Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΘΗΚΗΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΑ ΜΑΤΙΑ ΕΝΟΣ ΠΡΩΤΟΕΤΗ ΦΟΙΤΗΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παπαδάκη Εύη και Κουρουνιώτης Χρήστος

Πανεπιστήμιο Κρήτης

evi.papadaki@math.uoc.gr, chrisk@uoc.gr

Η έννοια της γραμμικής θήκης είναι μια από τις πρώτες αφηρημένες έννοιες που συναντούν οι φοιτητές σε ένα μάθημα Γραμμικής Άλγεβρας. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται οι σκέψεις και η χρήση της έννοιας από έναν πρωτοετή φοιτητή Μαθηματικών την περίοδο μετάβασης από το εισαγωγικό μάθημα Γραμμικής Άλγεβρας στο πρώτο μάθημα αφηρημένης Γραμμικής Άλγεβρας. Χρησιμοποιώντας το θεωρητικό εργαλείο εννοιακή εικόνα – εννοιακός ορισμός (Tall & Vinner, 1981) μελετάμε τα βασικά χαρακτηριστικά της εννοιακής εικόνας του φοιτητή για τη γραμμική θήκη όπως εξελίσσεται τη μεταβατική αυτή περίοδο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια η διδασκαλία της Γραμμικής Άλγεβρας σε προπτυχιακό επίπεδο προσελκύει όλο και περισσότερο το ενδιαφέρον των ερευνητών της εκπαίδευσης. Η Γραμμική Άλγεβρα βρίσκει πολλές εφαρμογές στα μαθηματικά και σε άλλες επιστήμες, όμως η διδασκαλία της αποδεικνύεται απαιτητική τόσο για τους καθηγητές όσο και για τους φοιτητές. Οι δυσκολίες που παρατηρούνται αποδίδονται εν μέρει στο φορμαλισμό με τον οποίο διδάσκεται συνήθως το μάθημα, την έλλειψη εξοικείωσης σε αποδεικτικές διαδικασίες καθώς και ελλείψεις σε έννοιες της λογικής και της θεωρίας συνόλων (Dorier et al., 2000; Hillel, 2000). Ο Harel (2000) προτείνει τρεις αρχές στη μάθηση της Γραμμικής Άλγεβρας και τονίζει την ανάγκη για προγράμματα σπουδών προσαρμοσμένα στις ανάγκες των φοιτητών που να συμβάλλουν στην κατανόηση των αφηρημένων εννοιών της.

Ιδιαίτερα η έννοια της γραμμικής θήκης φαίνεται να δυσκολεύει αρκετά τους φοιτητές. Ο Carlson (1993) αναφέρει ότι εάν οι δυσκολίες στις ιδέες του υπόχωρου, της γραμμικής θήκης και της γραμμικής εξάρτησης /ανεξαρτησίας δεν αντιμετωπιστούν εγκαίρως δημιουργούν εμπόδια. Οι Stewart και Thomas (2009) παρατηρούν ότι η πλειοψηφία των φοιτητών που διδάχτηκε την έννοια της γραμμικής θήκης με έμφαση στη συμβολική γλώσσα, τους πίνακες και τους ορισμούς, δεν εμφανίζει ξεκάθαρη κατανόηση της έννοιας καθώς και ότι κανένας φοιτητής στο συγκεκριμένο δείγμα δεν ανέφερε τη γραμμική θήκη ως το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων. Ακόμα, οι ίδιοι αναφέρουν ότι οι φοιτητές παρουσίαζαν αρκετές δυσκολίες στη σύνδεση της έννοιας με την έννοια της βάσης. Τέλος, οι Wawro et al. (2012) προτείνουν τη διδασκαλία της έννοιας διαισθητικά και όχι μέσα από την επίλυση συστημάτων και παρουσιάζουν μια προσέγγιση στη διδασκαλία της έννοιας μέσα από μια σειρά από ρεαλιστικές μαθηματικές δραστηριότητες.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η κατανόηση ενός πρωτοετή φοιτητή μαθηματικών μέσα από τη σκοπιά της θεωρίας των Tall και Vinner (1981) εννοιακή εικόνα και εννοιακός ορισμός. Η θεωρία αυτή αποτελεί ένα στέρεο θεωρητικό πλαίσιο (EMS, 2014) και έχει χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν από πολλούς ερευνητές κυρίως για έννοιες του Απειροστικού Λογισμού. Στα πλαίσια της Γραμμικής Άλγεβρας, οι Warwo et al. (2011) εξετάζουν την έννοια του υπόχωρου μέσα από την παραπάνω θεωρία.

