4}}$.

Розв'язання. Функція складна, подана у вигляді добутку. Скористаємося формулою (4.6):

$$u=\ln(\sin 3x);$$
$$v=e^{\sqrt{x^2+4}};$$
$$u'=\frac{1}{\sin 3x}(\sin 3x)'=\frac{1}{\sin 3x}\cdot\cos 3x\cdot(3x)'=3\operatorname{ctg}3x;$$

$v' = e^{\sqrt{x^2+4}} \cdot \left(\sqrt{x^2+4}\right)' = e^{\sqrt{x^2+4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}(x^2+4)' = \frac{2x \cdot e^{\sqrt{x^2+4}}}{2\sqrt{x^2+4}}.$

Підставимо у формулу (4.6):

$y' = 3\operatorname{ctg} 3x \cdot e^{\sqrt{x^2+4}} + \ln(\sin 3x) \cdot \frac{x \cdot e^{\sqrt{x^2+4}}}{\sqrt{x^2+4}}.$

12. $y = 5^{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \sqrt{9 + \frac{1}{x}}.$

Розв'язання. Функція складна, подана у вигляді добутку. Скористаємося формулою (4.6):

$u = 5^{\operatorname{arctg} 3x};$

$v = \sqrt{9 + x^2};$

$u' = 5^{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \ln 5 \cdot (\operatorname{arctg} 3x)' = 5^{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{1+(3x)^2}(3x)' =$

$= 5^{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \ln 5 \cdot \frac{3}{1+9x^2};$

$v' = \frac{1}{2\sqrt{9+x^2}} \cdot (9 + x^2)' = \frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$

Підставимо у формулу (4.6):

$y' = 5^{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \ln 5 \cdot \frac{3}{1+9x^2} \cdot \sqrt{9+x^2} + 5^{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$

13. $y = \frac{\ln(e^x+3)}{\sqrt{1+\cos 3x}}.$

Розв'язання. Функція складна, подана у вигляді частки. Скористаємося формулою (4.9):

$u = \ln(e^x + 3);$

$v = \sqrt{1 + \cos 3x};$

$u' = \frac{1}{e^x+3} \cdot (e^x + 3)' = \frac{1}{e^x+3} \cdot e^x;$

$v' = \frac{1}{2\sqrt{1+\cos 3x}} \cdot (1 + \cos 3x)' = \frac{1}{2\sqrt{1+\cos 3x}} \cdot (-\sin 3x) \cdot (3x)' =$

$= -\frac{3\sin 3x}{2\sqrt{1+\cos 3x}}$

Підставимо у формулу (4.9):

$$y' = \frac{\frac{e^x}{e^x+3}\sqrt{1+\cos 3x} - \ln(e^x+3)\cdot\left(-\frac{3\sin 3x}{2\sqrt{1+\cos 3x}}\right)}{1+\cos 3x} =$$

приведемо чисельник до загального знаменника, маємо

$$= \frac{2e^x(1+\cos 3x) + 3(e^x+3)\ln(e^x+3)\cdot\sin 3x}{2(e^x+3)\sqrt{(1+\cos 3x)^3}}.$$

14. $y = \frac{\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2-1}}{\operatorname{tg}^2(x-1)}$.

Розв'язання. Функція складна, подана у вигляді частки. Скористаємося формулою (4.9):

$u = \operatorname{arcctg}\sqrt{x^2-1}$;
$v = \operatorname{tg}^2(x-1)$;

$$u' = -\frac{1}{1+\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)' = -\frac{1}{1+(x^2-1)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot(x^2-1)' =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$v' = 2\operatorname{tg}(x-1)\cdot(\operatorname{tg}(x-1))' = 2\operatorname{tg}(x-1)\frac{1}{\cos^2(x-1)}\cdot(x-1)' =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}(x-1)}{\cos^2(x-1)}$$

Підставимо у формулу (4.9):

$$y' = \frac{-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\cdot\operatorname{tg}^2(x-1) - \operatorname{arcctg}\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{2\operatorname{tg}(x-1)}{\cos^2(x-1)}}{\operatorname{tg}^4(x-1)} =$$

приведемо чисельник до загального знаменника, маємо

$$= -\frac{\sin^2(x-1) + 2\operatorname{tg}(x-1)x\sqrt{x^2-1}\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{x^2-1}\cos^2(x-1)\cdot\operatorname{tg}^4(x-1)}.$$

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (tgx)^{sinx}$.

Розв'язання. Функція степенево-показникова, тому для її диференціювання потрібно або скористатися формулою (4.25), або прологарифмувати функцію та продиференціювати отриманий вираз. Ми вважаємо, що нема необхідності запам'ятовувати формулу (4.25), набагато легше кожного разу повторювати необхідну процедуру.

Логарифмуємо функцію:

$\ln y = \ln(tgx)^{sinx}$.

За властивістю логарифмів, показник степені підлогарифмічного виразу – коефіцієнт перед логарифмом:

$\ln y = sinx \cdot \ln(tgx)$.

Ліворуч обчислимо похідну логарифма (пам'ятаємо, що y функція x, тобто складна функція), а праворуч обчислимо похідну добутку:

$$\left.\frac{y'}{y} = cosx \cdot \ln(tgx) + sinx \cdot \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{cos^2x}\right| \cdot y;$$

$$y' = y\left(cosx \cdot \ln(tgx) + sinx \cdot \frac{cosx}{sinx} \cdot \frac{1}{cos^2x}\right);$$

$$y' = (tgx)^{sinx}\left(cosx \cdot \ln(tgx) + \frac{1}{cosx}\right).$$

16. $y = \left(\arcsin\sqrt{x}\right)^{\frac{5}{x^2}}$.

Розв'язання. Функція степенево-показникова. Для її диференціювання скористаємося алгоритмом, який згадали при розв'язанні прикладу 15:

$$\ln y = \ln\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^{\frac{5}{x^2}};$$

$$\ln y = \frac{5}{x^2}\ln\arcsin\sqrt{x} = \frac{5\ln\arcsin\sqrt{x}}{x^2}.$$

Права частина набуває вигляду частки, тому за формулою (4.9) маємо:

$$\frac{y'}{y} = 5\,\frac{\frac{1}{\arcsin\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x^2 - \ln\arcsin\sqrt{x}\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= 5\,\frac{x\left(x - 4\sqrt{x-x^2}\cdot\arcsin\sqrt{x}\cdot\ln\arcsin\sqrt{x}\right)}{x^4} =$$

$$= 5\left.\frac{x - 4\sqrt{x-x^2}\cdot\arcsin\sqrt{x}\cdot\ln\arcsin\sqrt{x}}{x^3}\right| \cdot y;$$

$$y' = 5\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^{\frac{5}{x^2}} \cdot \frac{x - 4\sqrt{x - x^2}\cdot\arcsin\sqrt{x}\cdot\ln\arcsin\sqrt{x}}{x^3}.$$

17. $y = \frac{(3x+2)^6}{\sqrt[7]{(x+5)^3\cdot(x-8)^4}}$.

Розв'язання. Функція подана у вигляді частки, знаменник дробі – у вигляді добутку. Отже, диференціювання такої функції за формулами (4.6), (4.9) нераціонально. Відомо, що для диференціювання функції, яка містить більш, ніж два множника, використовують метод логарифмічного диференціювання. Продиференціюємо функцію, скористаємося властивостями логарифмів, а потім знайдемо похідну:

$$\ln y = \ln\frac{(3x+2)^6}{\sqrt[7]{(x+5)^3\cdot(x-8)^4}};$$

$$\ln y = \ln(3x+2)^6 - \ln(x+5)^{\frac{3}{7}} - \ln(x-8)^4;$$

$$\ln y = 6\ln(3x+2) - \frac{3}{7}\ln(x+5) - 4\ln(x-8);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{6\cdot 3}{3x+2} - \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{x+5} - \frac{4}{x-8}\Bigg| \cdot y;$$

$$y' = \frac{(3x+2)^6}{\sqrt[7]{(x+5)^3\cdot(x-8)^4}}\left[\frac{6}{3x+2} - \frac{3}{7(x+5)} - \frac{4}{x-8}\right].$$

За бажанням, цей вираз можна спростити:

$$y' = \frac{(3x+2)^6}{\sqrt[7]{(x+5)^3\cdot(x-8)^4}} \cdot \frac{42(x+5)(x-8) - 3(3x+2)(x-8) - 28(3x+2)(x+5)}{7(3x+2)(x+5)(x-8)} =$$

$$= -\frac{(3x+2)^5\left(51x^2+536x+1912\right)}{7\sqrt[7]{(x+5)^{10}\cdot(x-8)^5}}.$$

18. $y = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{ctg}^3\,5x$.

Розв'язання. Функція подана у вигляді добутку. Але при диференціюванні першого множника вже виникають проблеми, а саме: по-перше, знаходиться похідна від степеневої функції, по-друге, підкореневий вираз – дріб, тому необхідно його диференціювати за формулою похідна від частки… Цієї проблеми можна уникнути, якщо, як у попередньому прикладі, скористатися методом логарифмічного диференціювання.

$$\ln y = \ln\left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}\operatorname{ctg}^3 5x\right);$$

$$\ln y = \ln\left(\frac{(x+1)^{\frac{1}{4}}}{(x-1)^{\frac{1}{4}}}\cdot\operatorname{ctg}^3 5x\right);$$

$$\ln y = \ln(x+1)^{\frac{1}{4}} - \ln(x-1)^{\frac{1}{4}} + \ln(\operatorname{ctg} 5x)^3;$$

$$\ln y = \frac{1}{4}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\ln(x-1) + 3\ln(\operatorname{ctg} 5x);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + 3\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg} 5x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 5x}\right)\cdot 5\Big|\cdot y;$$

$$y' = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}\operatorname{ctg}^3 5x\left[\frac{x-1-x-1}{4(x-1)(x+1)} - \frac{15}{\frac{\cos 5x}{\sin 5x}\cdot\sin^2 5x}\right];$$

$$y' = -\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}\operatorname{ctg}^3 5x\left[\frac{1}{2(x^2-1)} + \frac{30}{\sin 10x}\right].$$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $y\cos x - x\sin y = 0.$

Розв'язання. Алгоритм диференціювання неявно заданий функцій приведено на сторінці 153 Посібника. Нагадаємо, що при диференціюванні таких функцій ми зобов'язані пам'ятати, що y є функцією x, тому диференціювати її потрібно за правилами диференціювання складних функцій. Наша функція складається з двох доданків, кожний з яких має вигляд добутку, у відповідності з вже відомими правилами маємо:

$$y'\cos x + y(-\sin x) - 1\cdot\sin y - x\cos y\cdot y' = 0.$$

Розв'яжемо лінійне рівняння відносно шуканої похідної:

$$y'(\cos x - x\cos y) = \sin y + y\sin x.$$

Остаточно маємо: $y' = \frac{\sin y + y\sin x}{\cos x - x\cos y}$.

20. $\operatorname{arctg}\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2).$

Розв'язання. Продиференціюємо неявно задану функцію аналогічно попередньому прикладу:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+y^2\right)'}{x^2+y^2};$$

$$\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1\cdot y - x\cdot y'}{y^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2y\cdot y'}{x^2+y^2}.$$

Виконаємо необхідні перетворення:

$$\frac{y-xy'}{x^2+y^2} = \frac{x+yy'}{x^2+y^2};$$

$$y - xy' = x + yy';$$

$$y'(x+y) = y - x;$$

остаточно маємо $y' = \frac{y-x}{y+x}$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 4t - 15 \\ y = 2t^3 \end{cases}.$

Розв'язання. За формулою (4.26), для того, щоб знайти похідну функції, заданої параметрично, спочатку необхідно знайти похідні x та y за параметром t.

$$x_t' = 4; \qquad y_t' = 6t.$$

За формулою (4.26) маємо:

$$y' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{6t}{4} = \frac{3t}{2}.$$

22. $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t) \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases}.$

Розв'язання. Скористаємося формулою (4.26):

$$x_t' = 2(-\sin t + \sin t + t\cos t) = 2t\cos t;$$

$$y_t' = 2(\cos t - \cos t + t\sin t) = 2t\sin t;$$

$$y' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{2t\sin t}{2t\cos t} = \operatorname{tg} t.$$

Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів

Завдання 7.1.

Знайти похідні:

1. $y = \frac{7x^3 - 5\sqrt{x}}{x^2} + 3x^6 - \frac{7}{x} + 18;$

2. $y = (5x^7 + 13x) \cdot log_5 x;$

3. $y = 2^x + sin5x + 4tg3x;$

4. $y = \frac{2cosx - 12}{2x^2 + 7x - 5};$

5. $y = 2^{log_4 tg3x};$

6. $y = sin^7 4x;$

7. $y = cos9x^{10};$

8. $y = \sqrt[6]{tg^4 7x + 18};$

9. $y = (2x^8 + 14) \cdot ctg^3 5x;$

10. $y = \frac{12arcsin4x^5}{x^3 - 4x};$

11. $y = 5^{ln^3 ctgx} \cdot cos\sqrt{x};$

12. $y = log_4(sin5x) \cdot e^{\sqrt{x^5}};$

13. $y = \frac{\sqrt[4]{2x^5 + 3x^4 - 12x}}{ln(cos7x)};$

14. $y = \frac{arctg^2(e^x - 2)}{(2lnx + 5)^3}.$

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (cos9x)^{log_3 x};$

16. $y = (tg7x^4)^{e^{x^3} + 2};$

17. $y = \frac{(x-7)^9 \cdot \sqrt[8]{(x+5)^3}}{(2x-9)^4};$

18. $y = \sqrt[5]{\frac{x+4}{x-4}} log_5(sin3x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $ctgy^2 = 5x^2 - 3y;$

20. $ln(5x + 3y) - \frac{x^5 y}{y^3 - 4} = 0$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 3t - 8 \\ y = 6t - t^2 \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = (t^2 - 9)cos3t \\ y = (t^2 + 9)sin3t \end{cases}.$

23. *Теоретичне питання.* Поняття похідної як швидкості зміни функції.

Завдання 7.2.

Знайти похідні:

1. $y = 4\sqrt[5]{x^3} - \frac{6x+2\sqrt{x^7}}{x^3} + 2x - 3;$

2. $y = (2x^4 - 5x) \cdot 3^x;$

3. $y = 7ctg4x - e^{6x} - ln3x;$

4. $y = \frac{5sinx+3x}{4x^5-3x^3+8};$

5. $y = log_7(cosx^3);$

6. $y = arcsin^8 5x;$

7. $y = tg6x^9;$

8. $y = \sqrt[5]{e^{sin6x} - 12x};$

9. $y = (2x^3 - 6x) \cdot cos^4 7x;$

10. $y = \frac{9arcctg3x^6}{x^6-7x};$

11. $y = 8^{\sqrt[8]{log_3^7 4x}} \cdot ctg^2 6x;$

12. $y = cos7x^6 \cdot tg\left(\sqrt[3]{x^5}\right);$

13. $y = \frac{\sqrt[3]{7x^4-2x^2-21}}{ln(sin13x)};$

14. $y = \frac{arccos^5(4^x-9)}{(3ln7x-9)^3}.$

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (sin8x)^{cosx};$

16. $y = (arcctg2x^5)^{ln^8 7x};$

17. $y = \frac{(x+6)^8 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^7}}{(4x-7)^5};$

18. $y = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} tg(e^{3x} - 5).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $y^2 = 8xy;$

20. $x \cdot siny^5 - 2y^3 tgx = 0$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = 6t^2 \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = e^{5t} sin4t \\ y = e^{5t} cos4t \end{cases}.$

23. *Теоретичне питання.* Визначення похідної.

Завдання 7.3.

Знайти похідні:

1. $y=\frac{9}{\sqrt[6]{x^5}}+5x^2+9-\frac{3x\sqrt{x}-x^3}{\sqrt[3]{x}}$;

2. $y=(4x^3-5x)\cdot sinx$;

3. $y=2arccos5x+4log_5x-9^{2x}$;

4. $y=\frac{4tgx+7}{3x^5-7x^4+1}$;

5. $y=e^{arccos5x}$;

6. $y=cos^5 9x$;

7. $y=ctg8x^3$;

8. $y=\sqrt[4]{5^{ln(3x-7)}+8x^2}$;

9. $y=(4x^5+21)\cdot sin^6 2x$;

10. $y=\frac{7arctg^9(2x-3)}{x^5+12x^4}$;

11. $y=4^{cos^3(2x-7)}\cdot sin\frac{3}{x}$;

12. $y=tg(arcsin2x)2^{\sqrt{x^4}}$;

13. $y=\frac{\sqrt[8]{4x^3+3x^2-9x}}{ln(tg5x)}$;

14. $y=\frac{arcsin^5(3^x-4)}{(5cosx-2)^4}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y=(tg5x)^{arcsinx}$;

16. $y=(sin2x^5)^{ln^4(2x+5)}$;

17. $y=\frac{(2x-3)^6}{(x-9)^5\cdot\sqrt[6]{(x+4)^7}}$;

18. $y=\sqrt[7]{\frac{x+8}{x-8}}sin(x^2-3x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $sin(2x^5-y^2)=2y\cdot cosx^2$;

20. $y^2cosx=4sin3x$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases}x=7cost\\ y=9sint\end{cases}$;

22. $\begin{cases}x=arcsint\\ y=t\cdot\sqrt{1-t^2}\end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Техніка диференціювання елементарних функцій.

Завдання 7.4.

Знайти похідні:

1. $y = 12 + 4\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[7]{x^2}} + \frac{3\sqrt[5]{x^4}+4x}{x^4}$;

2. $y = (4x^8 + 5x^3) \cdot cosx$;

3. $y = 4cos7x - 2log_7 2x - e^{tg4x}$;

4. $y = \frac{6ctgx-5}{4x^2+3x^8-11}$;

5. $y = log_6(e^x - 3x^2)$;

6. $y = tg^4 7x$;

7. $y = arcsin5x^4$;

8. $y = \sqrt[8]{cos^3 9x - 7x}$;

9. $y = (3x^5 - 7x) \cdot ctg^4 7x$;

10. $y = \frac{7sin9x^2}{2x^3+5x}$;

11. $y = 3^{tg(5x^4-7x)} \cdot ln(sin8x^3)$;

12. $y = cos(2^x - 1)tg\sqrt[5]{x^2}$;

13. $y = \frac{\sqrt[7]{4x^9-2x^5-31}}{ln(ctg6x)}$;

14. $y = \frac{tg^5(4^x+13)}{(3arcsinx-2)^4}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (ctg6x)^{arccosx}$;

16. $y = (cos6x^3)^{\sqrt{tg^5 x}}$;

17. $y = \frac{(3x+1)^4 \cdot \sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x-5)^3}$;

18. $y = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} cos\sqrt{x-6}$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $cos^3 y = 3x^4 \cdot lny$;

20. $3^x + 3^y = 3^{x+y}$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = cost \\ y = 4t - 9sint \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x = e^t cos^2 t \\ y = e^t sin^2 t \end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Основні правила диференціювання. Похідна алгебраїчної суми.

Завдання 7.5.

Знайти похідні:

1. $y = 2x + \frac{6x\sqrt[3]{x} - 2x^8}{x^9} + \frac{4}{x^5} + 9;$

2. $y = (4x^5 - 2x^{11}) \cdot tgx;$

3. $y = 9tg5x + 4e^{3x} + arcctg7x;$

4. $y = \frac{7lnx + 3}{2x^6 - 5x^4 - x};$

5. $y = ln(arcctg6x - 15);$

6. $y = ctg^2 8x;$

7. $y = arccos3x^7;$

8. $y = \sqrt[3]{log_2^6 3x - 9x^4};$

9. $y = (5x^8 + 17x) \cdot cos^7 2x;$

10. $y = \frac{4^{tg^5 3x}}{x^7 - 8x^6};$

11. $y = 9^{cos\sqrt[5]{x^4}} \cdot tg(7x^8 - 3);$

12. $y = log_3(tg2x)5^{cosx^2};$

13. $y = \frac{\sqrt[8]{4x^5 - 12x^3 - 5x}}{ln(arcsin4x)};$

14. $y = \frac{ctg^6(2^x - 9)}{(4arccosx + 3)^7}.$

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (arcsin2x)^{\sqrt{x}};$

16. $y = (tg5x^2)^{3^{x^2} - 7};$

17. $y = \frac{(7x-3)^4}{(x-5)^4 \cdot \sqrt[3]{(x+4)^7}};$

18. $y = \sqrt[5]{\frac{x+7}{x-7}}\, ln(tg2x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $2ylny = x;$

20. $tg(4x^7 - 3y^3) = \frac{x^2 - 6}{y^5}.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t \cdot 2^t \\ y = t^2 + 2t \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}} \\ y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{t}} \end{cases}.$

23. *Теоретичне питання.* Похідна складної функції.

Завдання 7.6.

Знайти похідні:

1. $y = 7x^3 - 8 + \frac{8\sqrt{x^5}+x^3}{2x^2} + \frac{3}{x^2}$;

2. $y = (9x^7 + 22) \cdot ctgx$;

3. $y = (2x+1)^3 - cos5x - 2ln6x$;

4. $y = \frac{9log_3 x - 6}{5x^4 - 2x^2 - 7}$;

5. $y = sin(2^x - 14x^5)$;

6. $y = arcsin^4 5x$;

7. $y = ln8x^7$;

8. $y = \sqrt[5]{tg^4 12x + 4x^9}$;

9. $y = (9x^3 - 35x^2) \cdot tg^4 8x$;

10. $y = \frac{32 \cdot e^{cos2x^5}}{x^6 + 3x^2}$;

11. $y = 7^{log_3^9(tg2x)} \cdot arccos\sqrt[7]{x^{10}}$;

12. $y = ln(arctg5x)2^{cos\sqrt{x}}$;

13. $y = \frac{\sqrt[9]{5x^2+3x-37}}{ln(arccos7x)}$;

14. $y = \frac{arcsin^5(e^x+4)}{(2lnx-5)^7}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (arctg5x)^{lnx}$;

16. $y = (ctg4x^7)^{arcsin^5 4x}$;

17. $y = \frac{(x+7)^8 \cdot \sqrt[9]{(x+5)^2}}{(4x-5)^4}$;

18. $y = \sqrt[8]{\frac{x-3}{x+3}}tg(ln5x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $2x^5 \cdot lny = 7x^8 + 3cosy$;

20. $x - y = y \cdot arcsinx$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = tgt \\ y = sin2t + cos2t \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x = t(1 - sint) \\ y = t \cdot cost \end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Похідні обернених функцій.

Завдання 7.7.

Знайти похідні:

1. $y = 16 - \frac{7}{\sqrt[5]{x^4}} + 9x^4 + \frac{3\sqrt[3]{x}+7x^2}{x^5}$;

2. $y = \left(3x^3 - \sqrt{x}\right)arcsinx$;

3. $y = 4^{x+3} - 2arctg8x - 3log_9 5x$;

4. $y = \frac{2e^x-17}{5x^3+4x^2+12x}$;

5. $y = cos(log_7 3x)$;

6. $y = arccos^9 2x$;

7. $y = arctg9x^6$;

8. $y = \sqrt[4]{e^{ln^8 3x} - 12x^5}$;

9. $y = (5x^8 + 61x) \cdot ln^3 4x$;

10. $y = \frac{4ln(cos2x)}{x^6-4x^5}$;

11. $y = 8^{sin^4(lnx)} \cdot log_5^3\left(4x - \sqrt{x}\right)$;

12. $y = tg7x^9 \cdot \sqrt[3]{arcsin6x}$;

13. $y = \frac{\sqrt[3]{8x^7+6x^5+4x^2}}{ln(arctg9x)}$;

14. $y = \frac{arccos^7(5^x-9)}{(4log_6 x-5)^8}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (arcctg3x)^{\sqrt[3]{x}}$;

16. $y = (arscin2x^9)^{log_5^8 x}$;

17. $y = \frac{(11x+1)^2}{(x-4)^9 \cdot \sqrt[7]{(x-3)^2}}$;

18. $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}\, log_7(cos4x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $ln\frac{x^6}{y} = 4y \cdot arcsinx$;

20. $y = tg(2x + 3y)$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = t^3 + 3t \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x = 2ln(ctgt) + 1 \\ y = tgt + ctgt \end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Таблиця похідних. Похідні тригонометричних функцій.

Завдання 7.8.

Знайти похідні:

1. $y = \frac{5x^4+6\sqrt[4]{x^3}}{x^3} + 7x^3 + \frac{2}{x^6} - 13;$

2. $y = \left(2x^3 - \sqrt[8]{x}\right)arccosx;$

3. $y = 6ctg5x - 3log_4 3x + 5e^{3x};$

4. $y = \frac{13\cdot 7^x - 5}{6x^3 - 8x^2 + 4x};$

5. $y = tg(2x^5 + 5^x);$

6. $y = arctg^6 4x;$

7. $y = log_7^8 6x;$

8. $y = \sqrt[7]{cos^3 5x + 4x};$

9. $y = (12x^6 - 7x^4) \cdot e^{5ctgx^2};$

10. $y = \frac{5sin2x^6}{3x^2+5x};$

11. $y = 11^{cos^2 lnx} \cdot tg\frac{7}{x};$

12. $y = ctg(log_2 x) \cdot 2^{\sqrt{x^7}};$

13. $y = \frac{\sqrt[4]{7x^5 - 3x^3 - 15}}{ln(arcctg4x)};$

14. $y = \frac{arctg^4(7^x+3)}{(5cosx-1)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (sin8x)^{arctgx};$

16. $y = (arctg4x^5)^{2^{x^7}-9};$

17. $y = \frac{(x+7)^8 \cdot \sqrt[3]{(x-4)^7}}{(5x-3)^6};$

18. $y = \sqrt[4]{\frac{x-6}{x+6}}\, ln(ctg7x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $e^{x^3+6y} = 2x \cdot arcctgy;$

20. $cos(xy) = x + y.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 4t + e^t \\ y = 4t \cdot e^t \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = t \cdot cost - 2sint \\ y = t \cdot sint + 2cost \end{cases}.$

23. *Теоретичне питання.* Таблиця похідних. Похідна показникової функції.

Завдання 7.9.

Знайти похідні:

1. $y = 5x^2\sqrt{x} - \frac{2\sqrt[3]{x^4} - 5x}{x^3} + 8x^4 - 9$; 2. $y = (8x^6 + 5x^3)arcsinx$;

3. $y = arcctg2x + 3^{3x} - ln(x^2 + x)$; 4. $y = \frac{7sinx - 10}{2x^2 + 4x - 15}$;

5. $y = ctg(sin4x - 7)$; 6. $y = arcctg^8 5x$;

7. $y = e^{5x^6 - 8x^2 + 3}$; 8. $y = \sqrt[3]{tg^2 5x + 8x^9}$;

9. $y = (4x^7 + 13x^5) \cdot arcsin^4 6x$; 10. $y = \frac{8cos2x^3}{x^5 - 3x^2}$;

11. $y = 6^{arctg\sqrt{x}} \cdot log_7^4(e^{2x} + 4x)$; 12. $y = arcsin(lnx)e^{\sqrt{tgx^3}}$;

13. $y = \frac{\sqrt[5]{12x^3 - 2x^2 - 5x}}{log_3(cos5x)}$; 14. $y = \frac{arcctg^9(e^x + 4)}{(5sinx - 7)^3}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (cos5x)^{arcctgx}$; 16. $y = (arcctg6x^3)^{ln^8 x}$;

17. $y = \frac{(9x - 2)^7}{(x - 7)^4 \cdot \sqrt[5]{(x + 1)^3}}$; 18. $y = \sqrt[5]{\frac{x - 8}{x + 8}} tg(x^2 + 6x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $y^2 \cdot ln_5 x = 7x^3 - 5tgy$; 20. $y = x + arctg(x + y)$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = t^2 sint \end{cases}$; 22. $\begin{cases} x = sint(2 + cos^2 t) \\ y = cos^3 t \end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Таблиця похідних. Похідна логарифмічної функції.

Завдання 7.10.

Знайти похідні:

1. $y = 15 - 6\sqrt[7]{x^4} + \frac{2}{x^6} + \frac{7x\sqrt[5]{x}+3x^2}{x^4}$;

2. $y = (3x^2 - x) \cdot arcctgx$;

3. $y = log_3(2x - 7) + 5sin4x + e^{2x}$;

4. $y = \frac{3cosx+8}{12x^9-7x^5-x^2}$;

5. $y = arcsin\left(x^2 - 3\sqrt{x}\right)$;

6. $y = ln^7 6x$;

7. $y = 3^{9x^4-8x^5}$;

8. $y = \sqrt[10]{sin^5 2x - 5x^2}$;

9. $y = (10x^7 - 3x^5) \cdot arccos^3 9x$;

10. $y = \frac{4tg7x^3}{x^6-4x^5}$;

11. $y = 2^{sin^4 lnx} \cdot \sqrt{tg(3x + 2)}$;

12. $y = log_7(cosx)\sqrt[3]{5^{ctgx}}$;

13. $y = \frac{\sqrt[6]{7x^9-10x^3-52}}{log_4(sin3x)}$;

14. $y = \frac{sin^8(e^x-6)}{(6log_3 x+5)^9}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (tg4x)^{arcsinx}$;

16. $y = (ln5x^9)^{cos^4 3x}$;

17. $y = \frac{(x-2)^8 \cdot \sqrt[7]{(x+9)^4}}{(7x-4)^5}$;

18. $y = \sqrt[7]{\frac{x+3}{x-3}}ctg\frac{1}{x}$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $x^7 \cdot ctgy = 8ln^2 y - 7x$;

20. $x \cdot siny - y \cdot cosx = xy$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 2tgt \\ y = sin^2 t + sin2t \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x = e^{3t}cos^3 t \\ y = e^{3t}sin^3 t \end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Таблиця похідних. Похідні обернених тригонометричних функцій.

Завдання 7.11.

Знайти похідні:

1. $y = 7x^3 + \frac{12x^5 - x^2\sqrt{x}}{x^5} - \frac{8}{\sqrt[3]{x^5}} - 10;$ 2. $y = \left(4\sqrt[5]{x^7} - 9\right)arctgx;$

3. $y = 6e^{7x} - 4ctg3x - 5arcsin2x;$ 4. $y = \frac{5tgx - 2}{4x^5 + 17x^2 + 2x};$

5. $y = arccos\sqrt{3x^2 - 5};$ 6. $y = log_5^8 9x;$

7. $y = sin5x^2;$ 8. $y = \sqrt[6]{cos^3 2x + 6x^4};$

9. $y = (21x^4 + 7x) \cdot 7^{ln(3x-4)};$ 10. $y = \frac{3ctg8x^5}{x^{10} + 3x^6};$

11. $y = 6^{tg^5(2x-8)} \cdot log_3^6(arcsin4x);$ 12. $y = cos(2^x) \cdot tg\sqrt[7]{x^5};$

13. $y = \frac{\sqrt[7]{8x^5 + 2x^2 - 9x}}{log_5(tg3x)};$ 14. $y = \frac{cos^7(7^x - 2)}{(4arcsinx - 6)^2}.$

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (ctg10x)^{arccosx};$ 16. $y = (log_9 2x^7)^{arcsin^6 2x};$

17. $y = \frac{(8x-7)^{10}}{(x+3)^4 \cdot \sqrt[5]{(x+2)^7}};$ 18. $y = \sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}}\, log_9(ctg4x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $arcsinx^8 = 3y \cdot e^{x^2};$ 20. $x^3 + y^3 = 12xy.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t + 2tgt \\ y = arcsint \end{cases};$ 22. $\begin{cases} x = sint - \frac{t^2}{2}cost \\ y = cost + \frac{t^2}{2}sint \end{cases}.$

23. *Теоретичне питання.* Логарифмічне диференціювання.

Завдання 7.12.

Знайти похідні:

1. $y = \frac{6}{\sqrt[7]{x^8}} + 4 + 13x^4 + \frac{8x^9 - 5x^3\sqrt[3]{x}}{x^2}$; 2. $y = \left(11x^3 + 2\sqrt[7]{x}\right) \cdot e^x$;

3. $y = 6^{2x-3} + 2arcctg5x - log_7 4x$; 4. $y = \frac{7arcsinx + 15}{x^8 - 2x^5 + 3x^3}$;

5. $y = \sqrt[3]{arctg9x - 5x}$; 6. $y = e^{cos^2 x}$;

7. $y = tg3x^{13}$; 8. $y = \sqrt[8]{arcsin^4 5x + 9x^3}$;

9. $y = (3x^{11} - 9x^4) \cdot arccos^3 12x$; 10. $y = \frac{9^{ctg5x^4}}{x^2 - 2x}$;

11. $y = 9^{ln^7 cosx} \cdot arccos\sqrt{x}$; 12. $y = sin(ctg5x) ln^9 \sqrt[3]{x}$;

13. $y = \frac{\sqrt[8]{21x^4 - 3x^3 + 5x^2}}{log_2(ctg10x)}$; 14. $y = \frac{tg^4(4^x - 5)}{(8arccosx - 4)^9}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (arcsin5x)^{log_7 x}$; 16. $y = (sin8x^2)^{\sqrt[3]{x^2 - 6x + 5}}$;

17. $y = \frac{(x-6)^4 \cdot \sqrt[3]{(x-2)^{10}}}{(4x-1)^5}$; 18. $y = \sqrt[7]{\frac{x+8}{x-8}} \cdot e^{arctg3x}$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $ln(x^5 - 6y) = 4y^3 \cdot tgx$; 20. $y = 9 + x \cdot e^y$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 4(t - sint) \\ y = 4(1 - cost) \end{cases}$; 22. $\begin{cases} x = \frac{6t}{1+t^3} \\ y = \frac{6t^2}{1+t^3} \end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Диференціювання неявної функції.

Завдання 7.13.

Знайти похідні:

1. $y=\frac{\sqrt[7]{x^9}+5x^4}{x^3}+18x^3-7+\frac{6}{x^5}$;

2. $y=\left(6\sqrt[3]{x^5}-4x^9\right)\cdot 3^x$;

3. $y=5arctg2x+ln(5x-4)+7^{8x}$;

4. $y=\frac{4arccosx-13}{6x^2+3x^9-17x}$;

5. $y=arcctg(5^x+x^5)$;

6. $y=5^{x^3-x+12}$;

7. $y=cos6x^7$;

8. $y=\sqrt[11]{arccos^2 8x+5x}$;

9. $y=(2x^5-9x^7)\cdot arctg^4 2x$;

10. $y=\frac{7ln\left(2x^5-4x^2\right)}{x^7-12x}$;

11. $y=8^{sin^6(e^x-5)}\cdot arctg\frac{7}{x}$;

12. $y=ctg\left(e^{x^2}\right)arcsin\sqrt[3]{x}$;

13. $y=\frac{\sqrt[9]{5x^7+2x^5-3x^4}}{log_3(arccos4x)}$;

14. $y=\frac{ctg^5(6^x-9)}{(9lnx-8)^4}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y=(arccos6x)^{lnx}$;

16. $y=(cos5x^3)^{arcctg^6 9x}$;

17. $y=\frac{(3x-7)^2}{(x-4)^9\cdot\sqrt[6]{(x+1)^7}}$;

18. $y=\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}tg(ln5x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $x^2+2xy-y^2=4x$;

20. $e^{\frac{x}{y}}=sin(4x^7-2y^3)$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases}x=5cost\\ y=sin5t\end{cases}$;

22. $\begin{cases}x=\frac{1+t}{t^3}\\ y=\frac{5}{2t^2}-\frac{5}{t}\end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Диференціювання функцій, заданих параметрично.

Завдання 7.14.

