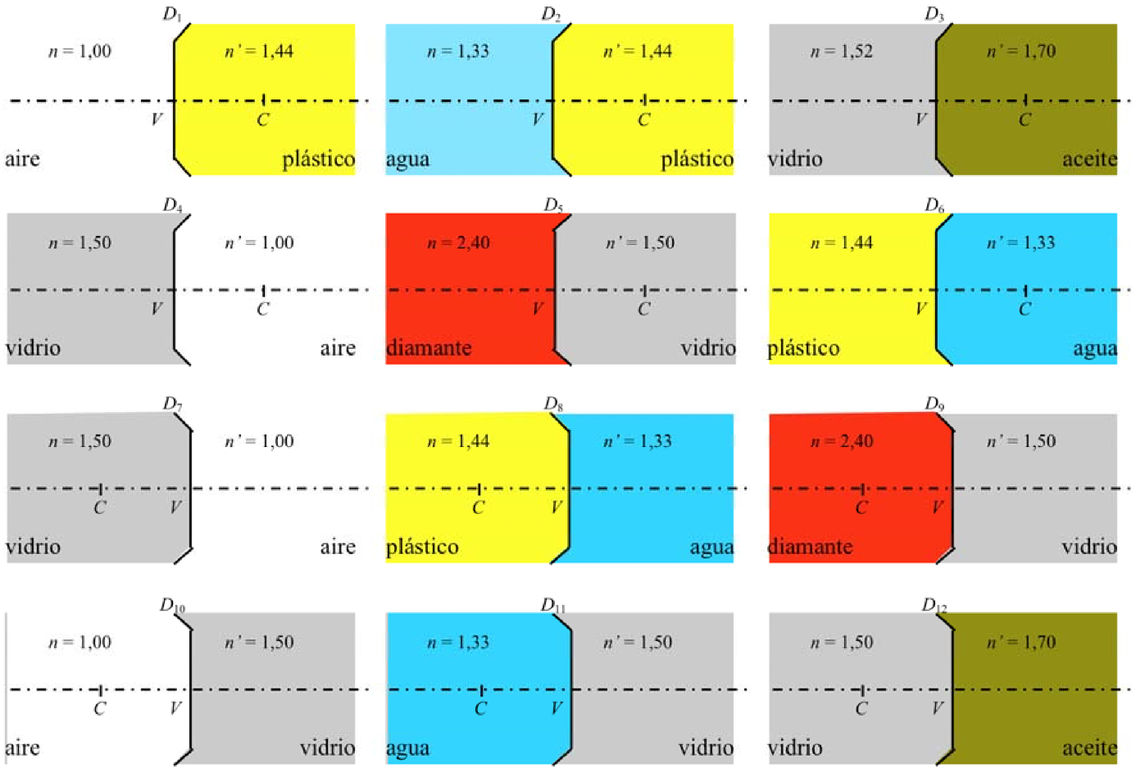
PROBLEMAS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA E INSTRUMENTAL

Unidad 6:
6.1. Dioptrio esférico

Jaume Escofet

UNIDAD 6. PROBLEMAS DE DIOPTRIO ESFÉRICO

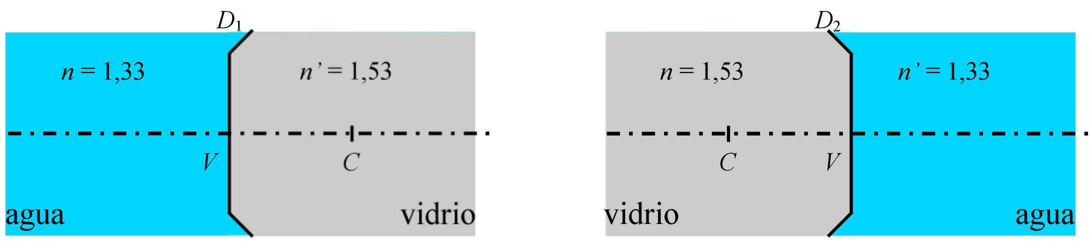
1. Sean los dioptrios de la figura. Teniendo en cuenta que en cada dioptrio el valor absoluto del radio es de $|R|$ = 100 mm. Determina en cada caso:
a) Las potencias objeto e imagen.
b) Las distancias focales objeto e imagen.



R/ D_1: P=–4,4 D , P'= +4,4 D, f = –227,3 mm, f' = +327,3 mm;
D_2: P=–1,1 D , P'=+1,1 D, f = –1209,1 mm, f' = +1309,1 mm;

---

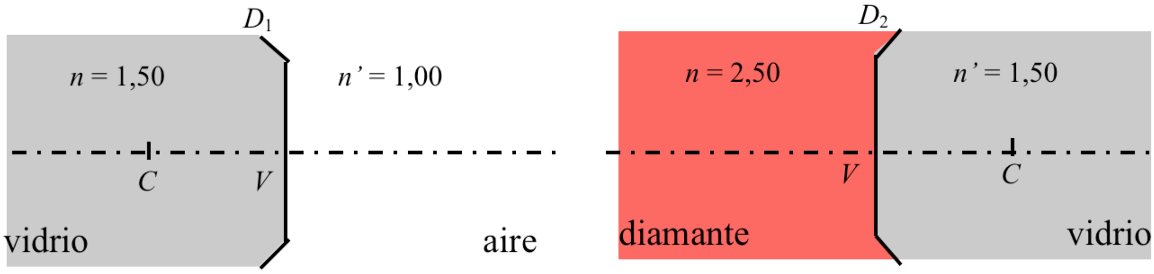
2. Determina las potencias y las focales de los dioptrios D_1 y D_2 que se muestran en la figura teniendo en cuenta que el valor absoluto del radio es $|R|$ = 100 mm.



R/ D_1: $P' = -P$ = +2,0 D, f = –665 mm, f' = 765 mm; D_2: $P' = -P$ = +2,0 D, f = –765 mm, f' = 665 mm.

---

3. Sean los dioptrios de la figura. Teniendo en cuenta que en cada uno de los dioptrios el valor absoluto del radio es de $|R|$ = 100,0 mm. Determina, en cada caso la posición de:
a) Los planos principales (*H* y *H'*; *m* = +1).
b) Los planos antiprincipales (*h*, *h'*; *m* = –1).
c) Los puntos nodales (*N*, *N'*; γ = +1).
d) Los puntos antinodales (*n*, *n'*; γ = –1).

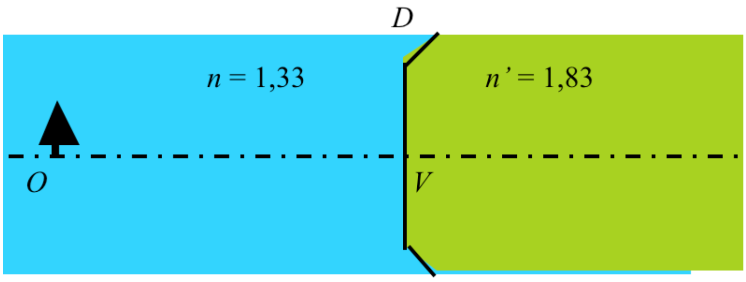


(i) (ii)

R/ a) *VH* = *VH'* = 0; b) *Vh* = 2*f*, *Vh'* = 2*f'*; c) *VN* = *VN'* = *R*; c) *Vn* = *f* – *f'*, *VN'* = *f'* – *f*.
i): a) *VH* = *VH'* = 0; b) *Vh* = –600,0 mm, *Vh'* = 400,0 mm; c) *VN* = *VN'* = –100 mm;
c) *Vn* = –500,0 mm, *VN'* = 500,0 mm.
ii): a) *VH* = *VH'* = 0; b) *Vh* = 500,0 mm, *Vh'* = –300,0 mm; c) *VN* = *VN'* = 100 mm;
c) *Vn* = 400 mm, *VN'* = –400,0 mm.

---

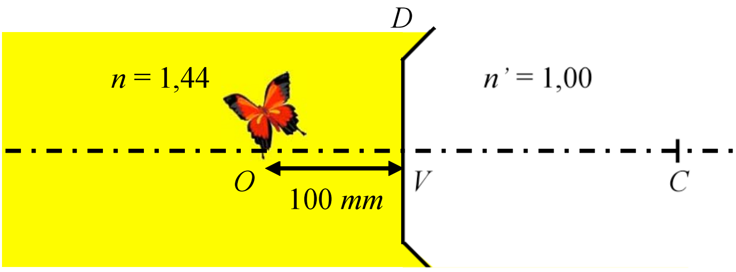
4. Sea el dioptrio de la figura cuya potencia es *P'* = 5,00 D. Determina:
a) Las focales del sistema.
b) El radio de curvatura del dioptrio.
c) La vergencia del objeto y de la imagen.
d) La distancia reducida objeto e imagen.
e) La posición de la imagen.
f) El carácter de la imagen (real/virtual).
g) El aumento de la imagen.
h) La orientación de la imagen (derecha/invertida).
j) Si la imagen será mayor/menor que el objeto.
Considera los dos casos siguientes:
i) Objeto real situado a 532 mm del vértice del dioptrio.
ii) Objeto real situado a 140 mm del vértice del dioptrio.



R/ i) a) *f* = –266 mm, *f* = 366 mm; b) *R* = 100 mm; c) *S* = –2,50 D, *S'* = 2,50 D;
d) $\bar{s} = -400$ mm, $\bar{s}' = 400$ mm; e) *s'* = *VO'* = 732 mm; f) Real; g) *m* = –1;
h) Invertida; i) Igual.
ii) a) *S* = –9,50 D, *S'* = –4,50 D; b) $\bar{s} = -105{,}3$ mm, $\bar{s}' = -222{,}1$ mm;
c) *s'* = *VO'* = –406,7 mm; d) Virtual; e) *m* = +2,11; f) Derecha; f) Mayor.

---

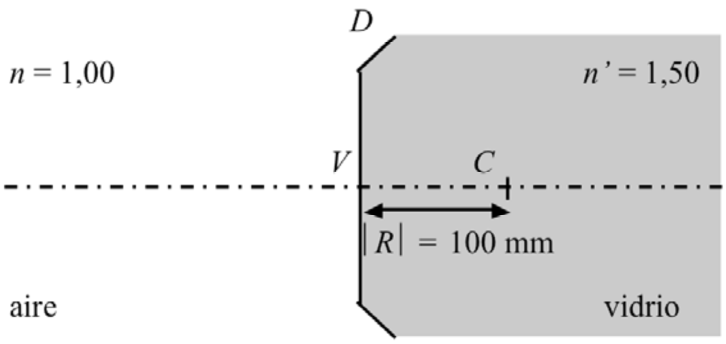
5. Una superficie convexa de 200 mm de radio separa dos medios de índices n = 1,44 (plástico) y n' = 1,00 (aire). Un objeto en forma de mariposa está incrustado en el plástico a 100 mm del vértice del dioptrio. Determina:
a) Las potencias del dioptrio.
b) Las focales del dioptrio.
c) La vergencia del objeto y de la imagen.
d) La posición de la imagen.
e) El carácter de la imagen (real/virtual).
f) El aumento de la imagen.
g) La orientación de la imagen (derecha/invertida).
h) Si la imagen será mayor/menor que el objeto.



R/ a) $P' = -P = -2{,}20$ D; b) $f = 655$ mm, $f' = -455$ mm; c) $S = -14{,}40$ D, $S' = -16{,}60$ D; d) $s' = VO' = -60{,}2$ mm; e) Virtual; f) $m = +0{,}87$; g) Derecha; h) Menor.

---

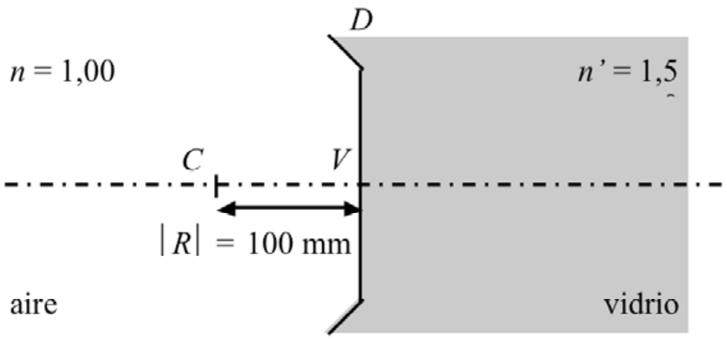
6. Sea el dioptrio de la figura. Un objeto situado en el infinito subtiende un ángulo de 5º desde el dioptrio. Determina:
a) Las potencias del dioptrio.
b) La focales del dioptrio.
c) La posición de la imagen.
d) La vergencia del objeto y de la imagen.
e) El carácter de la imagen (real/virtual).
f) El tamaño de la imagen.
g) La orientación de la imagen (derecha/invertida).