Η εννοιακή εικόνα (concept image) είναι μια δυναμική δομή που περιλαμβάνει όλες τις νοερές εικόνες που έχει το άτομο για μια συγκεκριμένη έννοια. Σύμφωνα με τους Tall και Vinner το άτομο ανακαλεί τμήματα της εικόνας του για την επίλυση προβλημάτων (evoked concept image). Η εννοιακή εικόνα μπορεί να περιέχει τμήματα που βρίσκονται σε σύγκρουση και αν ανακληθούν ταυτόχρονα προκαλούν γνωστικές συγκρούσεις. Οι Bingolbali και Monaghan (2008) παρατηρούν ότι οι εννοιακές εικόνες σχετίζονται στενά με τον τρόπο διδασκαλίας και το κύριο αντικείμενο σπουδών.

Ο εννοιακός ορισμός (concept definition) είναι το σύνολο των λέξεων που προσδιορίζουν την έννοια. Σε αυτή την εργασία υιοθετούμε τη διάκριση μεταξύ προσωπικού και τυπικού εννοιακού ορισμού. Μέρος της εννοιακής εικόνας ενός ατόμου είναι και η εννοιακή εικόνα του ορισμού (concept definition image), το σύνολο δηλαδή των νοερών εικόνων (αν υπάρχουν) που σχετίζονται με τον προσωπικό εννοιακό ορισμό.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Στην εργασία αυτή μελετάμε την κατανόηση της έννοιας της γραμμικής θήκης ενός πρωτοετή φοιτητή Μαθηματικών σε ελληνικό πανεπιστήμιο. Στο συγκεκριμένο πρόγραμμα περιλαμβάνονται δύο υποχρεωτικά μαθήματα Γραμμικής Άλγεβρας, με τίτλους “Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα” [1] και “Γραμμική Άλγεβρα Ι” τα οποία προσφέρονται στο Α΄ και Β΄ εξάμηνο σπουδών αντίστοιχα. Η διδασκαλία των μαθημάτων γίνεται μέσα από 4 ώρες διαλέξεων και ένα δίωρο εργαστήριο προβλημάτων κάθε εβδομάδα.

Η γραμμική θήκη συνδέεται άμεσα με την έννοια του διανυσματικού υποχώρου, του γραμμικού συνδυασμού και την έννοια της βάσης. Είναι λοιπόν μια από τις πιο κεντρικές έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας. Στο μάθημα "Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα" δεν δίνεται έμφαση στον όρο "γραμμική θήκη" καθώς η έννοια παρουσιάζεται πιο συχνά περιφραστικά, ως "ο υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα w_1, …, w_n". Στα πλαίσια του συγκεκριμένου μαθήματος στόχος είναι η εξοικείωση των φοιτητών με την έννοια σε χώρους R^n. Στο μάθημα "Γραμμική Άλγεβρα Ι" ο ορισμός της παραγωγής υποχώρου δίνεται στις πρώτες εβδομάδες του μαθήματος, αυτή τη φορά σε αφηρημένους διανυσματικούς χώρους, με περισσότερες λεπτομέρειες και παραδείγματα, χωρίς όμως να αναφέρεται στις σημειώσεις ο όρος "γραμμική θήκη", (Κουρουνιώτης, 2014; Κουρουνιώτης 2016).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα εργασία εντάσσεται σε μία ευρύτερη μελέτη που βρίσκεται σε εξέλιξη με στόχο τη δημιουργία δραστηριοτήτων που θα μπορούσαν να εμπλουτίσουν τις εικόνες των φοιτητών σχετικά με την έννοια της γραμμικής θήκης. Έναυσμα για την μελέτη της εννοιακής εικόνας του φοιτητή, τον οποίο θα καλούμε με το ψευδώνυμο Βύρωνας, αποτέλεσε η απάντηση που έδωσε σε ένα από τα θέματα της εξέτασης του μαθήματος "Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα".