Знайти похідні:

1. $y = 9\sqrt[3]{x^5} + \frac{2x^7 - x\sqrt[5]{x}}{x^3} + \frac{16}{x^4} - 9;$

2. $y = \left(\sqrt[6]{x^5} + 14x^2\right) \cdot lnx;$

3. $y = log_2(x^3 + 1) - e^{6x} + 5tg4x;$

4. $y = \frac{2arctgx - 6}{5x^8 - 6x^4 - 3};$

5. $y = e^{cos4x - 2x^3};$

6. $y = sin^2 11x;$

7. $y = ctg9x^{11};$

8. $y = \sqrt[5]{arctg^2 9x - 7x^4};$

9. $y = (17x^3 + 5x^2) \cdot arcctg^3 5x;$

10. $y = \frac{6log_9(5x^4 - 8)}{x^{11} + 3x^2};$

11. $y = 3^{cos^3(5x^4 - 7x)} \cdot arctg\sqrt{x};$

12. $y = log_9(5x^7)ctg^6 3x;$

13. $y = \frac{\sqrt[7]{4x^6 - 3x^7 - 5x}}{log_5(arcsin6x)};$

14. $y = \frac{arcsin^2(5^x - 1)}{(11log_6 x + 5)^7}.$

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (arctg6x)^{\sqrt{x}};$

16. $y = (tg8x^3)^{4^{x^2} - 7};$

17. $y = \frac{(x+3)^8 \cdot \sqrt[4]{(x+2)^3}}{(9x-2)^6};$

18. $y = \sqrt[8]{\frac{x-3}{x+3}} log_7(sin5x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1;$

20. $x \cdot arctgy^2 = x^8 - y^5.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 3t^4 + 4t^3 \\ y = t^2 - 2t \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = \frac{1 + lnt}{t^2} \\ y = \frac{5 + 2lnt}{t} \end{cases}.$

23. *Теоретичне питання.* Похідні вищих порядків.

Завдання 7.15.

Знайти похідні:

1. $y = 5x^2\sqrt[7]{x} - 4x^3 + \frac{3x^7 - 7\sqrt[5]{x^2}}{x^2} + 3;$ 2. $y = \left(12x^5 + \sqrt[3]{x}\right)log_8x;$

3. $y = 9arccos4x + 8e^{5x} - 4ctg3x;$ 4. $y = \frac{3arcctgx+18}{4x^9+4x^6+11x};$

5. $y = 2^{tg\left(x^5-8x\right)};$ 6. $y = cos^6 3x;$

7. $y = arcsin5x^8;$ 8. $y = \sqrt[7]{arcctg^8 5x - 4e^x};$

9. $y = (8x^2 - 15x) \cdot sin^4 5x;$ 10. $y = \frac{8arccos5x^4}{x^8-3x^5};$

11. $y = 4^{arctg4x^8} \cdot ln(cos7x^3);$ 12. $y = arcsin\sqrt{x} \cdot log_2 tgx;$

13. $y = \frac{\sqrt[6]{8x^2-3x^4-7x}}{log_5(arctg9x)};$ 14. $y = \frac{arccos^9(3^x+2)}{(5tgx-4)^3}.$

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (ln5x)^{\frac{1}{x}};$ 16. $y = (ctg6x^5)^{arcsin^4 3x};$

17. $y = \frac{(5x-7)^3}{(x-1)^4 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^8}};$ 18. $y = \sqrt[9]{\frac{x+5}{x-5}}arcsin\sqrt{x}.$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $x \cdot y - lny = 1;$ 20. $(x^2 - y) \cdot 2^x = arctgy.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = sin^2 t \\ y = cos^2 t \end{cases};$ 22. $\begin{cases} x = ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t} \\ y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}.$

23. *Теоретичне питання.* Диференціал функції. Властивості диференціалу.

Завдання 7.16.

Знайти похідні:

1. $y = 11 + 8x^7 - \frac{9}{x^5} + \frac{2x^6 - x^4\sqrt{x}}{x^7}$;

2. $y = \left(4\sqrt[9]{x^{13}} - 25\right)sinx$;

3. $y = 5log_7 6x - 4e^{7x} - 2arctg3x$;

4. $y = \frac{7e^x - 3}{2x^2 - 5x^5 - 7x}$;

5. $y = ln(3ctg6x - 8x)$;

6. $y = tg^5 4x$;

7. $y = arccos6x^{10}$;

8. $y = \sqrt[3]{5^{sin^3 x} - 12x^3}$;

9. $y = (11x^6 + 5x^4) \cdot cos^7 3x$;

10. $y = \frac{7arctg3x^9}{x^5 + 4x}$;

11. $y = 2^{cos^8(log_4 x)} \cdot arcctg\sqrt{x}$;

12. $y = log_9(tg7x)e^{\sqrt{cos2x}}$;

13. $y = \frac{\sqrt[5]{7x^{10} - 9x + 2x^5}}{log_7(arcctg6x)}$;

14. $y = \frac{arctg^7(4^x + 2)}{(7sinx + 2)^5}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (log_7 3x)^{\sqrt[3]{x}}$;

16. $y = (arcsin7x^2)^{ln^{14}x}$;

17. $y = \frac{(x+5)^9 \cdot \sqrt[6]{(x+2)^5}}{(8x-2)^3}$;

18. $y = \sqrt[7]{\frac{x-3}{x+3}}arccos\sqrt[3]{x}$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $ctgx^8 = 4x^7 + 3xy^3$;

20. $cos(xy) = 3x^4 + 6y^3$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x = (t^2 + 3)e^t \\ y = \frac{e^t}{t^2 - 4} \end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Основні правила диференціювання. Похідна добутку.

Завдання 7.17.

Знайти похідні:

1. $y = \frac{3x^7 - 4x^3\sqrt{x}}{x^5} + 9x^4 - \frac{2}{x^3} - 24$;

2. $y = \left(5x^2 + 6\sqrt[5]{x^4}\right)cosx$;

3. $y = 2 \cdot 5^{3x} - ctg7x - 9arccos4x$;

4. $y = \frac{4 \cdot 5^x - 3}{12x^3 + 7x^2 + 4x}$;

5. $y = log_9(5ctg4x - 9)$;

6. $y = ctg^7 4x$;

7. $y = arcsin2x^6$;

8. $y = \sqrt[9]{4^{arccosx^4} - 21x}$;

9. $y = (9x^8 - 13x^4) \cdot tg^7 9x$;

10. $y = \frac{10arcctg7x^2}{x^9 - 3x^5}$;

11. $y = 6^{ln^8 cosx} \cdot arctg(5x - 7)$;

12. $y = arccose^{x^5} \cdot tg\sqrt[5]{4x}$;

13. $y = \frac{\sqrt[4]{3x^3 - 8x^2 - 6x}}{ln(e^{7x} - 3)}$;

14. $y = \frac{arcctg^5(6^x - 7)}{(4cosx + 13)^2}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (sin2x)^{arctgx}$;

16. $y = (arccos9x^5)^{\sqrt[3]{ln^5 x}}$;

17. $y = \frac{(5x-7)^6}{(x-3)^2 \cdot \sqrt[4]{(x+5)^5}}$;

18. $y = \sqrt[4]{\frac{x-5}{x+5}}\, log_3(cos9x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $y^4 tgx = 7x + 2y^3$;

20. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3xy$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = ln(1 + t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x = (t^2 + 5)e^t \\ y = (2t - 4)e^t \end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Поняття похідної як швидкості зміни функції.

Завдання 7.18.

Знайти похідні:

1. $y = 8\sqrt[9]{x^8} + \frac{3\sqrt[6]{x^5}+4x}{x^4} - \frac{7}{x} + 15;$

2. $y = \left(3\sqrt[3]{x^2} - 4x^5\right) \cdot tgx;$

3. $y = 11^{4x} + tg3x + 2log_6(3x+5);$

4. $y = \frac{2lnx+9}{x^{10}-7x^8+3x^4};$

5. $y = cos(3lnx - 12);$

6. $y = arcsin^3 4x;$

7. $y = e^{tgx^2};$

8. $y = \sqrt[12]{ctg^5 8x + 4x^7};$

9. $y = (15x^6 - 3x^4) \cdot ctg^2 7x;$

10. $y = \frac{5sin14x^3}{x^{11}+8x^6};$

11. $y = 7^{arctg^5 lnx} \cdot sin\sqrt{x};$

12. $y = arccos(lnx) \cdot e^{tg^2 x};$

13. $y = \frac{\sqrt[3]{9x^2+5x^3+6x}}{ln(3^x+2)};$

14. $y = \frac{sin^2(e^x-15)}{(2arctgx-5)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (cos5x)^{arcctgx};$

16. $y = (arctg4x^3)^{log_7^5 x};$

17. $y = \frac{(x+3)^9 \cdot \sqrt[9]{(x-1)^2}}{(6x-5)^4};$

18. $y = \sqrt[3]{\frac{x+7}{x-7}}\, ln(arccosx).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $y^2 lnx = 7x^8 - 9y;$

20. $y = arccos(x - y).$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 8cos^3 t \\ y = 8sin^3 t \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) \\ y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}.$

23. *Теоретичне питання.* Основні правила диференціювання. Похідна частки.

Завдання 7.19.

Знайти похідні:

1. $y = \frac{4}{x^6} + 3 - \sqrt[5]{x^7} + \frac{2x^7 - x^3\sqrt{x}}{x^4}$;

2. $y = \left(6x^8 + 3x\sqrt{x}\right)ctgx$;

3. $y = arctg3x - 6ln2x - 4^{9x-3}$;

4. $y = \frac{9log_5 x - 3}{x^5 + 7x^3 - 12x^4}$;

5. $y = tg(e^{7x-13})$;

6. $y = arccos^7 3x$;

7. $y = ln7x^2$;

8. $y = \sqrt[6]{sin^5 3x + 8x^4}$;

9. $y = (2x^5 - 8x) \cdot arcsin^3 14x$;

10. $y = \frac{2cos9x^4}{x^3 + 6x^2}$;

11. $y = 8^{sin^2(x^2 + 2^x)} \cdot arcctg(lnx)$;

12. $y = cos9x^3 \cdot ln\sqrt[7]{x^2 + 3}$;

13. $y = \frac{\sqrt[4]{9x^9 - 7x^5 - 2x^3}}{ln(sin8x)}$;

14. $y = \frac{cos^6(9^x - 4)}{(7arcctgx + 3)^4}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (tg9x)^{lnx}$;

16. $y = (arcctg5x^9)^{7^{x^4} - 1}$;

17. $y = \frac{(12x-3)^6}{(x+4)^9 \cdot \sqrt[5]{(x-3)^2}}$;

18. $y = \sqrt[6]{\frac{x-5}{x+5}}\, tg(x^2 + 7x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $ctgx^5 = 4x^2 \cdot siny$;

20. $y^4 - 4xy + 6x^3 = 0$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = e^t sint \\ y = e^t cost \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x = \frac{e^{3t}}{\sqrt{1-t^2}} \\ y = arcsin3t \end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Поняття похідної як швидкості зміни функції.

Завдання 7.20.

Знайти похідні:

1. $y = \frac{4x^9 - 3\sqrt[7]{x}}{x^5} + 7x^2 - \frac{5}{x^3} + 16;$

2. $y = \left(4x^3 - \sqrt[8]{x}\right) arcsinx;$

3. $y = 8cos5x + log_7(x+9) - 7^{3x};$

4. $y = \frac{9sinx+5}{4x^7 - 5x^4 + 13x};$

5. $y = ctg(5log_6 3x);$

6. $y = arctg^7 7x;$

7. $y = log_3 8x^3;$

8. $y = \sqrt[9]{cos^4 5x - 9x^6};$

9. $y = (8x^3 + 4x^2) \cdot arccos^9 2x;$

10. $y = \frac{7tg5x^9}{x^6 + 13x^3};$

11. $y = 9^{log_7^2(9x-17)} \cdot arcsin\frac{1}{x};$

12. $y = arctg^5 2x \cdot e^{\sqrt{cosx^5}};$

13. $y = \frac{\sqrt[5]{4x^4 + 3x^3 + 2x^2}}{ln(cos12x)};$

14. $y = \frac{tg^7(e^x + 8)}{(5lnx + 9)^6}.$

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (ctg5x)^{log_4 x};$

16. $y = (ln3x^{11})^{sin^4 x};$

17. $y = \frac{(x-2)^4 \cdot \sqrt[9]{(x+1)^4}}{(3x-9)^6};$

18. $y = \sqrt[8]{\frac{x+3}{x-3}} log_4(ctg2x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $tg(y^2 - 4x) = x^2 lny;$

20. $sin(xy) + cos(xy) = x.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t^3 e^t \\ y = t^3 + 3e^t \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = 5(cost + tsint) \\ y = 5(sint - tcost) \end{cases}.$

23. *Теоретичне питання.* Визначення похідної.

.

Завдання 7.21.

Знайти похідні:

1. $y = 8\sqrt[9]{x^5} + \frac{3x^4+8x^5\sqrt{x}}{x^7} + \frac{3}{x^6} + 16;$ 2. $y = \left(3x^7 - \sqrt[5]{x^4}\right)arctgx;$

3. $y = 9^{4x} + log_7(2x-7) + cos4x;$ 4. $y = \frac{7cosx-3}{2x^2-4x-9};$

5. $y = arcsin(x^2 + lnx);$ 6. $y = arcctg^5 13x;$

7. $y = cos5x^4;$ 8. $y = \sqrt[4]{tg^2 14x + 32x^3};$

9. $y = (13x^6 - 8x) \cdot e^{arccosx^5};$ 10. $y = \frac{4ctg8x^{21}}{x^8-5x^3};$

11. $y = 10^{sin^2(3x+5)} \cdot arccos\sqrt[3]{x};$ 12. $y = log_2(tg7x) \cdot e^{sin^2 x};$

13. $y = \frac{\sqrt[6]{7x^6-11x^4-22}}{ln(tg4x)};$ 14. $y = \frac{ctg^8(8^x+5)}{(4log_3 x+5)^7}.$

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (arcsin3x)^{tgx};$ 16. $y = (log_{10}6x^5)^{cos^4 2x};$

17. $y = \frac{(5x-12)^2}{(x-3)^9 \cdot \sqrt[5]{(x+5)^2}};$ 18. $y = \sqrt[5]{\frac{x-2}{x+2}}cos(ln3x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $arccosy^4 = 4x^2 \cdot tgy;$ 20. $x^3 + x^2 y = xy^2 + y^3.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 2cost - cos2t \\ y = 2sint - sin2t \end{cases};$ 22. $\begin{cases} x = \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)cost + tsint \\ y = \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)sint - tcost \end{cases}.$

23. *Теоретичне питання.* Техніка диференціювання елементарних функцій.

Завдання 7.22.

Знайти похідні:

1. $y=\frac{10}{\sqrt[3]{x^4}}+7x^9-11+\frac{6x^3-3\sqrt[6]{x^5}}{x^8}$;

2. $y=(8x^3+4x)arccosx$;

3. $y=4ln2x+2tg(4x-1)+5^{2x}$;

4. $y=\frac{4tgx+5}{4x^7-8x^3-11x^2}$;

5. $y=arccos(5^{5x}-3)$;

6. $y=ln^7 5x$;

7. $y=sin2x^9$;

8. $y=\sqrt[5]{ctg^7 8x-9x^6}$;

9. $y=(7x^8-19x^4)\cdot 2^{tgx^5}$;

10. $y=\frac{6arctg4x^7}{x^7-4x^5}$;

11. $y=9^{ln^8 tgx}\cdot arcctg\sqrt{x^3}$;

12. $y=cos\left(\sqrt[3]{x}-9\right)e^{tg2x}$;

13. $y=\frac{\sqrt[7]{2x^3-8x^4+5x}}{ln(ctg7x)}$;

14. $y=\frac{arcsin^6(e^x+2)}{(7cosx-5)^4}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y=(arccos4x)^{tgx}$;

16. $y=(sin9x^2)^{arcsin^3 7x}$;

17. $y=\frac{(x+7)^9\cdot\sqrt[6]{(x-5)^5}}{(4x-13)^2}$;

18. $y=\sqrt[3]{\frac{x-4}{x+4}}arccos\sqrt{x}$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $x^4+4xy+y^4=4(x+y)$;

20. $tg(x^2+y^2)=x\cdot cosy$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases}x=arccost\\ y=\sqrt{1-t^2}\end{cases}$;

22. $\begin{cases}x=\frac{7t^2}{1+t^2}\\ y=\frac{14t}{1+t^2}\end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Похідна складної функції.

Завдання 7.23.

Знайти похідні:

1. $y = 7x + 25 - \frac{2\sqrt[7]{x} - 5x^2}{x^4} + \frac{9}{x^{10}}$;

2. $y = \left(\sqrt[5]{x^7} - 4x^3\right) \cdot e^x$;

3. $y = 10^{2x+5} - arcsin4x + log_5 3x$;

4. $y = \frac{3arcsinx - 9}{9x^7 - 7x^9 - 13}$;

5. $y = arctglog_4 5x$;

6. $y = e^{sin^4 x}$;

7. $y = tg5x^{12}$;

8. $y = \sqrt[4]{ln^3 2x + 7x^5}$;

9. $y = (9x^7 - 6x^4) \cdot arcctg^5 3x$;

10. $y = \frac{5cos8x^{10}}{x^3 - 4x}$;

11. $y = 8^{ctg^5(3x^2 - 7x)} \cdot arcsin(lnx)$;

12. $y = ln^7(sin3x)\sqrt[7]{tg^3 6x}$;

13. $y = \frac{\sqrt[8]{6x^5 + 3x^8 + 2x}}{ln(arcsin5x)}$;

14. $y = \frac{arccos^7(8^x - 4)}{(3tgx - 12)^4}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (arctg7x)^{2x^5}$;

16. $y = (tg2x^8)^{arccos^7 6x}$;

17. $y = \frac{(7x-2)^6}{(x-2)^3 \cdot \sqrt[7]{(x-1)^3}}$;

18. $y = \sqrt[9]{\frac{x-6}{x+6}}\, log_2(ctg4x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $y - x = y \cdot e^x$;

20. $ln^2 y = 7x^3 \cdot arcctgy$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \frac{t}{t^2-1} \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x = e^{5t}cos3t \\ y = e^{5t}sin3t \end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Похідні обернених функцій.

Завдання 7.24.

Знайти похідні:

1. $y = 5 - \frac{1}{\sqrt[10]{x^3}} + 4x^3 + \frac{7\sqrt[4]{x^3}+2x^7}{x^5}$; 2. $y = (2x^9 - 3x^3) \cdot 6^x$;

3. $y = 7cos4x - log_2(5x + 4) - 6^{5x}$; 4. $y = \frac{4arccosx+2}{5x^2-3x-15}$;

5. $y = arcctg(sin5x - 4)$; 6. $y = log_9^4 6x$;

7. $y = ctg12x^5$; 8. $y = \sqrt[8]{cos^6 5x - 9x^3}$;

9. $y = (5x^6 - 9x^3) \cdot sin^7 6x$; 10. $y = \frac{3 \cdot e^{sin^5 3x}}{x^{14}-14x^8}$;

11. $y = 7^{sin^5(log_2 x)} \cdot tg\sqrt{x}$; 12. $y = log_9(ctg4x)e^{\sqrt{sin5x}}$;

13. $y = \frac{\sqrt[9]{12x^3-3x^4-6}}{ln(arccos4x)}$; 14. $y = \frac{arctg^9(e^x+6)}{(2lnx-7)^5}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (arcctg8x)^{lnx}$; 16. $y = (ctg5x^4)^{3^{x^3}+7}$;

17. $y = \frac{(x+4)^3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^4}}{(7x-1)^5}$; 18. $y = \sqrt[7]{\frac{x+6}{x-6}}ctg(x^2 + 4x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $x^6 + y^6 = 6x^3y^3$; 20. $\sqrt{5x - y^2} = x \cdot lny$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$; 22. $\begin{cases} x = 4ctgt \\ y = 6sin^2t + 3sin2t \end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Таблиця похідних. Похідні тригонометричних функцій.

Завдання 7.25.

Знайти похідні:

1. $y = 3x^4\sqrt[5]{x} + \frac{12x^7+\sqrt{x^9}}{x^4} - 3x^5 - 7$; 2. $y = \left(10\sqrt{x^7} - 8x\right) \cdot lnx$;

3. $y = (4x-1)^5 - ctg3x + log_7 8x$; 4. $y = \frac{2arctgx-9}{7x^9+7x^5-5}$;

5. $y = e^{tg\left(4x^3-12x\right)}$; 6. $y = sin^5 3x$;

7. $y = arcsin7x^4$; 8. $y = \sqrt[6]{log_4^9 5x - 14x^5}$;

9. $y = (4x^6 + 9x^5) \cdot cos^{10} 4x$; 10. $y = \frac{9^{arccosx^5}}{x^4-4x^5}$;

11. $y = 6^{cos^4\left(2x^3-6\right)} \cdot log_5 \frac{4}{x}$; 12. $y = arccos\sqrt[9]{x} \cdot ctg^5 7x$;

13. $y = \frac{\sqrt[8]{5x^2+2x-32}}{ln(arctg8x)}$; 14. $y = \frac{arcctg^7(4^x+3)}{(5log_7 x-2)^6}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (sin6x)^{log_5 x}$; 16. $y = (arcsin9x^4)^{tg^2 7x}$;

17. $y = \frac{(14x-3)^4}{(x+2)^5 \cdot \sqrt[3]{(x-2)^4}}$; 18. $y = \sqrt[6]{\frac{x+3}{x-3}} log_6(cos5x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $ctgx^2 = 5y^5 \cdot tgx$; 20. $ln(x+y) = x^3 + y^3$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t \cdot lnt \\ y = \frac{lnt}{t} \end{cases}$; 22. $\begin{cases} x = (t^2+8)sin2t \\ y = (t^2-8)cos2t \end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Таблиця похідних. Похідна показникової функції.

Завдання 7.26.

Знайти похідні:

1. $y = 1 - 2\sqrt[8]{x^3} + \frac{7}{x^5} + \frac{5x^4 - 6x\sqrt{x}}{x^3}$;

2. $y = \left(3\sqrt[3]{x^5} + 11\right)log_3 x$;

3. $y = 3^{8x+7} + arccos2x - 4ln7x$;

4. $y = \frac{5arcctgx+8}{4x^2-2x^3-5x}$;

5. $y = 2^{\sqrt{tg5x}}$;

6. $y = cos^2 10x$;

7. $y = arctg6x^8$;

8. $y = \sqrt[6]{sin^9 8x + 8x^2}$;

9. $y = (3x^9 - 9x^7) \cdot tg^3 8x$;

10. $y = \frac{8ctg3x^5}{x^7 - 14x^5}$;

11. $y = 5^{sin^3\sqrt{x}} \cdot arcsin3x^8$;

12. $y = log_8\left(e^{sin5x}\right)tg^4 6x$;

13. $y = \frac{\sqrt[7]{2x^6+3x^5-4x^4}}{ln(arcctg3x)}$;

14. $y = \frac{sin^8(6^x-9)}{(2arccosx-5)^9}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (cos4x)^{\sqrt[3]{x}}$;

16. $y = (arcctg5x^5)^{\sqrt{log_7 x}}$;

17. $y = \frac{(x-2)^6 \cdot \sqrt[6]{(x-3)^5}}{(2x-9)^4}$;

18. $y = \sqrt[7]{\frac{x-2}{x+2}}ln(arctg4x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $cos^2 x = 9x^3 + 5y^4$;

20. $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 5(x - y)$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t \cdot sint \\ y = t \cdot cost \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x = (t+1)ln^2 t \\ y = \frac{ln^2 t}{t+1} \end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Таблиця похідних. Похідна логарифмічної функції.

Завдання 7.27.

Знайти похідні:

1. $y = 9x^2 + \frac{\sqrt[3]{x^8} - 9x^8}{x^4} + 21 - \frac{4}{x^5}$;

2. $y = \left(5x^5 - \sqrt[9]{x^8}\right) \cdot sinx$;

3. $y = 2^{4x+5} + cos3x + 4arctg7x$;

4. $y = \frac{6e^x - 13}{4x^2 + 3x^4 + 9x}$;

5. $y = ln(e^x - 2x^2)$;

6. $y = tg^6 8x$;

7. $y = arcctg5x^2$;

8. $y = \sqrt[5]{cos^3 7x - 24x^5}$;

9. $y = (5x^8 + 4x^3) \cdot ctg^{11} 3x$;

10. $y = \frac{9sin7x^3}{x^6 - 2x^4}$;

11. $y = 4^{tg^7(5^x + 2)} \cdot sin\sqrt{x}$;

12. $y = arctg\sqrt[6]{x} \cdot e^{sin^5 2x}$;

13. $y = \frac{\sqrt[5]{4x^5 - 3x^3 - 2x}}{log_4(cos2x)}$;

14. $y = \frac{cos^3(9^x + 6)}{(9arctgx - 7)^4}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (tgx)^{arcsinx}$;

16. $y = (sin8x^8)^{\frac{12}{arccos3x}}$;

17. $y = \frac{(4x-7)^5}{(x-9)^4 \cdot \sqrt[3]{(x+3)^7}}$;

18. $y = \sqrt[6]{\frac{x-4}{x+4}} log_7(x^2 - x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $arctgy^2 = x^2 \cdot lny$;

20. $sin(xy) - 8xy = 35$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t \cdot 5^t \\ y = t^5 \cdot log_5 t \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x = cost\sqrt{2cos8t} \\ y = sint\sqrt{2cos8t} \end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Таблиця похідних. Похідні обернених тригонометричних функцій.

Завдання 7.28.

Знайти похідні:

1. $y = \frac{13}{\sqrt[5]{x^7}} + 22 - 5x^{10} + \frac{9\sqrt[6]{x^{11}} - 4x^2}{x^4}$; 2. $y = \left(2x^{10} + \sqrt[3]{x}\right) \cdot cosx$;

3. $y = 5e^{6x} + arctg7x - ln(x^2 + 1)$; 4. $y = \frac{5 \cdot 8^x - 9}{4x^4 + 7x - 3x^8}$;

5. $y = log_9(sin5x - 8)$; 6. $y = ctg^4 2x$;

7. $y = e^{tgx^4}$; 8. $y = \sqrt[5]{arcsin^4 9x - 22x^3}$;

9. $y = (2x^{14} - 5x^4) \cdot arccos^2 4x$; 10. $y = \frac{8tg13x^2}{x^3 + 3x^5}$;

11. $y = 3^{cos^4 lnx} \cdot arctg\sqrt[7]{x^5}$; 12. $y = arccos(e^{2x}) \cdot sinx^4$

13. $y = \frac{\sqrt[4]{7x^3 - 3x^4 + 6x}}{log_{10}(cos5x)}$; 14. $y = \frac{tg^5(e^x - 22)}{(7lnx + 5)^8}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (arccos2x)^{\frac{1}{x}}$; 16. $y = (cos4x^2)^{7^{x^5} - 1}$;

17. $y = \frac{(x+5)^2 \cdot \sqrt[4]{(x+2)^3}}{(6x-9)^5}$; 18. $y = \sqrt[4]{\frac{x-9}{x+9}} cos\sqrt{x+5}$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $x \cdot sin^2 y = 5y^2 - x$; 20. $xlny - ylnx = 7(x + y)$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 2ctgt \\ y = cos^2 t - cos2t \end{cases}$; 22. $\begin{cases} x = (t^2 + 4)e^{3t} \\ y = \frac{e^{3t}}{t^2 + 4} \end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Логарифмічне диференціювання.

Завдання 7.29.

Знайти похідні:

1. $y = 17\sqrt{x^5} + \frac{10x^6 - \sqrt[7]{x^4}}{x^5} + \frac{8}{x^3} - 25;$ 2. $y = \left(4x^8 - 5x\sqrt[3]{x}\right) \cdot tgx;$

3. $y = 8log_3 9x - 4sin5x + 3^{x^2-6};$ 4. $y = \frac{6lnx - 5}{2x^4 + 3x^3 - 9};$

5. $y = sin(ln4x + 3);$ 6. $y = arccos^3 9x;$

7. $y = 3^{ctgx^8};$ 8. $y = \sqrt[6]{arctg^{13} 2x + 4x^5};$

9. $y = (7x^9 - 11x^3) \cdot arcsin^4 9x;$ 10. $y = \frac{11cos8x^7}{x^8 - 3x^4};$

11. $y = 2^{arcsin^5\sqrt{x}} \cdot tg(7x^6 + 5x^2);$ 12. $y = ln(ctg3x) \cdot \sqrt{cos3x};$

13. $y = \frac{\sqrt[3]{5x^5 - 3x^3 - x}}{log_8(tg6x)};$ 14. $y = \frac{ctg^9(7^x - 6)}{(4log_3 x - 2)^3}.$

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (arctg6x)^{log_5 x};$ 16. $y = (tg7x^{13})^{arccos^4 5x};$

17. $y = \frac{(5x-6)^7}{(x+3)^4 \cdot \sqrt[6]{(x+1)^5}};$ 18. $y = \sqrt[4]{\frac{x+7}{x-7}} log_9(sin5x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $ln\frac{y}{x} = x^2 \cdot y^5;$ 20. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 9x^3 \cdot y^3.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 2t^2 - t^4 \\ y = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases};$ 22. $\begin{cases} x = arcsin\sqrt{t} \\ y = t \cdot ln(1-t) \end{cases}.$

23. *Теоретичне питання.* Диференціювання неявної функції.

Завдання 7.30.

Знайти похідні:

1. $y = 3x^5\sqrt[3]{x^2} - 5x + 24 + \frac{4x^7 - 9\sqrt[4]{x}}{x^{10}}$; 2. $y = \left(6x^7 + 4\sqrt[5]{x}\right) \cdot ctgx$;

3. $y = ln(2x-7) + ctg8x - 9^{4x-2}$; 4. $y = \frac{2log_3 x - 1}{7x^8 + 6x^5 + 4x}$;

5. $y = cos(e^{7x} - 3)$; 6. $y = arcsin^5 6x$;

7. $y = ln8x^3$; 8. $y = \sqrt[14]{arcctg^3 2x - 5x^7}$;

9. $y = (8x^2 - 15x^7) \cdot arctg^4 6x$; 10. $y = \frac{5arccos4x^9}{x^3 + 2x^7}$;

11. $y = 9^{ln^3 sinx} \cdot arcctg\sqrt{x}$; 12. $y = arctge^{5x} \cdot \sqrt[3]{ln^2 3x}$;

13. $y = \frac{\sqrt[5]{4x^7 - 2x^3 + 6x}}{log_7(ctg3x)}$; 14. $y = \frac{arcsin^8(2^x - 1)}{(5tgx - 11)^7}$.

Знайти похідну функції за допомогою методу логарифмічного диференціювання:

15. $y = (arcctg4x)^{sinx}$; 16. $y = (ctg9x^4)^{log_6^4(x-5)}$;

17. $y = \frac{(x+4)^4 \cdot \sqrt[3]{(x+3)^7}}{(7x-1)^5}$; 18. $y = \sqrt[8]{\frac{x-1}{x+1}} arctg(lnx)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$; 20. $ctg(x^3 - 3y) = 2y \cdot e^x$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = ln(1+t) \\ y = arcctg\sqrt{t} \end{cases}$; 22. $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} cost - t \cdot sint \\ y = \frac{t^2}{2} sint + t \cdot cost \end{cases}$.

23. *Теоретичне питання.* Диференціювання функцій, заданих параметрично.

Розділ 8 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ В НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕННЯХ. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ТА ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ. ГРАНИЧНИЙ АНАЛІЗ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

У розділі 8 «Збірника тестових завдань» ми скористаємося набутими навичками у диференціюванні функцій для розв'язання прикладних задач, а саме: наближених обчислень за допомогою диференціала, застосування геометричного та фізичного сенсу похідної, граничного аналізу економічних процесів. Відповідний теоретичний матеріал читач може знайти у підручнику «Вищої математики для менеджерів».

Приклади розв'язання типового варіанта

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $15^{0,25}$.

Розв'язання. За формулою (4.31):

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx,$$

Зрозуміло, що нам потрібно визначитися з виглядом функції $f(x)$, величинами x_0 та dx, знайти похідну функції, обчислити значення функції та її похідної у точці x_0. Виконаємо всі названі дії:

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x};$$
$$x_0 = 16; \quad dx = -1;$$
$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$$

$$f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2;$$
$$f'(x_0) = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32}.$$

Підставимо отримані значення у формулу, знайдемо наближене значення функції:

$$15^{0,25} \approx 2 + \frac{1}{32} \cdot (-1) = 1,96875.$$

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{2x+3}{2x-3}$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. За формулою (4.35), рівняння нормалі має вигляд:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Обчислимо значення y_0 – ординати точки дотику. Знайдемо похідну функції, обчислимо її значення в точці дотику:

$$y_0 = y(x_0) = \frac{2 \cdot 1 + 3}{2 \cdot 1 - 3} = -5;$$
$$y' = \frac{2(2x-3) - 2(2x+3)}{(2x-3)^2} = \frac{4x - 6 - 4x - 6}{(2x-3)^2} = -\frac{12}{(2x-3)^2};$$
$$y'(x_0) = -\frac{12}{(2 \cdot 1 - 3)^2} = -12.$$

Підставимо у формулу (4.35):

$$y + 5 = -\frac{1}{-12}(x - 1);$$
$$y = \frac{1}{12}x - \frac{1}{12} - 5;$$
$$y = \frac{1}{12}x - \frac{61}{12}.$$

3. З'ясувати, який кут утворює з віссю абсцис дотична до графіка функції $y = x^2 - 5x + 8$, яка проведена в точці $x_0 = 3$. Записати рівняння дотичної.

Розв'язання. За визначенням 4.6, кутовий коефіцієнт дотичної (кут її нахилу до осі абсцис) дорівнює значенню похідної в точці дотику (4.32):

$$k_\partial = y'(x_0).$$

Знайдемо похідну:

$$y' = 2x - 5;$$

обчислимо її значення у точці дотику:

$$y'(x_0) = 2 \cdot 3 - 5 = 1.$$

За визначенням кутового коефіцієнта $k_\partial = 1 = \operatorname{tg} \varphi$;

отже, дотична утворює з віссю абсцис кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Запишемо рівняння дотичної (4.33):

$$y - y_0 = f'(x_0\,)(x - x_0).$$

Обчислимо $y_0 = 3^2 - 5 \cdot 3 + 8 = 2$. Підставимо у формулу:

$y - 2 = 1(x - 3)$.

Остаточно маємо:

$$y = x - 1.$$

4. Закон руху матеріальної точки $s = t^3 - 2t^2 + 4t + 9$. Визначити швидкість та прискорення руху через $t = 2$ с.

Розв'язання. За формулами (4.36) та (4.37) швидкість та прискорення руху дорівнюють першої та другої похідним відповідно від закону руху матеріальної точки:

$v = s'(t)$; $\qquad\qquad a = v'(t) = s''(t)$.

Знайдемо похідні та обчислимо їх значення через $t = 2$с:

$v = s' = 3t^2 - 4t + 4$; $\qquad v(2) = 12 - 8 + 4 = 8\,{}^{м}/_{с}$;
$a = v' = s'' = 6t - 4$; $\qquad a(2) = 12 - 4 = 8\,{}^{м}/_{с^2}$.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 2{,}1x^3 + 0{,}4x^2 - 15x + 284$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 20$.

Розв'язання. Середні витрати визначаються за формулою (4.39) як

$$y_1 = \frac{C(x)}{x},$$

а граничні витрати (4.38) як

$$y' = C'(x).$$

Знайдемо їх

$$y_1 = \frac{C(x)}{x} = \frac{2{,}1x^3 + 0{,}4x^2 - 15x + 284}{x} = 2{,}1x^2 + 0{,}4x - 15 + \frac{284}{x},$$
$$y' = C'(x) = 6{,}3x^2 + 0{,}8x^2 - 15;$$

і обчислимо їх значення $x = 20$:

$$y_1(20) = 2{,}1 \cdot 400 + 0{,}4 \cdot 20 - 15 + \frac{284}{20} =$$
$$= 840 + 8 - 15 + 14{,}2 = 847{,}2;$$
$$y'(20) = 6{,}3 \cdot 400 + 0{,}8 \cdot 20 - 15 = 2520 + 16 - 15 = 2521.$$

З отриманих результатів можемо зробити висновок, що на цьому рівні виробництва (кількості продукції, що випускається) середні витрати на виробництво однієї одиниці продукції складають 847,2 грошових одиниць, а збільшення обсягу на одну одиницю продукції буде коштувати фірмі 2 521 грошових одиниці.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{7}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 8t + 2150$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) у другому кварталі $(t = 6)$.

Розв'язання. За визначенням:

- ✓ продуктивність праці – похідна від обсягу виробництва: $z(t) = u'(t)$;
- ✓ швидкість зміни продуктивності праці – похідна від продуктивності праці: $v_z = z'(t)$;
- ✓ темп зміни продуктивності праці – логарифмічна похідна від продуктивності праці: $T_z = \frac{z'(t)}{z(t)}$.

Знайдемо похідні:

$$z(t) = u'(t) = 7t^2 - 5t + 8;$$
$$v_z = z'(t) = 14t - 5;$$

$T_z = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{14t-5}{7t^2-5t+8}$.