R/ a) $P' = -P = 5$ D; b) $f = -200$ mm, $f' = 300$ mm; c) $s' = VO' = 300$ mm; d) $S = 0$ D, $S' = 5$ D; e) Real; f) $y' = -17{,}5$ mm; g) Invertida.

---

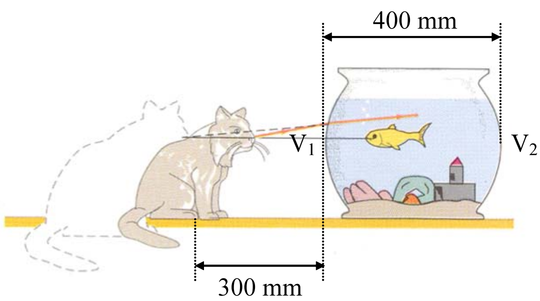
7. Sea el dioptrio de la figura. Un objeto situado en el infinito subtiende un ángulo de 5º desde el dioptrio. Determina:
a) Las potencias del dioptrio.
b) La focales del dioptrio.
c) La posición de la imagen.
d) La vergencia del objeto y de la imagen.
e) El carácter de la imagen (real/virtual).
f) El tamaño de la imagen.
g) La orientación de la imagen (derecha/invertida).



R/ a) $P' = -P = -5$ D; b) $f = 200$ mm, $f' = -300$ mm; c) $s' = VO' = -300$ mm; d) $S = 0$ D, $S' = -5$ D; e) Virtual; f) $y' = 17{,}5$ mm; g) derecha.

---

8. Un pez situado en el centro de una pecera esférica de 400 mm de diámetro observa un gato situado en el exterior. Los índices respectivos del agua y del aire son 4/3 y 1,00 respectivamente. Si la distancia del vértice de la pecera al gato es de 300 mm. Determina:
a) La posición de la imagen del gato respecto del vértice V_1 de la pecera.
b) El aumento de la imagen.

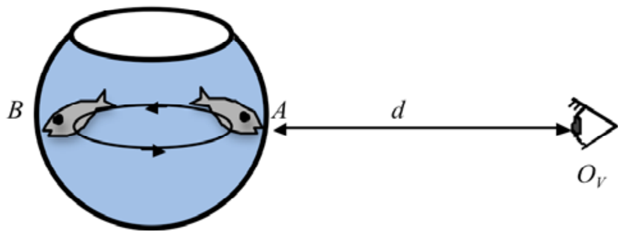


R/ a) $V_1O' = -800$ mm; $m = 2$.

---

9. Un pez neurasténico realiza diariamente cientos de vueltas alrededor de un acuario esférico de radio R. Un observador, O_V, situado en la posición que se indica en la figura constata, muy sorprendido, que el tamaño del pez aumenta cuando se aleja de él. Calcula:
a) El aumento lateral cuando el pez se encuentra en la posición A (en el vértice más próximo al observador)
b) El aumento lateral cuando el pez se encuentra en la posición B (en el vértice más alejado del observador).

c) La distancia d entre el observador y la pecera para que se cumpla la condición anterior.
Tómese $n_{agua} = 4/3$.



R/ a) $m = 1$; b) $m = 2$; c) $d \geq 3|R|$.

---

10. Sea una superficie esférica que separa dos medios de índices diferentes. Se sabe que:

- El índice posterior es $n' = 1{,}00$.
- Un objeto situado en el infinito, que subtiende un ángulo θ tal que $\tan\theta = \dfrac{1}{20}$, forma una imagen invertida de 4 mm de altura.
- La distancia entre focos es $FF' = 130$ mm.

Determina:
a) Si el dioptrio es cóncavo o convexo.
b) Las focales del dioptrio.
c) El radio de curvatura del dioptrio.
d) Las potencias del dioptrio.
e) El valor del índice n del medio anterior.
f) La posición de la imagen.
g) El carácter real o virtual de la imagen.

R/ a) Cóncavo; b) $f = -80$ mm, $f' = 50$ mm; c) $R = -30$mm; d) $P = -P = 20$ D;
e) $n = 1{,}5$; f) $VO' = 50$ mm; g) Real.

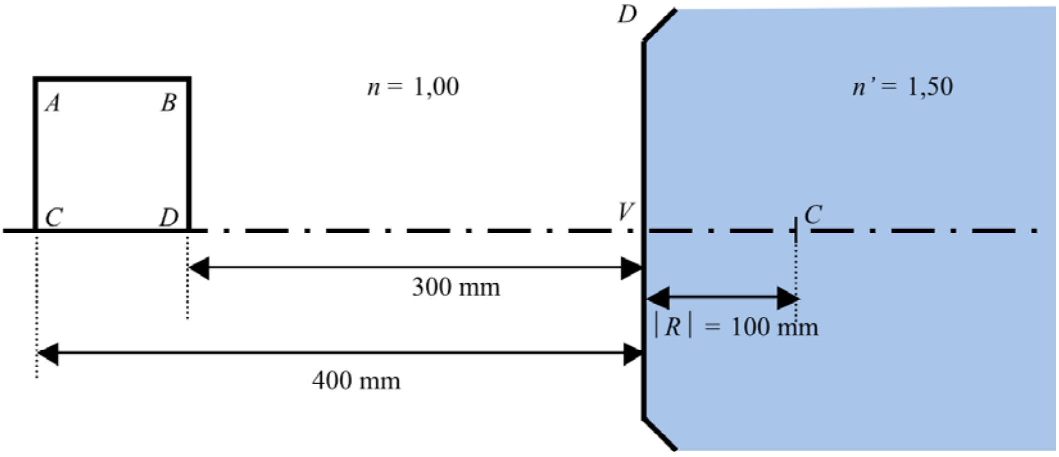
---

11. Un objeto real, O, de tamaño $y = 10$ mm, situado perpendicularmente al eje óptico de un dioptrio esférico forma una imagen real, O', de tamaño $y' = -20$ mm.
a) Sabiendo que la distancia $OO' = 60$ mm. Determina gráficamente, en un esquema a escala 1:1, el centro C del dioptrio.
Si se desplaza el objeto 10 mm hacia la izquierda la imagen se desplaza también 10 mm en el mismo sentido.
b) Determina, en este caso, el nuevo tamaño de la imagen.
c) Construye el dioptrio indicando su vértice V, su foco objeto F y su foco imagen F'.
d) Determina el radio R del dioptrio.
e) Determina el cociente n'/n.

R/ c) $CV = 10$ mm, $VF = -20$ mm, $VF' = 1$ cm; d) $R = -10$ mm; e) $n'/n = 1/2$.

---

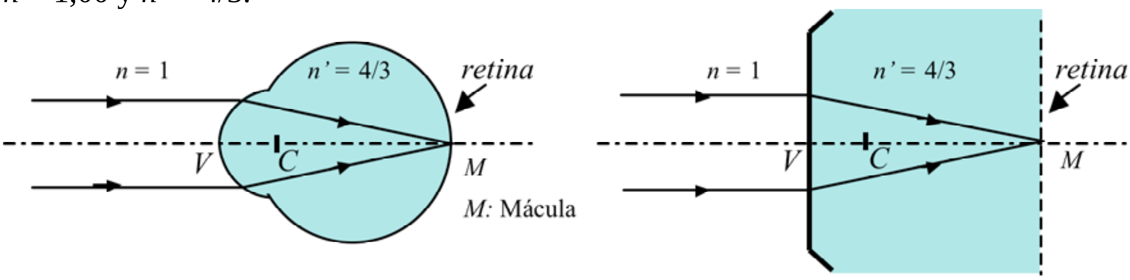
12. Sea un dioptrio esférico, convexo, de radio $|R|$=100 mm e índices n = 1,00 y n' = 1,50. Un objeto de forma cuadrada *ABCD*, de 100 mm de lado, se situa delante del dioptrio según se muestra en la figura.
Determina:
a) La posición de los 4 puntos *A'B'C'D'*.
b) Dibuja la forma de la imagen.



R/ a) $s'_{C'}$ = 600 mm, $s'_{D'}$ = 900 mm, *C'A'* = –100 mm, *D'B'* = –200 mm.

---

13. Desde mediados de siglo XIX, con el afán de simplificar los estudios de los fenómenos ópticos que ocurren en el ojo, se establecieron patrones teóricos y matemáticos del mismo. El patrón más sencillo es el del **ojo reducido** en el que el ojo **emétrope**, u ojo que enfoca un objeto situado en el infinito, se modeliza como un dioptrio esférico convexo de 60,00 D de potencia que separa dos medios de índices n = 1,00 y n' = 4/3.



Determina para este modelo de ojo:
a) Las focales.
b) La dimensión axial, *VM*.
b) El radio de curvatura.

R/ a) $VF = f$ = –16,67 mm, $VF' = f'$ = 22,22 mm; b) $VM = f'$ = 22,22 mm; c) R = 5,55 mm.

---

14. Un observador emétrope está mirando un objeto situado en el infinito, que subtiende un ángulo de 0,5º. Teniendo en cuenta el modelo de ojo reducido determina:
a) La posición de la imagen.
b) El carácter de la imagen.
c) El tamaño de la imagen.
d) La orientación de la imagen.

R/ a) $s' = VO' = 22{,}22$ mm; b) Real; c) $y' = 0{,}145$ mm; d) Invertida.

---

15. En el proceso de visión el ojo enfoca sobre la retina los objetos situados a diferentes distancias de él. El proceso de enfoque se denomina acomodación y en el caso del ojo reducido consiste en variar la potencia del dioptrio de forma que la imagen se sitúe en la retina. Determina:
a) La potencia.
b) Las focales.
c) El radio de curvatura.
d) El tamaño de la imagen retiniana.
Cuando un ojo emétrope mira un objeto de 100 mm de altura situado a:
i) 10,00 m.
ii) 1,00 m.
iii) 0,50 m.

R/ i) a) $P' = 60{,}1$ D, $f = -16{,}64$ mm, $f' = 22{,}18$ mm, $R = 5{,}54$ mm, $y' = -0{,}167$ mm;
ii) b) $P' = 61{,}0$ D, $f = -16{,}39$ mm, $f' = 21{,}85$ mm, $R = 5{,}46$ mm, $y' = -1{,}67$ mm;
ii) b) $P' = 62{,}0$ D, $f = -16{,}13$ mm, $f' = 21{,}50$ mm, $R = 5{,}37$ mm, $y' = -3{,}33$ mm;

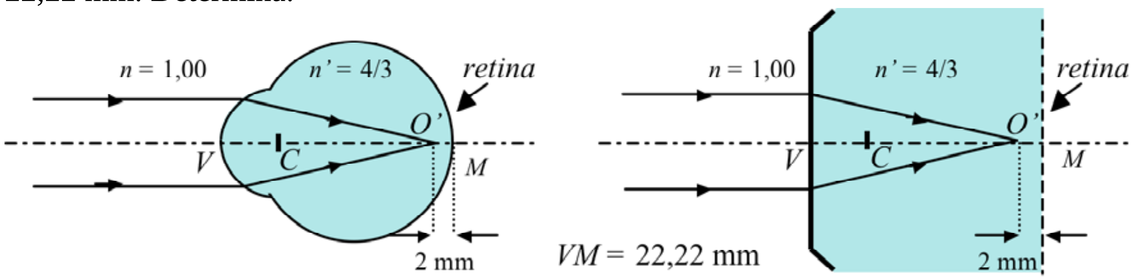
---

16. El punto más cercano que el ojo puede enfocar se llama punto próximo (*PP*) y el punto más alejado que el ojo puede enfocar se llama punto remoto (*PR*). En el caso del ojo emétrope el *PR* está situado en el infinito mientras que la posición del *PP* varía con la edad. La vergencia del punto próximo, S_{PP}, expresada en dioptrías, y la edad E, expresada en años, están relacionadas de forma aproximada mediante la fórmula de Hofstetter: $S_{PP} = -\left(18{,}5 - \frac{E}{3}\right)$. Determina:
a) La vergencia del punto próximo.
b) La posición del punto próximo.
c) La potencia del ojo reducido cuando enfoca al punto próximo.
En el caso de un observador emétrope cuya edad es:
i) 18 años.
ii) 48 años.