Η μελέτη της συγκεκριμένης περίπτωσης αναμένεται να δώσει περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την κατανόηση της έννοιας και την επιχειρηματολογία που χρησιμοποιεί ο φοιτητής στην επίλυση σχετικών προβλημάτων. Η απάντηση του Βύρωνα διέφερε αρκετά από τις υπόλοιπες και κρίθηκε πως έπρεπε να εξεταστεί περισσότερο. Αυτό οδήγησε στη δημιουργία των παρακάτω ερωτημάτων τα οποία επιθυμούμε να εξετάσουμε σε αυτή την εργασία:

- Πώς συνδέεται η εννοιακή εικόνα του Βύρωνα για την γραμμική θήκη με την εικόνα του για την έννοια της βάσης;
- Πως διαμορφώνεται η εικόνα του για την έννοια της γραμμικής θήκης μετά την εισαγωγή του αξιωματικού ορισμού του διανυσματικού χώρου;

Η μελέτη έγινε σε δύο φάσεις. Αρχικά, έγινε ανάλυση της γραπτής απάντησης που έδωσε στις εξετάσεις του εισαγωγικού μαθήματος. Η δεύτερη φάση της έρευνας ήταν μια ημιδομημένη συνέντευξη που πραγματοποιήθηκε ένα μήνα αφότου είχε ξεκινήσει το μάθημα "Γραμμική Άλγεβρα Ι" και περιλάμβανε ερωτήσεις που εξέταζαν την εννοιολογική κατανόηση και τη μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων.

Η συλλογή των δεδομένων έγινε τηρώντας τον κώδικα δεοντολογίας της έρευνας του Πανεπιστημίου Κρήτης. Η συμμετοχή στην έρευνα ήταν εθελοντική και ο φοιτητής έδωσε γραπτή συναίνεση για την συμμετοχή του.

ΑΝΑΛΥΣΗ

Αρχικά, παρουσιάζουμε τα δεδομένα που συλλέχτηκαν από τη γραπτή απάντηση του Βύρωνα. Η ερώτηση που τέθηκε στους φοιτητές που εξετάζονταν στο μάθημα ήταν η εξής:

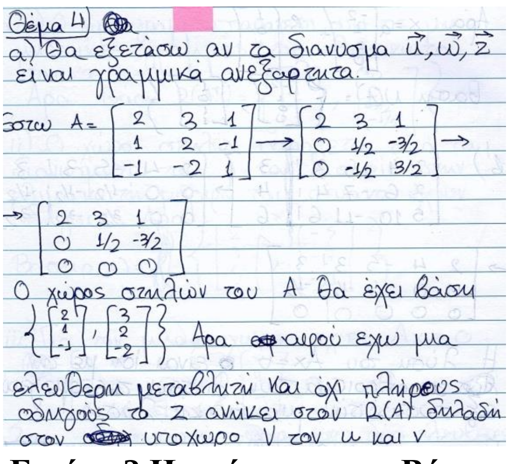
> “Εξετάστε αν το διάνυσμα z=(1, –1, 1) ανήκει στο χώρο V που παράγεται από τα διανύσματα u=(2, 1, –1) και w=(3, 2, –2).”

Η παραπάνω ερώτηση εξετάζει την ικανότητα των φοιτητών να ελέγχουν πότε ένα διάνυσμα ανήκει στον χώρο που παράγεται από κάποια διανύσματα και έχει διαδικαστικό χαρακτήρα. Υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι να προσεγγίσει κάποιος το συγκεκριμένο πρόβλημα. Σημειώνουμε ακόμα ότι τα διανύσματα u και w τυχαίνει να είναι γραμμικά ανεξάρτητα οπότε αποτελούν και μία βάση του υποχώρου V.

Στην απάντηση του Βύρωνα παρατηρείται αρκετά μεγάλη απόκλιση στη συλλογιστική που ακολουθεί σε σχέση με τα υπόλοιπα δεδομένα που συλλέχτηκαν. Ακολουθώντας βήμα-βήμα τη γραπτή απάντηση μπορούμε να παρατηρήσουμε κάποια βασικά σημεία των συλλογισμών του. Ξεκινώντας σημειώνει:

> “Θα εξετάσω αν τα διανύσμα[τα] u, w, z είναι γραμμικά ανεξάρτητα”.