Обчислимо їхні значення

а) на початку року $(t = 0)$:

$z(0) = 8$ (од./міс.); $v_z(0) = -5$ (од./$міс.^2$); $T_z(0) = -\frac{5}{8}$ (од./міс.);

б) у другому кварталі $(t = 6)$:
$z(6) = 7 \cdot 36 - 5 \cdot 6 + 8 = 230$ (од./міс.);
$v_z(6) = 14 \cdot 6 - 5 = 79$ (од./$міс.^2$);
$T_z(6) = \frac{79}{230}$ (од./міс.).

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 27 + 1{,}7x + 0{,}8x^2\sqrt{x}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 25 млрд. грош. од.

Розв'язання. За формулою (4.40) національний доход складає $x = C(x) + S(x)$. Звідси функція збереження є

$$S(x) = x - C(x).$$

Знайдемо граничну прихильність до споживання

$$C'(x) = 1{,}7 + 0{,}8 \cdot \frac{5}{2}x\sqrt{x} = 1{,}7 + 0{,}2x\sqrt{x}.$$

та її значення

$$C'(25) = 1{,}7 + 0{,}2 \cdot 25\sqrt{25} = 26{,}7 \text{ (млрд. грош. од.)}.$$

Гранична прихильність до збереження

$$S'(x) = 1 - C'(x) = 1 - 1{,}7 - 0{,}2x\sqrt{x} = -0{,}7 - 0{,}2x\sqrt{x},$$

а її значення

$$S'(25) = -0{,}7 - 0{,}2 \cdot 25 \cdot \sqrt{25} = -25{,}7 \text{ (млрд. грош.од.)}.$$

8. Відомі функції попиту $q=\frac{11p+17}{p+1}$ і пропозиції $s=p+7$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

Розв'язання.

а) Рівноважна ціна визначається з умови $q=s$, тобто

$$\frac{11p+17}{p+1}=p+7;$$

$11p+17=p^2+8p+7;$
$p^2-3p-10=0;$
$p_1=-2$ (не має сенсу);
$p_2=5.$
Отже, рівноважна ціна $p=5$ (грош.од.).

б) Знайдемо еластичність за попитом

$$E_p(q)=\frac{p}{q}\cdot q_p'=\frac{p(p+1)}{11p+17}\cdot\frac{11(p+1)-(11p+17)\cdot 1}{(p+1)^2}=-\frac{6p}{(11p+17)(p+1)}$$

і за пропозицією

$$E_p(s)=\frac{p}{s}\cdot s_p'=\frac{p}{p+7}\cdot 1=\frac{p}{p+7}.$$

Для рівноважної ціни $p=5$:

$$E_p(q)\big|_{p=5}=-\frac{30}{72\cdot 6}=-\frac{5}{72}=-0{,}069;$$
$$E_p(s)\big|_{p=5}=\frac{5}{12}=0{,}42.$$

Враховуючи, що отримані значення еластичності (за абсолютним значенням) не перевищують одиниці, то попит і пропозиція конктретного товару при рівноважній (ринковій) ціні нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не призведе до різкої зміни попиту і пропозиції.

Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів

Завдання 8.1.

1. Знайти наближене значення функції $y = 5x^4 - 3x^2 + +6lnx$ при $x = 1{,}005$.

2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{x+8}$ у точці з абсцисою $x_0 = -4$.

3. Дано параболу $y = -x^2$. З'ясувати, у якій точці параболи нормаль до неї перпендикулярна прямій $y = 2x - 1$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$. З'ясувати моменти часу, в яких її швидкість дорівнювала нулю.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 2{,}8x^3 - 0{,}2x^2 + 6x + 352$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 15$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{8}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 5t + 1120$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) у другому кварталі $(t = 6)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 57 + 1{,}1x^2 + \frac{0{,}35}{\sqrt{x}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 36 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{5p+14}{p+2}$ і пропозиції $s = p + 4$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Диференціал функції.

Завдання 8.2.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $arctg1{,}003$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{3}{2}x^2 - 7x + +16$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

3. З'ясувати, в якій точці кривої $y = \sqrt[3]{x}$ кут нахилу дотичної до додатного напрямку осі абсцис дорівнює $\frac{\pi}{6}$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 - t^2 + +5t - 16$. Визначити швидкість руху через $t = 2$ с.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 1{,}5x^3 - 0{,}4x^2 + 9x + 283$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 30$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 6t + 4350$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) наприкінці року $(t = 12)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 26 + 2{,}7x^3 + 0{,}76x^2\sqrt{x}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 144 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{7p+7}{p+3}$ і пропозиції $s = p + 1$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Властивості диференціалу.

Завдання 8.3.

1. Знайти наближене значення функції $y = 2x^3 + 3x^2 - 5arcsinx$ при $x = 0{,}01$.

2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 6x - 13$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.

3. На кривій $y = x^2 - 7x + 13$ знайти точку, нормаль в якій паралельна прямій $y = \frac{1}{5}x + 2$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 12t + +7$. З'ясувати, у який момент часу її швидкість дорівнювала 4 м/с.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 3{,}2x^3 - 0{,}1x^2 + 7x + 427$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 22$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{7}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 9t + 455$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) у першому кварталі $(t = 3)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 39 + 2{,}4x^2 + 0{,}8x\sqrt{x}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 64 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{5p+13}{p+5}$ і пропозиції $s = p + 2$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Застосування диференціалу у наближених обчисленнях.

Завдання 8.4.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $sin29^0$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = 5x^2 - 3x + 19$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

3. Записати рівняння дотичної до параболи $y = x^2 - 3x + 2$ у точці перетину її з віссю ординат.

4. Дві матеріальні точки рухаються прямолінійно рівномірно вздовж осі абсцис, їхні закони руху задані рівняннями $s = t^2 + 8t - 5$ і $s = 3t^2 - 5t + 1$. Визначити, у який момент часу їх швидкості будуть рівними.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 1{,}1x^3 - 0{,}7x^2 + 13x + 522$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 45$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{9}{3}t^3 + t^2 - 7t + 4250$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) у першому кварталі $(t = 3)$; б) у другому кварталі $(t = 6)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 19 + 3{,}1x^3 + 0{,}12x^5\sqrt{x}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 225 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{11p+17}{p+4}$ і пропозиції $s = p + 3$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Геометричний сенс похідної.

Завдання 8.5.

1. Знайти наближене значення функції $y = 3x^8 + 2x^5 - -4e^x$ при $x = 0{,}03$.

2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = ln(1 + x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$.

3. Записати рівняння нормалей до кривої $y = x^2 + 2x - -1$ у точках перетину її з кривою $y = -2x^2$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = t^3 - 2t^2 - t$. Визначити швидкість та прискорення матеріальної точки через $t = 5$ с після початку руху.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 20x - 0{,}05x^3$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва, і обчислити їх значення при $x = 10$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = 5t^3 + \frac{9}{2}t^2 - 3t + 250$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) у лютому $(t = 2)$; б) у серпні $(t = 9)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 39 + 0{,}25x + 0{,}36x^{\frac{4}{5}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 32 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{12p+24}{p+4}$ і пропозиції $s = p + 2$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Геометричний сенс диференціалу.

Завдання 8.6.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $sin61^0$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{x^2-5}{2x^2+1}$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

3. З'ясувати кут нахилу дотичної до графіку функції $y = \frac{1}{4}x^4$ у точці $M\left(1; \frac{1}{4}\right)$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = 9t - 2t^3$. Визначити швидкість руху та прискорення матеріальної точки через $t = 5$ с.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = x^3 - 0{,}4x^2 + 96x$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 10$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{2}{3}t^3 + 8t^2 - 7t + 132$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) у першому кварталі $(t = 6)$; б) наприкінці року $(t = 12)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 29 + 1{,}4x^3 + \frac{8}{x}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 16 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{5p+17}{p+7}$ і пропозиції $s = p + 1$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Фізичний сенс похідної.

Завдання 8.7.

1. Знайти наближене значення функції $y = 9x^3 + 7x^2 - -3lnx$ при $x = 1{,}01$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = tg4x$ у точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{16}$.

3. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{4 - 5x}$ у точці її перетину з прямою $2x + y - 1 = 0$.

4. Дві матеріальні точки рухаються прямолінійно рівномірно, їхні закони руху задані рівняннями $s = 3t^2 + 7t + 14$ і $s = 2t^2 + 4t + 24$. Визначити швидкості матеріальних точок у момент зустрічі.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 3{,}4x^3 + 1{,}1x^2 - 7x + 284$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва, і обчислити їхні значення при $x = 25$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 2t + 375$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) у другому кварталі $(t = 6)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 28 + 1{,}7x^2 + \frac{0{,}74}{\sqrt{x}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 36 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{4p+33}{p+6}$ і пропозиції $s = p + 2$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Граничні та середні витрати виробництва.

Завдання 8.8.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $arcctg 0{,}098$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = e^{-3x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$.

3. Записати рівняння горизонтальної дотичної до параболи $y = 3x^2 + 6x + 7$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{3}{4}t^4 - \frac{5}{3}t^3 + 2t^2 - -4t + 3$. Визначити швидкість руху через $t = 1$ с.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = \sqrt{x^2 - x + 7} - 1$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 2$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{2}{3}t^3 + t^2 - 9t + 2126$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) наприкінці року $(t = 12)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 17 + 3{,}4x^2 - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 64 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{13p+37}{p+7}$ і пропозиції $s = p + 5$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Продуктивність праці. Швидкість зміни продуктивності праці. Темп зміни продуктивності праці.

Завдання 8.9.

1. Знайти наближене значення функції $y = \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 2e^x$ при $x = 0{,}02$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = x + \frac{2}{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

3. Записати рівняння дотичних до графіку функції $y = x^3 - 12x + 3$, паралельних прямій $4x - y + 5 = 0$.

4. Вздовж осі абсцис рухаються прямолінійно дві матеріальні точки, закони руху яких $s = t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 13t - 9$ і $s = \frac{2}{3}t^3 - 6t^2 + 7t + 5$. З'ясувати, у який момент часу їхні швидкості дорівнювали.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 350x - 0{,}02x^3$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 10$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 - 3t + 2170$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року ($t = 0$); б) у першому кварталі ($t = 3$).

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 66 + 1{,}4x^2 + \frac{0{,}64}{\sqrt{x}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 16 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{16p+28}{p+4}$ і пропозиції $s = p + 5$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Еластичність функції.

Завдання 8.10.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $arcsin 0,54$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = x^3 + 2x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

3. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \frac{x+2}{x-2}$, яка паралельна прямій, що проходить через точки $A(1; -7)$ і $B(-2; 5)$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{5}{4}t^4 - 8t^3 + 6t^2 - -t + 9$. Визначити швидкість та прискорення руху через $t = 4$ с.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 135x - 0,02x^3$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 60$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = t^3 + \frac{9}{2}t^2 - 7t + 1120$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) у першому кварталі $(t = 3)$; б) у другому кварталі $(t = 6)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 14 - 0,27x^3 + 1,35x^{\frac{2}{3}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 27 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{16p+28}{p+4}$ і пропозиції $s = p + 5$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Граничні прихильності до споживання та збереження.

Завдання 8.11.

1. Знайти наближене значення функції $y = 5x + x^2$ при $x = 1{,}003$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{3}{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = -3$.

3. Записати рівняння дотичних до кривої $y = \frac{2x+1}{x+1}$, перпендикулярних до прямої $y = -x - 3$.

4. Вздовж осі абсцис рухаються прямолінійно дві матеріальні точки, закони руху яких $s = 3t^2 + 4t + 5$ і $s = 2t^2 + 5t + 7$. З'ясувати, з якою швидкістю віддаляються матеріальні точки в момент зустрічі.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 3{,}1x^3 - 0{,}4x^2 + 7x + 116$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 25$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = -1{,}8t^3 + 10t^2 + 3t + 650$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) у другому кварталі $(t = 6)$; б) наприкінці року $(t = 12)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 98 + 1{,}5x^2 + \frac{0{,}36}{x\sqrt{x}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 25 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{7p+12}{p+5}$ і пропозиції $s = p + 3$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Диференціал функції.

Завдання 8.12.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $17^{0,25}$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = x^2 + 4x + 16$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

3. Записати рівняння дотичної до параболи $y = x^2 + 5$ у точці перетину її з віссю ординат.

4. Закон руху матеріальної точки $s = -2t^2 + \frac{20}{3}\sqrt{(t+5)^3} + 30t$. Визначити швидкість та прискорення руху матеріальної точки на початку руху $(t = 0)$.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 2{,}3x^3 + 1{,}7x^2 - 2x + 783$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 12$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 8t + 2150$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) напри-кінці року $(t = 12)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 27 + 1{,}2x^3 + 0{,}25\sqrt{x}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 121 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{6p+26}{p+6}$ і пропозиції $s = p + 1$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Властивості диференціалу.

Завдання 8.13.

1. Знайти наближене значення функції $y = 4x^4 - 8e^{2x}$ при $x = 0{,}04$.

2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = 7x^2 - 6x + 5$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

3. Знайти кутовий коефіцієнт нормалі до кривої $y = \frac{5}{9}\left(\frac{x-1}{x+5}\right)^2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{3}{4}t^4 + 5t^3 - 7t + 12$. Знайти швидкість та прискорення матеріальної точки через $t = 3$ с після началу руху.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 3x^3 - 0{,}7x^2 + 2x + 13$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 11$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{9}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 4t + 238$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) у першому кварталі $(t = 3)$; б) у третьому кварталі $(t = 9)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 9 + \frac{x}{5} + \frac{x^3}{8}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) гранич-ну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 22 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{10p+34}{p+7}$ і пропозиції $s = p + 2$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Застосування диференціалу у наближених обчисленнях.

Завдання 8.14.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $e^{0,3}$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{4}{x^2}$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

3. На кривій $y = 5x^2 + 10x - 3$ знайти точку, дотична в якій паралельна прямій $y = 20x - 7$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - t + 3$. Визначити, у який момент часу її швидкість дорівнювала 9 м/с.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 720x - 0{,}05x^3$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 24$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{11}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t + 7560$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) у першому півріччі $(t = 6)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 15 + 2{,}4x^3 + 0{,}18\sqrt{x^3}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 16 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{8p+31}{p+8}$ і пропозиції $s = p + 2$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Геометричний сенс похідної.

Завдання 8.15.

1. Знайти наближене значення функції $y = 7x^2 + 4lnx$ при $x = 1{,}02$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{8}{x} + 6\sqrt{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 4$.

3. Записати рівняння горизонтальної дотичної до параболи $y = 9x^2 - 18x + 5$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{5}{4}t^4 + 8t^3 - t^2 +$ $+2t - 4$. Знайти швидкість та прискорення матеріальної точки через $t = 4$ с після начала руху.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 1{,}9x^3 - 0{,}5x^2 + 3x + 461$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 9$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 17t + 6320$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) у другому кварталі $(t = 6)$; б) наприкінці року $(t = 12)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 85 + 1{,}3x^2 + \frac{0{,}63}{\sqrt{x}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 36 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{7p+22}{p+7}$ і пропозиції $s = p + 2$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Геометричний сенс диференціалу.

Завдання 8.16.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $cos151^0$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = 7x^2 - 2x + +5$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

3. Записати рівняння дотичної до кривої $y = ln(x^2)$, яка паралельна прямій $y = -x$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = t^4 + \frac{7}{3}t^3 - 2t^2 + +8t - 7$. Визначити швидкість та прискорення руху через $t = 4$ с.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 2{,}4x^3 + 0{,}4x^2 - 2x + 461$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 16$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 11t + 7310$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) наприкінці року $(t = 12)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 69 + 3{,}1x^3 + 0{,}16\sqrt{x}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 81 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{15p+42}{p+5}$ і пропозиції $s = p + 6$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Фізичний сенс похідної.

Завдання 8.17.

1. Знайти наближене значення функції $y = x^3 - 5x^2 + +2\sqrt[3]{x}$ при $x = 8{,}001$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = tg8x$ у точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{32}$.

3. З'ясувати, який кут утворює з віссю абсцис дотична до кривої $y = x - x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

4. Дві матеріальні точки рухаються прямолінійно вздовж осі абсцис, їхні закони руху $s = \frac{4}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 9t + 11$ і $s = \frac{5}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 4t - 7$. Визначити моменти часу, коли їхні швидкості зрівняються.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 3{,}2x^3 + 0{,}7x^2 - 5x + 981$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 17$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 22t + 9710$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року ($t = 0$); б) у першому кварталі ($t = 3$).

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 92 + 0{,}8x^2 + 0{,}12x^{\frac{5}{3}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 27 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{11p+28}{p+2}$ і пропозиції $s = p + 8$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Граничні та середні витрати виробництва.

Завдання 8.18.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $ln0{,}99$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{11}{2}x^2 + x - 8$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

3. З'ясувати, в якій точці координатній площини xOy пряма $x + 4y - 4 = 0$ дотикається гіперболи $y = \frac{1}{x}$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{3}{4}t^4 - \frac{5}{3}t^3 + 8t^2 + $ $+t - 7$. Визначити швидкість та прискорення матеріальної точки через $t = 3$ с після начала руху.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 250 - 0{,}02x^3$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 11$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 13t + 277$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) у другому кварталі $(t = 6)$; б) у третьому кварталі $(t = 9)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 15 + 2{,}1x^3 + 0{,}35x^2\sqrt{x}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 81 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{10p+35}{p+4}$ і пропозиції $s = p + 8$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Продуктивність праці. Швидкість зміни продуктивності праці. Темп зміни продуктивності праці.

Завдання 8.19.

1. Знайти наближене значення функції $y = (x^2 + 1)e^x$ при $x = 0{,}01$.

2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{x + 8}$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

3. Записати рівняння нормалі до кривої $y = 3x^2 + 4$, паралельної прямій $y = -\frac{1}{6}x + 8$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{7}{3}t^3 + 5t^2 - -8$. З'ясувати моменти часу, у яких її швидкість дорівнювала нулю.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 3{,}3x^3 + 0{,}5x^2 - 8x + 463$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 21$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{58}{3}t^3 - t^2 + 11t + 975$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) наприкінці року $(t = 12)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 45 + 1{,}8x^2 + \frac{0{,}45}{\sqrt[3]{x}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 27 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{9p+37}{p+3}$ і пропозиції $s = p + 9$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Еластичність функції.

Завдання 8.20.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\sqrt[3]{8{,}012}$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = 3x^2 - 2x + +5$ у точці з абсцисою $x_0 = 5$.

3. З'ясувати кут нахилу до осі Ox дотичної до кривої $y = \frac{1}{8}x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 19t - -15$. З'ясувати моменти часу, коли швидкість матеріальної точки дорівнює 12 м/с.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 1{,}9x^3 - 0{,}3x^2 + 5x + 445$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 20$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 5t + 1760$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) у першому півріччі $(t = 6)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 19 + 1{,}5x^3 + 0{,}38x^{\frac{5}{2}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 225 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{9p+9}{p+4}$ і пропозиції $s = p + 1$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Граничні прихильності до споживання та збереження.

Завдання 8.21.

1. Знайти наближене значення функції $y = x^2 + x +$ $+arcsinx$ при $x = 0{,}51$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \sqrt{x-8}$ у точці з абсцисою $x_0 = 9$.

3. З'ясувати, під яким кутом нахилена дотична до графіка функції $y = \frac{2}{3}x^3$ у точці $M\left(1; \frac{2}{3}\right)$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 12t -$ -35. З'ясувати моменти часу, в яких її швидкість дорівнювала нулю.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 3{,}1x^3 + 0{,}5x^2 - 11x + 755$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 20$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{5}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 14t + 2720$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) у другому кварталі $(t = 6)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 38 + 1{,}7x^2 + \frac{0{,}63}{\sqrt[3]{x^2}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 125 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{9p+41}{p+7}$ і пропозиції $s = p + 3$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Диференціал функції.

Завдання 8.22.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\sqrt{4,09}$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = 3x^2 - \frac{2}{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.

3. Записати рівняння дотичної до параболи $y = x^2 - -5x - 8$ у точці перетину її з віссю ординат.

4. Вздовж осі абсцис рухаються прямолінійно дві матеріальні точки, закони руху яких $s = 3t^2 - t + 14$ і $s = 2t^2 + 5t + 9$. З'ясувати, з якою швидкістю віддаляються матеріальні точки в момент зустрічі.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 2{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 9x + 515$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 20$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 8t + 1120$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) у третьому кварталі $(t = 9)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 14 + 1{,}8x^3 + 0{,}75x^{\frac{2}{3}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 27 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{9p+52}{p+8}$ і пропозиції $s = p + 5$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Властивості диференціалу.

Завдання 8.23.

1. Знайти наближене значення функції $y = (x^2 + 9)e^{-x}$ при $x = 0{,}01$.

2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \frac{2}{3}\sqrt{x} - 5$ у точці з абсцисою $x_0 = 9$.

3. На кривій $y = 7x^2 - 14x + 25$ знайти точку, у якій нормаль паралельна прямій $y = -x + 3$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 + 5t^3 - 7t^2 + 3t - 4$. Обчислити швидкість та прискорення матеріальної точки через $t = 5$ с.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 2{,}9x^3 + 0{,}7x^2 - 9x + 443$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 20$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 7t + 3550$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року ($t = 0$); б) у третьому кварталі ($t = 9$).

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 1000x - \frac{2}{3}x^3$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 15 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{12p+24}{p+1}$ і пропозиції $s = p + 9$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Застосування диференціалу у наближених обчисленнях.

Завдання 8.24.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $e^{0,015}$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = arctg2x$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$.

3. Знайти кут нахилу дотичної до графіку функції $y = \frac{9}{x}$ у точці $M(3;3)$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{5}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 - 3t^2 + +t - 9$. Визначити швидкість та прискорення руху через $t = 5$ с.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 1{,}7x^3 + 0{,}3x^2 - 5x + 448$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 20$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{7}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 3t + 1250$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) у другому кварталі ($t = 6$); б) у третьому кварталі ($t = 9$).

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 19 + 1{,}4x^3 + \frac{0{,}84}{\sqrt[3]{x}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 125 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{3p+18}{p+6}$ і пропозиції $s = p + 1$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Геометричний сенс похідної.

Завдання 8.25.

1. Знайти наближене значення функції $y = 2x^3 - 3x^2 + +x \cdot e^x$ при $x = 0{,}02$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \sqrt{x+5}$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

3. З'ясувати, який кут утворює з віссю Ox дотична до кривої $y = x - x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

4. Вздовж осі абсцис рухаються дві матеріальні точки, закони руху яких задані рівняннями $s = \frac{2}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 + 3t + 5$ і $s = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 8t - 9$. З'ясувати моменти часу, в яких їхні швидкості були однаковими.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 3{,}2x^3 + 0{,}1x^2 - 8x + 441$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 20$.

6. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{5}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 4t + 2340$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) наприкінці року $(t = 12)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 81 + 1{,}3x^2 + \frac{0{,}42}{\sqrt{x^3}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 64 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{8p+46}{p+9}$ і пропозиції $s = p + 2$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Геометричний сенс диференціалу.

Завдання 8.26.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $ln0,99$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = cos2x$ у точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{12}$.

3. Відомо, що пряма $y = 7x + 4$ є дотичною до графіку функції $y = \frac{1}{4}x^4 - x$. Знайти координати точки дотику.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{5}{4}t^4 + \frac{7}{3}t^3 - 9t^2 + $ $+t - 11$. Визначити швидкість та прискорення руху матеріальної точки через $t = 4$ с.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 3{,}2x^3 - 0{,}8x^2 + 6x + 515$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 40$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{11}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 9t + 6510$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) у першому півріччі $(t = 6)$; б) наприкінці року $(t = 12)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 31 + 2{,}5x^3 + 0{,}18x\sqrt{x}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 81 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{14p+17}{p+2}$ і пропозиції $s = p + 4$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Фізичний сенс похідної.

Завдання 8.27.

1. Знайти наближене значення функції $y = x^3 \cdot lnx$ при $x = 0{,}1$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \sqrt{x+3}$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

3. Знайти кут нахилу до осі абсцис дотичної до кривої $y = \frac{1}{4}x^4 + 4$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - -9$. З'ясувати моменти часу, в яких її швидкість дорівнювала нулю.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 2{,}7x^3 + 0{,}2x^2 - 4x + 668$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 25$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{8}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 14t + 4410$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) у другому кварталі $(t = 6)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 37 + 1{,}2x^2 + \frac{0{,}72}{\sqrt{x}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 36 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{9p+27}{p+2}$ і пропозиції $s = p + 3$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Граничні та середні витрати виробництва.

Завдання 8.28.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $15^{0,25}$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{3}{2}x^2 + 6x - 3$ у точці з абсцисою $x_0 = 6$.

3. Записати рівняння горизонтальної дотичної до параболи $y = 3x^2 - 6x + 5$.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{9}{3}t^3 + 13t^2 - t + 2$. Визначити швидкість та прискорення руху матеріальної точки через $t = 3$ с.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 1{,}9x^3 - 0{,}1x^2 + 8x + 353$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 25$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 4t + 1120$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) у першому півріччі $(t = 6)$; б) наприкінці року $(t = 12)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 33 + 2{,}1x^3 + 0{,}15x^{\frac{5}{3}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 64 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{11p+50}{p+2}$ і пропозиції $s = p + 10$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Продуктивність праці. Швидкість зміни продуктивності праці. Темп зміни продуктивності праці.

Завдання 8.29.

1. Знайти наближене значення функції $y=(1-x^2)^{0,5}$ при $x=0{,}01$.

2. Записати рівняння дотичної до кривої $y=\sqrt{x+8}$ у точці з абсцисою $x_0=-7$.

3. З'ясувати, у яких точках дотична до графіку функції $y=\frac{x-8}{x+8}$ утворює з віссю абсцис кут $\frac{\pi}{4}$.

4. Закон руху матеріальної точки $s=t^3-12t^2+45t-$ -96. З'ясувати моменти часу, в яких її швидкість дорівнювала нулю.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y=1{,}8x^3-0{,}5x^2+7x+144$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x=35$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t)=\frac{5}{3}t^3-\frac{9}{2}t^2+11t+3420$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t=0)$; б) у другому кварталі $(t=6)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x)=47+1{,}3x^2+\frac{0{,}36}{x\sqrt{x}}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 81 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q=\frac{9p+48}{p+4}$ і пропозиції $s=p+9$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Еластичність функції.

Завдання 8.30.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $arcsin0{,}54$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{18}{x} - 3\sqrt{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 9$.

3. Довести, що дотична до синусоїди $y = sinx$ у точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{2}$ паралельна осі Ox.

4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{5}{4}t^4 + \frac{4}{3}t^3 - 3t^2 + +2t - 1$. Визначити швидкість та прискорення руху через $t = 5$с.

5. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 1{,}4x^3 + 0{,}3x^2 - 2x + 255$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхні значення при $x = 30$.

6. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 9t + 2130$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) у першому півріччі $(t = 6)$.

7. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 24 + 1{,}5x^3 + 0{,}24x\sqrt{x}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 144 млрд. грош. од.

8. Відомі функції попиту $q = \frac{10p+19}{p+4}$ і пропозиції $s = p + 4$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

9. *Теоретичне питання.* Граничні прихильності до споживання та збереження.

Розділ 9 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ В ДОСЛІДЖЕННІ ФУНКЦІЙ. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ЕКОНОМІЧНИМ ЗМІСТОМ

У цьому розділі ми познайомимося з іншими застосуваннями похідної. Ми навчимося за правилом Лопіталя обчислювати границі функцій, спробуємо за допомогою похідної аналізувати поведінку функції в інтервалі: досліджувати на монотонність та екстремуми, на опуклість, угнутість, знаходити точки перегину, асимптоти. Об'єднавши отримані навички, проведемо повне дослідження функції. І, звичайно, у сфері нашій інтересів задачі з економічним змістом, при розв'язанні яких ми вимушені звертатися до похідної. За необхідним теоретичним матеріалом радимо звернутися до п. 4.2 - 4.4 Підручника.

Приклади розв'язання типового варіанта

1. Обчислити границі функцій:

а). $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}+e^{2x}-5x}{x^2}$.

Розв'язання. При підстановці граничного значення аргументу функції, ми отримаємо невизначеність типу $\left|\frac{0}{0}\right|$. Саме з такими невизначеностями можна впоратися за допомогою правила Лопіталя. Згідно з (4.47) границя відношення функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}+e^{2x}-5x}{x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}+2e^{2x}-5}{2x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

підставимо граничне значення аргументу, знову отримуємо невизначеність типу $\left|\frac{0}{0}\right|$. Згадаємо, що правило Лопіталя можна використовувати стільки разів, скільки в цьому є необхідність. Замінимо границю відношення функцій границею відношення їх похідних ще раз:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{9e^{3x}+4e^{2x}}{2} = \frac{13}{2}.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{13}{2}$.

б) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{tgx} - \frac{1}{arctgx}\right]$.

Розв'язання. При підстановці граничного значення аргументу функції, ми отримаємо невизначеність типу $|\infty - \infty|$. Перед тим як застосувати правило Лопіталя, ми повинні виконати перетворення, а саме: привести дробі до спільного знаменника:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{tgx} - \frac{1}{arctgx}\right] = |\infty - \infty| = \lim_{x\to 0}\frac{arctgx - tgx}{tgx\cdot arctgx} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{cos^2x}}{\frac{1}{cos^2x}arctgx+tgx\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{cos^2x-1-x^2}{(1+x^2)cos^2x}}{\frac{(1+x^2)arctgx+cos^2x\cdot tgx}{(1+x^2)cos^2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{cos^2x-1-x^2}{(1+x^2)arctgx+\frac{1}{2}sin2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{2cosx\ sinx-2x}{2x\ arctgx+cos2x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Як бачимо, правилом Лопіталя ми були вимушені скористатися двічі, попередньо спростив функцію.

Відповідь. Границя функції дорівнює 0.

в) $\lim_{x\to 0}(8x\cdot ctgx)$.

Розв'язання. При підстановці граничного значення аргументу функції, ми отримаємо невизначеність типу $|0\cdot\infty|$. Функція подана у вигляді добутку. Для того щоб скористатися правилом Лопіталя, ми повинні записати функцію у вигляді відношення функцій. Для цього замінимо множення на $ctgx$ діленням на обернену функцію, тобто на $\frac{1}{ctgx} = tgx$:

$$\lim_{x\to 0}(8x\cdot ctgx) = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to 0}\frac{8x}{\frac{1}{ctgx}} = \lim_{x\to 0}\frac{8x}{tgx} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{8}{\frac{1}{cos^2 x}} = \frac{8}{1} = 8.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює 8.

г) $\lim_{x\to\infty}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. При підстановці граничного значення аргументу функції, ми отримаємо невизначеність типу $|\infty^0|$. Функція має вигляд степенево-показникової. Для того, щоб скористатися правилом Лопіталя, прологарифмуємо границю. Задану границю позначимо як A, знайдемо її логарифм

$$\lim_{x\to\infty}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}} = |\infty^0| = A;$$

$$\ln A = \ln\lim_{x\to\infty}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\ln(1+xe^x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(1+xe^x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+xe^x)}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

Тепер застосування правила Лопіталя можливо. Обчислимо границю:

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x+xe^x}{(1+xe^x)}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x(1+x)}{1+xe^x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x(1+x)+e^x}{e^x+xe^x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{e^x(1+x+1)}{e^x(1+x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1} = 1.$$

Ми знайшли $\ln A$, двічі звернувшись до правила Лопіталя та виконавши необхідні перетворення, щоб повернутися до заданої границі, згадаємо основну властивість показникової функції:

$$A = e^{\ln A} = e^1 = e.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює e.

2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = 2x^4 - 4x^2 - 5$.

Розв'язання. Дослідження проведемо за схемою, поданою в п. 4.4.3:

- ✓ ОДЗ: $x \in R$;
- ✓ знайдемо y': $y' = 8x^3 - 8x$;
- ✓ знайдемо критичні точки

$$y' = 0: \quad 8x^3 - 8x = 0; \quad x(x-1)(x+1) = 0;$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -1;$$

- ✓ нанесемо на числову вісь критичні точки та дослідимо знак y' у кожному з отриманих інтервалів

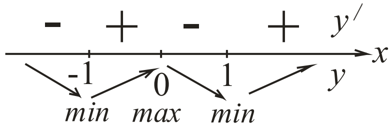

Рисунок 9.1 – Дослідження функції на монотонність та екстремуми

у точках з абсцисами $x = \pm 1$ - мінімуми, у точці з абсцисою $x = 0$ - максимум.

Обчислимо екстремальні значення функції.

$y(-1) = 2(-1)^4 - 4(-1)^2 - 5 = -7;$

$y(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1^2 - 5 = -7;$

$y(0) = 0 - 0 - 5 = -5.$

Відповідь. Функція зростає на інтервалах $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$, спадає – $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$; у точках $M_1(-1; -7)$ та $M_3(1; -7)$ - мінімуми функції, у точці $M_2(0; -5)$ - максимум.

б) $y = \frac{x^2+7}{x+3}$.

Розв'язання:

✓ ОДЗ: $x + 3 \neq 0$; $x \neq -3$;

✓ знайдемо y'

$$y' = \frac{2x(x+3)-(x^2+7)\cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+6x-x^2-7}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x-7}{(x+3)^2};$$

✓ знайдемо критичні точки

$$y' = 0: \qquad x^2 + 6x - 7 = 0;$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -7; \quad x_2 = 1;$$

✓ нанесемо на числову вісь критичні точки та точку, в якій функція не існує $(x = -3)$, дослідимо знак y' у кожному з отриманих інтервалів

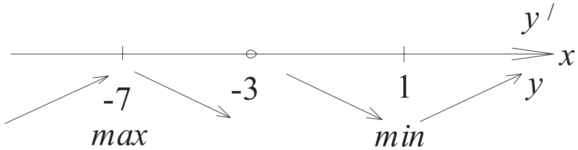

Рисунок 9.2 – Дослідження функції на монотонність та екстремуми

У точці з абсцисою $x = 1$ спостерігаємо мінімум, а в точці з абсцисою $x = -7$ – максимум функції. Обчислимо екстремальні значення функції.

$$y(1) = \frac{1+7}{1+3} = \frac{8}{4} = 2;$$

$$y(-7) = \frac{49+7}{-7+3} = \frac{56}{-4} = -14.$$

Відповідь. Функція зростає на інтервалах $x \in (-\infty; -7) \cup (1; +\infty)$, спадає – $x \in (-7; -3) \cup (-3; 1)$; у точці $M_1(1; 2)$ - мінімум функції, у точці $M_2(-7; -14)$ - максимум.

3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = 3x^4 - 4x^3 - 6x + 15$.

Розв'язання. Дослідження проведемо за схемою, поданою в п. 4.4.6:

- ✓ ОДЗ: $x \in R$;
- ✓ знайдемо y'':

$$y' = 12x^3 - 12x^2 - 6;$$
$$y'' = 36x^2 - 24x;$$

- ✓ знайдемо критичні точки:

$$y'' = 0: \quad 36x^2 - 24x = 0; \quad 12x(3x - 2) = 0;$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

- ✓ нанесемо на числову вісь критичні точки та точки, в яких функція не існує та дослідимо знак другої похідної у кожному з отриманих інтервалів

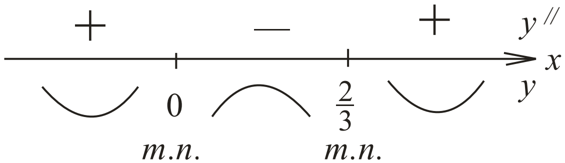

Рисунок 9.3 – Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину

Обчислимо ординати точок перегину:

$$y(0) = 15; \qquad y\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 6\left(\frac{2}{3}\right) + 15 = \frac{281}{27}.$$

Відповідь. Функція опукла на інтервалі $x \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$, угнута - $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$, у точках $P_1(0; 15)$, $P_2\left(\frac{2}{3}; \frac{281}{27}\right)$ - точки перегину функції.

б) $y = (x+1)arctgx$.