R/ i) a) $S_{PP} = -12{,}5$ D; b) $s_{PP} = -80$ mm; c) $P' = 72{,}5$ D.
ii) a) $S_{PP} = -2{,}5$ D; b) $s_{PP} = -400$ mm; c) $P' = 62{,}5$ D.

---

17. El ojo miope se caracteriza por formar delante de la retina la imagen de un objeto situado en el infinito. Sea un ojo miope donde la distancia entre el punto imagen y la retina es de 2 mm. Teniendo en cuenta los índices del ojo reducido y tomando *VM* = 22,22 mm. Determina:

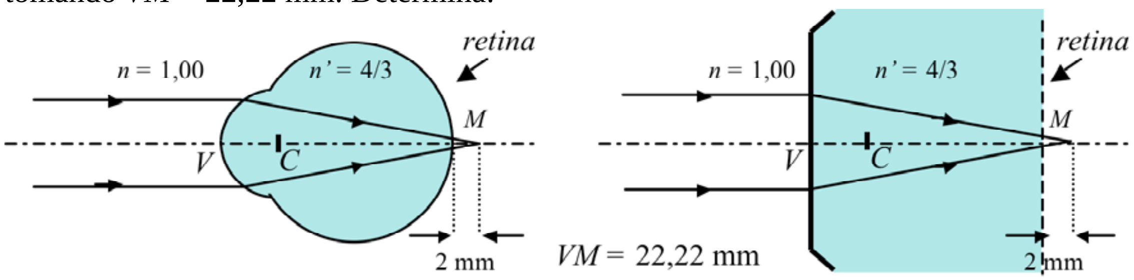


a) La potencia del ojo miope.
b) Las focales del ojo miope.
c) El radio de curvatura del ojo miope.
d) La posición dónde debe situarse el objeto (*PR*) de manera que la imagen que forme el ojo miope esté situada en la retina.

R/ a) $P' = -P = 65{,}94$ D; b) $f = -15{,}16$ mm, $f' = 20{,}22$ mm; c) $R = 5{,}06$ mm;
d) $s = -168$ mm.

---

18. El ojo hipermétrope se caracteriza por formar detrás de la retina la imagen de un objeto situado en el infinito. Sea un ojo hipermétrope donde la distancia entre el punto imagen y la retina sea de 2 mm. Teniendo en cuenta los índices del ojo reducido y tomando *VM* = 22,22 mm. Determina:



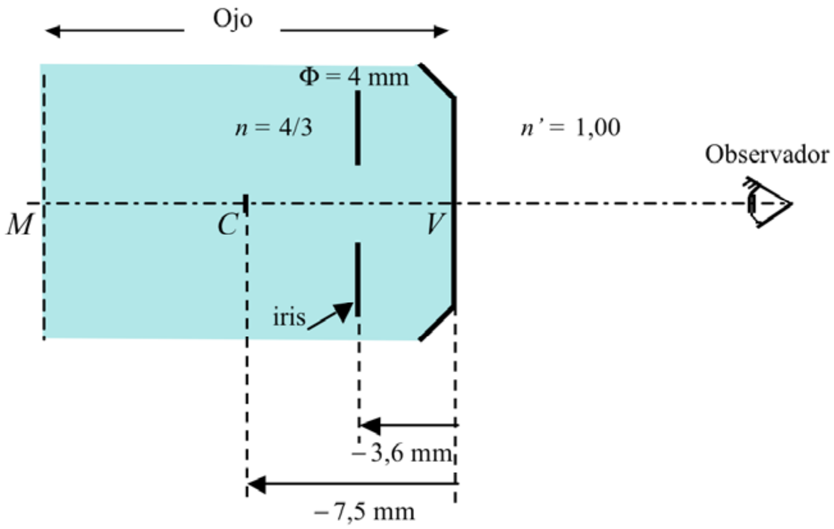
a) La potencia del ojo hipermétrope.
b) Las focales del ojo hipermétrope.
c) El radio de curvatura del ojo hipermétrope.
d) La posición dónde debe situarse el objeto (*PR*) de manera que la imagen que forme el ojo hipermétrope esté situada en la retina.

R/ a) $P = -P' = 55{,}05$ D; b) $f' = 24{,}22$ mm, $f = -18{,}17$ mm; c) $R = 6{,}05$ mm;
d) $s = VO = 202$ mm

---

19. Al mirar el iris de cualquier ojo, lo que se ve no es el iris como tal sino la imagen que la córnea forma de dicho iris. Sabiendo que la distancia entre la córnea y el iris es de 3,6 mm, que el diámetro de la pupila es de $\Phi = 4$ mm y teniendo en cuenta el modelo de ojo reducido. Determina:

a) La posición de la imagen del iris a través de la córnea.
b) El aumento lateral de la imagen.
c) El tamaño de la imagen de la pupila.



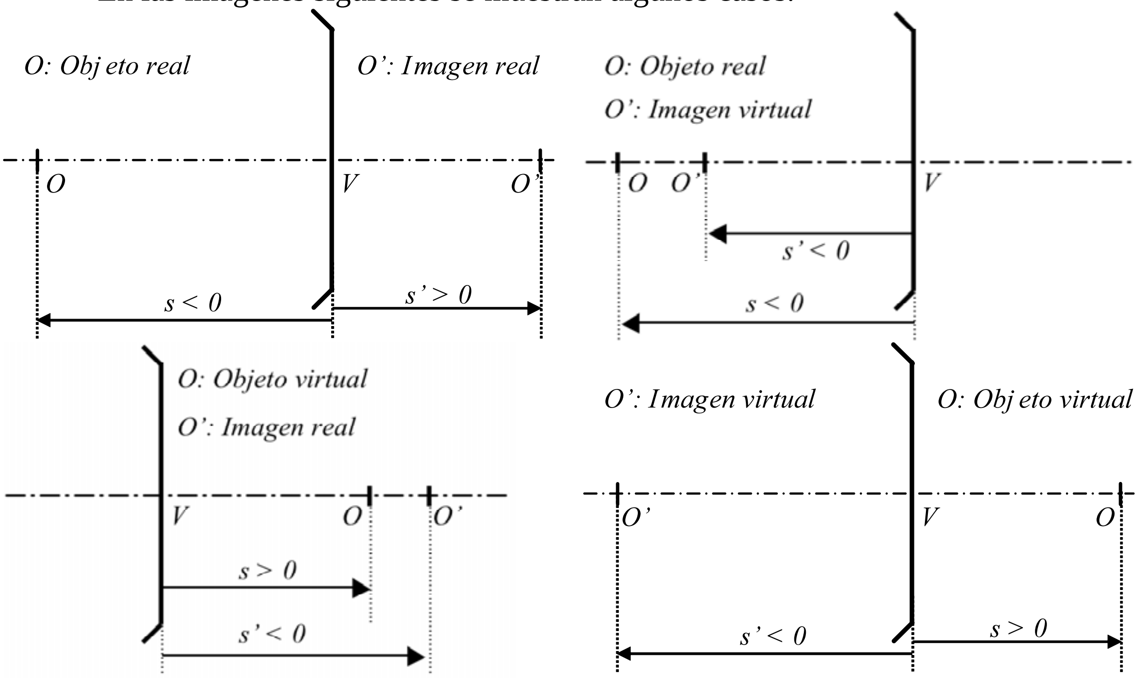
R/ a) *VO'* = –3,2 mm; b) *m* = 1,2; c) Φ' = 4,8 mm.

Comentarios generales a los problemas del dioptrio esférico

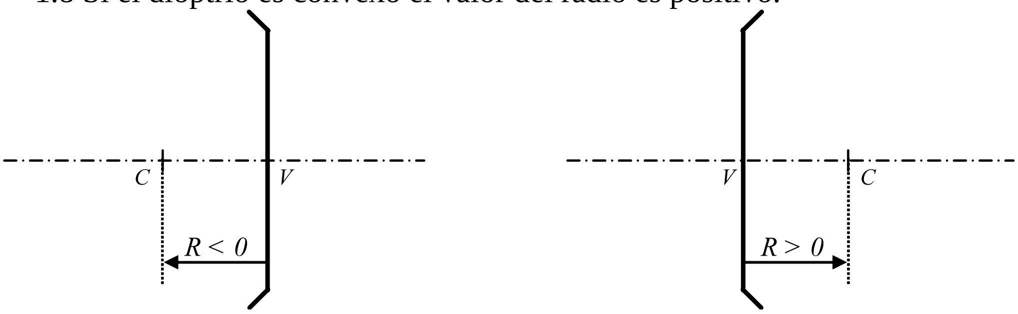
Antes de afrontar cualquier problema numérico debe tenerse en cuenta lo siguiente:

1. Las fórmulas obtenidas obedecen a un determinado criterio de signos. Debe utilizarse este criterio de signos. En caso contrario el resultado obtenido será erróneo.

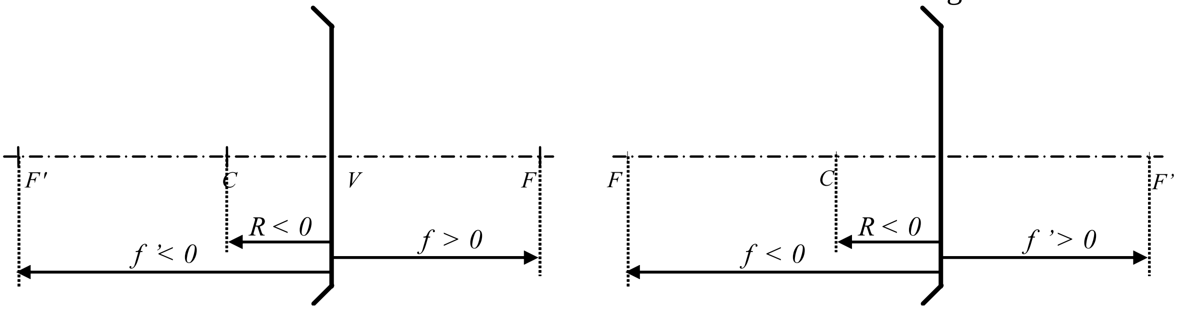
1.1 La luz viaja de de izquierda a derecha
1.2 Un valor negativo en la posición significa que está a la izquierda del dioptrio mientras que un valor positivo significa que se encuentra a la derecha.
1.3 Cuando se diga **objeto real** se entiende que el objeto está situado a la izquierda del dioptrio y por tanto su distancia es negativa.
1.4 Cuando se diga **objeto virtual** se entiende que el objeto está situado a la derecha del dioptrio y por tanto su distancia es positiva.
1.5 Cuando se diga **imagen real** se entiende que la imagen está situada a la derecha del dioptrio y por tanto su distancia es positiva.
1.6 Cuando se diga **imagen virtual** se entiende que la imagen está situada a la izquierda del dioptrio y por tanto su distancia es negativa.
En las imágenes siguientes se muestran algunos casos.



1.7 Si el dioptrio es cóncavo significa que el valor del radio es negativo.
1.8 Si el dioptrio es convexo el valor del radio es positivo.



1.9 Los focos deben situarse adecuadamente de acuerdo con sus signos.



Comentarios a los problemas del dioptrio esférico de la unidad 6

1. De solución inmediata aplicando directamente las fórmulas de las potencias y las focales en un dioptrio esférico. Téngase en cuenta el signo correcto de *R* en cada caso.

2. Igual que el ejercicio anterior.

3. Las posiciones de los planos principales *H* y *H'*, así como la de los antiprincipales *h* y *h'*, se encuentran teniendo en cuenta la relación de aumento lateral y la ecuación que relaciona *s* y *s'* (Invariante de Abbe, ecuación de Descartes, etc…).
Las posiciones de los puntos nodales *N* y *N'* y los puntos antinodales *n* y *n'* se encuentran teniendo en cuenta la fórmula del aumento angular y la ecuación que relaciona *s* y *s'* (Invariante de Abbe, ecuación de Descartes, etc…).

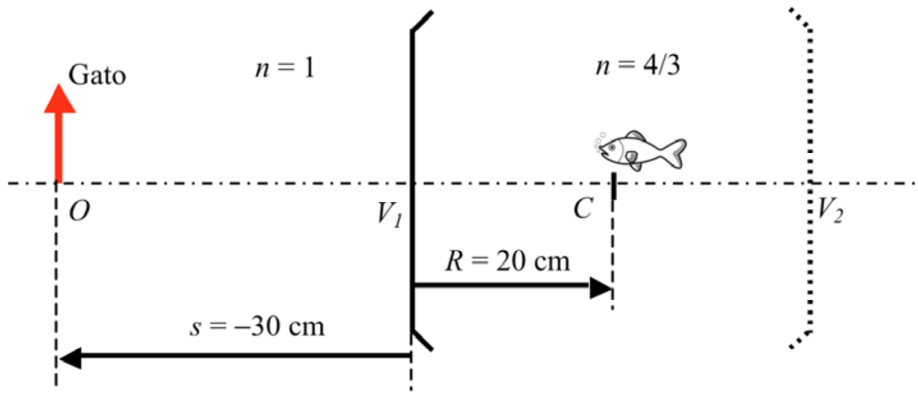
4. De solución inmediata a partir de de las fórmulas que relacionan potencias y focales, focales y radio y elementos conjugados entre sí.