Αυτή η αρχική προσέγγιση συμφωνεί με αυτήν πολλών άλλων απαντήσεων. Επισημαίνουμε πως εάν δειχθεί ότι τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αυτό δίνει αρνητική απάντηση στο ερώτημα. Δεν



Θέμα 4)

α) Θα εξετάσω αν τα διανυσμα $\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ο χώρος στηλών του A θα έχει βάση $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ Άρα αφού έχω μια ελεύθερη μεταβλητή και όχι πλήρους οδηγούς το z ανήκει στον R(A) δηλαδή στον υπόχωρο V του u και v

Εικόνα 2 Η απάντηση του Βύρωνα

ισχύει όμως το αντίστροφο: εάν τα 3 διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα το z μπορεί και να μην ανήκει στον υπόχωρο που παράγεται από τα u και w. Για να απαντηθεί το ερώτημα θα πρέπει να δειχθεί ότι το z μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των u και w.

Στη συνέχεια ο Βύρωνας δημιουργεί έναν πίνακα A με στήλες τα διανύσματα u, w και z, και εκτελεί απαλοιφή Gauss. Η μεθοδολογία που ακολουθεί έως αυτό το σημείο θεωρείται αναμενόμενη. Μετά την απαλοιφή Gauss προκύπτει μία μηδενική γραμμή στον πίνακα. Σε αυτό το σημείο ο Βύρωνας φαίνεται να εγκαταλείπει τον αρχικό του στόχο "θα εξετάσω εάν τα διανύσματα u, w, z είναι γραμμικά ανεξάρτητα", (που όπως επισημάναμε δεν θα οδηγούσε σε απάντηση του ερωτήματος) και επικεντρώνεται στο χώρο στηλών R(A) του πίνακα A τον οποίο ταυτίζει με τον χώρο V.

Ο Βύρωνας παρατηρεί ότι τα διανύσματα u και w (το οποίο αναφέρει ως v πιθανόν λόγω απροσεξίας) αποτελούν βάση του χώρου στηλών, και άρα το z που ανήκει στο χώρο στηλών από την κατασκευή του πίνακα, ανήκει στον υπόχωρο V.

Η εύρεση βάσης για το χώρο στηλών ενός πίνακα είναι μία διαδικασία στην οποία οι φοιτητές έχουν εξοικειωθεί μέσα από τα εργαστήρια προβλημάτων του μαθήματος. Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι η χρήση αυτής της διαδικασίας στα πλαίσια ενός πιο γενικού προβλήματος όπως το παραπάνω. Αυτή η προσέγγιση διαφέρει από την προσέγγιση των περισσοτέρων φοιτητριών ή φοιτητών που απάντησαν με επάρκεια το ερώτημα, οι οποίοι υπολόγισαν τους συντελεστές του συγκεκριμένου γραμμικού συνδυασμού.

Μέσα από την απάντηση του Βύρωνα παρατηρούμε ότι ο φοιτητής φαίνεται αρκετά εξοικειωμένος τόσο με τη διαδικασία όσο και με την έννοια του χώρου στηλών και της βάσης. Η έννοια της βάσης περιέχει στον ορισμό της την έννοια της γραμμικής θήκης από την άποψη ότι τα διανύσματα μίας βάσης παράγουν το ζητούμενο υπόχωρο. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι ο φοιτητής αντιλαμβάνεται την έννοια της παραγωγής μέσα στο πλαίσιο της έννοιας της βάσης. Αυτό που δεν μπορεί να γίνει άμεσα αντιληπτό είναι η κατανόηση του για την έννοια της παραγωγής υπόχωρου ως ξεχωριστό αντικείμενο.

Με στόχο να μελετήσουμε περισσότερο την εικόνα του Βύρωνα για τη γραμμική θήκη πραγματοποιήθηκε μία συνέντευξη, ένα μήνα αφότου ξεκίνησε η διδασκαλία του μαθήματος "Γραμμική Άλγεβρα Ι". Παρακάτω παρουσιάζουμε τα βασικότερα σημεία της συνέντευξης.

Μέσα από την συζήτηση ο φοιτητής δίνει δύο διαφορετικές ερμηνείες για την έννοια. Η πρώτη μπορεί χαρακτηριστεί ως μέρος της εννοιακής εικόνας του ορισμού.