Розв'язання:

✓ ОДЗ: $x \in R$;

✓ знайдемо y'':

$$y' = arctgx + (x+1) \cdot \frac{1}{1+x^2} = arctgx + \frac{x+1}{1+x^2};$$

$$y'' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-(x+1)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-2x^2-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x}{(1+x^2)^2};$$

✓ знайдемо критичні точки:

$$y'' = 0: \qquad \frac{2-2x}{(1+x^2)^2} = 0; \qquad 2-2x = 0;$$

$$\Rightarrow \quad x = 1.$$

✓ нанесемо на числову вісь критичні точки та точки, у яких функція не існує та дослідимо знак другої похідної у кожному з отриманих інтервалів

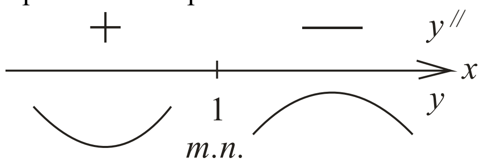

Рисунок 9.4 – Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину

Обчислимо ординату точки перегину:

$$y(1) = (1+1)arctg1 = 2 \cdot arctg1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь. Функція опукла на інтервалі $x \in (1;+\infty)$, угнута - $x \in (-\infty;1)$, у точці $P\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$ - точка перегину функції.

4. Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{3x^2-x+2}{x+5}$.

Розв'язання: Визначення та рівняння асимптот функції див. п. 4.4.7:

✓ ОДЗ: $x + 5 \neq 0$; $x \neq -5$.

✓ перевіримо, чи є пряма $x = -5$ - вертикальною асимптотою (4.49):

$$\lim_{x\to-5} \frac{3x^2-x+2}{x+5} = \frac{75+5-2}{-5+5} = \frac{78}{0} = \infty;$$

$\Rightarrow$ пряма $x = -5$ є вертикальною асимптотою;

✓ похилу асимптоту шукаємо у вигляді (4.53):

$$y = kx + b;$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт (4.51) асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x};$$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3x^2-x+2}{x+5}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2-x+2}{x^2+5x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x-1}{2x+5} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6}{2} = 3;$$

та відрізок, який відсікає асимптота на осі ординат (4.52):

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y(x) - kx);$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^2-x+2}{x+5} - 3x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2-x+2-3x^2-15x}{x+5} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-16x+2}{x+5} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-16}{1} = -16;$$

Отже, рівняння похилої асимптоти має вигляд:

$$y = 3x - 16.$$

Відповідь. Функція має вертикальну асимптоту $x = -5$ та похилу асимптоту $y = 3x - 16$.

б) $y = (x - 7)e^{x+3}$.

Розв'язання:

✓ ОДЗ: $x \in R$; $\Rightarrow$ вертикальної асимптоти нема.
✓ похилу асимптоту шукаємо у вигляді (4.53):

$$y = kx + b;$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт (4.51) асимптоти. Зауважимо, що обчислювати границі будемо окремо при $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$ (поведінка функції суттєво відрізняється):

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x};$$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-7)e^{x+3}}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{x+3} + (x-7)e^{x+3}}{1} = \infty$$

$\Rightarrow$ при $x \to +\infty$ похилої асимптоти не існує,

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x-7)e^{x+3}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x-7)}{xe^{-(x+3)}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-(x+3)} - xe^{-(x+3)}} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

$\Rightarrow$ при $x \to -\infty$ асимптота існує, але при $k = 0$ похила асимптота перетворюється в горизонтальну.

Відповідь. Функція має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік: $y = \frac{2x}{x^2-1}$.

Розв'язання: Загальна схема дослідження функції наведена в п. 4.4.8. Проведемо дослідження за схемою.

✓ ОДЗ: $x^2 - 1 \neq 0$; $x^2 \neq 1$; $x \neq \pm 1$;
$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

✓ Знайдемо точки перетину з осями координат:

Ox: $y = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2-1} = 0; \quad x = 0;$

Oy: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{2\cdot 0}{0^2-1} = 0;$

$\Rightarrow$ функція перетинається з осями координат в початку координат – у точці $O(0;0)$.

✓ Знайдемо інтервали знакопостійності. Нанесемо на числову вісь точки перетину з віссю абсцис та точки, у яких функція не існує, дослідимо знак функції в кожному з отриманих інтервалів:

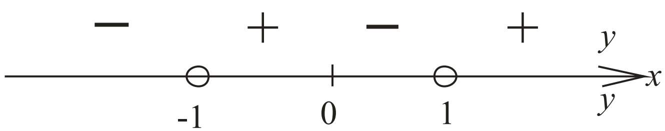

Рисунок 9.5 – Дослідження інтервалів знакопостійності функції

Отже, функція додатна на інтервалі $x \in (-1;0) \cup (1;+\infty)$, від'ємна - $x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$.

✓ Перевіримо функцію на парність:

$y(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2-1} = -\frac{2x}{x^2-1} = -y(x);$

$\Rightarrow$ функція непарна, а з цього прямує, що її графік симетричний відносно початку координат.

✓ Періодичність. Функція не періодична.

✓ Дослідимо функцію на монотонність та екстремуми. Ми детально розглянули цю схему у завданні 2.

$y' = \frac{2(x^2-1)-2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2-2-4x^2}{(x^2-1)^2} = -\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2};$

$y' = 0$: $\quad -\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2} = 0; \quad 2x^2 + 2 = 0; \quad 2x^2 \neq -2,$

критичних точок нема, тому й екстремумів у функції нема. Дослідимо на монотонність:

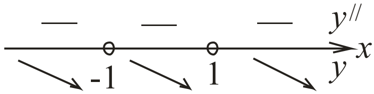

Рисунок 9.6 – Дослідження функції на монотонність та екстремуми

Функція спадає на всій області визначеності. Екстремумів нема.

✓ Дослідимо функцію на опуклість, угнутість та точки перегину. Ми детально розглянули цю схему у завданні 3.

$$y'' = -\frac{4x\left(x^2-1\right)^2-\left(2x^2+2\right)2\left(x^2-1\right)2x}{(x^2-1)^4} = -\frac{4x\left(x^2-1\right)\left[x^2-1-2x^2-2\right]}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x\left(x^2+3\right)}{(x^2-1)^3};$$

$$y'' = 0; \qquad \frac{4x\left(x^2+3\right)}{(x^2-1)^3} = 0; \quad x = 0;$$

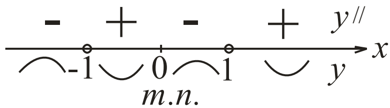

Рисунок 9.7 – Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину

Знайдемо асимптоти функції (див. Завдання 4):

✓ вертикальні асимптоти

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x}{x^2-1} = \frac{-2}{(-1)^2-1} = -\frac{2}{0} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{1^2-1} = \frac{2}{0} = +\infty;$$

$\Rightarrow$ прямі $x = -1$ та $x = 1$ - вертикальні асимптоти.

✓ похила асимптота $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^3-x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{3x^2-2x} = \frac{2}{\infty} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2-1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2x} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

похила асимптота перетворюється в горизонтальну $y = 0$.

Об'єднаємо отримані результати дослідження на графіку функції:

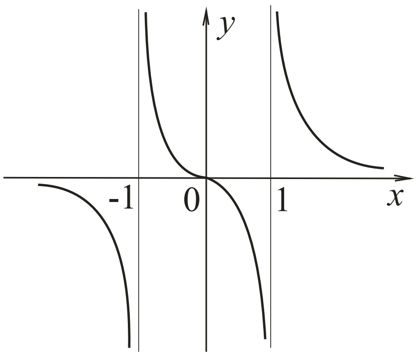

Рисунок 9.8 – Графік функції

6. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{2x}{1+x^4}$ на інтервалі $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.

Розв'язання: Схема дослідження функції на найбільше та найменше значення функції в замкненому інтервалі наведена в п. 4.4.4. Проведемо дослідження за схемою.

ОДЗ: $x \in R$

Знайдемо похідну:

$y' = \frac{2(1+x^4)-2x\cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{2+2x^4-8x^4}{(1+x^4)^2} = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}.$

Критичні точки функції:

$y' = 0$: $\quad \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} = 0; \quad 2 - 6x^4 = 0; \quad x^4 = \frac{1}{3}; \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}};$

точка $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ не належить досліджуваному інтервалу.

Обчислимо значення функції в критичній точці $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ та кінцях інтервалу:

$y(-2) = \frac{2\cdot(-2)}{1+(-2)^4} = \frac{-4}{1+16} = -\frac{4}{17};$

$y\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)}{1+\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4} = -\frac{\frac{2}{\sqrt[4]{3}}}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{\frac{2}{\sqrt[4]{3}}}{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{3}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{27};$

$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{1+\frac{1}{16}} = \frac{1}{\frac{17}{16}} = \frac{16}{17}.$

З них найбільше - $y_{\text{найб.}} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{17}$, а найменше - $y_{\text{найм.}} = y\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{27}.$

7. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 52$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 12 + 4x + x^3$.

Розв'язання: За формулою (4.55) прибуток визначається як

$P(x) = D(x) - C(x) = 52x - 12 - 4x - x^3 = 48x - 12 - x^3,$

де $D(x) = p \cdot x = 52x.$

Оптимальне значення випуску – значення, за якого прибуток є найбільшим. Розв'яжемо задачу про найбільше значення функції. Знайдемо похідну:

$$P'(x) = 48 - 3x^2.$$

Розв'яжемо рівняння $P'(x) = 0$, тобто $48 - 3x^2 = 0$. Критичні точки: $x_{1,2} = \pm 4$. За умовою задачи зрозуміло, що мають сенс лише додатні значення, отже $x_0 = 4$. У цій точці функція набуває максимуму (за результатами дослідження знаків похідної), тому оптимальне значення випуску дорівнює $x_0 = 4$.

8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x) = 24 + 10x + 6x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p = 46$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?

Розв'язання: За формулою (4.56) функція середніх витрат виробництва має вигляд

$$A(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{24}{x} + 10 + 6x.$$

Знайдемо мінімальне значення цієї функції:

$$A'(x) = -\frac{24}{x^2} + 6; \qquad A'(x) = 0; \qquad \frac{-24+6x^2}{x^2} = 0;$$

$$x^2 = 4; \quad x = \pm 2.$$

За умовою задачи зрозуміло, що мають сенс лише додатні значення, отже $x_0 = 2$. Граничні витрати (4.57):

$$M(x) = C'(x) = 10 + 12x.$$

Відомо, що прибуток (4.55) визначається як:

$$P(x) = D(x) - C(x) = 46x - C(x).$$

Продиференціюємо цей вираз:

$$P'(x) = 46 - C'(x) = 46 - M(x) = 46 - 10 - 12x = 36 - 12x.$$

Знайдемо критичну точку:

$$P'(x) = 0; \quad 36 - 12x = 0; \quad x = 3.$$

Отже, оптимальне значення кількості товару $x_{\text{опт.}} = 3$. З цього прямує, що необхідно збільшити виробництво на 1 одиницю $(\Delta x = x_{\text{опт.}} - x_0)$.

З'ясуємо середні витрати виробництва

$A(2) = \frac{24}{2} + 10 + 6 \cdot 2 = 34;$

$A(3) = \frac{24}{3} + 10 + 6 \cdot 3 = 40;$

$\Delta A = 40 - 34 = 6.$

Отже, середні витрати зміняться на 6 грошових одиниць.

Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів

Завдання 9.1.

1. Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$; б) $\lim_{x \to 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{lnx}\right]$;

в) $\lim_{x \to \infty} \left(x \cdot sin\frac{6}{x}\right)$ г) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (tgx)^{2x-\pi}$.

2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = 5x^4 - 10x^2 + 13$; б) $y = \frac{7}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$.

3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$; б) $y = x \cdot lnx$.

4. Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 2}$ б) $y = \frac{e^{x+2}}{x-3}$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = x^3 - 5x$; б) $y = \frac{1}{x} + 4x^2$.

6. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x \text{ на інтервалі } [1; 5].$$

7. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 30$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 8 + 3x + x^3$.

8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x) = 6 + 4x + \frac{3}{2}x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p = 22$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?

9. *Теоретичне питання.* Теорема Ферма. Геометрична інтерпретація теореми Ферма.

Завдання 9.2.

1. Обчислити границі функцій:
   а) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln cosx}{x}$; б) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right]$;
   в) $\lim_{x\to\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]$ г) $\lim_{x\to 0} x^{sinx}$.
2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
   а) $y=2x^2+4x+1$; б) $y=\frac{x^2+x+3}{x^2+5}$.
3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
   а) $y=x^3-3x-5$; б) $y=x\cdot e^{-x^2}$.
4. Знайти асимптоти функції:
   а) $y=\frac{7x^2-2x-5}{x^2-9}$ б) $y=3\ln\frac{x}{x+5}-4$.
5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
   а) $y=x^3-6x^2+9x$; б) $y=x-\ln(x+1)$.
6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=x^3-3x^2$$
   на інтервалі $[-1;4]$.
7. Визначити максимальний прибуток, який може отримати фірма-виробник, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=10{,}5$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=10+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}$.
8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=8+3x+2x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=19$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?
9. *Теоретичне питання.* Теорема Ролля. Геометрична інтерпретація теореми Ролля.

Завдання 9.3.

1. Обчислити границі функцій:
   а) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{sinx}$; б) $\lim_{x \to 0} \left(ctgx - \frac{1}{x}\right)$;
   в) $\lim_{x \to \infty} \left(x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right)$ г) $\lim_{x \to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$.
2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
   а) $y = 5x^6 - 6x^5$; б) $y = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$.
3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
   а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 7$; б) $y = \ln(1 + x^2)$.
4. Знайти асимптоти функції:
   а) $y = \frac{5x^2 + x - 4}{x + 3}$ б) $y = (x - 7)e^{x+4}$.
5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
   а) $y = x^3 + 3x^2 - 18x$; б) $y = x^2 \cdot e^{1-x}$.
6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2 - 5x + 4}$$
   на інтервалі $[-2; 3]$.
7. Дохід від виробництва продукції з використанням x одиниць ресурсів дорівнює $D(x) = 60\sqrt{x}$. Вартість одиниці ресурсів складає 5 умовних одиниць. Яку кількість ресурсів треба придбати, щоб прибуток був найбільшим?
8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x) = 75 + 9x + 3x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p = 57$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?
9. *Теоретичне питання.* Теорема Лагранжа. Геометрична інтерпретація теореми Лагранжа.

Завдання 9.4.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-cos2x}{e^{5x}-cos5x}$; б) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{x}-1}\right]$;

   в) $\lim_{x\to\infty}(x^2\cdot e^{-5x})$ г) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$.

2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y=6x^2-2x^3$; б) $y=\frac{7x}{\ln x}$.

3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y=x^3-3x^2+2$; б) $y=\frac{x^3}{x+2}$.

4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{9x^2-2x-7}{x^2-1}$ б) $y=6\ln\frac{x}{x-5}-3$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y=x^3-9x^2+18x$; б) $y=\frac{x^2-4}{x+1}$.

6. Знайти найбільше та найменше значення функції

   $$y=x\cdot\ln x$$

   на інтервалі $\left[\frac{1}{10};1\right]$.

7. При виробництві монополією x одиниць товару, ціна за одиницю $p(x)=6-\frac{3}{x}$. Визначити оптимальне для монополії значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується, якщо відома функція витрат $C(x)=10+x+\frac{x^2}{2}$.

8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, функція витрат має вигляд $C(x)=16+5x+x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=23$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки при цьому збільшаться середні витрати?

9. *Теоретичне питання.* Теорема Коші. Геометрична інтерпретація теореми Коші.

Завдання 9.5.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}$; б) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{e^x-e}\right]$;

   в) $\lim_{x\to 0}(x^3\cdot lnx)$ г) $\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$.
2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$; б) $y=\frac{\ln x+4}{x}$.
3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y=x^3-6x^2+9x-15$; б) $y=x+arctgx$.
4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{x^2+x+3}{3x-1}$ б) $y=xe^{-x^2}$.
5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y=x^3-3x^2+2x$; б) $y=\frac{e^x}{x}$.
6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=2x^3-6x^2+3$$
   на інтервалі $[-1;1]$.
7. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=14$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=13+2x+x^3$.
8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=64+2x+4x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=58$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки при цьому збільшаться середні витрати?
9. *Теоретичне питання.* Теорема Лопіталя. Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя.

Завдання 9.6.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to 0}\frac{x-sinx}{x-tgx}$; б) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{3}{1-x^3}\right]$;

   в) $\lim_{x\to 0}(x\cdot ln^3x)$ г) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$.
2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y=x^3-3x^2-9x+5$; б) $y=\ln(25-x^2)$.
3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y=x^4-2x^2-8$; б) $y=(x-5)e^{x+1}$.
4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{x^2+9x+11}{x^2-25}$ б) $y=5\ln\frac{x+3}{x+4}-2$.
5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y=x^3-3x^2$; б) $y=x+\frac{\ln x}{x}$.
6. Знайти найбільше та найменше значення функції
$$y=\frac{x+1}{e^x}$$
   на інтервалі $[-1;1]$.
7. Визначити максимальний прибуток, який може отримати фірма-виробник, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=6{,}5$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=8+\frac{x}{2}+\frac{x^3}{8}$.
8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=36+15x+4x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=55$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки при цьому збільшаться середні витрати?
9. *Теоретичне питання.* Ознаки монотонності функції.

Завдання 9.7.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to 2}\frac{x^5-32}{x^3-8}$; б) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{x^2+1}-x\right]$;

   в) $\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)$ г) $\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y=\frac{1}{6}x^6-\frac{4}{5}x^5$; б) $y=x\cdot\ln x$.

3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y=5x^3-3x^5$; б) $y=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$.

4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{8x^2-7x+1}{x-5}$ б) $y=\frac{e^{x+4}}{x+5}$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y=x^4-2x^2-3$; б) $y=x^2\cdot e^{-x^2}$.

6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=\frac{x^3}{x^2-x+1}$$
   на інтервалі $[-1;1]$.

7. Дохід від виробництва продукції з використанням x одиниць ресурсів дорівнює $D(x)=2x^3+25$. Вартість одиниці ресурсів складає 54 умовних одиниць. Яку кількість ресурсів треба придбати, щоб прибуток був найбільшим?

8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=25+8x+x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=12$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки при цьому збільшаться середні витрати?

9. *Теоретичне питання.* Екстремуми функції.

Завдання 9.8.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-6^x}{4^x-8^x}$;   б) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{sinx}-\frac{1}{tgx}\right]$;

   в) $\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot sin\frac{5}{x}\right)$ г) $\lim_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y=x^3-3x^2+3$;   б) $y=x\cdot ln^2x$.

3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+8x-3$;   б) $y=(x-3)e^{x+1}$.

4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{4x^2+5x+1}{x^2+4x}$ б) $y=4\ln\frac{x}{x+3}-1$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y=2x^4-x^2+1$;   б) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

6. Знайти найбільше та найменше значення функції
$$y=\ln(x^2-2x+4)$$
   на інтервалі $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$.

7. При виробництві монополією x одиниць товару, ціна за одиницю визначається за формулою $p(x)=15+\frac{8}{3}\sqrt{x}$. Визначити оптимальне для монополії значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується, якщо відома функція витрат $C(x)=6+10x+\frac{x^2}{2}$.

8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=36+9x+x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=27$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки при цьому збільшаться середні витрати?

9. *Теоретичне питання.* Схема дослідження функції на монотонність і екстремуми.

Завдання 9.9.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{cosx-1}$; б) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+1}{x}-\frac{1}{sinx}\right]$;

   в) $\lim_{x\to\infty}\left(8^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x$ г) $\lim_{x\to 0} x^x$.

2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y=\frac{5}{3}x^3-10x$; б) $y=\frac{x^3-x^2}{e^{2x}}$.

3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y=\frac{5}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+7$; б) $y=x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{2x^2+9x+1}{x-7}$ б) $y=2\ln\frac{x+1}{x-1}-7$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y=x^3-3x^2-12x$; б) $y=\frac{1}{x^2}+x^2$.

6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=2x^3-39x^2+252x+1$$
   на інтервалі $[5;8]$.

7. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=8$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=10+x+\frac{1}{3}x\sqrt{x}$.

8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат набуває вигляду $C(x)=36+7x+9x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=97$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?

9. *Теоретичне питання.* Найбільше і найменше значення функції в інтервалі.

Завдання 9.10.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{sin10x}$; б) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{cosx}-\frac{1}{ctgx}\right]$;

   в) $\lim_{x\to 0}(1-cosx)ctgx$ г) $\lim_{x\to 0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{x}$.

2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+5$; б) $y=\frac{x^2-5x+4}{x^2+5x+4}$.

3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3$; б) $y=5\ln\frac{x}{x-3}$.

4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{5x^2-6x-11}{3x^2+9x}$ б) $y=\frac{e^{x+4}}{x-2}$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y=4x^5-5x^4$; б) $y=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$.

6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=2x-3\cdot\ln x$$
   на інтервалі $[1;e]$.

7. Визначити максимальний прибуток, який може отримати фірма-виробник, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=35$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=14+11x+2x^3$.

8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=48+6x+3x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=48$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?

9. *Теоретичне питання.* Опуклість та угнутість функції. Точки перегину функції.

Завдання 9.11.

1. Обчислити границі функцій:
   а) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-sinx}$; б) $\lim_{x\to 2}\left[\frac{2}{x-2}-\frac{x+4}{x^2-x-2}\right]$;
   в) $\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$ г) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$.
2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
   а) $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-10x+14$; б) $y=(x-3)e^{x+2}$.
3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
   а) $y=6x^5-5x^6$; б) $y=x^2-2\ln x$.
4. Знайти асимптоти функції:
   а) $y=\frac{9x^2-x-3}{3x-15}$ б) $y=(3x-7)e^{2x}$.
5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
   а) $y=\frac{9}{2}x-\frac{1}{6}x^3$; б) $y=\frac{x^3}{3-x^2}$.
6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=\frac{x^3+4}{x^2}$$
   на інтервалі $[1;4]$.
7. При виробництві монополією x одиниць товару, ціна за одиницю знаходиться за формулою $p(x)=10+\frac{2}{3}\sqrt{x}$. Визначити оптимальне для монополії значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується, якщо відома функція витрат $C(x)=5+4x+\frac{x^2}{2}$.
8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=18+5x+2x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=37$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?
9. *Теоретичне питання.* Схема дослідження функції на опуклість, угнутість, точки перегину.

Завдання 9.12.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{tgx}-e^x}{tgx-x}$; б) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right]$;

   в) $\lim_{x\to\infty}\left(x^5\cdot sin\frac{2}{x}\right)$ г) $\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.
2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y=\frac{1}{8}x^8-\frac{2}{7}x^7-9$; б) $y=x-5arctgx$.
3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+9x-4$; б) $y=\frac{x^3}{3-x^2}$.
4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{x^2-4x+3}{x^2-8x}$ б) $y=9\ln\frac{x-3}{x}-2$.
5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y=6x^4-4x^6$; б) $y=x^2-2\ln x$.
6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=x^3\cdot e^{x+1}$$
   на інтервалі $[-4;0]$.
7. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=25$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=\frac{3}{4}+7x+\frac{2}{3}x^3$.
8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=28+3x+7x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=87$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?
9. *Теоретичне питання.* Асимптоти функції.

Завдання 9.13.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x-1}{cosx+\frac{x^2}{2}-1}$; б) $\lim_{x\to 3}\left[\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}\right]$;

   в) $\lim_{x\to 1} lnx\cdot ln(x-1)$ г) $\lim_{x\to 0} x^{sinx}$.
2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-8$; б) $y=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.
3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y=2x^3-13x^2+23x$; б) $y=arctg(x^2)$.
4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{6x^2-4x-2}{x+5}$ б) $y=\frac{e^{x+4}}{x+8}$.
5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y=x^3-12x$; б) $y=\ln\frac{x}{x+5}-4$.
6. Знайти найбільше та найменше значення функції

   $$y=\frac{2+x^2}{1-x^2}$$

   на інтервалі $\left[-\frac{1}{2};1\right]$.
7. Визначити максимальний прибуток, який може отримати фірма-виробник, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=64$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=35+4x+\frac{3}{2}x^2+x^3$.
8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=100+9x+4x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=65$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?
9. *Теоретичне питання.* Теорема Ферма. Геометрична інтерпретація теореми Ферма.

Завдання 9.14.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{sinx^3}$; б) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x\,sinx}-\frac{1}{x^2}\right]$;

   в) $\lim_{x\to\pi}(\pi-x)tg\frac{x}{2}$ г) $\lim_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y=\frac{1}{3}x^3-9x+2$; б) $y=x-\ln(x+3)$.

3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y=4x^3-x^4$; б) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{2x^2-x+3}{x^2-1}$ б) $y=(x-3)e^{x+4}$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{2}{3}x$; б) $y=\frac{x^3-8}{x}$.

6. Знайти найбільше та найменше значення функції
$$y=e^{4x-x^2}$$
   на інтервалі $[1;3]$.

7. При виробництві монополією x одиниць товару, ціна за одиницю встановлюється на рівні $p(x)=12-\frac{4}{3}\sqrt{x}$. Визначити оптимальне для монополії значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується, якщо відома функція витрат $C(x)=9+4x+\frac{x^2}{2}$.

8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=49+13x+x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=31$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?

9. *Теоретичне питання.* Загальна схема дослідження функції.

Завдання 9.15.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln sin7x}{\ln sin3x}$; б) $\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{e^x-e^2}-\frac{5}{x-2}\right]$;

   в) $\lim_{x\to 0}(1-e^{3x})ctgx$ г) $\lim_{x\to\infty}\left(cos\frac{5}{x}\right)^x$.

2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y=\frac{9}{2}x-\frac{1}{6}x^3$; б) $y=\frac{e^x}{2x+8}$.

3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y=\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{5}x^5$; б) $y=\frac{1}{x}+4x^2$.

4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{8x^2+3x+1}{x+9}$ б) $y=7\ln\frac{x-7}{x}+3$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$; б) $y=\ln(9-x^2)$.

6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=x^3-3x^2-9x+5$$
   на інтервалі $[-4;4]$.

7. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=45$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=28+21x-\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$.

8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=64+9x+x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=31$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?

9. *Теоретичне питання.* Загальна схема дослідження функції.

Завдання 9.16.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln sin5x}$;   б) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-\sqrt{x}}-\frac{1}{1-x}\right]$;

   в) $\lim_{x\to\infty}\left(x^3\cdot sin\frac{5}{x^3}\right)$ г) $\lim_{x\to 0}(ctgx)^{sinx}$.

2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y=x^3-3x^2+5$;   б) $y=x^2-2\ln x$.

3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y=10+7x-x^2-\frac{1}{6}x^3$;   б) $y=(x+7)\cdot e^{2x}$.

4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{x^2-4x-8}{x^2-8}$ б) $y=3\ln\frac{x+2}{x-2}+4$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y=x^3-6x^2+9x$;   б) $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=\frac{2x-1}{2+x^2}$$
   на інтервалі $[-2;0]$.

7. Визначити максимальний прибуток, який може отримати фірма-виробник, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=31$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=68+7x+2x^3$.

8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=45+14x+5x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=94$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?

9. *Теоретичне питання.* Теорема Ферма. Геометрична інтерпретація теореми Ферма.

Завдання 9.17.

1. Обчислити границі функцій:
   а) $\lim_{x\to 0}\frac{sin10x}{sin4x}$;   б) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]$;
   в) $\lim_{x\to 0}(1-cos2x)ctg4x$ г) $\lim_{x\to\infty}(\ln 5x)^{\frac{1}{\ln 2x}}$.
2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
   а) $y=-2x^3+6x^2+7$;   б) $y=x^2-\ln x^2$.
3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
   а) $y=\frac{1}{6}x^3-6x^2+4x+9$;   б) $y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}$.
4. Знайти асимптоти функції:
   а) $y=\frac{x^2+5x+1}{3x+1}$ б) $y=\frac{e^{x+5}}{x+6}$.
5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
   а) $y=\frac{1}{4}x^4-x$;   б) $y=(x-1)e^{1-x}$.
6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=\sqrt{x-x^3}$$
   на інтервалі $[-2;2]$.
7. При виробництві монополією x одиниць товару, ціна за одиницю встановлюється на рівні $p(x)=22+\frac{4}{3}\sqrt{x}$. Визначити оптимальне для монополії значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується, якщо відома функція витрат $C(x)=4+7x+\frac{x^2}{2}$.
8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=25+17x+x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=39$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?
9. *Теоретичне питання.* Теорема Ролля. Геометрична інтерпретація теореми Ролля.

Завдання 9.18.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x^2}$; б) $\lim_{x\to\frac{1}{5}}\left[\frac{5}{5x-1}-\frac{1}{ln5x}\right]$;

   в) $\lim_{x\to\infty}(x^5\cdot e^{-7x})$ г) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2x-\pi}$.

2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y=10+\frac{5}{2}x-x^2-\frac{1}{6}x^3$; б) $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y=5x^3-3x^5$; б) $y=2\ln\frac{x+4}{x}-5$.

4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{6x^2-2x+3}{x^2-64}$ б) $y=(4x-8)e^{2-x}$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y=1+x^2-\frac{1}{2}x^4$; б) $y=x^2+\frac{1}{x}$.

6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=\frac{x}{2+x^3}$$
   на інтервалі $[0;3]$.

7. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=70$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=9+16x+2x^3$.

8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=24+9x+6x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=81$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?

9. *Теоретичне питання.* Теорема Лагранжа. Геометрична інтерпретація теореми Лагранжа.

Завдання 9.19.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to 0}\frac{3tg5x-15tgx}{3sin5x-15sinx}$; б) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right]$;

   в) $\lim_{x\to\infty}(\pi-2arctgx)\ln x$ г) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{5}{1+\ln x}}$.
2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y=4x^3-12x^2-8$; б) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$.
3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y=2x^4-8x^2-7x+2$; б) $y=x\cdot\ln x$.
4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{2x^2-8x-3}{x-7}$ б) $y=\frac{e^{x-5}}{x-2}$.
5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y=3x-x^3$; б) $y=\frac{x^2-2x+2}{x+3}$.
6. Знайти найбільше та найменше значення функції
$$y=\frac{2}{3}x^3-2x$$
   на інтервалі $[0;2]$.
7. Визначити максимальний прибуток, який може отримати фірма-виробник, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=33$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=8+6x+x^3$.
8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=63+4x+7x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=116$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?
9. *Теоретичне питання.* Теорема Коші. Геометрична інтерпретація теореми Коші.

Завдання 9.20.

1. Обчислити границі функцій:
   а) $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx^2}{x^2\cdot sinx^2}$; б) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{x^2+1}-x\right]$;
   в) $\lim_{x\to\infty}\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)x$ г) $\lim_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln 2x}}$.
2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
   а) $y=\frac{2}{3}x^3-8x^2+15$; б) $y=\frac{x^3-8}{x^2}$.
3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
   а) $y=1+3x+3x^2-x^3$; б) $y=(2x-1)e^{x-5}$.
4. Знайти асимптоти функції:
   а) $y=\frac{5x^2-7x-12}{x^2-3x}$ б) $y=6\ln\frac{x+5}{x}+3$.
5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
   а) $y=3x^4-16x^3$; б) $y=x\cdot\ln x$.
6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=x^5-5x^4+5x^3+1$$
   на інтервалі $[-1;2]$.
7. При виробництві монополією x одиниць товару, ціна за одиницю $p(x)=18-\frac{8}{3}\sqrt{x}$. Визначити оптимальне для монополії значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується, якщо відома функція витрат $C(x)=6x+\frac{x^2}{2}$.
8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=98+11x+2x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=47$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?
9. *Теоретичне питання.* Теорема Лопіталя. Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя.

Завдання 9.21.

1. Обчислити границі функцій:
   а) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tgx}$; б) $\lim_{x\to1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{lnx}\right]$;
   в) $\lim_{x\to0} ln(1+sinx)ctgx$ г) $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$.
2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
   а) $y=x^3+6x^2+9x+1$; б) $y=\sqrt{2x-x^2}$.
3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
   а) $y=\frac{1}{8}x^8-\frac{1}{7}x^7$; б) $y=\ln(9-x^2)$.
4. Знайти асимптоти функції:
   а) $y=\frac{4x^2-2x-5}{x+11}$ б) $y=\frac{e^{x-4}}{x-3}$.
5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
   а) $y=x^3+x^2$; б) $y=\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^2$.
6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+cosx$$
   на інтервалі $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
7. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=20$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=6x+\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$.
8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=80+16x+5x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=106$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?
9. *Теоретичне питання.* Ознаки монотонності функції.

Завдання 9.22.

1. Обчислити границі функцій:
   а) $\lim_{x\to 0}\frac{sin2x-2sinx}{x^3}$; б) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{5x^2-3x+4}{x-1}-5x\right]$;
   в) $\lim_{x\to 1} ln(1-x)cos\frac{\pi x}{2}$ г) $\lim_{x\to 0}(cosx)^{ctg^2 x}$.
2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
   а) $y=3x^4-4x^3-7$; б) $y=\frac{12-3x^2}{x^2+12}$.
3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
   а) $y=4x^4-8x^2+5x$; б) $y=(x+2)e^{x+2}$.
4. Знайти асимптоти функції:
   а) $y=\frac{3x^2+2x+3}{x^2-2x}$ б) $y=5\ln\frac{x-2}{x}-4$.
5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
   а) $y=x^3-9x$; б) $y=x^3e^{-x}$.
6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=\frac{1+\ln x}{x}$$
   на інтервалі $\left[\frac{1}{e};e\right]$.
7. Визначити максимальний прибуток, який може отримати фірма-виробник, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=11{,}5$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=5+\frac{5x}{2}+\frac{x^2}{2}$.
8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=25+19x+x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=35$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?
9. *Теоретичне питання.* Екстремуми функції.

Завдання 9.23.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to 0}\frac{5^x-5^{sinx}}{x^3}$; б) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right]$;

   в) $\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cdot sin\frac{13}{x}\right)$ г) $\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+x^2}$.

2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3$; б) $y=\ln(1-x^2)$.

3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y=x^3-3x^2+3x-1$; б) $y=\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2$.

4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{7x^2-7x-4}{x+5}$ б) $y=\frac{e^{x-9}}{x-2}$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y=9x-x^3$; б) $y=\frac{4-x^2}{x^2+1}$.

6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=4-e^{-x^2}$$
   на інтервалі $[0;2]$.

7. Дохід від виробництва продукції з використанням x одиниць ресурсів дорівнює $D(x)=300\sqrt{x}$. Вартість одиниці ресурсів складає 5 умовних одиниць. Яку кількість ресурсів треба придбати, щоб прибуток був найбільшим?

8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=72+15x+2x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=59$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?

9. *Теоретичне питання.* Схема дослідження функції на монотонність і екстремуми.

Завдання 9.24.

1. Обчислити границі функцій:
   а) $\lim_{x\to 0}\frac{6^x-2^x}{x}$;   б) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{tgx}\right]$;
   в) $\lim_{x\to 0} sinx\cdot ln(ctgx)$ г) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{2x}$.
2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
   а) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$;   б) $y=\frac{e^{5-x}}{5-x}$.
3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
   а) $y=2x^3-6x^2+3$;   б) $y=\ln\frac{x}{x+4}-2$.
4. Знайти асимптоти функції:
   а) $y=\frac{x^2-2x+1}{x^2-7x}$ б) $y=(5x-2)e^{x-3}$.
5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
   а) $y=12x-3x^3$;   б) $y=e^{-x^2}$.
6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=\frac{3x}{x^2+1}$$
   на інтервалі $[0;5]$.
7. При виробництві монополією x одиниць товару, ціна за одиницю $p(x)=10+\frac{6}{x}$. Визначити оптимальне для монополії значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується, якщо відома функція витрат $C(x)=2+3x+\frac{x^2}{2}$.
8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=128+25x+2x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=81$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?
9. *Теоретичне питання.* Найбільше і найменше значення функції в інтервалі.

Завдання 9.25.

1. Обчислити границі функцій:
   а) $\lim_{x\to 0}\frac{ln^2(1+x)}{x}$; б) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^3+x^2-5}{x^2-4}-2x\right]$;
   в) $\lim_{x\to 0} sinx\cdot lnx$ г) $\lim_{x\to 0}(1+sin^2x)^{ctg^2x}$.
2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
   а) $y=2x^4+8x+6$; б) $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$.
3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
   а) $y=\frac{1}{12}x^4+\frac{5}{6}x^3+2x^2-2$; б) $y=3\ln\frac{x-6}{x}$.
4. Знайти асимптоти функції:
   а) $y=\frac{2x^2+5x+3}{4x-8}$ б) $y=\frac{e^{x-2}}{x-7}$.
5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
   а) $y=x^3-3x^2-18x$; б) $y=\frac{x^2}{\ln x}$.
6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=3x^4-16x^3+2$$
   на інтервалі $[-3;1]$.
7. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=84$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=7+9x+x^3$.
8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=36+22x+9x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=148$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?
9. *Теоретичне питання.* Опуклість та угнутість функції. Точки перегину функції.