5. Igual que el ejercicio anterior.

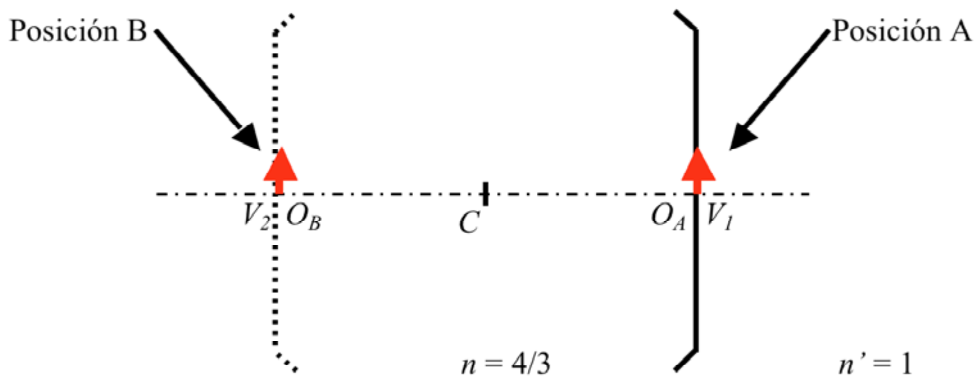
6. Igual que el ejercicio anterior aunque en este caso debe tenerse en cuenta que al estar situado el objeto en el infinito su imagen estará en el plano focal imagen el dioptrio. El tamaño de la imagen quedará determinada por un rayo que subtiende 5º con el eje óptico y pase por el centro del dioptrio.

7. Igual que el ejercicio anterior.

8. Debe esquematizarse correctamente el problema. La imagen que ve el pez es la que forma el dioptrio de vértice V_1. El esquema es el siguiente:



9. El esquema es el siguiente:



Cuando el pez está en la posición B el observador verá la imagen del objeto O_B a través del dioptrio de vértice V_1.

Cuando el pez está en la posición A el observador verá la imagen del objeto O_A a través del dioptrio de vértice V_1 (Su posición no variará) y aumento lateral es $m = +1$.

10. Por ser la imagen invertida se deduce de manera inmediata su carácter (real o virtual). Además, por estar situado el objeto en el infinito, la imagen se formará en el plano focal imagen del dioptrio.

11. Se trata de un ejercicio de trazado gráfico dónde debe tenerse en cuenta las propiedades de los rayos siguientes:
El rayo que une los extremos del objeto y de la imagen determina la posición del punto C.
El rayo que incide paralelo al eje y pasa por los extremos de los dos objetos a la salida pasa por los extremos de las dos imágenes. La intersección de dicho rayo con el eje determina el punto focal imagen F'. La prolongación de ambos rayos, entrada y salida, determina la posición del dioptrio.
Con los datos anteriores se determinan de manera directa todos los parámetros del dioptrio.

12. a) Se calcula, a partir de las relaciones de conjugación del dioptrio esférico, la posición de las imágenes de los puntos *A*, *B*, *C* y *D*.
b) Debe determinarse la forma de una recta horizontal (segmento *AB*) en el espacio imagen. De la ecuación de Descartes se obtiene que $s = \dfrac{ns'}{n' - P's'}$; de la ecuación del aumento y la ecuación anterior se obtiene $y = \dfrac{n'y'}{n' - P's'}$. De este modo tenemos las ecuaciones que transforman la posición y el tamaño de un elemento del espacio objeto en un elemento del espacio imagen. Si la forma del objeto en el espacio objeto es una recta de ecuación $y = ax + b$, aplicando las ecuaciones anteriores se obtiene la ecuación de la forma en el espacio imagen.

13. De solución directa a partir de las relaciones de conjugación en el dioptrio esférico.

14. Igual que el ejercicio anterior.

15. Igual que el ejercicio anterior.

16. Igual que el ejercicio anterior.

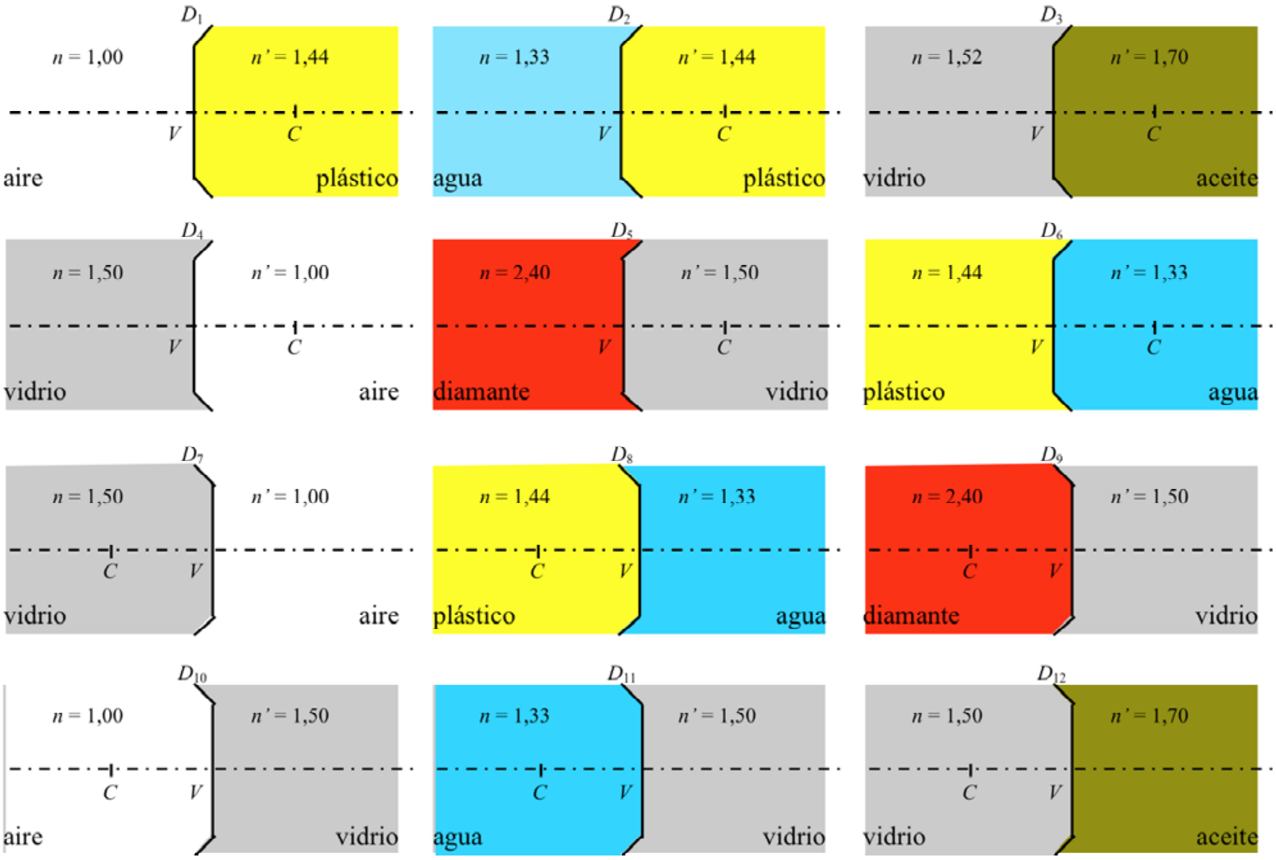
17. Igual que el ejercicio anterior.

18. Igual que el ejercicio anterior.

19. Igual que el ejercicio anterior.

UNIDAD 6. PROBLEMAS DE DIOPTRIO ESFÉRICO. SOLUCIONES

1. Sean los dioptrios de la figura. Teniendo en cuenta que en cada dioptrio el valor absoluto del radio es de $|R|$ = 100 mm. Determina en cada caso:
a) Las potencias objeto e imagen.
b) Las distancias focales objeto e imagen.



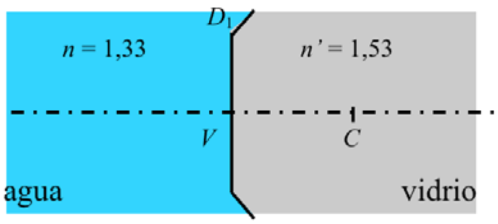
SOLUCIÓN:

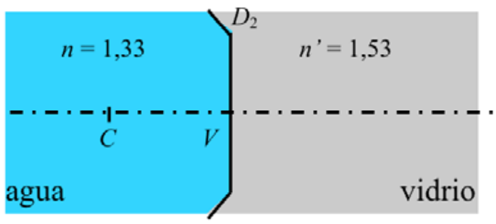
Aplicando directamente las fórmulas de la potencia objeto e imagen:

$P = -\dfrac{n'-n}{R}$, $P' = \dfrac{n'-n}{R}$, $f = \dfrac{n}{P}$ y $f' = \dfrac{n'}{P'}$ a cada dioptrio se obtiene:

Dioptrio	R (m)	n	n'	P (D)	P' (D)	f (mm)	f' (mm)
D_1	0,10	1,00	1,44	–4,4	4,4	–227,3	327,3
D_2	0,10	1,33	1,44	–1,1	1,1	–1209,1	1309,1
D_3	0,10	1,52	1,70	–1,8	1,8	–844,4	944,4
D_4	0,10	1,50	1,00	5,0	–5,0	300,0	–200,0
D_5	0,10	2,50	1,50	10	–10	250,0	–150,0
D_6	0,10	1,44	1,33	1,1	–1,1	1309,1	–1209,1
D_7	–0,10	1,50	1,00	–5,0	5,0	–300,0	200,0
D_8	–0,10	1,44	1,33	–1,1	1,1	–1309,1	1209,1
D_9	–0,10	2,40	1,50	–9,0	9,0	–266,7	166,7
D_{10}	–0,10	1,00	1,50	5,0	–5,0	200,0	–300,0
D_{11}	–0,10	1,33	1,50	1,7	–1,7	782,4	–882,4
D_{12}	–0,10	1,50	1,70	2,0	–2,0	750,0	–850,0

2. Determina las potencias y las focales de los dioptrios D_1 y D_2 que se muestran en la figura teniendo en cuenta que el valor absoluto del radio es $|R|$ = 100 mm.





SOLUCIÓN:

Dioptrio D_1: R =100 mm = 0,100 m.

$$P = -\frac{n' - n}{R} = -\frac{1{,}53 - 1{,}33}{0{,}100} = -2 \text{ D.} \qquad P' = -P = -(-2) = 2 \text{ D.}$$

$$f = \frac{n}{P} = \frac{1{,}33}{-2} = -0{,}665 \text{ m} = -665 \text{ mm.} \qquad f' = \frac{n'}{P'} = \frac{1{,}53}{2} = 0{,}765 \text{ m} = 765 \text{ mm.}$$

Obsérvese que se cumple la relación $f + f' = R$; $-665 + 765 = 100$ mm.

Dioptrio D_2: R = –100 mm = –0,100 m.

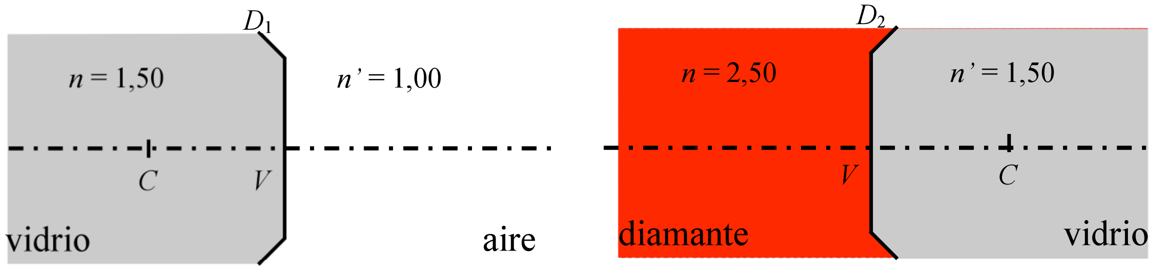
$$P = -\frac{n' - n}{R} = -\frac{1{,}53 - 1{,}33}{-0{,}100} = 2 \text{ D.} \quad P' = -P = -2 \text{ D.}$$

$$f = \frac{n}{P} = \frac{1{,}33}{2} = 0{,}665 \text{ m} = 665 \text{ mm.} \quad f' = \frac{n'}{P'} = \frac{1{,}53}{-2} = -0{,}765 \text{ m} = -765 \text{ mm.}$$

Obsérvese que se cumple la relación $f + f' = R$; $665 + (-765) = -100$ mm.