Ερευνήτρια: Τι σημαίνει ότι τα w1, w2, ..., wn παράγουν τον υπόχωρο… V;

Φοιτητής: Ότι ένα διάνυσμα που ανήκει σε αυτό το μεγάλο V, μπορεί να γραφτεί a1w1 και μπλα μπλα μπλα anwn (γράφει v∊V, v=a1w1+ … +anwn) αυτό μου έρχεται εμένα στο μυαλό.

Το κυρίαρχο στοιχείο σε αυτή την εικόνα είναι ότι κάθε διάνυσμα του V μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των στοιχείων. Παρατηρούμε ακόμα ότι αναφέρεται στην έκφραση ενός διανύσματος ως γραμμικό συνδυασμό κάποιων άλλων και όχι στην έννοια ονομαστικά.

Σε επόμενο χρόνο, δόθηκε στον φοιτητή ένα απόσπασμα από τις σημειώσεις του μαθήματος “Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα” και του ζητήθηκε να αναφέρει ποια στοιχεία θεωρεί πιο σημαντικά ή χρησιμοποιεί πιο άμεσα. Ο Βύρωνας σημειώνει και πάλι το κομμάτι του ορισμού που αναφέρεται στην παραπάνω ιδιότητα, πράγμα που ενισχύει την άποψη ότι όσα ανέφερε αποτελούν εικόνα μέρος της προσωπικής του εικόνας για τον ορισμό.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η δεύτερη, διαισθητική, ερμηνεία που δίνει στην έννοια της γραμμικής θήκης.

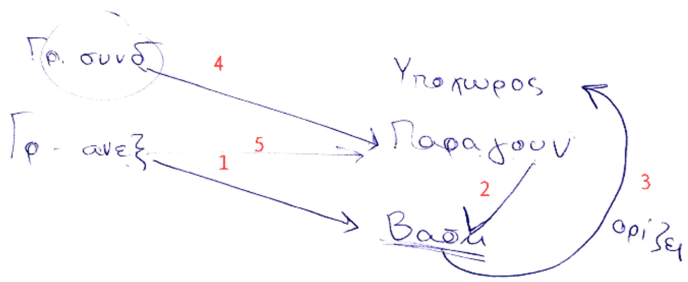
Φοιτητής: […] Στο παράγουν… εμ… είναι σαν να έχεις, πως το λένε, εμ, σαν να έχεις εργαλεία. Και παίρνεις τα εργαλεία και φτιάχνεις, έχεις ένα εργαλείο, ξέρω γω, που είναι ένα διάνυσμα παίρνεις κι άλλο ένα εργαλείο και αν τα βάλεις στη σωστή σειρά, ξέρω γω, θα σου φτιάξει ένα … σπίτι, θα φτιάξει κάτι μεγαλύτερο. Εε, έτσι το σκέφτομαι εγώ το παράγουν. […]

Η εικόνα αυτή του φοιτητή φαίνεται να περιέχει περισσότερα στοιχεία για την έννοια. Ο Βύρωνας παρομοιάζει τα διανύσματα της γραμμικής θήκης με εργαλεία τα οποία συνδυάζονται για να φτιάξουν “κάτι μεγαλύτερο”, “ένα σπίτι”, τον υπόχωρο. Φαίνεται ακόμα να κατανοεί τα στοιχεία του υπόχωρου ως τους “συνδυασμούς” αυτών των “εργαλείων”.

Εξετάζοντας πιο προσεκτικά και τις δύο παραπάνω εικόνες, παρατηρείται ότι κομμάτι της εικόνας του φοιτητή για την έννοια αποτελεί ότι κάθε διάνυσμα γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των w_1, w_2, … , w_n δεν φαίνεται όμως τόσο καθαρά και το ότι ο υπόχωρος είναι ακριβώς όλα τα διανύσματα που είναι γραμμικοί συνδυασμοί των παραπάνω. Ανάλογη παρατήρηση κάνουν οι Stewart και Thomas (2009).

Με στόχο την πληρέστερη κατανόηση των εικόνων του φοιτητή για την έννοια της γραμμικής θήκης ζητήθηκε από το Βύρωνα να φτιάξει ένα σχεδιάγραμμα που να περιγράφει πώς συνδέονται οι έννοιες γραμμικός συνδυασμός, γραμμική ανεξαρτησία, διανυσματικός υπόχωρος, γραμμική θήκη και βάση.