Завдання 9.26.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}+e^{-3x}-2}{x^2}$; б) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{lnx}-\frac{x}{x-1}\right]$;

   в) $\lim_{x\to\infty}(1-cos3x)ctg5x$ г) $\lim_{x\to 1}(1-x)^{cos\frac{\pi x}{2}}$.

2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y=x^3-6x^2$; б) $y=(x+4)e^{x-2}$.

3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y=x^4-96x^2+315$; б) $y=\frac{x^2+2x-1}{2x+1}$.

4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{8x^2-2x-6}{x^2-36}$ б) $y=8\ln\frac{x-2}{x-4}+3$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$; б) $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$.

6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=x+\frac{2}{\sqrt{x}}$$
   на інтервалі $\left[\frac{1}{4};4\right]$.

7. Визначити максимальний прибуток, який може отримати фірма-виробник, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=15$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=25+3x+x^2$.

8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=54+7x+6x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=115$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?

9. *Теоретичне питання.* Схема дослідження функції на опуклість, угнутість, точки перегину.

Завдання 9.27.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$; б) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x^2+3x-1}{x-9}-4x\right]$;

   в) $\lim_{x\to\infty}(x^4\cdot e^{-9x})$ г) $\lim_{x\to 0}(\ln(x+e))^{\frac{1}{x}}$.

2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y=x^3-45x+27$; б) $y=\sqrt{x}(x^2-5)$.

3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y=\frac{1}{3}x^3-4x^2-2x+10$; б) $y=\frac{x^2}{\ln x}$.

4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{9x^2+x+6}{3x-5}$ б) $y=\frac{e^{x-6}}{x-2}$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y=4x^3+2x^2$; б) $y=\frac{x^3-4x}{x^2-1}$.

6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=\ln(cosx)$$
   на інтервалі $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$.

7. Дохід від виробництва продукції з використанням x одиниць ресурсів дорівнює $D(x)=32\sqrt{x}$. Вартість одиниці ресурсів складає 2 умовних одиниць. Яку кількість ресурсів треба придбати, щоб прибуток був найбільшим?

8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=36+16x+9x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=70$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?

9. *Теоретичне питання.* Асимптоти функції.

Завдання 9.28.

1. Обчислити границі функцій:

   а) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\ln\left(e^{x^2}+1\right)}$; б) $\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{ln(x-2)}\right]$;

   в) $\lim_{x\to 1} cos\frac{\pi x}{2}\cdot ln(1-x)$ г) $\lim_{x\to 1}\left(tg\frac{\pi x}{4}\right)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

   а) $y = 2+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$; б) $y=\frac{3x^2-6}{3-2x}$.

3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

   а) $y = x^4-24x^2+12x$; б) $y=(3x-4)e^{x+1}$.

4. Знайти асимптоти функції:

   а) $y=\frac{x^2-x+12}{x^2-2x}$ б) $y = 4\ln\frac{x}{x+5}-7$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

   а) $y = 3x^4-12x^3$; б) $y=\frac{x}{e^x}$.

6. Знайти найбільше та найменше значення функції

   $$y=\sqrt{169-x^2}$$

   на інтервалі $[-12; 5]$.

7. При виробництві монополією x одиниць товару, ціна за одиницю $p(x) = 25+\frac{4}{x}$. Визначити оптимальне для монополії значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується, якщо відома функція витрат $C(x) = 5+3x+x^2$.

8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x) = 96+4x+6x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p = 64$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?

9. *Теоретичне питання.* Загальна схема дослідження функції.

Завдання 9.29.

1. Обчислити границі функцій:
   а) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}-x}{x^2}$; б) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\left[\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{ln2x}\right]$;
   в) $\lim_{x\to 0}(1-e^{3x})ctg2x$ г) $\lim_{x\to 1}(1-x)^{\ln x}$.
2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
   а) $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2-7x+4$; б) $y=x+\frac{1}{x}$.
3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
   а) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+3x$; б) $y=\frac{\ln x}{x}$.
4. Знайти асимптоти функції:
   а) $y=\frac{3x^2-2x-7}{x+4}$ б) $y=\frac{e^{x+1}}{x+9}$.
5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
   а) $y=x^3-25x$; б) $y=\ln(1-x^2)$.
6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=x-2sinx$$
   на інтервалі $[0;\pi]$.
7. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=112$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=9+4x+x^3$.
8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=25+19x+x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=33$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?
9. *Теоретичне питання.* Теорема Ферма. Геометрична інтерпретація теореми Ферма.

Завдання 9.30.

1. Обчислити границі функцій:
   а) $\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{tgx}$; б) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x\,tgx}-\frac{1}{x^2}\right]$;
   в) $\lim_{x\to\infty}\left(x^4\cdot sin\frac{2}{x^4}\right)$ г) $\lim_{x\to 0}(\ln(1+x))^{sinx}$.
2. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
   а) $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2+12x-15$; б) $y=\frac{2x}{1+x^2}$.
3. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
   а) $y=8x^3-3x^4$; б) $y=(x+4)e^{x-4}$.
4. Знайти асимптоти функції:
   а) $y=\frac{2x^2-4x+9}{x^2-6x}$ б) $y=\ln\frac{x+8}{x}-4$.
5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
   а) $y=15x-5x^3$; б) $y=x^2\cdot e^{-x}$.
6. Знайти найбільше та найменше значення функції
   $$y=\frac{1}{x}+4x^2$$
   на інтервалі $\left[\frac{1}{2};2\right]$.
7. Визначити максимальний прибуток, який може отримати фірма-виробник, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=18$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=13+8x+x^2$.
8. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, а функція витрат має вигляд $C(x)=108+14x+3x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p=68$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшаться середні витрати?
9. *Теоретичне питання.* Теорема Ферма. Геометрична інтерпретація теореми Ферма.

Розділ 10 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

У цьому розділі ми познайомимося з невизначеними інтегралами. Запропоновані завдання допоможуть читачеві засвоїти на практиці основні прийоми інтегрування, а саме: безпосереднє знаходження первісних за таблицею невизначених інтегралів, метод заміни змінної, інтегрування частинами… Зрозуміло, що основним інструментом у розв'язанні цих задач є таблиця невизначених інтегралів та основні властивості невизначених інтегралів. Метод заміни змінної переконає нас у необхідності пам'ятати таблицю похідних. Для полегшення роботи над наступним завданням, радимо мати під рукою обидві ці таблиці (похідних та невизначених інтегралів). За відповідним теоретичним матеріалом звертайтеся до розділів 5.1 – 5.8 підручника «Вища математика для менеджерів».

Приклади розв'язання типового варіанта

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{3x^7+4\sqrt[4]{x^5}-x^2}{x^3}dx.$

Розв'язання: Задано степеневу функцію. Для безпосереднього інтегрування спростимо підінтегральну функцію, скориставшись властивостями степенів:

$$\int \frac{3x^7+4\sqrt[4]{x^5}-x^2}{x^3}dx = \int \left(3x^4 + 4x^{-\frac{7}{4}} - \frac{1}{x}\right)dx = 3\int x^4 dx +$$

$$+4\int x^{-\frac{7}{4}}dx - \int \frac{dx}{x} = 3\frac{x^5}{5} + 4\frac{x^{-\frac{3}{4}}}{-\frac{3}{4}} - \ln|x| + C =$$

$$= \frac{3}{5}x^5 - \frac{16}{3\sqrt[4]{x^3}} - \ln|x| + C.$$

2. $\int \left(\frac{6}{\sqrt{x}} - 5\sin x + 4^x\right)dx.$

Розв'язання. Інтеграли табличні. Щоб скористатися таблицею, за властивістю лінійності (5.2), (5.3), розіб'ємо інтеграл на три:

$$\int\left(\frac{6}{\sqrt{x}}-5\sin x+4^x\right)dx=6\int\frac{dx}{\sqrt{x}}-5\int\sin x\,dx+\int 4^x\,dx=$$

$$=3\sqrt{x}+5\cos x+\frac{4^x}{\ln 4}+C.$$

3. $\int\frac{dx}{13x+4}$.

Розв'язання. Для знаходження первісної можемо скористатися або властивістю (5.6) невизначних інтегралів, або звернутися до методу заміни змінної (5.7). Ми розв'яжемо цей приклад двома методами:

$$\int\frac{dx}{13x+4}=\frac{1}{13}\ln|u|+C;$$

або

$$\int\frac{dx}{13x+4}=\begin{bmatrix}u=13x+4\\ du=13\,dx\\ dx=\frac{1}{13}du\end{bmatrix}=\frac{1}{13}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{13}\ln|u|+C=$$

$$=\frac{1}{13}\ln|13x+4|+C.$$

4. $\int\cos(2x-1)\,dx$.

Розв'язання. Для знаходження первісної можемо скористатися або властивістю (5.6) невизначних інтегралів, або звернутися до методу заміни змінної (5.7). Ми розв'яжемо цей приклад двома методами

$$\int\cos(2x-1)\,dx=\frac{1}{2}\sin u+C;$$

або

$$\int \cos(2x-1)\,dx = \begin{bmatrix} u = 2x-1 \\ du = 2\,dx \\ dx = \frac{1}{2}du \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u + C =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2x-1) + C.$$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(7x-9)^3}}$.

Розв'язання. Знову скористаємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(7x-9)^3}} = \begin{bmatrix} u = 7x-9 \\ du = 7\,dx \\ dx = \frac{1}{7}du \end{bmatrix} = \int u^{-\frac{3}{5}}du = \frac{u^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + C =$$
$$= \frac{5}{2}\sqrt[5]{(7x-9)^2} + C.$$

Зауважимо, що в прикладах 3 – 5 при заміні змінної у функціях, аргумент яких лінійний відносно незалежної змінної, за знак інтегралу виходить коефіцієнт, обернений коефіцієнту при x, що цілком відповідає властивості (5.6). Запам'ятавши це, надалі ми не будемо звертатися до заміни змінної в таких простих випадках, а будемо користуватися згаданою властивістю.

6. $\int \frac{arcctg^4 5x}{1+25x^2}dx$.

Розв'язання. Інтеграл не табличний. Звернувшись до таблиці похідних, бачимо, що в підінтегральному виразі присутній диференціал арккотангенса. Це для нас і є підказкою при заміні змінної:

$$\int \frac{arcctg^4 5x}{1+25x^2}dx = \begin{bmatrix} u = arcctg 5x \\ du = -\frac{5dx}{1+25x^2} \\ \frac{dx}{1+25x^2} = \frac{1}{5}du \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\int u^4 du = -\frac{1}{5}\cdot\frac{u^5}{5} + C =$$

$$= -\frac{1}{25}arcctg^5 5x + C.$$

7. $\int \frac{e^{tg4x}dx}{cos^2 4x}$.

Розв'язання. Інтеграл не табличний. І знов таки підказку щодо заміни нам дає таблиця похідних – у підінтегральному виразі ми знаходимо (із точністю до коефіцієнта) диференціал тангенса:

$$\int \frac{e^{tg4x}dx}{cos^2 4x} = \begin{bmatrix} u = tg4x \\ du = \frac{4dx}{cos^2 4x} \\ \frac{dx}{cos^2 4x} = \frac{1}{4}du \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int e^u du = \frac{1}{4}e^u + C = \frac{1}{4}e^{tg4x} + C.$$

8. $\int \frac{dx}{(3x-5)\ln^6(3x-5)}$.

Розв'язання. В підінтегральному виразі ми знаходимо диференціал логарифма, тому заміна змінної очевидна:

$$\int \frac{dx}{(3x-5)\ln^6(3x-5)} = \begin{bmatrix} u = \ln(3x-5) \\ du = \frac{3}{3x-5}dx \\ \frac{dx}{3x-5} = \frac{1}{3}du \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^6} = \frac{1}{3}\int u^{-6}du =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{-5}}{-5} + C = -\frac{1}{15u^5} + C = -\frac{1}{15\ln^5(3x-5)} + C.$$

9. $\int \frac{dx}{9x^2-2}$.

Розв'язання. Настав час познайомиться з чотирма формулами наприкінці нашої таблиці інтегралів, які містять квадратичні вирази. Формули для нас принципові, тому що неодноразово нам доведеться звертатися до них при інтегруванні більш складних функцій.

$$\int \frac{dx}{9x^2-2} = \begin{bmatrix} u^2 = 9x^2 \\ u = 3x \\ du = 3\,dx \\ dx = \frac{1}{3}du \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2-2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln\left|\frac{3x-\sqrt{2}}{3x+\sqrt{2}}\right| + C.$$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-8x^2}}$.

Розв'язання. Інтегрування проводимо аналогічно попередньому прикладу. Лише звернутися ми будемо вимушені до іншої формули:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-8x^2}} = \begin{bmatrix} u^2 = 8x^2 \\ u = 2\sqrt{2}x \\ du = 2\sqrt{2}dx \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}du \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{5-u^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} arcsin\frac{u}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} arcsin\frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{5}} + C.$$

11. $\int \frac{x\,dx}{3x^2+1}$.

Розв'язання. Звернутися до згаданих формул при інтегруванні цієї функції не можна, тому що в чисельнику присутній x. Помічаємо, що в знаменнику – многочлен другого степеня, а в чисельнику – першого. При диференціюванні многочлена другого степеня, отримаємо многочлен першого. Отже, заміна змінної стає очевидною:

$$\int \frac{x\,dx}{3x^2+1} = \begin{bmatrix} u = 3x^2 + 1 \\ du = 6x\,dx \\ x\,dx = \frac{1}{6}du \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{6}\ln|u| + C =$$

$$= \frac{1}{6}\ln|3x^2 + 1| + C.$$

12. $\int \frac{3x-7}{\sqrt{4x^2+1}}dx$.

Розв'язання. При розв'язанні цього прикладу звернемося до розглянутих прикладів 9 - 11. Поділимо чисельник на знаменник, розіб'ємо інтеграл на два, методи інтегрування кожного з яких нам вже відомі. Щоб запис був зрозумілішим, ми кожну з первісних знайдемо окремо, а результат отримаємо як суму:

$$\int \frac{3x-7}{\sqrt{4x^2+1}}dx = 3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+1}} - 7\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}} = I_1 + I_2;$$

$$I_1 = 3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \begin{bmatrix} u = 4x^2+1 \\ du = 8xdx \\ xdx = \frac{1}{8}du \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{8}\cdot 2\sqrt{u} + C =$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+1} + C;$$

$$I_2 = -7\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \begin{bmatrix} u^2 = 4x^2 \\ u = 2x \\ du = 2dx \\ dx = \frac{1}{2}du \end{bmatrix} = -\frac{7}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} =$$
$$= -\frac{7}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2+1}\right| + C = -\frac{7}{2}\ln\left|2x + \sqrt{4x^2+1}\right| + C;$$
$$I = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+1} - \frac{7}{2}\ln\left|2x + \sqrt{4x^2+1}\right| + C.$$

13. $\int \frac{dx}{x^2-4x+9}$.

Розв'язання. У знаменнику підінтегральної функції – квадратний тричлен. Для інтегрування таких виразів (см. п. 5.4.1) необхідно виділити повний квадрат:

$$x^2 - 4x + 9 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 9 = (x-2)^2 + 5.$$

Підставимо в підінтегральний вираз виділений повний квадрат, бачимо, що відповідною заміною, інтеграл зводиться до табличного:

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+9} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+5} = \begin{bmatrix} u = x-2 \\ du = dx \end{bmatrix} = \int \frac{du}{u^2+5} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} arctg\frac{u}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} arctg\frac{x-2}{\sqrt{5}} + C.$$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+x-2}}$.

Розв'язання. Метод інтегрування – аналогічний попередньому розглянутому прикладу:

$$3x^2 + x - 2 = \left(3x^2 + 2 \cdot \sqrt{3}x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{12}\right) - \frac{1}{12} - 2 =$$

$$= \left(\sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{25}{12};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+x-2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{25}{12}}} = \begin{bmatrix} u = \sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ du = \sqrt{3}dx \\ dx = \frac{1}{\sqrt{3}}du \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - \frac{25}{12}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|u + \sqrt{u^2 - \frac{25}{12}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{25}{12}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \sqrt{3x^2 + x - 2}\right| + C.$$

15. $\int \frac{x-4}{x^2-6x-2} dx$.

Розв'язання. Метод інтегрування таких виразів детально розглянутий у п. 5.4.2. Проілюструємо його на прикладі. Звернемо увагу, що в чисельнику – многочлен першого степеня, а в знаменнику – другого. Диференціал многочлена другого степеня є многочлен першого степеня. Тому зрозуміло, що з точністю до коефіцієнтів ми маємо в чисельнику диференціал знаменника. Оцінимо диференціал знаменника:

$$d(x^2 - 6x - 2) = (2x - 6)dx.$$

Спробуємо його отримати в чисельнику. Спочатку підберемо коефіцієнт при x, а потім – при вільному члені:

$$\int \frac{x-4}{x^2-6x-2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-8}{x^2-6x-2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-6)+6-8}{x^2-6x-2} dx =$$

Отриманий інтеграл є сенс розбити на два, методи інтегрування кожного з яких нам вже відомі:

$$= \frac{1}{2}\int\frac{(2x-6)dx}{x^2-6x-2} - \frac{8}{2}\int\frac{dx}{x^2-6x-2} = I_1 + I_2;$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\frac{(2x-6)dx}{x^2-6x-2} = \begin{bmatrix} u = x^2-6x-2 \\ du = (2x-6)dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2-6x-2| + C;$$

$$I_2 = -4\int\frac{dx}{x^2-6x-2} = -4\int\frac{dx}{(x^2-6x+9)-9-2} = -4\int\frac{dx}{(x-3)^2-11} =$$
$$= \begin{bmatrix} u = x-3 \\ du = dx \end{bmatrix} = -4\int\frac{du}{u^2-11} = -4\cdot\frac{1}{2\sqrt{11}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{11}}{u+\sqrt{11}}\right| + C =$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{11}}\ln\left|\frac{x-3-\sqrt{11}}{x-3+\sqrt{11}}\right| + C.$$

Остаточно маємо:

$$I = \frac{1}{2}\ln|x^2-6x-2| - \frac{2}{\sqrt{11}}\ln\left|\frac{x-3-\sqrt{11}}{x-3+\sqrt{11}}\right| + C.$$

16. $\int\frac{5x+4}{\sqrt{3-2x-2x^2}}dx.$

Розв'язання. Алгоритм розв'язання аналогічний розглянутому у попередньому прикладі. Оцінимо диференціал підкореневого виразу:

$$d(3-2x-2x^2) = (-2-4x)dx.$$

Спробуємо отримати його в чисельнику. Підібрати дрібний коефіцієнт не завжди зручно, тому, якщо в цьому є потреба, радимо читачеві спочатку отримати при x коефіцієнт, який би дорівнював одиниці (для цього винесемо заданий коефіцієнт за дужки), а далі працювати, як і в попередньому прикладі:

$$\int\frac{5x+4}{\sqrt{3-2x-2x^2}}dx = 5\int\frac{x+\frac{4}{5}}{\sqrt{3-2x-2x^2}}dx = -\frac{5}{4}\int\frac{-4x-\frac{16}{5}}{\sqrt{3-2x-2x^2}}dx =$$
$$= -\frac{5}{4}\int\frac{(-4x-2)+2-\frac{16}{5}}{\sqrt{3-2x-2x^2}}dx = -\frac{5}{4}\int\frac{(-4x-2)dx}{\sqrt{3-2x-2x^2}} + \frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-2x^2}} =$$
$$= I_1 + I_2;$$

$$I_1 = -\frac{5}{4}\int\frac{(-4x-2)dx}{\sqrt{3-2x-2x^2}} = \begin{bmatrix} u = 3-2x-2x^2 \\ du = (-4x-2)dx \end{bmatrix} = -\frac{5}{4}\int\frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= -\frac{5}{4} \cdot 2\sqrt{u} + C = -\frac{5}{2}\sqrt{3-2x-2x^2} + C;$$

$$I_2 = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-2x^2}} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{-(2x^2+2x-3)}} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{3+\frac{1}{2}-\left(2x^2+2\cdot\sqrt{2}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)}} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{7}{2}-\left(\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \begin{bmatrix} u = \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ du = \sqrt{2}dx \\ dx = \frac{1}{\sqrt{2}}du \end{bmatrix} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{\frac{7}{2}-u^2}} =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} arcsin\frac{u}{\sqrt{\frac{7}{2}}} + C = \frac{3}{2\sqrt{2}} arcsin\frac{\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}} + C =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C.$$

Остаточно маємо:

$$I = -\frac{5}{2}\sqrt{3-2x-2x^2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C.$$

17. $\int \frac{2x^3+6x-3}{x+4}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція – раціональний дріб, дріб неправильний, тому що максимальний степінь чисельника перевищує максимальний степінь знаменника. Перед інтегруванням необхідно виділити цілу частину, для цього поділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{r|l} -\,2x^3 + 0x^2 + 6x - 3 & x+4 \\ 2x^3 + 8x^2 \quad\quad\quad\quad & \overline{2x^2-8x+38} \\ \hline -\,-8x^2 + 6x \quad\quad & \\ -8x^2 - 32x \quad\quad & \\ \hline -\,38x - 3 & \\ 38x + 152 & \\ \hline -155 & \end{array}$$

Наш інтеграл набуває вигляду:

$$\int \frac{2x^3+6x-3}{x+4}dx = \int \left(2x^2 - 8x + 38 - \frac{155}{x+4}\right)dx =$$
$$= 2\int x^2\,dx - 8\int x\,dx + 38\int dx - 155\int \frac{dx}{x+4} =$$
$$= \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 38x - 155\ln|x+4| + C.$$

18. $\int \frac{4x^2-x-39}{(x+2)(x^2-6x+5)}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція – раціональний правильний дріб. Для того щоб з'ясувати, якого він типу, ми повинні дізнатися корені знаменника. Один із коренів – $x = -2$, ми бачимо відразу, два других можемо знайти, наприклад, за теоремою Вієта (або знайти корені квадратного рівняння через дискримінант): $x = 1,\ x = 5$. Усі три корені знаменника дійсні, різні. Отже, складний дріб може бути розкладений на три простіших (5.11):

$$\frac{4x^2-x-39}{(x+2)(x^2-6x+5)} = \frac{4x^2-x-39}{(x+2)(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-5}.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти. Для цього приведемо дробі до спільного знаменника та дорівняємо чисельники:

$$4x^2 - x - 39 = A(x-1)(x-5) + B(x+2)(x-5) + C(x-1)(x+2);$$

Підставляючи по черзі корені знаменника, ми відразу знаходимо невідомі коефіцієнти:

$x = -2$: $\quad 16 + 2 - 39 = 21A;\quad -21 = 21A;\quad A = -1;$

$x = 1$: $\quad 4 - 1 - 39 = -12B;\quad -36 = -12B;\quad B = 3;$

$x = 5$: $\quad 100 - 5 - 39 = 28C;\quad 56 = 28C;\quad C = 2.$

Отже, переписавши підінтегральну функцію, знаходимо первісну:

$$\int \frac{4x^2-x-39}{(x+2)(x^2-6x+5)}dx = -\int \frac{dx}{x+2} + 3\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-5} =$$
$$= -\ln|x+2| + 3\ln|x-1| + 2\ln|x-5| + C.$$

19. $\int \frac{2x^2-x+30}{x^2(x+6)}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція – раціональний правильний дріб. Корені знаменника: $x=0$ і $x=-6$. Корінь $x=0$ - кратний, його кратність дорівнює 2. Тому відповідно до (5.13) розкладання нашого дробу на простіші має вигляд:

$$\frac{2x^2-x+30}{x^2(x+6)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+6}.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти. Приведемо дробі до спільного знаменника, дорівняємо чисельники:

$$2x^2-x+30=A(x+6)+Bx(x+6)+Cx^2.$$

Як і в попередньому прикладі, ми зможемо обчислити відразу два з трьох невідомих коефіцієнтів:

$x=0$: $\quad 30=6A$; $\quad A=5$;

$x=-6$: $\quad 108=36C$; $\quad C=3$.

Щоб знайти третій, припустимося до «хитрощів»: підставимо в тотожність будь-яке значення x, наприклад $x=1$, отримаємо вираз, який містить всі три коефіцієнти; підставимо два відомих та виразимо через них третій:

$x=1$: $\quad 31=7A+7B+C$; $\quad 31=35+7B+3$; $\quad B=-1$.

Отже, переписавши підінтегральну функцію, знаходимо первісну:

$$\int \frac{2x^2-x+30}{x^2(x+6)}dx=5\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{x+6}=$$
$$=-\frac{5}{x}-\ln|x|+3\ln|x+6|+C.$$

20. $\int \frac{4x^2-x+12}{x^3-x^2+4x-4}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція – раціональний правильний дріб. Для того щоб знайти корені знаменника, спробуємо перетворити многочлен:

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = x^2(x-1) + 4(x-1) = (x-1)(x^2+4).$$

Отже, знаменник має один дійсний корінь $x = 1$ та пару комплексних (тому що $x^2 + 4 \neq 0$ в дійсній області). Згідно з (5.15) розкладання дробі на простіші має вигляд:

$$\frac{4x^2-x+12}{x^3-x^2+4x-4} = \frac{4x^2-x+12}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Приведемо дробі до спільного знаменника, дорівняємо чисельники:

$$4x^2 - x + 12 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1).$$

Лише один з коефіцієнтів ми можемо знайти відразу:

$x = 1$: $\quad 15 = 5A;\quad A = 3.$

Щоб знайти два інших, розкриємо дужки в нашій тотожності, та, за методом невизначених коефіцієнтів, дорівняємо коефіцієнти за однакових степенів x:

$$4x^2 - x + 12 = Ax^2 + 4A + Bx^2 - Bx + Cx - C;$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \ \ 4 = A + B \\ x^1 & -1 = -B + C. \\ x^0 & \ 12 = 4A - C \end{array}$$

Ми отримали систему з трьох рівнянь із трьома невідомими. Ми можемо її не розв'язувати, а підставити в перше та третє рівняння системи відомий нам коефіцієнт A та знайти невідомі B та C:

$4 = 3 + B;\qquad B = 1;$

$12 = 12 - C;\qquad C = 0.$

Отже, інтеграл приймає вигляд суми двох інтегралів, кожний з яких ми вже навчились знаходити по попереднім прикладами:

$$\int \frac{4x^2-x+12}{x^3-x^2+4x-4}dx = 3\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{x\,dx}{x^2+4} = 3\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+4} =$$

$$= 3\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4} =$$
$$= 3\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C.$$

21. $\int x\sin(3x-1)\,dx$.

Розв'язання. Інтегрування таких функцій (їх приблизний перелік див. стор. 285 - 286) проводиться частинами. Нагадаємо формулу (5.16):

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

$$\int x\sin(3x-1)\,dx = \begin{bmatrix} u = x \\ dv = \sin(3x-1)\,dx \\ du = dx \\ v = -\frac{1}{3}\cos(3x-1) \end{bmatrix} =$$
$$= -\frac{1}{3}x\cos(3x-1) + \frac{1}{3}\int\cos(3x-1)\,dx =$$
$$= -\frac{1}{3}x\cos(3x-1) + \frac{1}{9}\sin(3x-1) + C.$$

22. $\int x^2 e^{4x} dx$.

Розв'язання. Інтегрувати частинами таку функцію будемо двічі (див. зауваження на стор. 286):

$$\int x^2 e^{4x} dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \\ dv = e^{4x}dx \\ du = 2xdx \\ v = \frac{1}{4}e^{4x} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}x^2 e^{4x} - \frac{1}{4}\cdot 2\int x e^{4x} dx =$$
$$= \begin{bmatrix} u = x \\ dv = e^{4x}dx \\ du = dx \\ v = \frac{1}{4}e^{4x} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}x^2 e^{4x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{4}\int e^{4x}dx\right) =$$
$$= \frac{1}{4}x^2 e^{4x} - \frac{1}{8}xe^{4x} + \frac{1}{32}e^{4x} + C.$$

23. $\int \ln(x+7)\,dx$.

Розв'язання. Первісна такої функції теж знаходиться інтегруванням частинами. Розіб'ємо підінтегральний вираз на u та dv:

$$\int \ln(x+7)\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x+7) \\ dv = dx \\ du = \frac{dx}{x+7} \\ v = x \end{bmatrix} = x\ln(x+7) - \int \frac{xdx}{x+7} =$$

отримали неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину і знайдемо первісну:

$$= x\ln(x+7) - \int \frac{(x+7)-7}{x+7}dx = x\ln(x+7) - \int dx + 7\int \frac{dx}{x+7} =$$
$$= \ x\ln(x+7) - x + 7\ln(x+7) + C.$$

24. $\int \arccos 8x\,dx$.

Розв'язання. Інтегруємо частинами. Розіб'ємо підінтегральний вираз на u та dv:

$$\int \arccos 8x\,dx = \begin{bmatrix} u = \arccos 8x \\ dv = dx \\ du = -\frac{8dx}{\sqrt{1-64x^2}} \\ v = x \end{bmatrix} = x\arccos 8x + 8\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-64x^2}} =$$

за відомою нам заміною маємо:

$$= x\arccos 8x + \frac{8}{(-128)}\int \frac{-128x\,dx}{\sqrt{1-64x^2}} = \ x\arccos 8x - \frac{1}{16}\int \frac{d\left(1-64x^2\right)}{\sqrt{1-64x^2}} =$$
$$= x\arccos 8x - \frac{1}{8}\sqrt{1-64x^2} + C.$$

25. $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 2}$.

Розв'язання. Для інтегрування такого класу функцій необхідно звернутися до універсальної тригонометричної підстановки (5.17):

$$\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+2} = \begin{bmatrix} u=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \frac{2du}{1+u^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{3\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}+2} =$$

$$= 2\int \frac{du}{3-3u^2+2u+2+2u^2} = -2\int \frac{du}{u^2-2u-5} =$$

у квадратному тричлені виділимо повний квадрат:

$$= -2\int \frac{du}{(u^2-2u+1)-1-5} = -2\int \frac{du}{(u-1)^2-6} =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{u-1-\sqrt{6}}{u-1+\sqrt{6}}\right| + C = -\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{6}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{6}}\right| + C.$$

26. $\int \frac{dx}{\cos^2 x-3\sin^2 x}$.

Розв'язання. Для інтегрування функцій з парними степенями синуса та косинуса раціональною є підстановка (5.20), (5.21). Скористаємося цією підстановкою:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x-3\sin^2 x} = \begin{bmatrix} u=tgx \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+u^2} \\ \sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2} \\ dx = \frac{du}{1+u^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{\frac{1}{1+u^2}-\frac{3u^2}{1+u^2}} = -\int \frac{du}{3u^2-1} =$$

$$= -\int \frac{du}{\left(\sqrt{3}u\right)^2-1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{3}u-1}{\sqrt{3}u-1}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{tgx\sqrt{3}-1}{tgx\sqrt{3}-1}\right| + C.$$

27. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+12}}dx$

Розв'язання. Перейти при інтегруванні від тригонометричних функцій до степеневих у цьому прикладі, можна за допомогою підстановки (5.18):

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 12}} dx = \begin{bmatrix} u = \sin x + 12 \\ du = \cos x\, dx \end{bmatrix} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C =$$
$$= 2\sqrt{\sin x + 12} + C.$$

28. $\int \cos^8 x \sin^3 x\, dx.$

Розв'язання. Інтегрування добутку синуса на косинус у випадку, якщо одна з функцій в непарному степені, проводиться за допомогою однієї з підстановок (5.22) та (5.23), залежно від того, яка з функцій у парному степені. У нашому випадку в непарному степені синус, тому обираємо заміну (5.22):

$$\int \cos^8 x \sin^3 x\, dx = \int \cos^8 x \sin^2 x \sin x\, dx =$$
$$= \begin{bmatrix} u = \cos x \\ du = -\sin x\, dx \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - u^2 \end{bmatrix} = -\int u^8 (1 - u^2) du =$$
$$= -\int (u^8 - u^{10}) du = -\frac{1}{9} u^9 + \frac{1}{11} u^{11} + C =$$
$$= -\frac{1}{9} \cos^9 x + \frac{1}{11} \cos^{11} x + C.$$

29. $\int \sin^4 3x\, dx.$

Розв'язання. Інтегрування парних степенів синусу та косинусу проводиться за допомогою формул зниження степенів (5.24):

$$sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos2x);$$
$$cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos2x).$$

$$\int \sin^4 3x\, dx = \int (\sin^2 3x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}(1 - \cos 6x)\right)^2 dx =$$
$$= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 6x + \cos^2 6x) dx = \frac{1}{4} \int dx -$$
$$- \frac{1}{4} \cdot 2 \int \cos 6x\, dx + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int (1 + \cos 12x) dx =$$
$$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{12} \cos 12x + C =$$
$$= \frac{3}{8} x - \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{96} \cos 12x + C.$$

30. $\int \cos 9x \cos 2x \, dx$.