Obsérvese que al cambiar la concavidad del dioptrio, manteniéndose constantes los valores de los índices anterior y posterior, la potencia cambia de signo.

3. Sean los dioptrios de la figura. Teniendo en cuenta que en cada uno de los dioptrios el valor absoluto del radio es de $|R| = 100{,}0$ mm. Determina, en cada caso la posición de:
a) Los planos principales (H y H'; $m = +1$).
b) Los planos antiprincipales (h, h'; $m = -1$).
c) Los puntos nodales (N, N'; $\gamma = +1$).
d) Los puntos antinodales (n, n'; $\gamma = -1$).



SOLUCIÓN:

Determinemos en primer lugar las potencias y focales de los dioptrios anteriores:

De las fórmulas:

$P = -\frac{n'-n}{R}$, $P' = \frac{n'-n}{R}$, $f = \frac{n}{P}$ y $f' = \frac{n'}{P'}$ y teniendo en cuenta los valores de R, n y n' se obtiene:

Dioptrio	R (mm)	n	n'	P (D)	P' (D)	f (mm)	f' (mm)
D_1	–100,0	1,50	1,00	–5,0	5,0	–300,0	200,0
D_2	100,0	2,50	1,50	10	–10	250,0	–150,0

a) Planos principales:

Sea $s = VH$ la distancia desde el vértice V hasta el plano principal objeto H. Sea $s' = VH'$ la distancia desde el vértice V hasta el plano principal imagen H'. Por ser planos principales se cumple que $m = +1$

De la fórmula del aumento lateral $m = \frac{y'}{y} = \frac{n\,s'}{n'\,s} = +1$. Despejando se obtiene que:

$$n\,s' = n'\,s\,. \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que $n \neq n'$ la condición anterior solo puede cumplirse en el caso $s = s' = 0$, lo que significa que objeto e imagen están situados en el vértice del dioptrio. Así pues:

$$VH = VH' = 0. \tag{2}$$

b) Planos antiprincipales:

Sea *s* = *Vh* la distancia desde el vértice *V* hasta el plano antiprincipal objeto *h*. Sea *s'* = *Vh'* la distancia desde el vértice *V* hasta el plano antiprincipal imagen *h'*. Por ser planos antiprincipales se cumple que *m* = –1.

De la fórmula del aumento lateral $m = \frac{y'}{y} = \frac{n\,s'}{n'\,s} = -1$. Despejando se obtiene que:

$$s' = -\frac{n'}{n}s\,. \tag{3}$$

Considerando la relación $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$ la expresión anterior se escribe como:

$$s' = \frac{f'}{f}s\,. \tag{4}$$

Substituyendo esta expresión en la ecuación:

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1 \tag{5}$$

Se obtiene: $\frac{f}{s} + \frac{f'}{\frac{f'}{f}s} = 1;$ $\quad \frac{f}{s} + \frac{f}{s} = 1;$ $\quad \frac{2f}{s} = 1;$ $\quad s = 2f = Vh\,.$

Substituyendo *s* en (4) se obtiene: $s' = 2f' = Vh'$.

Así pues:

$$\begin{aligned} Vh &= 2f\,, \\ Vh' &= 2f'\,. \end{aligned} \tag{6}$$

c) Puntos nodales:

Sea *s* = *VN* la distancia desde el vértice *V* hasta el punto nodal objeto *N*. Sea *s'* = *VN'* la distancia desde el vértice *V* hasta el punto nodal imagen *N'*. Por ser puntos nodales se cumple que γ = +1. Esto significa que cualquier rayo que incida pasando por *N* formando un ángulo σ con el eje, a la salida pasará por el punto *N'* formando un ángulo σ' = σ con el eje o, lo que es lo mismo, que el rayo a la entrada y a la salida son paralelos entre sí.

De la fórmula del aumento angular $\gamma = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{s}{s'} = 1$. Despejando se obtiene que:

$$s' = s. \tag{7}$$

Substituyendo en (5) se obtiene:

$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s} = 1$; $\frac{1}{s}\left(f + f'\right) = 1$; $s = f + f' = R$; $s' = s = R$.

Así pues:

$$\begin{aligned} VN &= R, \\ VN' &= R'. \end{aligned} \tag{8}$$

Debido a que el rayo incidente y el rayo a la salida deben ser paralelos entre sí el rayo que cumple esta condición es el rayo que pasa por el centro C, ya que este rayo no se desvía.

d) Puntos antinodales:

Sea $s = Vn$ la distancia desde el vértice V hasta el punto antinodal objeto n. Sea $s' = Vn'$ la distancia desde el vértice V hasta el punto antinodal imagen n'. Por ser puntos antinodales se cumple que $\gamma = -1$. Esto significa que cualquier rayo que incida pasando por n formando un ángulo σ con el eje, a la salida pasará por el punto n' formando un ángulo $\sigma' = -\sigma$ con el eje.

De la fórmula del aumento angular $\gamma = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{s}{s'} = -1$. Despejando se obtiene que:

$$s' = -s. \tag{9}$$

Substituyendo en (5) se obtiene:

$\frac{f}{s} - \frac{f'}{s} = 1$; $\frac{1}{s}\left(f - f'\right) = 1$; $s = f - f'$; $s' = f' - f$.

Así pues:

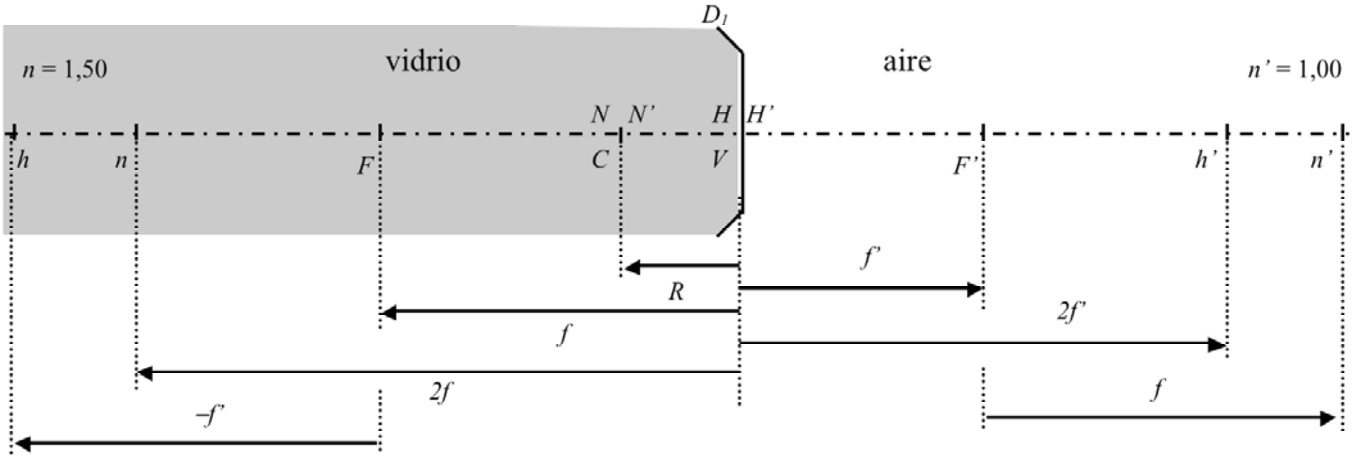
$$\begin{aligned} Vn &= f - f', \\ Vn' &= f' - f, \end{aligned} \tag{10}$$

Dioptrio 1:

$VH = VH' = 0$. $Vh = 2f = 2(-300{,}0) = -600{,}0$ mm $Vh' = 2f' = 2.200{,}0 = 400{,}0$ mm.

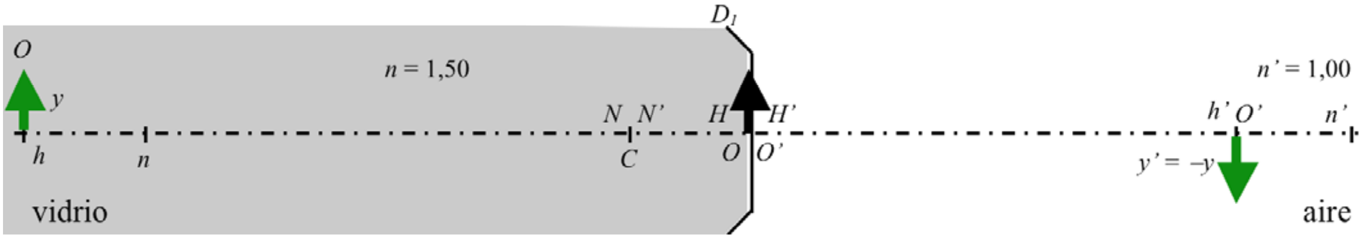
$VN = VN' = R = -100{,}0$ mm.

$Vn = f - f' = -300{,}0 - 200{,}0 = -500{,}0$ mm. $Vn' = f' - f = 200{,}0 - (-300{,}0) = 500{,}0$ mm.

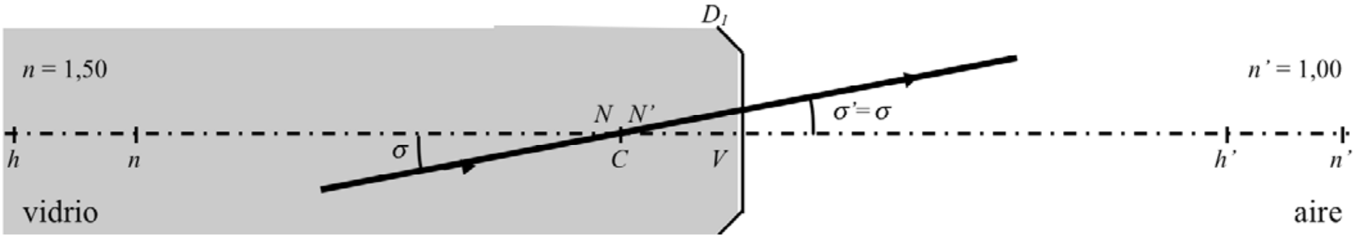


Relaciones de conjugación:

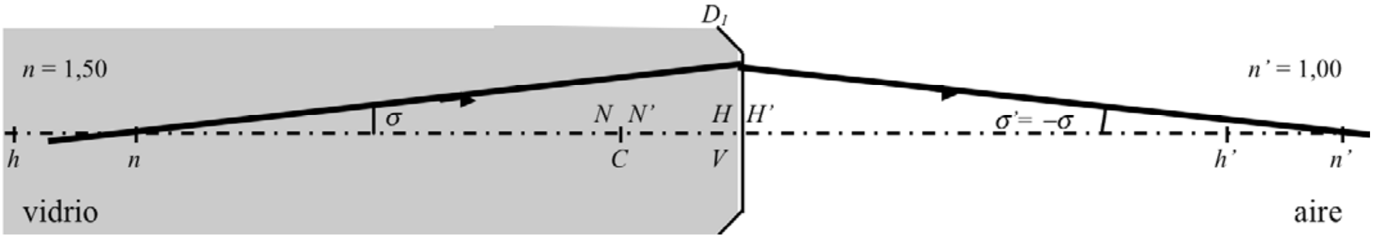
Planos principales y antiprincipales:



Puntos nodales:

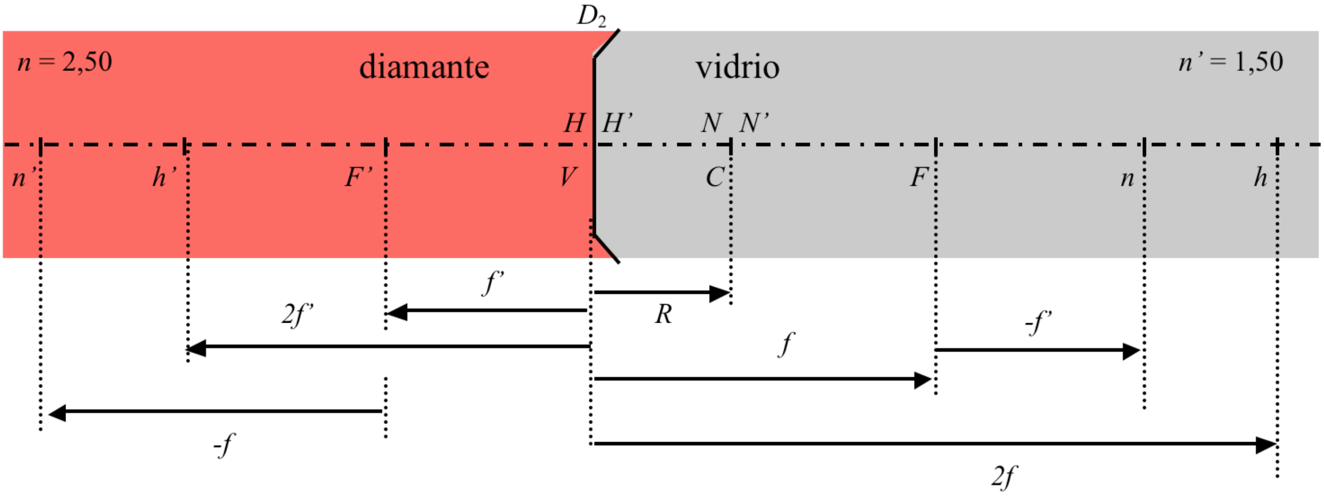


Puntos antinodales:



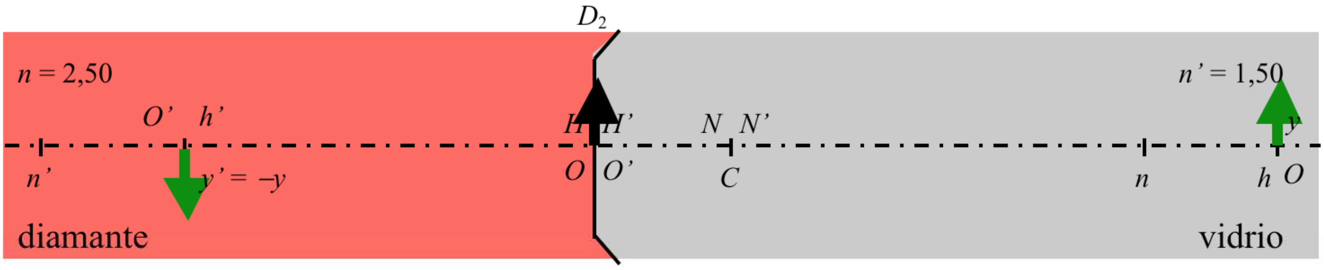
Dioptrio 2:

$VH = VH' = 0.$ $Vh = 2f = 2.250,0 = 500,0$ mm $Vh' = 2f' = 2(–150,0) = –300,0$ mm.
$VN = VN' = R = 100,0$ mm.
$Vn = f – f' = 250,0 – (–150,0) = 400,0$ mm. $Vn' = f' – f = –150,0 – 250,0 = –400,0$ mm.

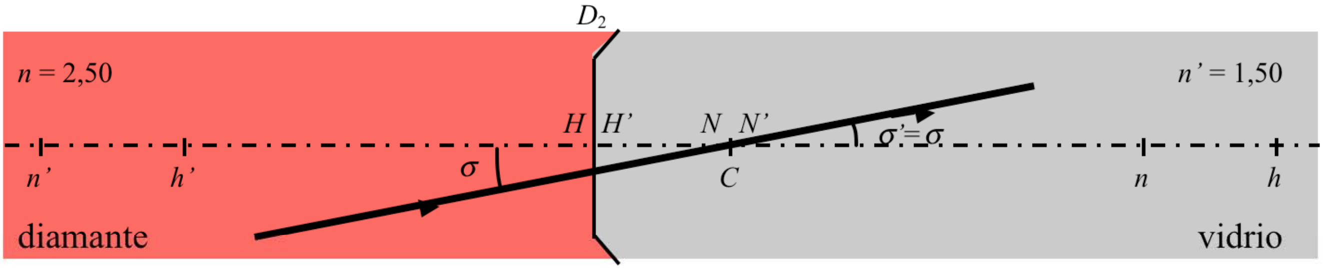


Relaciones de conjugación:

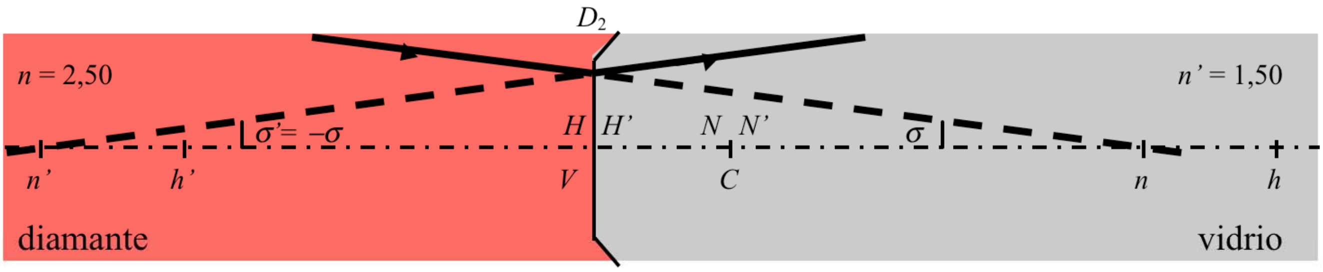
Planos principales y antiprincipales:



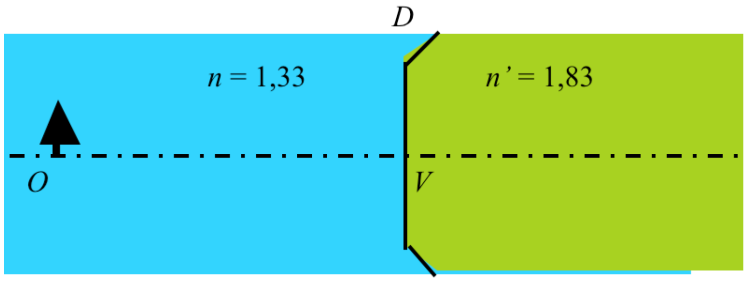
Puntos nodales:



Puntos antinodales:



4. Sea el dioptrio de la figura cuya potencia es $P' = 5{,}00$ D. Determina:



a) Las focales del sistema.
b) El radio de curvatura del dioptrio.
c) La vergencia del objeto y de la imagen.
d) La distancia reducida objeto e imagen.
e) La posición de la imagen.
f) El carácter de la imagen (real/virtual).
g) El aumento de la imagen.
h) La orientación de la imagen (derecha/invertida).
j) Si la imagen será mayor/menor que el objeto.
Considera los dos casos siguientes:
i) Objeto real situado a 532 mm del vértice del dioptrio.
ii) Objeto real situado a 140 mm del vértice del dioptrio.

SOLUCIÓN:

i) $s = -532$ mm.

a) $P' = -P = 5{,}00$ D.

$$f = \frac{n}{P} = \frac{1{,}33}{-5{,}00} = -0{,}266 \text{ m} = -266 \text{ mm}, \quad f' = \frac{n'}{P'} = \frac{1{,}83}{5{,}00} = 0{,}366 \text{ m} = 366 \text{ mm}.$$

b) $f + f' = R$; $\quad R = -266 + 366 = 100$ mm.

c) $s = -532 \text{ mm} = -0{,}532$ m; $\quad S = \dfrac{n}{s} = \dfrac{1{,}33}{-0{,}532} = -2{,}50$ D.

$-S + S' = P'$; $\quad -(-2{,}50) + S' = 5{,}00$; $\quad S' = 2{,}50$ D.

d) $$\bar{s} = \frac{s}{n} = \frac{1}{S} = \frac{1}{-2{,}50} = -0{,}400 \text{ m} = -400 \text{ mm}.$$

$$\bar{s}' = \frac{s'}{n'} = \frac{1}{S'} = \frac{1}{2{,}50} = 0{,}400 \text{ m} = 400 \text{ mm}.$$

e) $s' = n'\bar{s}' = 1{,}83 . 400 = 732$ mm.

Obsérvese que el objeto está situado en el plano antiprincipal objeto $s = 2f = -532$ mm y la imagen está situada en el plano antiprincipal imagen $s' = 2f' = 732$ mm.

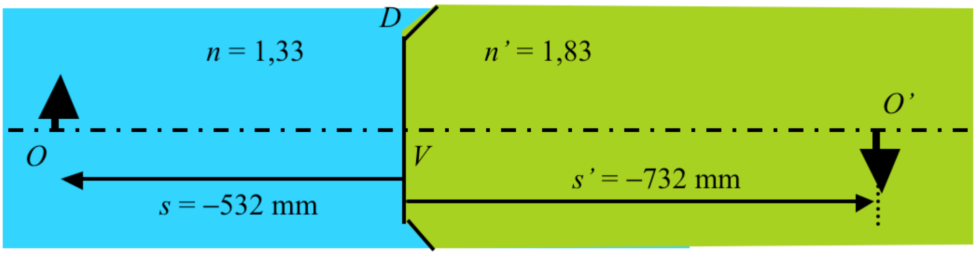
f) La imagen es real por estar situada a la derecha del vértice del dioptrio (signo positivo en s').

g) Por estar situado el objeto y la imagen en sus correspondientes planos antiprincipales $m = -1$.

Si se realiza el cálculo se obtiene: $m = \dfrac{n\,s'}{n'\,s} = \dfrac{S}{S'} = \dfrac{-2{,}50}{2{,}50} = -1$.

h) La imagen es invertida por ser el signo del aumento negativo.

j) El tamaño de la imagen es igual al del objeto por ser la unidad el valor absoluto del aumento.



ii) $s = -140$ mm.

a) $s = -140 \text{ mm} = -0{,}140 \text{ m}$; $S = \dfrac{n}{s} = \dfrac{1{,}33}{-0{,}140} = -9{,}50$ D.

$-S + S' = P'$; $-(-9{,}50) + S' = 5$; $S' = -4{,}50$ D.

b) $\bar{s} = \dfrac{s}{n} = \dfrac{1}{S} = \dfrac{1}{-9{,}50} = -0{,}105 \text{ m} = -105$ mm.

$\overline{s'} = \dfrac{s'}{n'} = \dfrac{1}{S'} = \dfrac{1}{-4{,}50} = -0{,}222 \text{ m} = -222$ mm.

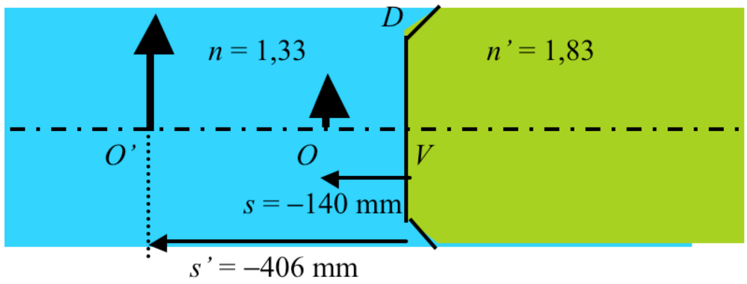
c) $s' = n'\overline{s'} = 1{,}83\,(-222) = -406$ mm.

d) La imagen es virtual por estar situada a la izquierda del vértice del dioptrio (signo negativo en s').

e) $m = \dfrac{n\,s'}{n'\,s} = \dfrac{S}{S'} = \dfrac{-9{,}50}{-4{,}50} = 2{,}11$.

f) La imagen es derecha por ser el signo del aumento positivo.

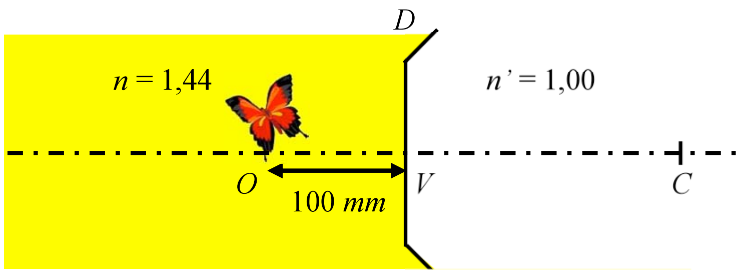
g) El tamaño de la imagen es mayor que el del objeto por ser mayor que la unidad el valor absoluto del aumento.