Φοιτητής: […] Η βάση… χρειάζεται γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Πάντα! *(βέλος 1)* Ας ξεκινήσουμε από εκεί. Και τι χρειάζεται; Εε… να παράγουν αυτά τα διανύσματα να δίνουν ένα… Η βάση θέλει και αυτό *(βέλος 2)*. Εε… η βάση ορίζει έναν υπόχωρο. Πάντα. Δηλαδή ορίζει (*γράφει "ορίζει", βέλος 3)*. Ο γραμμικός συνδυασμός ουσιαστικά είναι το "παράγουν" *(βέλος 4)*. Αλλά ο γραμμικός συνδυασμός, δηλαδή αφού είναι το παράγουν… δηλαδή… μπορείς πάντα να ξεκινάς από εδώ, να βρεις ότι κάτι παράγει, και επειδή… και αυτό εδώ το βελάκι *(βέλος 5)*. Τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα μπορούν να παράγουν κάτι, που αυτό το κάτι είναι μια βάση.



Εικόνα 2 Σχεδιάγραμμα Βύρωνα

Παρατηρώντας τον συλλογισμό του Βύρωνα, είναι φανερό ότι η κεντρική έννοια είναι η έννοια της βάσης. Η έννοια της παραγωγής δρα ως βοηθητική για τον ορισμό μιας βάσης. Δεν υπάρχει βέλος που να συνδέει τη λέξη "παράγουν" με τη λέξη "υπόχωρος" στο σχήμα, οι δύο έννοιες συνδέονται έμμεσα μέσω της βάσης. Σε αντιδιαστολή με τη μελέτη των Stewart και Thomas (2009) σε φοιτητές που διδάχτηκαν την έννοια με έμφαση στον ορισμό και τους πίνακες, ο Βύρωνας δεν φαίνεται να αντιμετωπίζει ιδιαίτερο πρόβλημα στη σύνδεση της έννοιας με αυτήν της βάσης.

Η σχέση αυτή ανάμεσα στην έννοια της γραμμικής θήκης και της βάσης παρατηρείται επίσης όταν ο φοιτητής σημειώνει τα κεντρικά στοιχεία της παραγωγής υποχώρου στο απόσπασμα των σημειώσεων. Καθώς διαβάζει τις σημειώσεις, ο Βύρωνας υπογραμμίζει την εισαγωγική πρόταση:

> "Ο χώρος στηλών ενός πίνακα είναι ο υπόχωρος του R^m που αποτελείται από τα διανύσματα που γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του πίνακα. Λέμε ότι οι στήλες του πίνακα παράγουν το χώρο στηλών."

Το απόσπασμα συνδέεται άμεσα με τη συλλογιστική που ακολούθησε στην επίλυση του ερωτήματος στο διαγώνισμα. Για τα παραπάνω αναφέρει:

Φοιτητής: Το πρώτο… είναι το ρεζουμέ… είναι το πολύ πρακτικό κομμάτι […] Εε, εντάξει αυτό όπως το λέει, εγώ το χρησιμοποιώ κυρίως για να βρω μια βάση. Το λέγαμε γενικά στο προηγούμενο μάθημα. Όταν θα θέλω να το πάρω σε πιο γενικά… θα το πάω έτσι. Πια! (δείχνει το απόσπασμα του ορισμού)

Από το συγκεκριμένο απόσπασμα ο Βύρωνας φαίνεται να αναγνωρίζει πως η έννοια της γραμμικής θήκης είναι πιο γενική από αυτή της βάσης, κάτι που δεν ήταν ξεκάθαρο από όσα είχαν ειπωθεί προηγουμένως. Ο Βύρωνας δίνει αρκετή έμφαση στο ότι πλέον επιλέγει να χρησιμοποιεί τη συνθήκη του γραμμικού συνδυασμού στην επίλυση προβλημάτων. Πράγμα που σημαίνει ότι έχει αρχίσει να αντιλαμβάνεται πλέον την έννοια ως ξεχωριστό αντικείμενο και όχι απλά σαν εργαλείο. Αυτό επαληθεύεται και από τον τρόπο προσέγγισης των προβλημάτων που του δόθηκαν. Λόγω περιορισμένου χώρου δεν θα γίνει ανάλυση των απαντήσεων που έδωσε, παρ' όλο που παρουσιάζουν κάποιο ενδιαφέρον.