Розв'язання. Перед інтегруванням цієї функції згадаємо формули перетворення добутку у суму (5.25) та скористаємося ними:

$$\int \cos 9x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int (\cos(9x - 2x) + \cos(9x + 2x))dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos 7x \, dx + \frac{1}{2}\int \cos 11x \, dx =$$
$$= \frac{1}{14}\sin 7x + \frac{1}{22}\sin 11x + C.$$

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+4}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція містить ірраціональність. Щоб позбутися її, скористаємося підстановкою (5.26). Квадратний корінь зникне, якщо підкореневий вираз замінити новою змінною у квадраті:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+4} = \begin{bmatrix} x + 1 = u^2 \\ dx = 2u \, du \end{bmatrix} = \int \frac{2u \, du}{u+4} = 2\int \frac{(u+4)-4}{u+4} du =$$
$$= 2\int du - 8\int \frac{du}{u+4} = 2u - 8\ln|u + 4| + C =$$
$$= 2\sqrt{x+1} - 8\ln\left|\sqrt{x+1} + 4\right| + C.$$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+4)}$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, підінтегральна функція містить ірраціональність. Проте щоб позбутися її, необхідно нову змінну підвести до степеня, який дорівнює найменшому спільному кратному знаменників показників степенів. У нас є корінь квадратний та корінь кубічний: НОК(2,3)=6. Отже, нову змінну потрібно підвести в шостий степінь:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+4)} = \begin{bmatrix} x = u^6 \\ dx = 6u^5 du \end{bmatrix} = \int \frac{6u^5 du}{u^3(u^2+4)} = 6\int \frac{u^2 du}{u^2+4} =$$
$$= 6\int \frac{(u^2+4)-4}{u^2+4} du = 6\int du - 24\int \frac{du}{u^2+4} =$$
$$= 6u - \frac{24}{2} arctg \frac{u}{2} + C = 6\sqrt[6]{x} - 12 arctg \frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C.$$

33. $\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^3}dx.$

Розв'язання. При інтегруванні функцій, що містять квадратичну ірраціональність, необхідно користуватися тригонометричними підстановками (5.27) – (5.29). У цьому інтегралі ірраціональність вигляду (5.28), тому приведемо інтеграл до вигляду:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^3}dx = \begin{bmatrix} x = \frac{\sqrt{5}}{sint} \\ dx = -\frac{\sqrt{5}cost\,dt}{sin^2t} \\ \sqrt{x^2-5} = \sqrt{5}\frac{cost}{sint} \end{bmatrix} = -\int \frac{\sqrt{5}\frac{cost}{sint}\cdot\frac{\sqrt{5}cost\,dt}{sin^2t}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{sint}\right)^3} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\int cos^2t\,dt = -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}\int(1+cos2t)dt =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(t+\frac{1}{2}sin2t\right)+C = -\frac{1}{2\sqrt{5}}(t+sint\cdot cost)+C.$$

Якщо з підстановки виразити $sint = \frac{\sqrt{5}}{x}$ та $cost = \frac{\sqrt{x^2-5}}{x}$ остаточно маємо:

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}arcsin\frac{\sqrt{5}}{x}+\frac{\sqrt{x^2-5}}{x^2}\right)+C.$$

34. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx.$

Розв'язання. При інтегруванні функцій, що містять квадратичну ірраціональність, необхідно користуватися тригонометричними підстановками (5.27) – (5.29). У цьому інтегралі ірраціональність вигляду (5.27), тому приведемо інтеграл до вигляду:

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \begin{bmatrix} x = sint \\ dx = cost\,dt \\ \sqrt{1-x^2} = cost \end{bmatrix} = \int \frac{cos^2t}{sin^2t}dt = \int \frac{1-sin^2t}{sin^2t}dt =$$

$$= \int \frac{dt}{sin^2t} - \int dt = -ctg\,t - t + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - arcsinx + C.$$

Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів

Завдання 10.1.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{2x^3-5\sqrt[3]{x^7}+3x^5}{4x^4}dx.$
2. $\int (8x^3 - 6\cos x + e^x)dx.$
3. $\int \frac{dx}{4x-7}.$
4. $\int \sin(5x+3)\,dx.$
5. $\int \sqrt{1-6x}\,dx.$
6. $\int \frac{\sqrt[5]{tg^3 7x}}{cos^2 7x}dx.$
7. $\int \frac{e^{arcctg 6x}dx}{1+36x^2}.$
8. $\int \frac{dx}{\arcsin 2x\sqrt{1-4x^2}}.$
9. $\int \frac{dx}{9x^2+5}.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}.$
11. $\int \frac{x\,dx}{5x^2-1}.$
12. $\int \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{6x^2+4}}.$
13. $\int \frac{dx}{x^2+6x-3}.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3x+1}}.$
15. $\int \frac{(x-4)\,dx}{3x^2-5x+7}.$
16. $\int \frac{(3x+2)\,dx}{\sqrt{8+x-7x^2}}.$
17. $\int \frac{2x^5-6x^3+4x^2+7}{x-2}dx.$
18. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x^2-x-12)}dx.$
19. $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx.$
20. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx.$
21. $\int x^2\cos 3x\,dx.$
22. $\int (3x-1)e^{5x}dx.$
23. $\int \ln(x-4)\,dx.$
24. $\int x\,arctg 4x\,dx.$
25. $\int \frac{dx}{2\cos x-3\sin x+8}.$
26. $\int \frac{dx}{7-2\cos^2 x-5\sin^2 x}.$
27. $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx.$
28. $\int \sin^5 3x\cos^6 3x\,dx.$
29. $\int \sin^4 4x\cos^2 4x\,dx.$
30. $\int \sin 6x\cos 9x\,\,dx.$
31. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$
32. $\int \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt[3]{2x-1}+1}dx.$
33. $\int x\sqrt{4-x^2}\,dx.$
34. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx.$

Завдання 10.2.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{7x^2-2\sqrt[5]{x^4}-9x^6}{3x^5}dx.$

2. $\int (6x^7 - 3\sin x + 5^x)dx.$

3. $\int \frac{dx}{3x+5}.$

4. $\int \cos(2x-7)\,dx.$

5. $\int \sqrt[6]{(2+5x)^{11}}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[4]{\ln^3(6x-1)}}{(6x-1)}dx.$

7. $\int \frac{e^{arccos4x}dx}{\sqrt{1-16x^2}}.$

8. $\int \frac{dx}{\operatorname{arctg}^2 5x(1+25x^2)}.$

9. $\int \frac{dx}{4x^2-9}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+25}}.$

11. $\int \frac{(3x+7)dx}{7x^2+4}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-5x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2+8x+12}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-8x^2}}.$

15. $\int \frac{(2x-1)\,dx}{6x^2-2x-9}.$

16. $\int \frac{(3x+8)\,dx}{\sqrt{4x^2+x-5}}.$

17. $\int \frac{x^4-3x^3-5x^2-x}{x+3}dx.$

18. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+5x+6)}.$

19. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx.$

20. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx.$

21. $\int x\sin(5x+2)\,dx.$

22. $\int (x^2+1)e^{4x}dx.$

23. $\int x\cdot\ln(3x-1)\,dx.$

24. $\int arcsin8x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{5\cos x-2\sin x-1}.$

26. $\int \frac{dx}{6+\cos^2 x-4\sin^2 x}.$

27. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{(2+\sin x)^2}}dx.$

28. $\int \sin^4 2x\cos^7 2x\,dx.$

29. $\int \sin^6 5x\,dx.$

30. $\int \sin 5x\sin 3x\;\,dx.$

31. $\int \frac{3dx}{1+\sqrt{x-2}}.$

32. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}.$

33. $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx.$

34. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+25x^2}}.$

Завдання 10.3.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{4x^8+3\sqrt[7]{x^2}-6x^6}{x^9}dx.$

2. $\int \left(5x^2 - \frac{3}{\cos^2 x} - 7^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{3x+4}.$

4. $\int \sin(9x-3)\,dx.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+5x}}.$

6. $\int \frac{\sqrt[4]{arcsin^5 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

7. $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx.$

8. $\int \frac{dx}{(2x-9)\ln^2(2x-9)}.$

9. $\int \frac{dx}{3x^2-4}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+7}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{3x^2+8}.$

12. $\int \frac{(5x+1)dx}{\sqrt{11-2x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2-4x-3}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+2x+9}}.$

15. $\int \frac{(4x-2)\,dx}{3x^2-5x+7}.$

16. $\int \frac{(7x+1)\,dx}{\sqrt{8+x-7x^2}}.$

17. $\int \frac{3x^5-x^4-5x^2+13}{x+2}dx.$

18. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$

19. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}.$

20. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)^2}dx.$

21. $\int (x^2+7x)\cos 2x\,dx.$

22. $\int xe^{4x+3}dx.$

23. $\int \ln(3x-5)\,dx.$

24. $\int x^2\, arcctg 5x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x-9}.$

26. $\int \frac{dx}{4+\cos^2 x-3\sin^2 x}.$

27. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx.$

28. $\int \sin^5 7x\cos^8 7x\,dx.$

29. $\int \sin^2 5x\cos^4 5x.$

30. $\int \cos 3x\cos 8x\;dx.$

31. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx.$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}.$

33. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx.$

34. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}dx.$

Завдання 10.4.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{6x^4+3\sqrt[9]{x^2}-5x^7}{x^6}dx.$

2. $\int \left(3x^8 - \frac{7}{1+x^2} + 4e^x\right) dx.$

3. $\int \frac{dx}{8x-3}.$

4. $\int \cos(7x-9)\,dx.$

5. $\int \sqrt[8]{(4+5x)^3}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[4]{ctg^5 2x}}{sin^2 2x}dx.$

7. $\int \frac{x^3dx}{5+2x^4}.$

8. $\int \frac{dx}{\arccos^3 5x\sqrt{1-25x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{7x^2-5}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}.$

11. $\int \frac{(x-2)dx}{3x^2+4}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5-6x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{4x^2-2x-5}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7x+10}}.$

15. $\int \frac{(5x+4)\,dx}{x^2+3x+8}.$

16. $\int \frac{(4x-1)\,dx}{\sqrt{6+2x-x^2}}.$

17. $\int \frac{3x^4-2x^3-3x^2+6x}{x+4}dx.$

18. $\int \frac{6x^2+35x+56}{(x+4)(x^2+x-6)}dx.$

19. $\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2}dx.$

20. $\int \frac{dx}{x^3+1}.$

21. $\int x\sin(2x+1)\,dx.$

22. $\int (x^2+5x)e^{2x}dx.$

23. $\int x^3\ln x\,dx.$

24. $\int arccos6x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{3\cos x-5\sin x-1}.$

26. $\int \frac{dx}{6+3\cos^2 x-\sin^2 x}.$

27. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}dx.$

28. $\int \sin^4 8x\cos^3 8x\,dx.$

29. $\int \sin^6 5x\,\,dx.$

30. $\int \sin 5x\cos 3x\,\,dx.$

31. $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}.$

32. $\int \frac{1-\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx.$

33. $\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx.$

34. $\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x}dx.$

Завдання 10.5.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

2. $\int \left(4x^7+\frac{5}{x^2-9}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{9x-3}.$

4. $\int \sin(7x+13)\,dx.$

5. $\int e^x\sqrt{2+e^x}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[5]{arcsin^6 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

7. $\int \frac{\sin \ln x}{x}dx.$

8. $\int \frac{dx}{(9x+1)\sqrt{\ln(9x+1)}}.$

9. $\int \frac{dx}{5x^2+9}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{6-4x^2}}.$

11. $\int \frac{xdx}{3x^2-2}.$

12. $\int \frac{(x-6)dx}{\sqrt{7x^2+1}}.$

13. $\int \frac{dx}{2x^2+6x-7}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-x-5}}.$

15. $\int \frac{(4x+1)dx}{x^2+4x+6}.$

16. $\int \frac{(3x-4)\,dx}{\sqrt{4+5x-2x^2}}.$

17. $\int \frac{4x^5+3x^4-2x-5}{x+3}dx.$

18. $\int \frac{3x^2-6x-21}{(x+5)(x^2-3x+2)}dx.$

19. $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx.$

20. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}.$

21. $\int (x^2-x)\cos 7x\,dx.$

22. $\int x\,e^{4x+9}dx.$

23. $\int \ln(3x+2)\,dx.$

24. $\int x^2 arcctg 2x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{5\cos x+2\sin x-7}.$

26. $\int \frac{dx}{3+4\cos^2 x-2\sin^2 x}.$

27. $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt[3]{(1+\sin 5x)^4}}dx.$

28. $\int \cos^7 4x\,dx.$

29. $\int \sin^2 8x\cos^2 8x.$

30. $\int \sin 5x\sin 8x\;\,dx.$

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-4x}.$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[4]{x^3}}.$

33. $\int \frac{xdx}{\sqrt{16-x^2}}.$

34. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25+x^2}}.$

Завдання 10.6.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\left(2\sqrt{x}-1\right)^3}{\sqrt{x^3}}dx.$

2. $\int \left(4x^5-\frac{7}{\sqrt{4-x^2}}-6^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{6x+11}.$

4. $\int \cos(7x+3)\,dx.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[8]{(3x-2)^3}}.$

6. $\int \frac{\sqrt[4]{arccos^9 5x}}{\sqrt{1-25x^2}}dx.$

7. $\int \frac{dx}{2x-x\ln x}.$

8. $\int \frac{dx}{\operatorname{arctg} 2x(1+4x^2)}.$

9. $\int \frac{dx}{6x^2-1}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}.$

11. $\int \frac{(8x-3)dx}{9x^2+4}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-5x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{4x^2-8x+5}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-5x-3x^2}}.$

15. $\int \frac{(6x+2)\,dx}{x^2-3x-2}.$

16. $\int \frac{(5x+6)\,dx}{\sqrt{5x^2-3x+8}}.$

17. $\int \frac{x^4+2x^3-3x^2-4}{x-4}dx.$

18. $\int \frac{2x^2+43x+116}{(x-2)(x^2+7x+12)}dx.$

19. $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)}dx.$

20. $\int \frac{dx}{x^4-1}.$

21. $\int (3x-11)\sin 5x\,dx.$

22. $\int x^2 e^{8x}dx.$

23. $\int x^2\ln(x+2)\,dx.$

24. $\int arcsin 7x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{6\cos x+\sin x+2}.$

26. $\int \frac{dx}{4+3\cos^2 x-5\sin^2 x}.$

27. $\int \sqrt[3]{1-2tg3x}\,\frac{dx}{\cos^2 3x}.$

28. $\int \sin^3 4x\cos^8 4x\,dx.$

29. $\int \cos^6 5x\,dx.$

30. $\int \cos 4x\cos 3x\;\,dx.$

31. $\int \frac{dx}{2+\sqrt[3]{x}}.$

32. $\int \frac{x^2+\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x+5}}dx.$

33. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx.$

34. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^3}dx.$

Завдання 10.7.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3 dx.$

2. $\int (4x^9 + 5\sin x - 8^x)dx.$

3. $\int \frac{dx}{6x-5}.$

4. $\int \sin(3x+5)\, dx.$

5. $\int \sqrt[8]{(2+7x)^5}\, dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[4]{arctg^5 9x}}{1+81x^2} dx.$

7. $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}dx}{5\sqrt{x}}.$

8. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln(4x-1)}dx}{(4x-1)}.$

9. $\int \frac{dx}{3x^2+4}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-4x^2}}.$

11. $\int \frac{x\, dx}{6x^2-5}.$

12. $\int \frac{(5x-3)\, dx}{\sqrt{9x^2+2}}.$

13. $\int \frac{dx}{4x^2-x-5}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+5x+3}}.$

15. $\int \frac{(4x+5)dx}{3x^2-5x+7}.$

16. $\int \frac{(5x-7)dx}{\sqrt{1+x-4x^2}}.$

17. $\int \frac{3x^5-6x^4-2x+3}{x+1} dx.$

18. $\int \frac{3x^2+15x-72}{(x-3)(x^2+2x-8)} dx.$

19. $\int \frac{4x^2-25x-39}{(x+1)(x^2-3x-4)} dx.$

20. $\int \frac{x^2}{x^4-1} dx.$

21. $\int (5x^2 - x)\sin 2x\, dx.$

22. $\int xe^{7x+12}dx.$

23. $\int \ln(x+5)\, dx.$

24. $\int x^2 arctg 5x\, dx.$

25. $\int \frac{dx}{7\cos x - 2\sin x + 5}.$

26. $\int \frac{dx}{4+3\cos^2 x - 2\sin^2 x}.$

27. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx.$

28. $\int \sin^5 9x\, dx.$

29. $\int \sin^2 3x \cos^4 3x.$

30. $\int \cos 6x \cos 3x\ \ dx.$

31. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x-4}} dx.$

32. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1} dx.$

33. $\int \frac{x^4}{\sqrt{9-x^2}}\ dx.$

34. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^6} dx.$

Завдання 10.8.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{7x^4-2\sqrt[4]{x^7}-8x^6}{x^6}dx.$

2. $\int (5x^4 - \sin x + 3e^x)dx.$

3. $\int \frac{dx}{7x+6}.$

4. $\int \cos(2x-8)\,dx.$

5. $\int \sqrt{1-e^x}e^x\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[7]{arctg^2 5x}}{1+25x^2}dx.$

7. $\int \frac{\cos\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}.$

8. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 2x}dx}{\sin^2 2x}.$

9. $\int \frac{dx}{7x^2-5}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-2}}.$

11. $\int \frac{(9x-2)dx}{3x^2+4}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7-6x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2+8x+17}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-3x-9x^2}}.$

15. $\int \frac{(3x-6)\,dx}{2x^2-x-5}.$

16. $\int \frac{(4x+5)\,dx}{\sqrt{2x^2+5x-1}}.$

17. $\int \frac{3x^4+2x^3-4x^2-7}{x-4}dx.$

18. $\int \frac{4x^2+26x+82}{(x+7)(x^2+9x+20)}dx.$

19. $\int \frac{x^2-17x-34}{(x^2-4)(x-2)}dx.$

20. $\int \frac{8x}{x^3+27}dx.$

21. $\int x\cos(4x-7)\,dx.$

22. $\int (x^2+5x-3)e^{2x}dx.$

23. $\int x^4\ln(x+1)\,dx.$

24. $\int arccos 2x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{7\cos x-3\sin x-5}.$

26. $\int \frac{dx}{5+4\cos^2 x+\sin^2 x}.$

27. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[5]{(1-\cos 2x)^3}}dx.$

28. $\int \sin^3 2x\cos^{12} 2x\,dx.$

29. $\int \sin^4 7x\,dx.$

30. $\int \sin 8x\cos 3x\,dx.$

31. $\int \frac{dx}{(8+x)\sqrt{x+1}}.$

32. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx.$

33. $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx.$

34. $\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx.$

Завдання 10.9.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{5x^2+\sqrt[9]{x^2}+4x^5}{x^3}dx.$

2. $\int \left(9x^4 + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - 7^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{2x-11}.$

4. $\int \sin(3x+7)\,dx.$

5. $\int \sqrt[7]{(3+8x)^4}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[4]{arcctg^5 3x}}{1+25x^2}dx.$

7. $\int \frac{e^{\sqrt{x-2}}dx}{\sqrt{x-2}}.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{arcsin^2 4x}\sqrt{1-16x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{5x^2+9}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{2x^2-3}.$

12. $\int \frac{(3x+8)\,dx}{\sqrt{4-6x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{9x^2+6x-5}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}.$

15. $\int \frac{(7x+4)\,dx}{x^2-2x+7}.$

16. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{9-2x-4x^2}}.$

17. $\int \frac{4x^4-2x^3+5x+7}{x-5}dx.$

18. $\int \frac{3x^2-40x-11}{(x-1)(x^2-6x-7)}dx.$

19. $\int \frac{2x^2+29x+40}{x^3+8x^2}dx.$

20. $\int \frac{5x^2+28x+47}{(x-1)(x^2+6x+13)}dx.$

21. $\int x^2 \sin 8x\,dx.$

22. $\int (5x+4)e^{2x}dx.$

23. $\int \ln(3x+7)\,dx.$

24. $\int x\, arcctg 5x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{7\cos x - 2\sin x - 5}.$

26. $\int \frac{dx}{4+3\cos^2 x - 2\sin^2 x}.$

27. $\int \sqrt[3]{1-4\sin 2x}\cos 2x\,dx.$

28. $\int \cos^7 5x\,dx.$

29. $\int \sin^2 5x \cos^4 5x\,dx.$

30. $\int \sin 6x \sin 8x\,dx.$

31. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-5x}}.$

32. $\int \frac{x\sqrt{5+2x}}{\sqrt[3]{5+2x}-1}dx.$

33. $\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^3}\,dx.$

34. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}.$

Завдання 10.10.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{6x^5+3\sqrt[8]{x^5}-4x^3}{x^4}dx$.

2. $\int \left(3x^8 - \frac{5}{\sin^2 x} - 3^x\right)dx$.

3. $\int \frac{dx}{9x-2}$.

4. $\int \sin(4x+8)\,dx$.

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$.

6. $\int \frac{\sqrt[4]{tg^7 3x}}{cos^2 3x}dx$.

7. $\int \frac{e^{arcsin4x}dx}{\sqrt{1-16x^2}}$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{\arccos 5x}\sqrt{1-25x^2}}$.

9. $\int \frac{dx}{3x^2+5}$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-2x^2}}$.

11. $\int \frac{(7x-9)dx}{3x^2-4}$.

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8x^2+3}}$.

13. $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+2x-1}}$.

15. $\int \frac{(6x-5)\,dx}{2x^2+5x+3}$.

16. $\int \frac{(x+7)dx}{\sqrt{4-2x-9x^2}}$.

17. $\int \frac{4x^3-5x^2-8x-2}{x+3}dx$.

18. $\int \frac{6x^2-19x-37}{(x-5)(x^2+5x-6)}dx$.

19. $\int \frac{4x^2+8x-7}{(x+2)(x^2+5x+6)}dx$.

20. $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$.

21. $\int x\cos(7x-5)\,dx$.

22. $\int x^2 e^{2x}dx$.

23. $\int x^5 \ln x\,dx$.

24. $\int arccos9x\,dx$.

25. $\int \frac{dx}{7\cos x+\sin x-5}$.

26. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+2\sin^2 x}$.

27. $\int \frac{\sin 2x}{(1+\cos^2 x)^5}dx$.

28. $\int \sin^8 2x\cos^3 2x\,dx$.

29. $\int \cos^6 2x$.

30. $\int \cos 8x\cos 5x\;\;dx$.

31. $\int \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+3}-1}dx$.

32. $\int \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt[3]{x+8}+4}dx$.

33. $\int \sqrt{16-x^2}\,dx$.

34. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^5}dx$.

Завдання 10.11.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{4x^8+2\sqrt[5]{x^2}+2x^6}{4x^5}dx.$

2. $\int \left(2x^4 - \frac{6}{\sqrt{4-x^2}} - 7^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{2x+7}.$

4. $\int \cos(3x-1)\,dx.$

5. $\int \sqrt[8]{(5-3x)^7}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5(3x-1)}}{3x-1}dx.$

7. $\int e^{3x^7-3}x^6dx.$

8. $\int \frac{dx}{\arcsin^2 2x\sqrt{1-4x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{7x^2+5}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{6x^2-13}.$

12. $\int \frac{(4x+5)\,dx}{\sqrt{3x^2+1}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2-4x-5}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+5}}.$

15. $\int \frac{(7x-5)\,dx}{2x^2+6x+15}.$

16. $\int \frac{(9x-2)\,dx}{\sqrt{6-2x-3x^2}}.$

17. $\int \frac{5x^4+3x^3-4x-1}{x-2}dx.$

18. $\int \frac{7x^2+43x-128}{(x-2)(x^2+2x-15)}dx.$

19. $\int \frac{3x^2+17x-15}{x^3+5x^2}dx.$

20. $\int \frac{4x^3-4x^2+7x-19}{x^4+5x^2+4}dx.$

21. $\int (3x^2-7)\cos 5x\,dx.$

22. $\int xe^{9x+8}dx.$

23. $\int \ln(6x+4)\,dx.$

24. $\int x\,arcctg 2x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{5\cos x+4\sin x-7}.$

26. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+6\sin^2 x}.$

27. $\int \sqrt[3]{1-4\cos 3x}\sin 3x\,dx.$

28. $\int \sin^5 4x\,dx.$

29. $\int \sin^2 7x\cos^2 7x dx.$

30. $\int \sin 5x\cos 2x\;dx.$

31. $\int x\sqrt{1-3x}dx.$

32. $\int \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt[4]{(x+5)^3}+1}dx.$

33. $\int \sqrt{25-x^2}\,dx.$

34. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+9}}.$

Завдання 10.12.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{4x^5+3\sqrt[3]{x^2}-8x^2}{4x^3}dx.$

2. $\int(9x^4-3\cos x-5^x)dx.$

3. $\int \frac{dx}{8x+6}.$

4. $\int \sin(9x-2)\,dx.$

5. $\int \sqrt{4x-3}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[5]{tg^3 7x}}{cos^2 7x}dx.$

7. $\int \frac{e^{arcctg 6x}dx}{1+36x^2}.$

8. $\int \frac{dx}{\arcsin 2x\sqrt{1-4x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{7x^2-4}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{5x^2+3}.$

12. $\int \frac{(3x-5)\,dx}{\sqrt{4x^2+1}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2+8x+19}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x-4x^2}}.$

15. $\int \frac{(2x-1)dx}{2x^2-x-4}.$

16. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}}.$

17. $\int \frac{3x^4-2x^3-5x+1}{x+4}dx.$

18. $\int \frac{x^2-21x-54}{(x-3)(x^2+9x+18)}dx.$

19. $\int \frac{8x^2+18x-8}{x^3+4x^2}dx.$

20. $\int \frac{5x^2+15x+40}{(x-1)(x^2+6x+13)}dx.$

21. $\int (x+5)\cos 4x\,dx.$

22. $\int x^2 e^{9x}dx.$

23. $\int x^3\ln(x+2)\,dx.$

24. $\int arccos 6x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{5\cos x+4\sin x-3}.$

26. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-2\sin^2 x-1}.$

27. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[7]{(1-\cos 2x)^2}}dx.$

28. $\int \sin^3 7x\cos^2 7x\,dx.$

29. $\int \sin^6 4x\,dx.$

30. $\int \sin 6x\sin 5x\,dx.$

31. $\int \frac{dx}{1-\sqrt[3]{x+3}}.$

32. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})\sqrt[3]{x}}.$

33. $\int x\sqrt{8-x^2}\,dx.$

34. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}dx.$

Завдання 10.13.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{7x^6-3\sqrt[4]{x^9}-8x^5}{x^4}dx.$

2. $\int \left(3x^9+\frac{2}{\cos^2 x}+4^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{11x-3}.$

4. $\int \cos(x-2)\,dx.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{8x+5}}.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{ctg^5 2x}\, sin^2 2x}.$

7. $\int \frac{e^{arctg4x}dx}{1+16x^2}.$

8. $\int \frac{dx}{(6x+1)\ln^2(6x+1)}.$

9. $\int \frac{dx}{5x^2+4}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}.$

11. $\int \frac{(6x+4)\,dx}{4x^2-9}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-3x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{4x^2+2x-1}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+4}}.$

15. $\int \frac{(x-4)dx}{2x^2-3x+9}.$

16. $\int \frac{(3x+1)\,dx}{\sqrt{9-x-9x^2}}.$

17. $\int \frac{2x^5-4x^2+3x-4}{x-1}dx.$

18. $\int \frac{8x^2-21x+5}{(x+3)(x^2-3x+2)}dx.$

19. $\int \frac{8x^2+21x+12}{x^3+4x^2+4x}dx.$

20. $\int \frac{3x^3+2x^2+6x-7}{x^4+5x^2+4}dx.$

21. $\int (x^2-7)\sin 2x\,dx.$

22. $\int xe^{3x+2}dx.$

23. $\int \ln(5x-4)\,dx.$

24. $\int x^2 arcctgx\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{\cos x+5\sin x-9}.$

26. $\int \frac{dx}{6-2\cos^2 x+3\sin^2 x}.$

27. $\int \frac{\sin x}{(4-\cos x)^2}dx.$

28. $\int \sin^3 5x\cos^8 5x\,dx.$

29. $\int \sin^4 2x\cos^2 2x\,dx.$

30. $\int \cos 3x\cos 2x\;\,dx.$

31. $\int x\sqrt[3]{1+5x}dx.$

32. $\int \frac{1-\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt[3]{2x+1}}dx.$

33. $\int x\sqrt{x^2+9}\,dx.$

34. $\int \frac{\sqrt{5-x^2}}{x^2}dx.$

Завдання 10.14.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\left(3x-2\sqrt[5]{x^4}\right)^2}{\sqrt{x}}dx.$

2. $\int \left(4x^5+\frac{3}{\sin^2 x}-4^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{3x-7}.$

4. $\int \sin(2x+5)\,dx.$

5. $\int \sqrt[7]{(7x-4)^2}dx.$

6. $\int \sqrt{\cos 3x}\sin 3x\,dx.$

7. $\int \frac{e^{arcsin 5x}dx}{\sqrt{1-25x^2}}.$

8. $\int \frac{dx}{\operatorname{arctg}^2 2x(1+4x^2)}.$

9. $\int \frac{dx}{3x^2-1}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+4}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{8x^2+3}.$

12. $\int \frac{(4x-1)dx}{\sqrt{5-3x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{2x^2+6x+9}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}.$

15. $\int \frac{(3x-5)dx}{4x^2-5x-1}.$

16. $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{6-x-3x^2}}.$

17. $\int \frac{x^5-2x^2+3x}{x+3}dx.$

18. $\int \frac{3x^2+28x+33}{(x-1)(x^2+6x+5)}dx.$

19. $\int \frac{5x^2+20x+18}{x(x^2+6x+9)}dx.$

20. $\int \frac{4x^3-3x^2+5x-4}{x^4+3x^2+2}dx.$

21. $\int x\cos 7x\,dx.$

22. $\int (5x+1)e^{3x}dx.$

23. $\int \ln(x-4)\,dx.$

24. $\int x\, arctg 4x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{7\cos x+2\sin x-1}.$

26. $\int \frac{dx}{5+3\cos^2 x-2\sin^2 x}.$

27. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}dx.$

28. $\int \cos^7 x\,dx.$

29. $\int \sin^4 3x\cos^2 3x dx.$

30. $\int \sin 4x\cos 7x\;dx.$

31. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{6x+2}}.$

32. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+4}dx.$

33. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx.$

34. $\int x^3\sqrt{x^2+16}\,dx.$

Завдання 10.15.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\left(4\sqrt[3]{x}+3x^2\right)^3}{x^3}dx.$

2. $\int \left(7x^3 - \frac{5}{\sqrt{x^2+9}} - 9^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{3x+13}.$

4. $\int \cos(4x-11)\,dx.$

5. $\int \sqrt{(3x-7)^5}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[8]{arctg^3 2x}}{1+4x^2}dx.$

7. $\int \frac{e^x dx}{4+e^{2x}}.$

8. $\int \frac{dx}{(2x-4)\sqrt{\ln(2x-4)}}.$

9. $\int \frac{dx}{9x^2+2}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}.$

11. $\int \frac{(3x-7)dx}{4x^2-7}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5x^2+1}}.$

13. $\int \frac{dx}{9x^2+6x+10}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+5}}.$

15. $\int \frac{(3x+2)dx}{3x^2-2x-1}.$

16. $\int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{9+2x-4x^2}}.$

17. $\int \frac{x^5+x^4-3x^2-2}{x+2}dx.$

18. $\int \frac{3x^2-22x+7}{(x-1)(x^2+2x-15)}dx.$

19. $\int \frac{3x^2+7x+4}{(x+1)(x^2+4x+3)}dx.$

20. $\int \frac{6x^2+12x+22}{(x+3)(x^2+2x+5)}dx.$

21. $\int x^2 \cos 5x\,dx.$

22. $\int (6x-1)e^{4x}dx.$

23. $\int x^3 \ln(x+1)\,dx.$

24. $\int arsin 8x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{7\cos x+\sin x-6}.$

26. $\int \frac{dx}{5\cos^2 x-3\sin^2 x-4}.$

27. $\int \frac{\cos x+2\sin x}{(\sin x-2\cos x)^2}dx.$

28. $\int \sin^5 5x \cos^2 5x\,dx.$

29. $\int \cos^6 4x\,dx.$

30. $\int \sin 2x \sin 3x\,\,dx.$

31. $\int (x+3)\sqrt{x-1}dx.$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}dx.$

33. $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx.$

34. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^5}dx.$

Завдання 10.16.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{4x^3-7\sqrt[4]{x^9}-2x^5}{x^4}dx.$

2. $\int \left(2x^3 + \frac{4}{\sqrt{x^2-9}} - e^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{4x+7}.$

4. $\int \sin(11x+3)\,dx.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-9)^2}}.$

6. $\int \frac{arcsin^3 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx.$

7. $\int \frac{e^{tgx}dx}{\cos^2 x}.$

8. $\int \frac{dx}{(5x-4)\sqrt{\ln(5x-4)}}.$

9. $\int \frac{dx}{9x^2-4}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{6x^2+1}.$

12. $\int \frac{(4x-3)\,dx}{\sqrt{9-5x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{9x^2-6x+10}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-3x-x^2}}.$

15. $\int \frac{(x-4)\,dx}{5x^2+2x+1}.$

16. $\int \frac{(3x-7)\,dx}{\sqrt{3x^2+4x-4}}.$

17. $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2+7x}{x-4}dx.$

18. $\int \frac{9x+15}{(x+4)(x^2-9)}dx.$

19. $\int \frac{5x^2+x-56}{(x-3)(x^2+2x-15)}dx.$

20. $\int \frac{8x^2+23x+97}{(x-3)(x^2+4x+13)}dx.$

21. $\int (4x-3)\sin 2x\,dx.$

22. $\int x^2 e^{9x+11}dx.$

23. $\int \ln(5x-1)\,dx.$

24. $\int x\,arcctg 7x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{6\cos x+\sin x-2}.$

26. $\int \frac{dx}{9-3\cos^2 x+2\sin^2 x}.$

27. $\int \frac{\cos x}{16+\sin^2 x}dx.$

28. $\int \sin^3 3x\cos^8 3x\,dx.$

29. $\int \sin^4 4x\,dx.$

30. $\int \cos 5x\cos 13x\;dx.$

31. $\int \frac{dx}{5+\sqrt{x+1}}.$

32. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}dx.$

33. $\int x^3\sqrt{16-x^2}\,dx.$

34. $\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx.$

Завдання 10.17.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\left(7\sqrt[4]{x}-2x^3\right)^2}{x^5}dx.$

2. $\int \left(3x^9 + \frac{6}{\cos^2 x} - 3^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{5x+12}.$

4. $\int \cos(4x-7)\,dx.$

5. $\int \sqrt{9+5x}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[4]{arccos^3 x}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

7. $\int \frac{e^{4x}dx}{5+3e^{4x}}.$

8. $\int \frac{dx}{cos^2 5x\sqrt{tg5x}}.$

9. $\int \frac{dx}{5x^2+9}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x^2}}.$

11. $\int \frac{(9x+1)dx}{3x^2-4}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+1}}.$

13. $\int \frac{dx}{6x^2+6x+1}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-2x+5}}.$

15. $\int \frac{(2x+5)dx}{x^2-5x+9}.$

16. $\int \frac{(5x-1)\,dx}{\sqrt{3-x-2x^2}}.$

17. $\int \frac{x^5-3x^2-4}{x+2}dx.$

18. $\int \frac{x^2+24x+24}{(x-3)(x^2+6x+8)}dx.$

19. $\int \frac{-2x^2+27x-28}{x^3-4x^2}dx.$

20. $\int \frac{4x^2-7x+39}{(x+5)(x^2-4x+13)}dx.$

21. $\int x^2\cos(3x-9)\,dx.$

22. $\int xe^{2x}dx.$

23. $\int x^2\ln(x+2)\,dx.$

24. $\int arcsin9x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{\cos x+6\sin x+9}.$

26. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x-4\sin^2 x}.$

27. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{(1-\sin x)^3}}dx.$

28. $\int \sin^7 x\,dx.$

29. $\int \sin^2 5x\cos^2 5x\,dx.$

30. $\int \sin 2x\cos 8x\,dx.$

31. $\int \frac{dx}{x-4\sqrt{x}}.$

32. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}}dx.$

33. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-9}}.$

34. $\int x^5\sqrt{x^2+25}\,dx.$

Завдання 10.18.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{9x^3-2\sqrt[7]{x^2}-4x^8}{x^5}dx.$

2. $\int \left(3x^7+\frac{5}{\sqrt{x^2+5}}+7^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{4x+5}.$

4. $\int \sin(9x-3)\,dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$

6. $\int \frac{tg^2 2x}{cos^2 2x}dx.$

7. $\int x^4\, e^{7x^5-4}dx.$

8. $\int \frac{dx}{\arccos 8x\sqrt{1-64x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{3x^2-5}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-7}}.$

11. $\int \frac{(x+6)dx}{2x^2+9}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7-3x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{8x^2+2x-3}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-3x-4x^2}}.$

15. $\int \frac{(5x+6)\,dx}{x^2-2x+7}.$

16. $\int \frac{(4x-3)\,dx}{\sqrt{3x^2+6x+1}}.$

17. $\int \frac{x^4-2x-3}{x+5}dx.$

18. $\int \frac{2x^2-29x+32}{(x+4)(x^2-3x+2)}dx.$

19. $\int \frac{2x^2-17x+12}{(x-2)(x^2+3x-10)}dx.$

20. $\int \frac{x^3+x^2+9x-33}{x^4+10x^2+9}dx.$

21. $\int (7x-9)\sin 4x\,dx.$

22. $\int x^2 e^{3x}dx.$

23. $\int \ln(x+5)\,dx.$

24. $\int x^2\, arctgx\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{2\cos x+\sin x-8}.$

26. $\int \frac{dx}{\cos^2 x-3\sin^2 x-1}.$

27. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x+6}}dx.$

28. $\int \sin^7 4x\cos^2 4x\,dx.$

29. $\int \sin^4 5x\,dx.$

30. $\int \sin x \sin 9x\;\;dx.$

31. $\int (x+3)\sqrt{x}\,dx.$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+1}-\sqrt[4]{4x+1}}.$

33. $\int x^5\sqrt{25-x^2}\,dx.$

34. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^6}dx.$

Завдання 10.19.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\left(5\sqrt[4]{x}-2x^2\right)^3}{x^7}dx.$

2. $\int (7x^2 + 3\cos x - 2^x)dx.$

3. $\int \frac{dx}{5x-3}.$

4. $\int \cos(18x+7)\,dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx.$

6. $\int \frac{dx}{sin^2 5x\sqrt[3]{ctg5x}}.$

7. $\int \frac{e^{arcsin3x}dx}{\sqrt{1-9x^2}}.$

8. $\int \frac{\ln^5(7x-2)dx}{7x-2}.$

9. $\int \frac{dx}{4x^2+5}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x^2}}.$

11. $\int \frac{(2x-11)dx}{3x^2+8}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9x^2-1}}.$

13. $\int \frac{dx}{2x^2+x+3}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x^2-2x-5}}.$

15. $\int \frac{(x+9)\,dx}{x^2-5x+2}.$

16. $\int \frac{(4x+3)\,dx}{\sqrt{6+5x-4x^2}}.$

17. $\int \frac{3x^4-8x^2-5}{x+3}dx.$

18. $\int \frac{5x^2+36x+19}{(x-1)(x^2+5x+4)}dx.$

19. $\int \frac{-x^2+13x+31}{(x-3)(x^2-x-6)}dx.$

20. $\int \frac{8x^2+63x+196}{(x+4)(x^2+8x+25)}dx.$

21. $\int x\cos(3x-13)\,dx.$

22. $\int (x^2+4)e^{9x}dx.$

23. $\int x^3\ln(x-2)\,dx.$

24. $\int arccos7x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{2\cos x+3\sin x-4}.$