---

5. Una superficie convexa de 200 mm de radio separa dos medios de índices n = 1,44 (plástico) y n' = 1,00 (aire). Un objeto en forma de mariposa está incrustado en el plástico a 100 mm del vértice del dioptrio. Determina:

a) Las potencias del dioptrio.
b) Las focales del dioptrio.
c) La vergencia del objeto y de la imagen.
d) La posición de la imagen.
e) El carácter de la imagen (real/virtual).
f) El aumento de la imagen.
g) La orientación de la imagen (derecha/invertida).
h) Si la imagen será mayor/menor que el objeto.



SOLUCIÓN:

a) $P' = \dfrac{n' - n}{R}$; R = 200 mm = 0,200 m; $P' = \dfrac{1{,}00 - 1{,}44}{0{,}200} = -2{,}2$ D.

$P = -P' = 2{,}2$ D.

b) $f' = \dfrac{n'}{P'}$; $f' = \dfrac{1{,}00}{-2{,}20} = -0{,}455 \text{ m} = -455 \text{ mm}.$

$f = \dfrac{n}{P}$; $f = \dfrac{1{,}44}{2{,}20} = 0{,}655 \text{ m} = 655 \text{ mm}.$

c) $s = -100$ mm $= -0{,}100$ m; $S = \dfrac{n}{s} = \dfrac{1{,}44}{-0{,}100} = -14{,}4$ D.

$-S + S' = P'$; $\quad -(-14{,}40) + S' = -2{,}2$; $\quad S' = -16{,}60$ D.

d) $S' = \dfrac{n'}{s'}$; $\quad s' = \dfrac{n'}{S'} = \dfrac{1{,}00}{-16{,}60} = -0{,}602 \text{ m} = -60{,}2 \text{ mm}.$

e) La imagen es virtual por estar situada a la izquierda del vértice del dioptrio (signo negativo en *s'*).

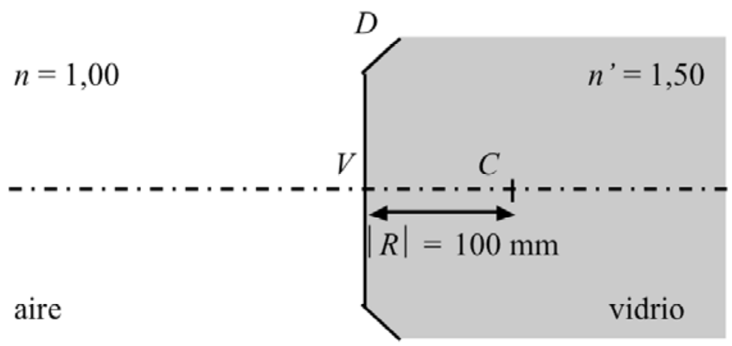
f) $m = \dfrac{n\,s'}{n'\,s} = \dfrac{S}{S'} = \dfrac{-14{,}40}{-16{,}60} = 0{,}87.$

g) La imagen es derecha por ser el signo del aumento positivo.

h) El tamaño de la imagen es menor que el del objeto por ser menor que la unidad el valor absoluto del aumento.

---

6. Sea el dioptrio de la figura. Un objeto situado en el infinito subtiende un ángulo de 5º desde el dioptrio. Determina:
a) Las potencias del dioptrio.
b) La focales del dioptrio.
c) La posición de la imagen.
d) La vergencia del objeto y de la imagen.
e) El carácter de la imagen (real/virtual).
f) El tamaño de la imagen.
g) La orientación de la imagen (derecha/invertida).



SOLUCIÓN:

a) $R = 100$ mm $= 0{,}100$ m; $P' = \dfrac{n'-n}{R} = \dfrac{1{,}5-1}{0{,}100} = +5{,}00 \text{ D}$; $\quad P = -P' = -5{,}00$ D.

b) $f' = \dfrac{n'}{P'} = \dfrac{1{,}50}{5{,}00} = 0{,}300 \text{ m} = 300 \text{ mm}$; $\quad f = \dfrac{n}{P} = \dfrac{1{,}00}{-5{,}00} = -0{,}200 \text{ m} = -200 \text{ mm}.$

c) Debido a que el objeto está situado en el infinito la imagen estará situada en el plano focal imagen del dioptrio.

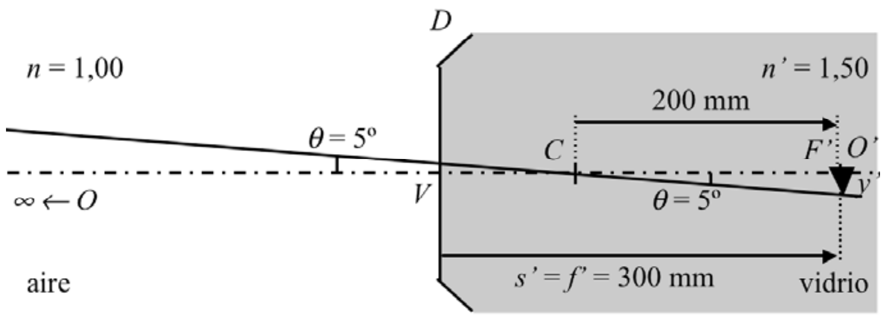
s' = *VO'* = *VF'* = *f'* = 300 mm = 0,300 m.

d) $S = \frac{n}{s} = \frac{1{,}00}{\infty} = 0\ \text{D}$. $\quad S' = \frac{n'}{s'} = \frac{1{,}50}{0{,}300} = 5{,}00\ \text{D}$.

e) La imagen es real por estar situada a la derecha del vértice del dioptrio (signo positivo en *s'*).

f) Para determinar el tamaño de la imagen se traza un rayo que subtienda 5º con el eje y que pase por el centro *C*. La intersección de dicho rayo con el plano focal imagen determinará el tamaño *y'* de la imagen.

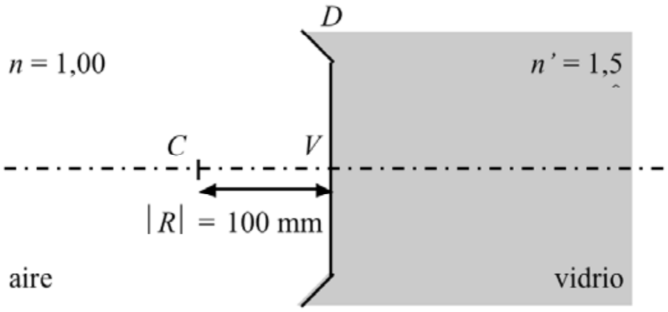
$$y' = 200 \tan 5^{\circ} = 17{,}5\ \text{mm}.$$



g) La imagen es invertida según se muestra en la figura.

---

7. Sea el dioptrio de la figura. Un objeto situado en el infinito subtiende un ángulo de 5º desde el dioptrio. Determina:
a) Las potencias del dioptrio.
b) La focales del dioptrio.
c) La posición de la imagen.
d) La vergencia del objeto y de la imagen.
e) El carácter de la imagen (real/virtual).
f) El tamaño de la imagen.
g) La orientación de la imagen (derecha/invertida).



SOLUCIÓN:

a) $R = -100$ mm $= -0{,}100$ m. $P' = \dfrac{n' - n}{R} = \dfrac{1{,}5 - 1}{-0{,}100} = -5{,}00\ \text{D}$; $\qquad P = +5{,}00$ D.

b) $f' = \dfrac{n'}{P'} = \dfrac{1{,}50}{-5{,}00} = -0{,}300\ \text{m} = -300\ \text{mm}$; $\qquad f = \dfrac{n}{P} = \dfrac{1{,}00}{5{,}00} = 0{,}200\ \text{m} = 200\ \text{mm}$.

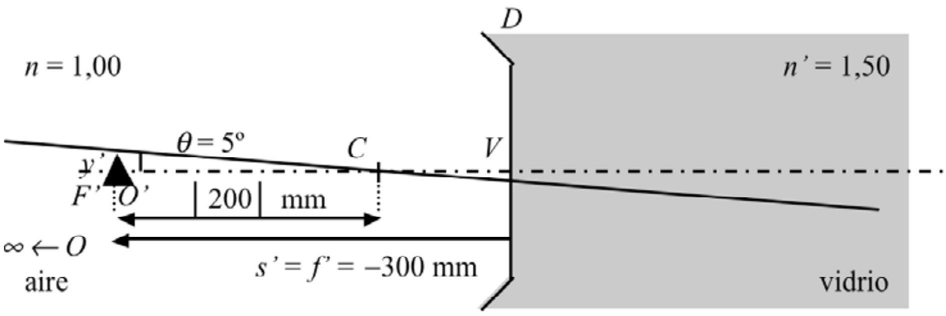
c) Por estar el objeto en el infinito la imagen estará situada en el plano imagen del dioptrio. $s' = f' = VO' = -300$ mm.

d) $S = \dfrac{n}{s} = \dfrac{1{,}00}{\infty} = 0\ \text{D}$. $\qquad S' = \dfrac{n'}{s'} = \dfrac{1{,}50}{-0{,}300} = -5{,}00\ \text{D}$.

e) La imagen es virtual por estar situada a la izquierda del vértice del dioptrio (signo negativo en s').

f) Igual que en el ejercicio anterior se traza un rayo que subtienda 5º con el eje y que pase por el centro C. La intersección de dicho rayo con el plano focal imagen determinará el tamaño y' de la imagen.

$$y' = 200 \tan 5^\circ = 17{,}5\ \text{mm}.$$

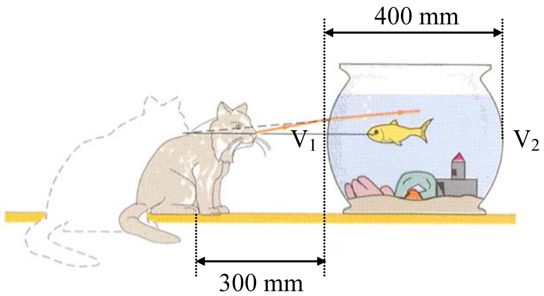


g) La imagen es derecha según se muestra en la figura.

8. Un pez situado en el centro de una pecera esférica de 400 mm de diámetro observa ungato situado en el exterior. Los índices respectivos del agua y del aire son 4/3 y 1,00 respectivamente. Si la distancia del vértice de la pecera al gato es de 300 mm. Determina:

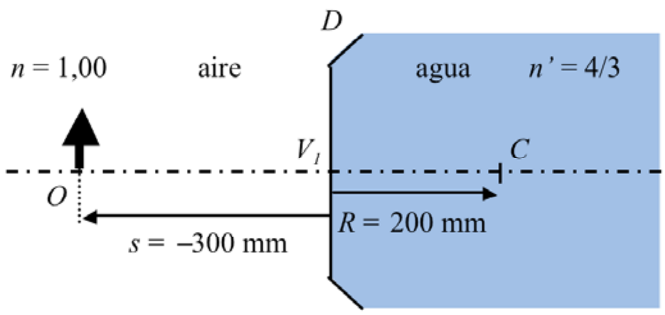
a) La posición de la imagen del gato respecto del vértice V_1 de la pecera.

b) El aumento de la imagen.



SOLUCIÓN:

a) Esquematizando el dibujo anterior tenemos:



Determinemos en primer lugar las potencias y las focales del dioptrio *D*.

$$P' = \frac{n' - n}{R}; \quad R = 200 \text{ mm} = 0{,}200 \text{ m};$$

$$P' = \frac{\frac{4}{3} - 1{,}00}{0{,}200} = \frac{\frac{4 - 3{,}00}{3}}{0{,}200} = \frac{1{,}00}{0{,}6} = 1{,}67 \text{ D}; \qquad P = -P' = -1{,}67 \text{ D}.$$

$$f' = \frac{n'}{P'} = \frac{\frac{4}{3}}{1{,}67} = \frac{4}{5{,}00} = 0{,}800 \text{ m} = 800 \text{ mm}.$$

$$f = \frac{n}{P} = \frac{1}{-1{,}67} = -0{,}600 \text{ m} = -600 \text{ mm}.$$

De la ecuación de Descartes: $-\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=\frac{n'}{f'}$.

n = 1,00; n' = 4/3; s = –300 mm; f' = 800 mm.