Τέλος, ο Βύρωνας δίνει μια εξήγηση για το λόγο που επιλέγει πλέον την παραπάνω προσέγγιση:

Φοιτητής: […] Όταν μαθαίνεις να σκέφτεσαι λίγο πιο γενικά, δεν είναι όλα σαν τον Rn, δεν μεταφράζονται όλα σε πίνακα. […] δεν είναι αναγκαστικό, ας πούμε τις πραγματικές συναρτήσεις να τις βάλεις σε έναν πίνακα, οπότε πρέπει να δουλέψεις πιο πολύ με αυτό το κομμάτι για να αποδείξεις αυτό που θέλεις. Αυτός είναι ο λόγος, ο κύριος που… γιατί δεν τα μεταφράζεις όλα σε πίνακα πια. […]

Η πεποίθηση ότι δεν μεταφράζονται όλα σε πίνακα χαρακτηρίζει την εξέλιξη την εννοιακής του εικόνας για τη γραμμική θήκη ως εκείνη την στιγμή. Επισημαίνεται ότι στην περίπτωση των διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης είναι δυνατό, και αρκετές φορές χρήσιμο, να "μεταφραστεί" το ζητούμενο σε πίνακα, με την επιλογή μίας βάσης. Οι Warwo et al. (2011) κάνουν λόγο για γνωστικές συγκρούσεις που μπορεί να προκύψουν στην κατανόηση της έννοιας του υποχώρου και οι οποίες μπορούν να συνδεθούν με τη "μετάφραση" μέσω ισομορφισμών των αφηρημένων διανυσμάτων σε διανύσματα του $\mathbb{R}$n. Στην πορεία του μαθήματος οι φοιτητές έρχονται σε επαφή με αυτή την ιδέα, για πρακτικούς λόγους χωρίς όμως ιδιαίτερη εμβάθυνση.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τις απαντήσεις του φοιτητή παρατηρούμε δύο εικόνες για την έννοια της γραμμικής θήκης ενός συνόλου διανυσμάτων. Η πρώτη, που εστιάζει στην ιδιότητα ότι κάθε διάνυσμα του υποχώρου μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του συνόλου, μπορεί να χαρακτηριστεί ως εννοιακή εικόνα του ορισμού. Ο Βύρωνας ανακαλεί την παραπάνω ιδιότητα για να περιγράψει τι σημαίνει η έννοια "παράγουν" και την αναγνωρίζει ως βασικό στοιχείο του ορισμού. Η δεύτερη εικόνα, που αντιλαμβάνεται τα διανύσματα του συνόλου ως εργαλεία, αντικατοπτρίζει τον τρόπο με τον οποίο "αποκωδικοποιεί" την έννοια. Η εικόνα αυτή περιλαμβάνει πολλά στοιχεία του ορισμού εκφρασμένα με απλό τρόπο. Η αντίληψη των διανυσμάτων ως εργαλεία πιθανόν πηγάζει από τη σχέση έννοιας με την έννοια της βάσης και εξηγεί σε ένα βαθμό τον τρόπο που συνδέει ο φοιτητής τις παραπάνω έννοιες και την έννοια του υποχώρου.

Οι απαντήσεις του Βύρωνα στη συνέντευξη βοηθούν στην ανάλυση της απάντησης που έδωσε στην τελική εξέταση του μαθήματος. Η σύνδεση των εικόνων της γραμμική θήκης και της έννοιας της βάσης του επέτρεψαν να εκμεταλλευτεί το γεγονός ότι τα διανύσματα που παράγουν τον ζητούμενο υπόχωρο είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Είναι πιθανόν να μην επέλεγε την ίδια μεθοδολογία αν τα διανύσματα ήταν γραμμικά εξαρτημένα καθώς ο ίδιος επισημαίνει ότι τη συγκεκριμένη μεθοδολογία τη χρησιμοποιεί για εύρεση βάσης.

Όπως φάνηκε από τη συνέντευξη, μετά από μόλις ένα μήνα διαλέξεων του μαθήματος "Γραμμική Άλγεβρα Ι", ο φοιτητής επιλέγει πλέον να προσεγγίζει παρόμοια προβλήματα χρησιμοποιώντας την εικόνα του ορισμού καθώς τη θεωρεί πιο κατάλληλη να εφαρμοστεί όταν η μετατροπή των δεδομένων του προβλήματος σε πίνακα δεν είναι άμεση. Ακόμα φαίνεται πως αρχίζει να βλέπει την έννοια της γραμμικής θήκης περισσότερο ως αντικείμενο.