26. $\int \frac{dx}{11+2\cos^2 x-7\sin^2 x}.$

27. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[4]{5\sin x-3}}dx.$

28. $\int \sin^2 6x\cos^7 6x\,dx.$

29. $\int \cos^6 2x\,dx.$

30. $\int \sin 3x\cos 12x\,\,dx.$

31. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}.$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}\left(\sqrt[4]{x+1}+1\right)}.$

33. $\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx.$

34. $\int x\sqrt{x^2+4}\,dx.$

Завдання 10.20.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{7x^2-4\sqrt[3]{x^5}-2x^4}{4x^5}dx.$

2. $\int (2x^8 + 3\sin x + 8^x)dx.$

3. $\int \frac{dx}{3x-8}.$

4. $\int \sin(13x-4)\,dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-4}}\,dx.$

6. $\int \frac{dx}{arccos^2 5x\sqrt{1-25x^2}}.$

7. $\int \frac{e^{arcctg2x}dx}{1+4x^2}.$

8. $\int \frac{dx}{(5x-7)\sqrt{\ln(5x-7)}}.$

9. $\int \frac{dx}{3x^2-5}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}.$

11. $\int \frac{(6x-4)dx}{5x^2+7}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7-2x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+3}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x-9}}.$

15. $\int \frac{(x-6)\,dx}{x^2-3x-8}.$

16. $\int \frac{(6x+2)\,dx}{\sqrt{4+3x-2x^2}}.$

17. $\int \frac{8x^3-x^2+3x+5}{x-1}dx.$

18. $\int \frac{2x^2-26x+54}{x^3-5x^2+6x}dx.$

19. $\int \frac{3x^2-31x-58}{(x-4)(x^2-6x+8)}dx.$

20. $\int \frac{2x^2-26x+33}{(x-2)(x^2-8x+25)}dx.$

21. $\int x^2\sin 8x\,dx.$

22. $\int (2x+7)e^{3x}dx.$

23. $\int \ln(x+9)\,dx.$

24. $\int x\,arctg2x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{2\cos x-5\sin x-4}.$

26. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-2\sin^2 x+1}.$

27. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x-9}dx.$

28. $\int \sin^2 2x\cos^5 2x\,dx.$

29. $\int \sin^4 7x\,dx.$

30. $\int \sin 3x\sin 10x\;dx.$

31. $\int (x+6)\sqrt{1-x}\,dx.$

32. $\int \frac{1-\sqrt{3x-1}}{1+\sqrt[3]{3x-1}}dx.$

33. $\int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx.$

34. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^7}dx.$

Завдання 10.21.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{5x^8+4\sqrt[3]{x^5}-3x^2}{x^4}dx.$

2. $\int \left(4x^5 - \frac{6}{\cos^2 x} - 7^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{3x+15}.$

4. $\int \cos(2x+4)\,dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{16-x^4}}\,dx.$

6. $\int \frac{tg^2 3x}{cos^2 3x}dx.$

7. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}.$

8. $\int \frac{dx}{(2x-9)\ln^2(2x-9)}.$

9. $\int \frac{dx}{5x^2+4}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-3x^2}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{4x^2-7}.$

12. $\int \frac{(5x+3)\,dx}{\sqrt{7x^2+4}}.$

13. $\int \frac{dx}{9x^2+6x+5}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}.$

15. $\int \frac{(x-7)\,dx}{2x^2-5x+2}.$

16. $\int \frac{(4x+1)\,dx}{\sqrt{6-x-4x^2}}.$

17. $\int \frac{x^3-3x^2+5x-11}{x-5}dx.$

18. $\int \frac{4x^2-49x+97}{(x-3)(x^2-7x+10)}dx.$

19. $\int \frac{x^2+11x+48}{(x+2)(x^2-2x-8)}dx.$

20. $\int \frac{7x^2-11x+14}{x^3-2x^2+x-2}dx.$

21. $\int (9x+3)\cos 4x\,dx.$

22. $\int x^2 e^{4x-12}dx.$

23. $\int x^2\ln(x+2)\,dx.$

24. $\int arccos 4x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{5\cos x+4\sin x-3}.$

26. $\int \frac{dx}{6\cos^2 x-\sin^2 x+8}.$

27. $\int \left(4-\sqrt[3]{\sin 2x}\right)\cos 2x\,dx.$

28. $\int \cos^7 3x\,dx.$

29. $\int \sin^2 6x\cos^2 6x\;dx.$

30. $\int \sin 12x\cos 5x\;dx.$

31. $\int \frac{\sqrt{x-4}\,dx}{1+\sqrt{x-4}}.$

32. $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}dx.$

33. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{5-x^2}}.$

34. $\int \sqrt{x^2+16}\,dx.$

Завдання 10.22.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\left(5\sqrt[4]{x^3}-3x^7\right)^2}{x^{10}}dx.$

2. $\int \left(7x^3 - \frac{5}{\sin^2 x} + e^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{2x-13}.$

4. $\int \sin(6x+1)\,dx.$

5. $\int \sqrt[5]{(2x-3)^4}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[4]{ctg^3 5x}}{sin^2 5x}dx.$

7. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}.$

8. $\int \frac{\arcsin^4 4x\,dx}{\sqrt{1-16x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{9x^2-2}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+6}}.$

11. $\int \frac{(x+14)\,dx}{4x^2+1}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-6x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{3x^2-6x-8}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-4x^2}}.$

15. $\int \frac{(2x-4)dx}{x^2+3x+7}.$

16. $\int \frac{(x+7)\,dx}{\sqrt{4x^2+x+3}}.$

17. $\int \frac{x^5-2x^2-x+5}{x+1}dx.$

18. $\int \frac{5x^2-64x+83}{(x-7)(x^2+2x-3)}dx.$

19. $\int \frac{2x^2+36x-81}{x^3+9x^2}dx.$

20. $\int \frac{9x^2+27x+16}{(x+4)(x^2+2x+5)}dx.$

21. $\int x^2 \sin 9x\,dx.$

22. $\int (4x-9)e^{5x}dx.$

23. $\int \ln(2x-1)\,dx.$

24. $\int x\,arctg 6x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x}.$

26. $\int \frac{dx}{3-2\cos^2 x + \sin^2 x}.$

27. $\int \frac{\cos 4x}{\sqrt{(1-\sin 4x)^3}}dx.$

28. $\int \sin^5 8x \cos^2 2x\,dx.$

29. $\int \sin^6 x\,dx.$

30. $\int \sin 8x \sin 7x\,dx.$

31. $\int (x+3)\sqrt{x}dx.$

32. $\int \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt[3]{x-1}+1}dx.$

33. $\int x\sqrt{8-x^2}\,dx.$

34. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^3}dx.$

Завдання 10.23.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{7x^3+4\sqrt[3]{x^8}-x^5}{x^4}dx.$

2. $\int \left(4x^7+\frac{5}{x^2-4}+e^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{3x-8}.$

4. $\int \cos(6x+9)\,dx.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-1)^5}}.$

6. $\int \frac{arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx.$

7. $\int \frac{e^{6x}dx}{1+e^{12x}}.$

8. $\int \frac{dx}{\mathrm{tg}^3\, 2x\cos^2 2x}.$

9. $\int \frac{dx}{4x^2+5}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x^2}}.$

11. $\int \frac{(3x-1)dx}{8x^2-9}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5x^2+4}}.$

13. $\int \frac{dx}{3x^2-6x-3}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+9}}.$

15. $\int \frac{(4x-2)dx}{4x^2+x+6}.$

16. $\int \frac{(x+5)\,dx}{\sqrt{9+x-2x^2}}.$

17. $\int \frac{x^4+x^3-3x^2-5x}{x-2}dx.$

18. $\int \frac{6x^2+53x+83}{(x+1)(x^2-5x-24)}dx.$

19. $\int \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+10x+25)}dx.$

20. $\int \frac{4x^2+9x+53}{(x-2)(x^2+6x+13)}dx.$

21. $\int x\cos(3x-7)\,dx.$

22. $\int (x^2+1)e^{9x}dx.$

23. $\int x^3\ln(x+1)\,dx.$

24. $\int \arcsin 2x\;\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{2\cos x-7\sin x}.$

26. $\int \frac{dx}{9-\cos^2 x+4\sin^2 x}.$

27. $\int \frac{\sin x}{(9-\cos x)^4}dx.$

28. $\int \sin^2 3x\cos^7 3x\,dx.$

29. $\int \cos^6 5x\;\,dx.$

30. $\int \cos 5x\cos 13x\;\,dx.$

31. $\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x+6}}.$

32. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt{2x-1}}.$

33. $\int \sqrt{8-x^2}\,dx.$

34. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^7}dx.$

Завдання 10.24.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\left(2x^4-3\sqrt[3]{x^2}\right)^3}{x^5}dx.$

2. $\int \left(3x^8-\frac{4}{x^2+25}-e^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{11x-7}.$

4. $\int \sin(9x+8)\,dx.$

5. $\int \sqrt[4]{3x-2}\,dx.$

6. $\int \frac{ctg^6 8x}{sin^2 8x}dx.$

7. $\int \frac{e^{\arccos 5x}dx}{\sqrt{1-25x^2}}.$

8. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln(5x-3)}dx}{5x-3}.$

9. $\int \frac{dx}{5x^2-9}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{4x^2+13}.$

12. $\int \frac{(8x+3)\,dx}{\sqrt{3-4x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2-8x+15}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{6-3x-4x^2}}.$

15. $\int \frac{(x-11)dx}{3x^2+x+7}.$

16. $\int \frac{(4x-8)\,dx}{\sqrt{9x^2-2x+9}}.$

17. $\int \frac{x^3-4x^2-3x-4}{x+5}dx.$

18. $\int \frac{18x+48}{(x+2)(x^2+3x-10)}dx.$

19. $\int \frac{3x^2+16x-51}{(x-3)(x^2-9)}dx.$

20. $\int \frac{7x^3+4x^2+34x+15}{x^4+9x^2+20}dx.$

21. $\int (x^2+5)\cos x\,dx.$

22. $\int x\,e^{4x+7}dx.$

23. $\int \ln(3x+8)\,dx.$

24. $\int x\,arcctg 4x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{\cos x+4\sin x-7}.$

26. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-2\sin^2 x+3}.$

27. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x+9}.$

28. $\int \sin^4 4x\cos^5 4x\,dx.$

29. $\int \sin^2 5x\cos^4 5x\;\,dx.$

30. $\int \sin 2x\cos 11x\;\,dx.$

31. $\int \frac{x^2dx}{1+\sqrt{x+1}}.$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

33. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}\;dx.$

34. $\int x\sqrt{x^2+25}\,dx.$

Завдання 10.25.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{x^8+2\sqrt[5]{x^2}-4x^5}{2x^2}dx.$

2. $\int \left(3x^7 - \frac{8}{\sqrt{9-x^2}} + 6^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{4x+15}.$

4. $\int \cos(8x-3)\,dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt{\arcsin^5 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}dx.$

7. $\int \frac{e^{arctg2x}dx}{1+4x^2}.$

8. $\int \frac{\ln^3(x+3)\,dx}{x+3}.$

9. $\int \frac{dx}{8x^2+1}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}.$

11. $\int \frac{(9x+13)dx}{4x^2-12}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{10x^2-1}}.$

13. $\int \frac{dx}{4x^2+8x+1}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+9}}.$

15. $\int \frac{(x-5)\,dx}{3x^2-8x+12}.$

16. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{4-3x-5x^2}}.$

17. $\int \frac{x^5+4x^2-8x}{x+4}dx.$

18. $\int \frac{9x^2+10x-57}{(x-1)(x^2+8x+15)}dx.$

19. $\int \frac{2x^2+33x-66}{(x-2)(x^2+4x-12)}dx.$

20. $\int \frac{4x^2+15x+89}{(x-7)(x^2+8x+25)}dx.$

21. $\int x\sin(4x+9)\,dx.$

22. $\int x^2 e^{8x}dx.$

23. $\int x^3\ln(x-2)\,dx.$

24. $\int arcsin9x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{6\cos x+7\sin x}.$

26. $\int \frac{dx}{5+\cos^2 x-2\sin^2 x}.$

27. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}dx.$

28. $\int \sin^7 2x\,dx.$

29. $\int \sin^4 5x\cos^2 5x\;dx.$

30. $\int \sin 4x\sin 5x\;dx.$

31. $\int \frac{dx}{6+\sqrt[3]{x}}.$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}\left(\sqrt{x-1}+1\right)}dx.$

33. $\int x^2\sqrt{8-x^2}\,dx.$

34. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx.$

Завдання 10.26.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{3x^7+4\sqrt[4]{x^3}-x^5}{x^6}\,dx.$
2. $\int \left(3x^9 - \frac{6}{\sqrt{x^2+1}} + 4^x\right) dx.$
3. $\int \frac{dx}{5x+18}.$
4. $\int \sin(x-9)\,dx.$
5. $\int \sqrt{4x+9}\,dx.$
6. $\int \frac{\arccos^7 8x}{\sqrt{1-64x^2}}\,dx.$
7. $\int \frac{e^{\frac{7}{x}}dx}{x^2}.$
8. $\int \frac{dx}{(9x-11)\ln(9x-11)}.$
9. $\int \frac{dx}{3x^2-5}.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{11x^2+1}}.$
11. $\int \frac{x\,dx}{5x^2+4}.$
12. $\int \frac{(3x-8)dx}{\sqrt{6-2x^2}}.$
13. $\int \frac{dx}{4x^2-2x-3}.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+3x-7}}.$
15. $\int \frac{(x-12)dx}{x^2+4x+7}.$
16. $\int \frac{(5x+1)dx}{\sqrt{4+4x-3x^2}}.$
17. $\int \frac{x^5-2x+8}{x-2}\,dx.$
18. $\int \frac{x^2-33x-300}{(x+3)(x^2+x-30)}\,dx.$
19. $\int \frac{x^2-29x-180}{(x+5)(x^2-25)}\,dx.$
20. $\int \frac{2x^3+2x^2+25x-3}{x^4+11x^2+18}\,dx.$
21. $\int x^2 \cos 13x\,dx.$
22. $\int (x-15)e^{2x}dx.$
23. $\int \ln(2x+4)\,dx.$
24. $\int x\, arctg 5x\,dx.$
25. $\int \frac{dx}{2\cos x+\sin x-10}.$
26. $\int \frac{dx}{6\cos^2 x-2\sin^2 x+3}.$
27. $\int \sqrt[3]{\sin 4x-3}\cos 4x\,dx.$
28. $\int \sin^5 3x\cos^6 3x\,dx.$
29. $\int \sin^4 4x\cos^2 4x.$
30. $\int \sin 6x\cos 9x\;\,dx.$
31. $\int \frac{dx}{5x+\sqrt{x}}.$
32. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-1}\,dx.$
33. $\int x\sqrt{16-x^2}\,dx.$
34. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}\,dx.$

Завдання 10.27.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{6x^2-4\sqrt[7]{x^2}-5x^5}{x^4}dx.$

2. $\int (9x^7 - 2\sin x - 4^x)dx.$

3. $\int \frac{dx}{5x+7}.$

4. $\int \sin(11x-3)\,dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{3-x^2}-\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{9-x^4}}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5(x+7)}}{x+7}dx.$

7. $\int \frac{e^{\operatorname{ctg}7x}dx}{\sin^2 7x}.$

8. $\int \frac{dx}{\arcsin^2 3x\sqrt{1-9x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{6x^2+4}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-2x^2}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{11x^2-2}.$

12. $\int \frac{(9x+4)dx}{\sqrt{6x^2+4}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2-10x-5}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+6x+1}}.$

15. $\int \frac{(8x-3)\,dx}{5x^2+5x+7}.$

16. $\int \frac{(x+4)\,dx}{\sqrt{6+2x-3x^2}}.$

17. $\int \frac{3x^4-2x^2+4-5}{x+3}dx.$

18. $\int \frac{5x^2+12x-62}{(x-1)(x^2+2x-8)}dx.$

19. $\int \frac{x^2+13x-88}{(x-3)(x^2+2x-15)}dx.$

20. $\int \frac{8x^2-14x+13}{x^3-4x^2+x-4}dx.$

21. $\int (x^2+3)\sin 7x\,dx.$

22. $\int xe^{9x-4}dx.$

23. $\int x^3\ln(x-4)\,dx.$

24. $\int arccos 3x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{5\cos x+2\sin x-7}.$

26. $\int \frac{dx}{6+3\cos^2 x-4\sin^2 x}.$

27. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{(1+\cos x)^7}}dx.$

28. $\int \cos^5 9x\,dx.$

29. $\int \cos^6 x\,dx.$

30. $\int \sin 8x \sin 2x\;\,dx.$

31. $\int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{x-3}}.$

32. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}.$

33. $\int x\sqrt{x^2-3}\,dx.$

34. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^3}dx.$

Завдання 10.28.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\left(8x^3-\sqrt[4]{x^3}\right)^2}{x^7}dx.$

2. $\int (5x^9+4\cos x+8^x)dx.$

3. $\int \frac{dx}{3x-17}.$

4. $\int \cos(4x-13)\,dx.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(7x+4)^3}}.$

6. $\int \frac{\sqrt[7]{ctg^3 7x}}{sin^2 7x}dx.$

7. $\int \frac{e^{\sqrt{x-8}}dx}{\sqrt{x-8}}.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{\arcsin 2x}\sqrt{1-4x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{x^2+15}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{6-2x^2}}.$

11. $\int \frac{(8x+9)dx}{5x^2-9}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+11}}.$

13. $\int \frac{dx}{3x^2-6x-7}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+12x+1}}.$

15. $\int \frac{(4x+1)dx}{2x^2+3x+9}.$

16. $\int \frac{(x-5)\,dx}{\sqrt{1+4x-6x^2}}.$

17. $\int \frac{4x^3-x^2+2x-3}{x+5}dx.$

18. $\int \frac{4x^2-9x-292}{(x-4)(x^2+11x+28)}dx.$

19. $\int \frac{2x^2+58x-63}{x^3-7x^2}dx.$

20. $\int \frac{3x^3+3x^2+24x-25}{x^4+9x^2+8}dx.$

21. $\int x\sin 10x\,dx.$

22. $\int (4x^2+3)e^{2x}dx.$

23. $\int \ln(x+11)\,dx.$

24. $\int x\,arcctg 7x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{2\cos x-9\sin x+2}.$

26. $\int \frac{dx}{6\cos^2 x-2\sin^2 x-1}.$

27. $\int \frac{\cos 3x}{(7+2\sin 3x)^2}dx.$

28. $\int \sin^5 6x\cos^{12} 6x\,dx.$

29. $\int \sin^4 5x\,dx.$

30. $\int \sin 4x\cos 9x\,\,dx.$

31. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5x-3}}.$

32. $\int \frac{x^2\sqrt{x+4}}{\sqrt[3]{x+4}+1}dx.$

33. $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx.$

34. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx.$

Завдання 10.29.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{9x^2+4\sqrt[3]{x^5}-7x^6}{x^4}dx.$

2. $\int \left(3x^8 - \frac{6}{\cos^2 x} - 4^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{7x+12}.$

4. $\int \sin(13x-3)\,dx.$

5. $\int \sqrt{4x+5}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(3x-7)}}{3x-7}dx.$

7. $\int \frac{e^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

8. $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^5 8x \sin^2 8x}.$

9. $\int \frac{dx}{x^2-7}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+16}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{6x^2+9}.$

12. $\int \frac{(8x-3)\,dx}{\sqrt{5-7x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{9x^2+2x+1}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-7x-x^2}}.$

15. $\int \frac{(3x+9)\,dx}{3x^2-4x-5}.$

16. $\int \frac{(x-5)\,dx}{\sqrt{6x^2+4x-3}}.$

17. $\int \frac{x^5-x^2+4x+3}{x+2}dx.$

18. $\int \frac{9x^2+30x-138}{(x-2)(x^2+x-20)}dx.$

19. $\int \frac{-2x^2+18x+93}{(x+4)(x^2-3x-28)}dx.$

20. $\int \frac{5x^2+6x+5}{(x+5)(x^2+2x+5)}dx.$

21. $\int x^2\cos(x-6)\,dx.$

22. $\int (5x+4)e^{8x}dx.$

23. $\int x^3\ln(x+3)\,dx.$

24. $\int \arcsin 4x\;dx.$

25. $\int \frac{dx}{6\cos x+7\sin x-4}.$

26. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-2\sin^2 x}.$

27. $\int \frac{\cos 5x}{(8-3\sin 5x)^2}dx.$

28. $\int \sin^7 2x\,dx.$

29. $\int \sin^2 7x\cos^2 7x\;dx.$

30. $\int \sin 4x\sin 13x\;dx.$

31. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x+2}}.$

32. $\int \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x+5}+4}dx.$

33. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}\,dx.$

34. $\int x\sqrt{x^2+25}\,dx.$

Завдання 10.30.

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{9x^5-4\sqrt[7]{x^2}-2x^3}{x^4}dx$

2. $\int \left(5x^8+\frac{9}{\sin^2 x}+e^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{11x+7}.$

4. $\int \cos(2x-7)\,dx.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[8]{(4x+3)^5}}.$

6. $\int \frac{\sqrt[6]{ctg^7 4x}}{sin^2 4x}dx.$

7. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}+4}.$

8. $\int \frac{dx}{\arcsin 6x\sqrt{1-36x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{9x^2-7}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+13}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{7x^2+12}.$

12. $\int \frac{(9x+1)\,dx}{\sqrt{4-6x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2+10x-13}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2+4x+3}}.$

15. $\int \frac{(x-9)\,dx}{4x^2-4x+7}.$

16. $\int \frac{(6x+4)\,dx}{\sqrt{1+3x-2x^2}}.$

17. $\int \frac{x^3-x^2+5x-3}{x+4}dx.$

18. $\int \frac{5x^2-2x+57}{(x+1)(x^2-8x+7)}dx.$

19. $\int \frac{x^2+15x+45}{x(x^2+6x+9)}dx.$

20. $\int \frac{3x^2+74x+91}{(x-8)(x^2+6x+13)}dx.$

21. $\int (4x-8)\sin 3x\,dx.$

22. $\int x^2 e^{2x-5}dx.$

23. $\int \ln(x+7)\,dx.$

24. $\int x\,arcctg 5x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{7\cos x-\sin x-5}.$

26. $\int \frac{dx}{4+3\cos^2 x-\sin^2 x}.$

27. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x-7}}dx.$

28. $\int \sin^4 4x\cos^3 4x\,dx.$

29. $\int \cos^6 x\;dx.$

30. $\int \sin 7x\cos 2x\;dx.$

31. $\int \frac{dx}{1-\sqrt[3]{x+1}}.$

32. $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+9}dx.$

33. $\int \sqrt{5-x^2}\,dx.$

34. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^7}dx.$

Розділ 11 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ У ГЕОМЕТРИЧНИХ ТА ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧАХ

В останньому розділі познайомимося з визначеними, невласними інтегралами. За формулою Ньютона-Лейбниця навчимося обчислювати їх, спираючись на отримані навички у знаходженні первісних функцій. Познайомимося з деякими застосуваннями визначних інтегралів при розв'язанні геометричних та економічних задач. Перед розв'язанням завдання пропонуємо повторити теоретичний матеріал, який міститься у розділі 6 Підручника.

Приклади розв'язання типового варіанта

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^3 \frac{3x^3-6x^2+13}{x}dx$.

Розв'язання. За формулою Ньютона-Лейбниця (6.18):

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

для того щоб обчислити визначені інтеграли, ми спочатку повинні знайти первісні. У цьому прикладі ми це можемо зробити миттєво за таблицею інтегралів:

$$\int_1^3 \frac{3x^3-6x^2+13}{x}dx = \int_1^3 \left(3x^2 - 6x + \frac{13}{x}\right)dx =$$

$$= (x^3 - 3x^2 + 13\ln x)\Big|_1^3 = 27 - 27 + 13\ln 3 - 1 + 3 - 13\ln 1 =$$

$$= 2 + 13\ln 3.$$

б) $\int_0^{\ln 5} e^x\sqrt{e^x+4}dx$.

Розв'язання. Для того щоб знайти первісну, необхідно виконати заміну змінної. Звернемо вашу увагу на те, що замінна змінної у визначеному інтегралі відрізняється від такої у невизначеному (див. п. 6.4), а саме: при введенні нової змінної ми зобов'язані замінити й границі інтегрування, обчислити первісні з новими границями, до старої змінної, зрозуміло, повертатися не потрібно.

$$\int_0^{\ln 5} e^x\sqrt{e^x+4}dx = \begin{bmatrix} u = e^x + 4 \\ du = e^x dx \\ u_\text{н} = e^0 + 4 = 1 + 4 = 5 \\ u_\text{в} = e^{\ln 5} + 4 = 5 + 4 = 9 \end{bmatrix} = \int_5^9 \sqrt{u}du =$$

$$= \int_5^9 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_5^9 = \frac{2}{3}u\sqrt{u}\,\Bigg|_5^9 = \frac{2}{3}\left(9\sqrt{9} - 5\sqrt{5}\right).$$

в) $\int_{-4}^{0} \frac{dx}{x^2+8x+20}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат, знайдемо первісну, скористаємося формулою Ньютона-Лейбниця:

$$\int_{-4}^{0} \frac{dx}{x^2+8x+20} = \int_{-4}^{0} \frac{dx}{(x^2+8x+16)-16+20} = \int_{-4}^{0} \frac{dx}{(x+4)^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}atcrg\frac{x+4}{2}\Bigg|_{-4}^{0} = \frac{1}{2}(atcrg2 - arctg0) = \frac{1}{2}arctg2.$$

г) $\int_1^e \ln^2 x\,dx$.

Розв'язання. Інтегруємо частинами (5.47):

$$\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln^2 x \\ dv = dx \\ du = 2\ln x \cdot \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{bmatrix} = x \cdot \ln^2 x\,\Big|_1^e - \int\limits_1^e x \cdot 2\ln x \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= x \cdot \ln^2 x \,\Big|_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x \\ dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{bmatrix} = e \cdot \ln^2 e -$$

$$-1 \cdot \ln^2 1 - 2\left(x \cdot \ln x \,\Big|_1^e - \int_1^e x\,\frac{dx}{x}\right) = e - 2e \cdot \ln e +$$

$$+2 \cdot \ln 1 + 2x \,\Big|_1^e = e - 2e + 2e - 2 = e - 2.$$

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їх розбіжність):

а) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

Розв'язання. Інтеграл невласний. Функція зазнає розрив на верхній границі. Для знаходження первісної виділимо повний квадрат в квадратному тричлені знаменника:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2-4x+4)-4+3} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x - 2 \\ du = dx \\ u_{н} = 0 - 2 = -2 \\ u_{в} = 1 - 2 = -1 \end{bmatrix} = \int_{-2}^{-1} \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| \Bigg|_{-2}^{-1-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left|\frac{-1-\varepsilon-1}{-1-\varepsilon+1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{-2-1}{-2+1}\right| = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left|\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon}\right| - \frac{1}{2}\ln 3 =$$

$$= \infty - \frac{1}{2}\ln 3 = \infty. \qquad \Rightarrow \quad \text{невласний інтеграл розбігається.}$$

б) $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Розв'язання. Інтеграл невласний з нескінченими границями. Для знаходження первісної скористаємося тригонометричною підстановкою:

$$\int_{\sqrt{2}}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\left[\begin{array}{c} x=\frac{1}{\sin t} \\ dx=-\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt \\ \sqrt{x^2-1}=\frac{\cos t}{\sin t} \\ \text{н:}\quad \sqrt{2}=\frac{1}{\sin t};\quad \sin t=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad t_{\text{н}}=\frac{\pi}{4} \\ \text{в:}\quad \infty=\frac{1}{\sin t};\quad \sin t=\frac{1}{\infty}=0;\quad t_{\text{в}}=0 \end{array}\right]=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{-\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt}{\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}}=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}dt=t\,\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}.$$

Ми отримали кінцеве значення $\Rightarrow$ невласний інтеграл збігається.

3. Обчислити площу:

а) фігури, обмеженої параболою $y=x^2$ і прямою $y=4-3x$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рис. 11.1). Знайдемо точки перетину кривих, для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=4-3x \end{cases};\qquad \begin{array}{l} x^2=4-3x; \\ x^2+3x-4=0; \\ x_1=-4;\quad x_2=1. \end{array}$$

Отже, точки перетину $x_1=-4$ і $x_2=1$.

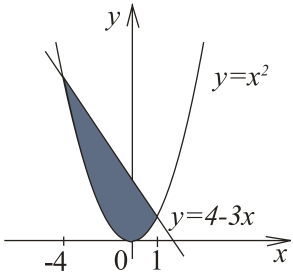

Рисунок 11.1 – Фігура, обмежена прямою і параболою

Обчислимо площу за формулою (6.30):

$$S=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx=\int_{-4}^{1}(4-3x-x^2)dx=$$

$$=\left(4x-3\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-4}^{1}=4-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+16+24-\frac{64}{3}=\frac{125}{6}\ (\text{од}^2).$$

б) чверті еліпса $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, де $t \in \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

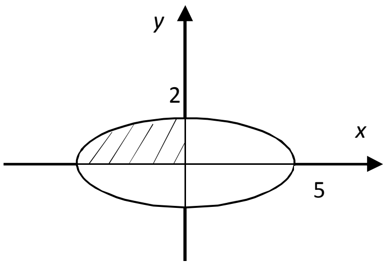

Рисунок 11.2 – Еліпс

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рис. 11.2). Обчислимо площу за формулою (6.31):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt =$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sin t \cdot 5\sin t\, dt =$$
$$= 10\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 t\, dt =$$
$$= \frac{10}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\cos 2t)dt = 5\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{5\pi}{2}.$$

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \arcsin e^{-x}$ між точками з абсцисами $0 \le x \le 1$.

Розв'язання. Для обчислення довжини дуги, скористаємося формулою (6.35). До підстановки у формулу виконаємо попередні обчислення, а саме

$$y' = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}};$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{1-e^{-2x}+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{1}{1-e^{-2x}}.$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = \begin{bmatrix} u^2 = 1 - e^{-2x} \\ 2udu = 2e^{-2x}dx \\ dx = \frac{udu}{e^{-2x}} = \frac{udu}{1-u^2} \\ u_{\text{н}} = 1 - 1 = 0 \\ u_{\text{в}} = \sqrt{1-e^{-2}} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} \frac{udu}{u(1-u^2)} = -\int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} \frac{du}{u^2-1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Bigg|_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-e^{-2}}-1}{\sqrt{1-e^{-2}}+1}\right| + \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-e^{-2}}+1}{\sqrt{1-e^{-2}}-1}\right| \text{ (од.)}$$

б) лінії $\rho = 2\sin^3\frac{\varphi}{3}$ між точками $\varphi_1 = 0$ і $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання: Для обчислення довжини дуги, скористаємося формулою (6.37), для цього знайдемо похідну та виконаємо необхідні перетворення:

$$\rho' = 2\cdot 3\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3};$$

$$(\rho')^2 + \rho^2 = \left(2\sin^3\frac{\varphi}{3}\right)^2 + \left(2\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\right)^2 =$$

$$= 4\sin^6\frac{\varphi}{3} + 4\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3} = 4\sin^4\frac{\varphi}{3}\left(\sin^2\frac{\varphi}{3} + \cos^2\frac{\varphi}{3}\right) =$$

$$= 4\sin^4\frac{\varphi}{3};$$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi = \left(\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{4} \text{ (од.)}$$

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = e^x$, $y = e^{\frac{x}{2}}$, $x = \ln 2$ навколо осі Ox.

Розв'язання. Знайдемо точку перетину ліній, які обмежують цю фігуру:

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = e^{\frac{x}{2}} \end{cases}; \qquad e^x = e^{\frac{x}{2}}; \quad e^x - e^{\frac{x}{2}} = 0; \quad e^x\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right) = 0;$$

$$e^x \neq 0; \quad 1 - e^{-\frac{x}{2}} = 0; \quad -\frac{x}{2} = 0; \quad x = 0.$$

За формулою (6.40) маємо

$$V = \pi\int_0^2 [y_2^2(x) - y_1^2(x)]\,dx = \pi\int_0^{\ln 2}(e^{2x} - e^x)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}e^{2x} - e^x\right)\Bigg|_0^{\ln 2} = \pi\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 2} - e^{\ln 2} - \frac{1}{2} + 1\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}\cdot 4 - 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ (од}^3\text{)}.$$

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші дві години праці за продуктивності $f(t) = -0{,}0042t^2 + 0{,}022t + +11{,}5$, де t - час у годинах.

Розв'язання. За формулою (6.41) знайдемо обсяг $Q(t_1, t_2)$ продукції, виробленої за проміжок часу $[t_1, t_2]$:

$$Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \int_{t_1}^{t_2}(-0{,}0042t^2 + 0{,}022t + 11{,}5)dt =$$
$$= (-0{,}0014t^3 + 0{,}011t^2 + 11{,}5t)\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Обчислимо обсяг продукції, вироблений за перші дві години праці:

$$Q(0{,}2) = -0{,}0014 \cdot 2^3 + 0{,}011 \cdot 2^2 + 11{,}5 \cdot 2 =$$
$$= -0{,}0112 + 0{,}044 + 23 = 23{,}0328 \text{ (од.)}.$$

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 5 років, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0,5}$, $L(t) = (t-4)^3$, $K(t) = (t+2)^4$, $a_0 = 12$, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{1}{4}$.

Розв'язання. Нагадаємо, що обсяг продукції $Q(t_1, t_2)$, яка вироблена за проміжок часу $[t_1, t_2]$, обчислюється за формулою (6.41):

$$Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

На продуктивність виробництва продукції може впливати багато різних факторів. Можливість урахування цих факторів, пов'язана з використанням функцій ***Кобба-Дугласа***. В такому випадку функція $f(t)$ є добутком трьох множників (6.42):

$$f(t) = a_0 A^{\alpha}(t) L^{\beta}(t) K^{\gamma}(t),$$

де $A(t)$, $L(t)$, $K(t)$ - величини затрат природних ресурсів, праці і капіталу (відповідно), a_0, α, β, γ - коефіцієнти. Підставимо $A(t)$, $L(t)$, $K(t)$, коефіцієнти a_0, α, β, γ у формулу, маємо:

$Q(0;5) = 12\int_0^5 e^t(t-4)(t+2)dt =$

$$= 12\int_0^5 e^t(t^2-2t-8)dt = \begin{bmatrix} u = t^2-2t-8 \\ dv = e^t dt \\ du = (2t-2)dt \\ v = e^t \end{bmatrix} =$$

$$= 12\left(e^t(t^2-2t-8)\Big|_0^5 - \int_0^5 e^t(2t-2)dt\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} u = 2t-2 \\ dv = e^t dt \\ du = 2dt \\ v = e^t \end{bmatrix} = 12(e^5(25-10-8)+8-$$

$$-e^t(2t-2)\Big|_0^5 + 2\int_0^5 e^t dt\Big) = 12(7e^5+8-$$

$$-e^5(10-2)-2+2e^t\Big|_0^5\Big) = 12(6-e^5+2e^5-2) =$$

$$= 12(e^5+4).$$

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{x}{6-5x}$, де $x \in [0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

Розв'язання. Коефіцієнт Джині k дорівнює відношенню площі фігури OAB і площі трикутника OAC (6.43):

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}.$$

Площа трикутника дорівнює

$$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = 0{,}5\ (\text{од}^2).$$

а площу фігури OAB знайдемо за формулою (6.30):

$$S_{OAB} = \int_a^b [y_2(x)-y_1(x)]dx = \int_0^1\left(x-\frac{x}{6-5x}\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left(x+\frac{1}{5}\frac{(6-5x)-6}{6-5x}\right)dx = \int_0^1\left(x+\frac{1}{5}-\frac{6}{5}\frac{1}{6-5x}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{5}x+\frac{6}{25}\ln|6-5x|\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{6}{25}\ln 1-\frac{6}{25}\ln 6 =$$

$$= \frac{7}{10}-\frac{6}{25}\ln 6 \approx 0{,}27\ (\text{од}^2).$$

Отже, коефіцієнт Джині дорівнює $k = \frac{0,27}{0,5} = 0,54$.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 380 - x^2, \quad p = 18x + 20.$$

Розв'язання. Знайдемо точку ринкової рівноваги (x_0, p_0) з розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} p = 380 - x^2 \\ p = 18x + 20 \end{cases}; \qquad \begin{aligned} &380 - x^2 = 18x + 20; \\ &x^2 + 18x - 360 = 0; \\ &\left[\begin{aligned} &x_1 = 12 \\ &x_2 = -30 \ \text{(не має сенсу)} \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = 12; \quad p_0 = 380 - 12^2 = 380 - 144 = 236.$$

Отже, точка ринкової рівноваги $x_0 = 12$, $p_0 = 236$, а дохід від реалізації товару x_0 за рівноважною ціною дорівнює добутку $x_0 \cdot p_0 = 12 \cdot 236 = 2832$.