Από την ανάλυση των απαντήσεων ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι ο φοιτητής δεν παρουσιάζει ξεκάθαρα ως μέρος της εικόνας του την ιδιότητα ότι ο διανυσματικός υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα $w_1,\ldots,w_n$ είναι όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί τους. Αντίστοιχη παρατήρηση έγινε και από τους Stewart και Thomas (2009). Ακόμα δεν παρατηρήθηκαν γεωμετρικές εικόνες σχετικά με την έννοια. Δεν μπορούμε όμως να συμπεράνουμε με βεβαιότητα ότι τα παραπάνω στοιχεία δεν αποτελούν μέρος της εικόνας του φοιτητή καθώς είναι πιθανό οι ερωτήσεις που του τέθηκαν να μην προσέφεραν την αφορμή ανάδειξης των συγκεκριμένων πτυχών.

Από τις απαντήσεις του Βύρωνα στην συνέντευξη αναδείχτηκε ακόμα η πεποίθηση του ότι δεν "μεταφράζονται" όλα σε πίνακα. Στα πλαίσια αυτής της συνέντευξης δεν εξετάστηκε περισσότερο το συγκεκριμένο στοιχείο. Είναι όμως μια πεποίθηση που φαίνεται να μοιράζονται πολλοί φοιτητές του τμήματος, όπως παρατηρήθηκε μέσα από τα εργαστήρια του μαθήματος “Γραμμική Άλγεβρα Ι” και έχει ενδιαφέρον να μελετηθεί μεθοδευμένα και συστηματικά.

Τα παραπάνω ευρήματα αναδεικνύουν τη συνεισφορά μιας πλούσιας σε συνδέσεις εικόνα μιας έννοιας στην παραγωγή ευρηματικών απαντήσεων από την πλευρά των φοιτητών. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η σύνδεση της έννοιας της παραγωγής υποχώρου με το χώρο στηλών και τη διαδικασία εύρεσης βάσης, επιτρέπει στο φοιτητή να παρακάμψει προσωρινές αδυναμίες και παρανοήσεις που παρατηρήθηκαν και να δώσει σωστή και ολοκληρωμένη απάντηση σε ένα ερώτημα το οποίο αρχικά είχε προσεγγίσει με μια λιγότερο κατάλληλη παρατήρηση.

Σημείωση

1. Το συγκεκριμένο εξάμηνο, η πρώτη συγγραφέας συμμετείχε στην επίβλεψη του εργαστηρίου προβλημάτων, ενώ ο δεύτερος συγγραφέας παρέδιδε τις διαλέξεις στο ένα τμήμα του μαθήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(1), 19-35.

Carlson, D. (1993). Teaching Linear Algebra: Must the Fog Always Roll In? *College Mathematics Journal*, *24*(1), 29-40.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. In J.L. Dorier (ed.) *On the teaching of linear algebra* (pp. 85-124). Springer Netherlands.

Education Committee of the EMS (2014, September). Solid Findings: Concept images in students’ mathematical reasoning. *Newsletter of the EMS*, 93, 50-52.

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. In J.L. Dorier (ed.) *On the teaching of linear algebra* (pp. 177-189). Springer Netherlands.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J.L. Dorier (ed.) *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207). Springer Netherlands.

Stewart, S., & Thomas, M. O. (2009). A framework for mathematical thinking: The case of linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(7), 951-961.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Wawro, M., Sweeney, G. F., & Rabin, J. M. (2011). Subspace in linear algebra: investigating students’ concept images and interactions with the formal definition. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(1), 1-19.

Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., Sweeney, G. F., & Larson, C. (2012). An inquiry-oriented approach to span and linear independence: The case of the magic carpet ride sequence. *PRIMUS*, *22*(8), 577-599.

Κουρουνιώτης, Χ. (2014). *Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα* [πανεπιστημιακές σημειώσεις]. Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ηράκλειο. http://math.uoc.gr/~chrisk/GLA-Notes.pdf

Κουρουνιώτης, Χ. (2016). *Γραμμική Άλγεβρα Ι* [πανεπιστημιακές σημειώσεις]. Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ηράκλειο. http://math.uoc.gr/~chrisk/LinAlg-Notes.pdf