Знайдемо виграш користувачів (6.44):

$$C = \int_0^{12} (380 - x^2)dx - 12 \cdot 236 = \left(380x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{12} - 2832 =$$
$$= 4560 - 576 - 2832 = 1152 \text{ (грош. од.)}.$$

Знайдемо виграш постачальників (6.45):

$$P = 12 \cdot 236 - \int_0^{12} (18x + 20)dx = 2832 - (9x^2 + 20x)\Big|_0^{12} =$$
$$= 2832 - 1296 - 240 = 1296 \text{ (грош. од.)}.$$

Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів

Завдання 11.1.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_1^3 \left(x^5 - 7\cos x - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$; б) $\int_0^5 \frac{dx}{x^2-4x+5}$;

в) $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^\infty e^{\sqrt{x}} dx$; б) $\int_0^1 x \ln x\,dx$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = x + 2$;

б) астроїди $y = \cos^3 t$; $y = \sin^3 t$ при $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y^2 = x^3$ між точками $O(0,0)$ і $A\left(\frac{4}{3}, \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$;

б) гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1$ при $\varphi \in \left[\frac{3}{4}; \frac{4}{3}\right]$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^3$, $y = 4x$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші чотири години праці при продуктивності $f(t) = 32{,}47e^{-0{,}25t}$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 5 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}25t}$, $L(t) = (t-1)^4$, $K(t) = (3t-2)^3$, $a_0 = 5$, $\alpha = 4$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{3}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{x}{5-4x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд: $p = 180 - x^2$, $p = 25x + 30$.

10. *Теоретичне питання.* Первісна. Невизначений інтеграл. Визначення. Основні властивості.

Завдання 11.2.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_{-5}^{0}\left(x^2-4\sin x+\frac{2}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx$; б) $\int_{-1}^{0}\frac{(x+1)dx}{x^2+4x-5}$;

в) $\int_{\ln 3}^{\ln 4}\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; г) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\sin 3x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхні розбіжність):

а) $\int_{0}^{\infty}\frac{x}{(x+1)^3}dx$; б) $\int_{0}^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y=x^2$ і прямою $y=x-6$;

б) обмеженої лінією $\rho=3\sin 2\varphi$.

4. Обчислити довжину:

а) дуги кривої $y=\ln\sin x$ між точками з абсцисами $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}$;

б) евольвенти кола $x=5(\cos t+t\sin t)$, $y=5(\sin t-t\cos t)$ (від $t_1=0$ до $t_2=\pi$).

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y=x^5$, $y=\sqrt{x}$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші чотири години праці при продуктивності $f(t)=-0{,}0042t^2+0{,}035t+$ $+27{,}4$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 7 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t)=e^{0{,}5t}$, $L(t)=(2t+3)^3$, $K(t)=(t-4)^4$, $a_0=2$, $\alpha=2$, $\beta=\frac{1}{3}$, $\gamma=\frac{1}{4}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y=\frac{2x}{5-3x}$, де $x\in[0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p=120-x^2,\qquad p=8x+15.$$

10. *Теоретичне питання.* Застосування методу заміни змінної при знаходженні невизначених інтегралів.

Завдання 11.3.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_{-2}^{7}\left(x^6-\frac{5}{x^2}+\frac{9}{\cos^2 x}\right)dx$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{x}{2}\,dx$;

в) $\int_{4\sqrt{2}}^{8}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$; г) $\int_{0}^{2}\ln(3x+1)\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$; б) $\int_{0}^{1}\frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx$.

3. Обчислити площу:

а) фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{x},\ \ xy=1$ і прямою $x=4$;

б) петлі лінії $x=3t^2,\ \ y=3t-t^3$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y=\ln\frac{6}{x^2-1}$ між точками з абсцисами $2\le x\le 3$;

б) лінії $\rho=6\sin^3\frac{\varphi}{3}$ між точками з $\varphi\in\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y=x^2,\ y=3x+4$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші шість годин праці при продуктивності $f(t)=54{,}23e^{-\frac{t}{6}}$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 4 роки, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t)=e^{0{,}5t}$, $L(t)=(3t+5)^2$, $K(t)=(t-6)^3$, $a_0=7,\ \alpha=2,\ \beta=\frac{1}{2},\ \gamma=\frac{1}{3}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y=\frac{2x}{4-2x}$, де $x\in[0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p=380-x^2,\qquad p=31x+20.$$

10. *Теоретичне питання.* Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен. Інтеграли вигляду $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ або $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Завдання 11.4.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_1^4 \left(\sqrt{x^3} + \frac{3}{\sin^2 x} - e^x\right) dx$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x}$; г) $\int_1^2 x \log_2 x \, dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$; б) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x+1)^2}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y = x^2 + 4x$ і прямою $y = x + 4$;

б) логарифмічної спіралі $\rho = 4e^{5\varphi}$ при $\varphi \in \left[0; \frac{1}{5}\right]$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = 4 + \ln \cos x$ між точками з абсцисами $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$;

б) петлі $x = t^2$; $y = t - \frac{t^3}{3}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 2x + 3$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші три години праці при продуктивності $f(t) = -0{,}0031t^3 + 0{,}028t^2 + +0{,}17t + 35{,}48$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 10 років, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}25t}$, $L(t) = (t+2)^4$, $K(t) = (2t-3)^3$, $a_0 = 2$, $\alpha = 4$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{3}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{x}{8-7x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 250 - x^2, \quad p = 9x + 30.$$

10. *Теоретичне питання.* Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен. Інтеграли вигляду $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$ або $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Завдання 11.5.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_1^2 \frac{4x+2}{2x-1}dx$; б) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$;

в) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x - 1}{x\sqrt{\ln x - 1}}dx$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-x)\sin 3x\, dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^{\infty} \operatorname{arctg} x\, dx$; б) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

3. Обчислити площу:

а) фігури, обмеженої параболою $y = 3 - 2x - x^2$ і віссю абсцис;
б) еліпса $x = 4\cos t$; $y = 8\sin t$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ між точками з абсцисами $-2 \le x \le 2$;
б) лінії $\rho = 6\sin^4\frac{\varphi}{4}$ між точками з $\varphi \in [0; \pi]$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $x^2 = y + 4$, $y = 0$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші сім годин праці при продуктивності $f(t) = 73{,}15e^{-\frac{t}{7}}$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 5 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}5t}$, $L(t) = (5t+1)^3$, $K(t) = (t-8)^2$, $a_0 = 6$, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{4x}{9-5x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 400 - x^2, \quad p = 18x + 340.$$

10. *Теоретичне питання.* Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та різні.

Завдання 11.6.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_0^1 (e^x+5)^4 e^x dx$; б) $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$;

в) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; г) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{5x^3+1}$; б) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

3. Обчислити площу:

а) фігури, обмеженої параболами $9y=x^2$ і $y^2=9x$;

б) обмеженої лінію $\rho = 5\sin 2\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ між точками з абсцисами $1 \le x \le 9$;

б) кола $x = 9\cos t$; $y = 9\sin t$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y=x^2$, $y=\frac{x^2+1}{2}$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші чотири години праці при продуктивності $f(t) = -0{,}00037t^2 + +0{,}0054t^2 + 0{,}074t + 17{,}88$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 8 років, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t)=e^{0,5t}$, $L(t)=(7t+5)^2$, $K(t)=(t-1)^3$, $a_0=8$, $\alpha=4$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{1}{3}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y=\frac{3x}{9-6x}$, де $x\in[0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 350 - x^2, \quad p = 32x + 30.$$

10. *Теоретичне питання.* Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та серед яких є кратні.

Завдання 11.7.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+4)^2}$;

б) $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$;

в) $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\sin \pi x} \cos \pi x\, dx$;

г) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

б) $\int_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y^2 = 2x + 1$ і $x - y - 1 = 0$;

б) петлі $x = t^2 - 1$; $\quad y = t^3 - t$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \ln x$ між точками з абсцисами $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$;

б) кардіоїди $\rho = 5(1 + \cos\varphi)$ при $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y^2 = 16x,\ y = 4x$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші п'ять годин праці при продуктивності $f(t) = 17{,}88e^{-0{,}2t}$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 6 років, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}2t}$, $L(t) = (6t + 2)^3, K(t) = (t + 1)^4, a_0 = 3,\ \alpha = 5,\ \beta = \frac{1}{3},\ \gamma = \frac{1}{4}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{x}{6-5x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 340 - x^2, \qquad p = 5x + 40.$$

10. *Теоретичне питання*. Інтегрування раціональних дробів, серед коренів знаменника яких є комплексні.

Завдання 11.8.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$; б) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x \, dx$; г) $\int_0^1 x \ln(x+3) \, dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x}$; б) $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y = x^4 - 2x^2$ і $y = 0$;

б) обмеженої лінією $\rho = 4\,\mathrm{tg}\,\varphi$ і прямою $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = 2\sqrt{x}$ між точками з абсцисами $0 \le x \le 1$;

б) евольвенти кола $x = 2(\cos t + t \sin t)$, $y = 2(\sin t - t \cos t)$ (від $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$).

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = \frac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші дві години праці при продуктивності $f(t) = -0{,}0054t^2 - 0{,}027t + $ $+73{,}12$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 5 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}1t}$, $L(t) = (5t-4)^4, K(t) = (t+3)^2$, $a_0 = 7$, $\alpha = 10$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{4x}{8-4x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 410 - x^2, \quad p = 30x + 10.$$

10. *Теоретичне питання.* Інтегрування частинами невизначених інтегралів.

Завдання 11.9.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_1^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$; б) $\int_1^2 \frac{3x^4-2x\sqrt{x}+9}{x} dx$;

в) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; г) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} 3x dx}{1+9x^2}$; б) $\int_0^1 \ln x\, dx$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y = x^2 - 2x$ і прямими $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;

б) астроїди $y = 4\cos^3 t$; $y = 6\sin^3 t$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = x^{\frac{3}{2}}$ між точками з абсцисами $0 \le x \le 1$;

б) кардіоїди $\rho = 5(1 + \cos\varphi)$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 4x - x^2$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші п'ять годин праці при продуктивності $f(t) = 31{,}24e^{-0{,}2t}$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 7 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}1t}$, $L(t) = (4t + 7)^3, K(t) = (t + 1)^2, a_0 = 2,\ \alpha = 10,\ \beta = \frac{1}{3},\ \gamma = \frac{1}{2}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{3x}{12-9x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 190 - x^2, \quad p = 18x + 15.$$

10. *Теоретичне питання.* Інтегрування тригонометричних функцій типу $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Завдання 11.10.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_1^4 \left(x^8 - \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^2+1}\right) dx$; б) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$;

в) $\int_0^{\pi} \cos^2 \frac{x}{4} dx$; г) $\int_1^e \ln^2 x\, dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_1^{\infty} \frac{2xdx}{x^4+1}$; б) $\int_{-7}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$.

3. Обчислити площу:

а) фігури, обмеженої лініями $y = 3x^3 - x$ і $y = 2x$;

б) логарифмічної спіралі $\rho = 7e^{5\varphi}$ при $\varphi \in \left[0; \frac{3}{5}\right]$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y^2 = x^3$ між точками $O(0,0)$ і $A\left(\frac{4}{3}, \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$;

б) евольвенти кола $x = 5(\cos t + t \sin t)$, $y = 5(\sin t - t \cos t)$ (від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{4}$).

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $xy = 6,\ x = 1,\ x = 6,\ y = 0$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші сім годин праці при продуктивності $f(t) = -0{,}0047t^2 + 0{,}012t + 71{,}12$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 5 років, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0,5t}$, $L(t) = (t-5)^4$, $K(t) = (t+2)^3$, $a_0 = 2,\ \alpha = 2,\ \beta = \frac{1}{4},\ \gamma = \frac{1}{3}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{6x}{9-3x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 300 - x^2, \qquad p = 21x + 30.$$

10. *Теоретичне питання.* Інтегрування тригонометричних виразів типу $\int \sin^{\mathrm{m}} ax \cos^{\mathrm{n}} ax\, dx$.

Завдання 11.11.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_2^5 \frac{2x-7}{x+5} dx$; б) $\int_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$; г) $\int_0^{\frac{1}{2}} x \operatorname{arctg} x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_{e^4}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x-3)^3}$; б) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = 3x + 4$;

б) кардіоїди $x = 2\cos t - \cos 2t\,, y = 2\sin t - \sin 2t$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \ln(1 - x^2)$ між точками з абсцисами $0 \le x \le \frac{1}{2}$;

б) гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1$ між точками $\varphi_1 = \frac{2}{3}$ і $\varphi_2 = \frac{3}{2}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $3y = x^2,\ 0 \le x \le 2$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші дві години праці при продуктивності $f(t) = 51{,}28e^{-0{,}5t}$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 8 років, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}1t}$, $L(t) = (7t + 1)^5, K(t) = (t + 4)^2$, $a_0 = 4,\ \alpha = 10,\ \beta = \frac{1}{5},\ \gamma = \frac{1}{2}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{x}{6-5x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 250 - x^2, \quad p = 8x + 10.$$

10. *Теоретичне питання.* Інтегрування тригонометричних виразів типу $\int \sin ax \cos bx\,dx$, $\int \sin ax \sin bx\,dx$, $\int \cos ax \cos bx\,dx$.

Завдання 11.12.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_4^9 \frac{(5-3x^3)^2}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$; г) $\int_1^e x^4 \ln x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx$; б) $\int_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+6}}$.

3. Обчислити площу:

а) фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$ і $y = x^5$;

б) равлика Паскаля $\rho = 4(2 + \cos\varphi)$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \ln\frac{5}{x^2-1}$ між точками з абсцисами $2 \leq x \leq 5$;

б) лінії $x = e^t(\cos t + \sin t)$; $y = e^t(\cos t - \sin t)$ між точками $t_1 = 0$ і $t_2 = \frac{\pi}{4}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2,\ y = \frac{1}{x},\ x = 1,\ x = 2$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші три години праці при продуктивності $f(t) = -0{,}0032t^2 - 0{,}057t + +16{,}82$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 5 років, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}5t}$, $L(t) = (t+5)^5$, $K(t) = (2t-5)^2$, $a_0 = 1,\ \alpha = 2,\ \beta = \frac{1}{5},\ \gamma = \frac{1}{2}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в одніє́ї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{3x}{5-2x}$, де $x \in [0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 350 - x^2, \quad p = 19x + 20.$$

10. *Теоретичне питання*. Інтегрування ірраціональностей типу $\int R\left(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b}, \dots, \sqrt[k]{ax+b}\right)dx$.

Завдання 11.13.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3-2x}{x^2-1} dx$;

б) $\int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, dx$;

г) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \, dx}{\sin^2 x}$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$;

б) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+3x+2}$.

3. Обчислити площу:

а) фігури, обмеженої параболою $y^2 = 4 + x$ і прямою $x = 2$;

б) кардіоїди $x = 4\cos t - 2\cos 2t$, $y = 4\sin t - 2\sin 2t$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = 2e^{\frac{x}{2}}$ між точками з абсцисами $\ln 3 \le x \le \ln 8$;

б) архімедової спіралі $\rho = 7\varphi$ від початку до кінця першого витка.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші шість годин праці при продуктивності $f(t) = 18{,}55e^{-\frac{t}{6}}$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 10 років, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}25t}$, $L(t) = (8t-2)^4$, $K(t) = (t+3)^5$, $a_0 = 6$, $\alpha = 4$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{5}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{3x}{8-5x}$, де $x \in [0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 400 - x^2, \quad p = 31x + 40.$$

10. *Теоретичне питання.* Інтегрування ірраціональностей типу $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$.

Завдання 11.14.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+x}$; б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$;

в) $\int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}\,dx}{\sqrt{x+3}-1}$; г) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(4x+3)^4}$; б) $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2+5x+6}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y = \ln x$, $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$;

б) фігури $\rho = 4\sin^3 \frac{\varphi}{3}$ при $\varphi \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \frac{x^2}{2}$ між точками з абсцисами $0 \le x \le 1$;

б) евольвенти кола $x = 7(\cos t + t\sin t)$, $y = 7(\sin t - t\cos t)$ при $t \in [0; \pi]$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші чотири години праці при продуктивності $f(t) = 91{,}13e^{-0{,}25t}$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 10 років, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}5t}$, $L(t) = (5t-3)^4$, $K(t) = (t+4)^2$, $a_0 = 9$, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{x}{8-7x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 100 - x^2, \quad p = 10x + 25.$$

10. *Теоретичне питання.* Інтегрування ірраціональностей типу $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$.

Завдання 11.15.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int_3^5 \frac{dx}{x^3-4x}$;

в) $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}}$; г) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^{\infty} \frac{2x^3 dx}{\sqrt{x^4+16}}$; б) $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-5x}}$.

3. Обчислити площу:

а) фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = 2x + 3$;

б) обмеженої аркою циклоїди $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$ та віссю абсцис.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = 5 + \ln \sin x$ між точками з абсцисами $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{4}$;

б) кардіоїди $\rho = 8(1 + \cos \varphi)$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 3 - 2x$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші десять годин праці при продуктивності $f(t) = -0{,}0071t^2 - 0{,}033t + +18{,}42$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 3 роки, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}5t}$, $L(t) = (8t+1)^3, K(t) = (2t-1)^2$, $a_0 = 6$, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{2x}{9-7x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 410 - x^2, \quad p = 18x + 50.$$

10. *Теоретичне питання.* Інтегрування ірраціональностей типу $\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx$.

Завдання 11.16.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$; б) $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

в) $\int_1^{e} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$; г) $\int_0^{2} x^2 e^{-2x} dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^{\infty} \operatorname{arctg} x\, dx$; б) $\int_1^{10} \frac{dx}{\sqrt{10-x}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y = x^2 - 4$ і прямою $y = 0$;

б) обмеженої лінією $\rho = \operatorname{tg}\varphi$ і прямою $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \ln(1 - x^2)$ між точками з абсцисами $0 \le x \le \frac{1}{8}$;

б) трактриси $x = 5\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$; $y = 5\sin t$ між точками $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = 3 - x^2$, $y = x^2 + 1$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші чотири години праці при продуктивності $f(t) = 19{,}63e^{-0{,}25t}$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 8 років, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}2t}$, $L(t) = (t+6)^5, K(t) = (3t+1)^2$, $a_0 = 11$, $\alpha = 5$, $\beta = \frac{1}{5}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{2x}{4-2x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 100 - x^2, \quad p = 11x + 40.$$

10. *Теоретичне питання.* Визначений інтеграл. Визначення. Розв’язання задачі про площу криволінійної трапеції.

Завдання 11.17.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$; б) $\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}\,dx$;

в) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+4x}$; г) $\int_{-2}^2 (x-1)\sin\pi x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_1^\infty \operatorname{arcctg} x\,dx$; б) $\int_{-3}^0 \frac{dx}{(x+3)^4}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y=\sqrt{1-x}$, $y=x+1$ і $y=0$;

б) петлі лінії $x=3t^2,\ y=3t-t^3$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y=\sqrt{x}$ між точками з абсцисами $0\le x\le 9$;

б) другого витка архімедової спіралі $\rho=8\varphi$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y=x^2,\ xy=8,\ y=0,\ x=4$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші дві години праці при продуктивності $f(t)=-0{,}0033t^3+0{,}76t+$ $+62{,}76$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 3 роки, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t)=e^{\frac{t}{6}}$, $L(t)=(5t-1)^5$, $K(t)=(t+2)^3$, $a_0=2,\ \alpha=6,\ \beta=\frac{1}{5},\ \gamma=\frac{1}{3}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y=\frac{3x}{8-5x}$, де $x\in[0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p=510-x^2,\qquad p=40x+10.$$

10. *Теоретичне питання.* Основні властивості визначеного інтегралу. Лінійність визначеного інтегралу.

Завдання 11.18.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^3}}$; б) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}$;

в) $\int_0^\pi \frac{dx}{3+2\cos x}$; г) $\int_{-1}^1 x^2e^{-x}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3+2x^2}$; б) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболами $y = x^2$ і $y = 4x - x^2$;

б) обмеженої лінією $\rho = 5\sin 2\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \ln x$ між точками з абсцисами $1 \le x \le \sqrt{3}$;

б) лінії $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = \sin x,\ y = 0$ при $0 \le x \le \pi$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші дев'ять годин праці при продуктивності $f(t) = 14{,}92e^{-\frac{t}{9}}$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 8 років, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}1t}$, $L(t) = (t+5)^6, K(t) = (6t-1)^2, a_0 = 11, \alpha = 10, \beta = \frac{1}{6}, \gamma = \frac{1}{2}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{6x}{15-9x}$, де $x \in [0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 170 - x^2, \quad p = 13x + 30.$$

10. *Теоретичне питання.* Основні властивості визначеного інтегралу. Теореми про перестановку границь інтегрування та про адитивність визначеного інтегралу.

Завдання 11.19.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$;

в) $\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{3x+4}}$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$; б) $\int_{-1}^0 \ln(x+1)\, dx$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y = 2 - x^4$ і $y = x^2$;

б) астроїди $x = 4\cos^3 t\,, y = \sin^3 t$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y^2 = 5x^3$ між точками з абсцисами $0 \le x \le 1$;

б) лінії $\rho = 2\sin^6 \frac{\varphi}{6}$ при $\varphi \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{6x},\ y = \sqrt{16 - x^2},\ x = 0$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші три години праці при продуктивності $f(t) = -0{,}0064t^2 - 0{,}041t + {}$ $+22{,}71$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 13 років, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}25t}$, $L(t) = (4t-1)^4, K(t) = (3t-5)^3$, $a_0 = 6,\ \alpha = 4,\ \beta = \frac{1}{4},\ \gamma = \frac{1}{3}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{2x}{7-5x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 250 - x^2, \qquad p = 22x + 10.$$

10. *Теоретичне питання.* Основні властивості визначеного інтегралу. Теореми про знак та про оцінку визначеного інтегралу.

Завдання 11.20.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+4x}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$;

в) $\int_{-3}^3 x^2\sqrt{9-x^2}$; г) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \operatorname{arctg} x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x^2-5x+6}$; б) $\int_{-7}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболами $y=(x+1)^2$ і $y^2=x+1$;

б) обмеженої лінією $\rho=\cos 5\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y=\ln\cos x$ між точками з абсцисами $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3}$;

б) астроїди $x=3\cos^3 t$, $y=3\sin^3 t$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y=\frac{1}{2}x^2-2x,\ y=0$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші вісім годин праці при продуктивності $f(t)=16{,}35e^{-0{,}125t}$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 12 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t)=e^{\frac{t}{7}}$, $L(t)=(6t-5)^5$, $K(t)=(t+2)^2$, $a_0=2,\ \alpha=7,\ \beta=\frac{1}{5},\ \gamma=\frac{1}{2}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y=\frac{3x}{9-6x}$, де $x\in[0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p=270-x^2,\qquad p=34x+30.$$

10. *Теоретичне питання.* Основні властивості визначеного інтегралу. Теореми про середнє значення визначеного інтегралу.

Завдання 11.21.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_1^9 \left(x^8 + 2\sin x - \frac{5}{\sqrt{x}}\right) dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x \, dx$; г) $\int_1^e \ln^2 x \, dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^\infty \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y^2 = 16x$ і прямою $y = 4x$;

б) кардіоїди $x = 6\cos t - 3\cos 2t$, $y = 6\sin t - 3\sin 2t$;.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-5)^3}$ між точками з абсцисами $5 \le x \le 9$;

б) лінії $\rho = 5\sin^3 \frac{\varphi}{3}$ при $\varphi \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$, $x = 5$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші дві години праці при продуктивності $f(t) = -0{,}0071t^2 + 0{,}062t + +41{,}37$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 3 роки, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}5t}$, $L(t) = (9t-4)^4$, $K(t) = (t+3)^3$, $a_0 = 6$, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{3}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{x}{8-7x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 350 - x^2, \quad p = 76x + 30.$$

10. *Теоретичне питання.* Обчислення визначеного інтегралу. Формула Ньютона-Лейбниця.

Завдання 11.22.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_4^5 \frac{dx}{x^2-3x}$; б) $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{3x}dx}{1+e^{3x}}$;

в) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(4+5x)^3}}$; г) $\int_0^2 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_1^{\infty} \frac{1-\ln x}{x} dx$; б) $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$;

б) обмеженої лінією $\rho = 4\,\mathrm{tg}\,\varphi$ і прямою $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \frac{x^2}{2}$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq 1$;

б) петлі лінії $x = t^2,\ y = t - \frac{t^3}{3}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші вісім годин праці при продуктивності $f(t) = 19{,}83e^{-0{,}125t}$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 15 років, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}1t}$, $L(t) = (t-1)^5, K(t) = (3t+4)^2$, $a_0 = 3,\ \alpha = 10,\ \beta = \frac{1}{5},\ \gamma = \frac{1}{2}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{3x}{10-7x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 250 - x^2, \quad p = 16x + 25.$$

10. *Теоретичне питання*. Заміна змінної у визначеному інтегралі.

Завдання 11.23.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^3\,x\,dx$;

в) $\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$; г) $\int_{0}^{2}(x-2)e^{-\frac{x}{2}}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y=x^2$ і прямою $y=3-2x$;

б) обмеженої лінією $x=7\cos^5 t\,, y=7\sin^5 t$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y=4\sqrt{x}$ між точками з абсцисами $0\le x\le 9$;

б) гіперболічної спіралі $\rho\varphi=1$ при $\frac{2}{5}\le\varphi\le\frac{5}{2}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y=-x^2+4,\; y=x^2,\; y=0$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші дев'ять годин праці при продуктивності $f(t)=-0{,}0047t^2-0{,}036t+$ $+61{,}24$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 4 роки, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t)=e^{0{,}25t}$, $L(t)=(7t+1)^3, K(t)=(t-2)^2$, $a_0=8,\; \alpha=4,\; \beta=\frac{1}{3},\; \gamma=\frac{1}{2}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y=\frac{7x}{10-3x}$, де $x\in[0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p=220-x^2,\qquad p=17x+20.$$

10. *Теоретичне питання*. Інтегрування частинами визначених інтегралів.

Завдання 11.24.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 3x^5 - \frac{7}{x^2}\right) dx$; б) $\int_0^{\ln 10} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+8} dx$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx$; г) $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\, dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{12-3x}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y = 1 - x^2$, $y = x$ і $y = 0$;

б) обмеженої лінією $\rho = 5\sin^3\frac{\varphi}{3}$ і прямою $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ між точками з абсцисами $-1 \le x \le 1$;

б) лінії $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t$, $y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t$ від $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y^2 = 9x,\ x^2 = 9y$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші вісім годин праці при продуктивності $f(t) = 15{,}32e^{-0{,}125t}$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 9 років, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}5t}$, $L(t) = (4t-7)^3$, $K(t) = (t-2)^5$, $a_0 = 1,\ \alpha = 2,\ \beta = \frac{1}{3},\ \gamma = \frac{1}{5}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{2x}{11-9x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 260 - x^2, \qquad p = 9x + 40.$$

10. *Теоретичне питання.* Невласні інтеграли з нескінченими границями.

Завдання 11.25.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx$; б) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$;

в) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+3)\sin x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^\infty \frac{dx}{(4x+3)^2}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x-1)^2}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y=3+2x-x^2$ і прямою $y=x+1$;

б) еліпса $x=6\cos t\,, y=8\sin t$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y=\ln(1-x^2)$ між точками з абсцисами $0\leq x\leq\frac{1}{5}$;

б) кардіоїди $\rho=4(1+\cos\varphi)$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y^2=4x,\ y=0,\ x=4$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші дев'ять години праці при продуктивності $f(t)=-0{,}0071t^2+0{,}035t+$ $+12{,}64$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 8 років, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t)=e^{0{,}125t}$, $L(t)=(t+1)^4, K(t)=(3t+7)^5$, $a_0=2,\ \alpha=8,\ \beta=\frac{1}{4},\ \gamma=\frac{1}{5}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y=\frac{5x}{6-x}$, де $x\in[0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p=300-x^2,\qquad p=7x+40.$$

10. *Теоретичне питання*. Невласні інтеграли від розривних функцій.

Завдання 11.26.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$;

б) $\int_1^2 \frac{5x^3-8x+4}{x^2}dx$;

в) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x\, dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$;

г) $\int_1^2 x \log_2 x\, dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$;

б) $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболами $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$;

б) обмеженої лінією $\rho = 8\cos 2\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \ln x$ між точками з абсцисами $1 \le x \le \sqrt{3}$;

б) лінії $x = \cos^3 t\,, y = \sin^3 t$ між точками з $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2,\ y = 0$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші вісім годин праці при продуктивності $f(t) = 51{,}15e^{-0{,}125t}$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 11 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{\frac{t}{7}}$, $L(t) = (t+2)^5, K(t) = (3t-8)^4$, $a_0 = 10,\ \alpha = 7,\ \beta = \frac{1}{5},\ \gamma = \frac{1}{4}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{x}{4-3x}$, де $x \in [0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 380 - x^2, \qquad p = 31x + 20.$$

10. *Теоретичне питання.* Обчислення площі плоскої фігури за допомогою визначеного інтегралу.

Завдання 11.27.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_1^3 \frac{dx}{x^3+4x}$; б) $\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x-\cos x}$; г) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x^2)\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}$; б) $\int_1^2 x\ln(x-1)\,dx$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y=-x^2+4x-3$ і прямою $y=0$;

б) обмеженої однією аркою циклоїди $x=5(t-\sin t)$, $y=5(1-\cos t)$ і віссю ординат.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y^2=x^3$ між точками з абсцисами $0\le x\le 4$;

б) лінії $\rho=2\sin^4\frac{\varphi}{4}$ між точками з $\varphi\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y=x^2,\ xy=8,\ y=0,\ x=4$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші три години праці при продуктивності $f(t)=-0{,}0064t^2+0{,}013t+$ $+54{,}11$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 9 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t)=e^{0,5t}$, $L(t)=(5t-1)^2, K(t)=(4t-3)^3$, $a_0=8,\ \alpha=2,\ \beta=\frac{1}{2},\ \gamma=\frac{1}{3}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y=\frac{6x}{13-7x}$, де $x\in[0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p=110-x^2,\qquad p=17x+50.$$

10. *Теоретичне питання*. Обчислення довжини дуги плоскої кривої за допомогою визначеного інтегралу.

Завдання 11.28.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_0^7 \frac{x^3}{\sqrt[3]{7+x^2}}dx$; б) $\int_3^5 \frac{dx}{x^2-2x}$;

в) $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\cos x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_1^\infty \frac{dx}{(5x-3)^2}$; б) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+3x+2}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $3y = x^2$ і прямими $y = 0$, $x = 2$;

б) обмеженої равликом Паскаля $\rho = 6(2 + \cos\varphi)$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = 8 + \ln\cos x$ між точками з абсцисами $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$;

б) астроїди $x = 8\cos^3 t\,, y = 8\sin^3 t$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $xy = 4,\ y = 0,\ x = 3,\ x = 12$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші вісім години праці при продуктивності $f(t) = 25{,}81e^{-0{,}125t}$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 10 років, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{\frac{t}{3}}$, $L(t) = (4t-1)^2, K(t) = (t+5)^5, a_0 = 4,\ \alpha = 3,\ \beta = \frac{1}{2},\ \gamma = \frac{1}{5}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{x}{5-4x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 135 - x^2, \qquad p = 15x + 35.$$

10. *Теоретичне питання.* Обчислення об'єму тіла обертання за допомогою визначеного інтегралу.

Завдання 11.29.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+4x-5}$; б) $\int_{1}^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

в) $\int_{1}^{e} \frac{\sqrt{\ln^5 x}}{x} dx$; г) $\int_{0}^{\pi} x \sin\frac{x}{2} dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_{0}^{\infty} x\, e^{-3x} dx$; б) $\int_{4}^{5} \frac{dx}{x(x-4)^2}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y = x^2 - 2$ і прямою $y = 0$;

б) кардіоїди $x = 8\cos t - 4\cos 2t\,, y = 8\sin t - 4\sin 2t$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \frac{x^2}{2}$ між точками з абсцисами $0 \le x \le 4$;

б) гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1$ при $\varphi \in \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2,\ y = \frac{1}{x},\ x = 2$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші дев'ять годин праці при продуктивності $f(t) = -0{,}0038t^2 - 0{,}052t + +41{,}12$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 4 роки, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}125t}$, $L(t) = (6t-1)^3$, $K(t) = (t-2)^2$, $a_0 = 9,\ \alpha = 8,\ \beta = \frac{1}{3},\ \gamma = \frac{1}{2}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{8x}{13-5x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 550 - x^2, \quad p = 27x + 30.$$

10. *Теоретичне питання.* Застосування визначених інтегралів для розв'язання задач з економіки.

Завдання 11.30.

1. Обчислити визначні інтеграли:

а) $\int_4^9 \left(2x^5+\frac{9}{\sqrt{x}}\right)dx$; б) $\int_0^{\pi} \cos^4\frac{x}{4}\,dx$;

в) $\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^{\infty} e^{\sqrt{x}}dx$; б) $\int_3^4 x\ln(x-2)\,dx$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y=2x-x^2$, $y=2^x$, $x=0$, $x=2$;

б) обмеженої лінією $\rho=6\operatorname{tg}\varphi$ і прямою $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y^2=x^3$ між точками з абсцисами $0\le x\le 8$;

б) трактриси $x=3\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$; $y=3\sin t$ між точками з $0\le t\le\frac{\pi}{4}$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y=x^2+1$, $x=y^2+1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ навколо осі Ox.

6. Визначити обсяг випуску продукції за перші чотири години праці при продуктивності $f(t)=33{,}52e^{-0{,}25t}$, де t - час у годинах.

7. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 6 років, якщо у функції Кобба-Дугласа $A(t)=e^{0{,}1t}$, $L(t)=(4t-3)^4, K(t)=(t+2)^5$, $a_0=3$, $\alpha=10$, $\beta=\frac{1}{4}$, $\gamma=\frac{1}{5}$.

8. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y=\frac{x}{4-3x}$, де $x\in[0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

9. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p=620-x^2,\qquad p=25x+20.$$

10. *Теоретичне питання.* Первісна. Невизначений інтеграл. Визначення. Основні властивості.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Коваленко Л. Б. Вища математика для менеджерів : навч. посібник / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 341 с.
2. Коваленко Л. Б. Вища математика для менеджерів : навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 291 с.
3. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики для менеджерів : навч. посібник / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 424 с.
4. Коваленко Л. Б. Методичні рекомендації та контрольні роботи з дисципліни «Вища математика» [для студентів 1 курсу заочної форми навчання спеціальностей 073 – Менеджмент, 241 – Готельно-ресторанна справа, 242 – Туризм] / Л. Б. Коваленко, Г. А. Кузнецова, С. М. Мордовцев, А. В. Якунін – Харків : ХНУМГ імені О. М. Бекетова, 2019. – 155 с.
5. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – М. : Наука, 1985. – 218 с.
6. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – М. : Наука, 1973. – 720 с.
7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1. / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1988. -712 с.
8. Пискунов Н. С. Диференциальное и интегральное исчисление. Т. 1. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – 430 с.
9. Станішевський С. О. Вища математика : навч. посібник / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 270 с.
10. Высшая математика для экономистов / Под редакцией Н.Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2007. – 479 с.
11. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец. – М. : Высшая школа, 1966. – 460 с.

12. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 383 с.

13. Ганич Д. І. Російсько-український, українсько-російський словник / Д. І. Ганич, И. С. Олійник. – Київ: А.С.К., 1996. – 550 с.

Навчальне видання

КОВАЛЕНКО Людмила Борисівна

ЗБІРНИК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ДЛЯ МЕНЕДЖЕРІВ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

2-ге видання, перероблене та доповнене

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
Редактор *О. В. Михаленко*
Комп'ютерне верстання *Л. Б. Коваленко*
Дизайн обкладинки *Т. А. Лазуренко*

Підп. до друку 12.02.2020. Формат 60 × 84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 27,5
Тираж 60 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.