Despejando s' en la ecuación anterior se obtiene:

$$s'=\frac{n\,f'\,s}{n'\,s+n\,f'}=\frac{\frac{4}{3}.800\,(-300)}{\frac{4}{3}(-300)+1.800}=\frac{-320000}{-400+800}=-\,800\text{ mm.}$$

$$s'=V_1O'=-\,800\text{ mm.}$$

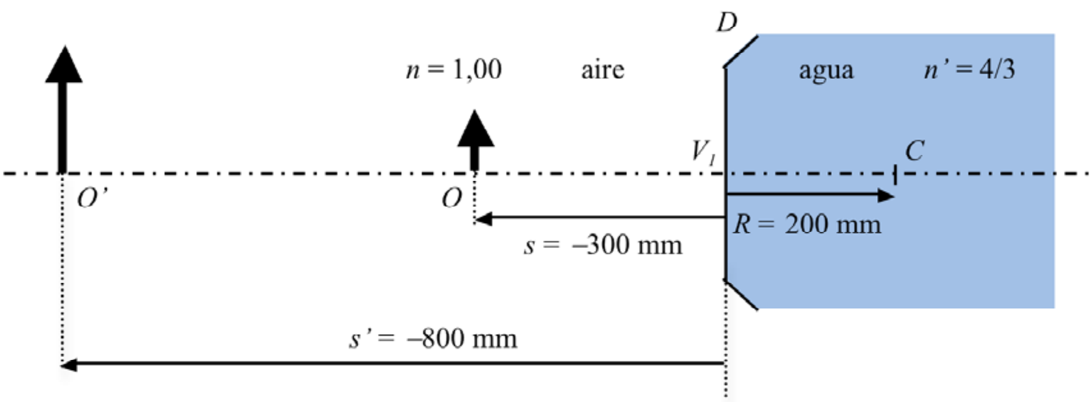
El pez verá al gato en una posición más alejada de lo que realmente está.

b) El aumento será:

$$m=\frac{y'}{y}=\frac{n\,s'}{n'\,s}=\frac{1\,(-\,800)}{\frac{4}{3}(-300)}=+\,2$$

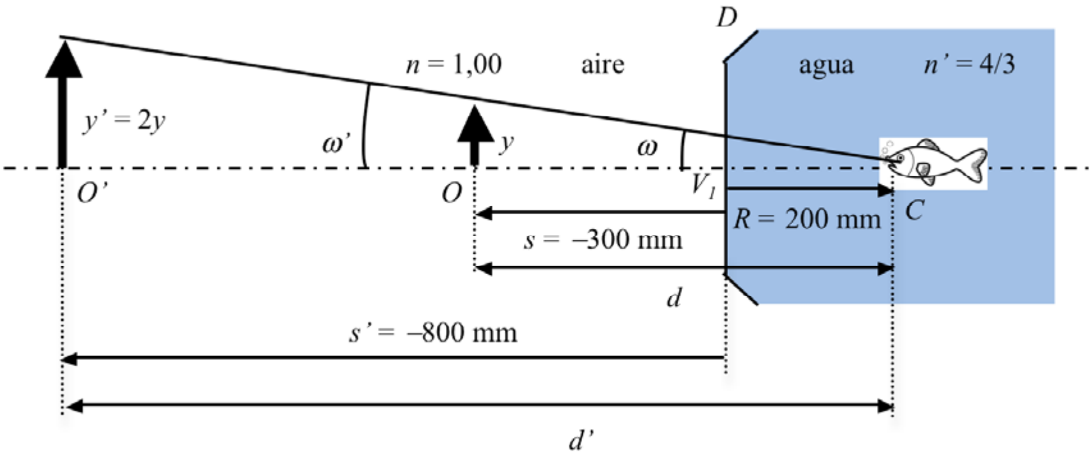
El signo positivo indica que la imagen es derecha. Además, el tamaño de la imagen es 2 veces mayor que el objeto.

La posición de la imagen final se muestra en la figura siguiente:



A la vista del resultado obtenido ¿Será el gato tan grande que asustará al pez? Téngase en cuenta que la imagen del gato es mayor, pero que a la vez se encuentra más alejada del pez. La respuesta a la pregunta anterior está en el aumento visual.

Se define el aumento visual *M* como $M = \dfrac{\tan \omega}{\tan \omega'}$. Dónde ω es el ángulo que subtiende el objeto (gato) con el observador (pez) y ω' es el ángulo que subtiende la imagen del gato a través del dioptrio *D* con el observador (pez).



A la vista de la figura, que está dibujada a escala, ω y ω' son iguales. Lo que significa que *M* = 1. El tamaño del gato percibido por el pez será el mismo, es decir, visualmente el tamaño del gato no habrá aumentado.

El resultado gráfico se puede comprobar numéricamente de la manera siguiente:

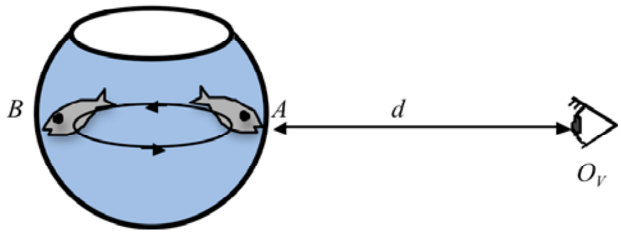
$$\tan \omega = \frac{y}{d} = \frac{y}{500},$$

$$\tan \omega' = \frac{y'}{d'} = \frac{y'}{1000} = \frac{2y}{1000}.$$

$$M = \frac{\tan \omega'}{\tan \omega} = \frac{\dfrac{2y}{1000}}{\dfrac{y}{500}} = 2\frac{500}{1000} = 2\frac{1}{2} = +1.$$

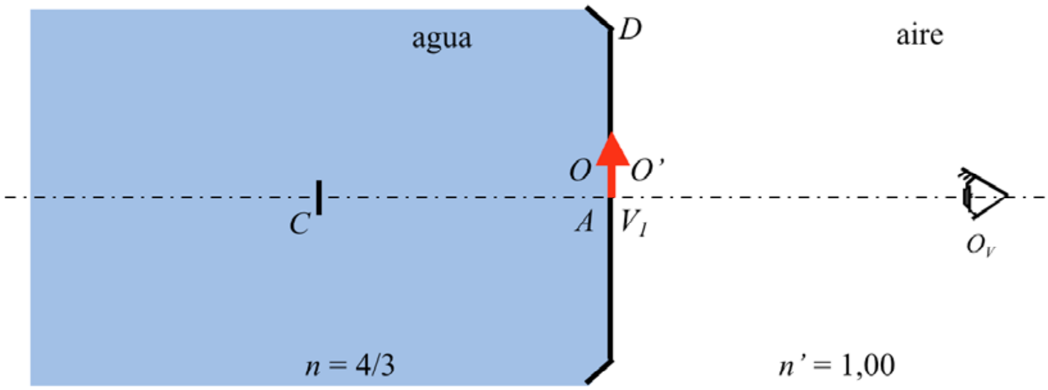
---

9. Un pez neurasténico realiza diariamente cientos de vueltas alrededor de un acuario esférico de radio *R*. Un observador, O_V, situado en la posición que se indica en la figura constata, muy sorprendido, que el tamaño del pez aumenta cuando se aleja de él. Calcula:
a) El aumento lateral cuando el pez se encuentra en la posición *A* (en el vértice más próximo al observador)
b) El aumento lateral cuando el pez se encuentra en la posición *B* (en el vértice más alejado del observador).
c) La distancia *d* entre el observador y la pecera para que se cumpla la condición anterior.
Tómese $n_{agua} = 4/3$.



SOLUCIÓN:

a) Pez situado en la posición *A*.



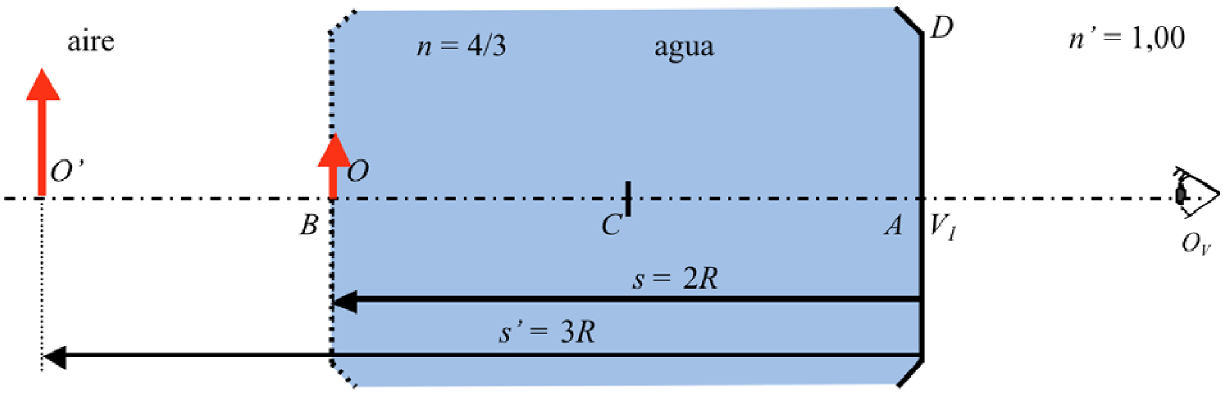
Debido que el objeto está situado en el vértice del dioptrio las posiciones del objeto y de la imagen coinciden, el aumento vale, en este caso, $m = +1$.

b) Objeto situado en la posición *B*.

En este caso el observador verá la imagen que se forma a través del dioptrio de vértice V_1.

Debido a que la distancia está expresada en función del radio *R* de la pecera se aplicará el invariante de Abbe.

$$n\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{s}\right)=n'\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{s'}\right) \qquad n = 4/3;\ n' = 1{,}00;\ s = 2R.$$



Operando se obtiene:

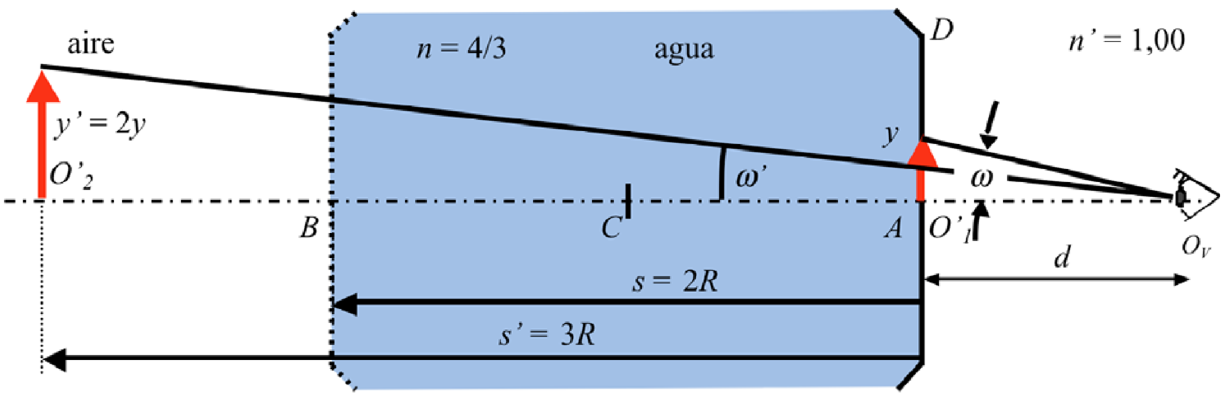
$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{2R}\right)=1\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{s'}\right); \qquad \frac{1}{s'}=\frac{1}{R}-\frac{4}{3R}+\frac{2}{3R}=\frac{3-4+2}{3R}=\frac{1}{3R};$$

$$s'=V_1O'=3R$$

$$m=\frac{n\,s'}{n'\,s}=\frac{\frac{4}{3}\left(3R\right)}{1\left(2R\right)}=2;$$

c) La percepción de que el pez será más grande o más pequeño queda determinada por el aumento visual *M*.

Sea ω el ángulo que subtiende la imagen del pez a través del dioptrio D con el observador cuando el pez se encuentra en la posición *A*. Sea ω' el ángulo que subtiende la imagen del pez a través del dioptrio D con el observador cuando el pez se encuentra en la posición *B*.



De la figura: $\tan\,\omega=\frac{y}{d}$; $\tan\,\omega'=\frac{y'}{d+3|R|}=\frac{2y}{d+3|R|}$.
El observador verá la imagen O'_2 mayor que O'_1 cuando se cumpla:

$$\tan\,\omega'>\tan\,\omega; \qquad \frac{2y}{d+3|R|}>\frac{y}{d}; \qquad 2d>d+3|R|; \qquad d>3|R|.$$

Así pues el observador percibirá como más grande el pez en la posición *B* cuando se cumpla $d>3|R|$.

En el caso de la figura el observador percibirá como más grande el pez cuando está situado en la posición A ya que en este caso $d<3|R|$.

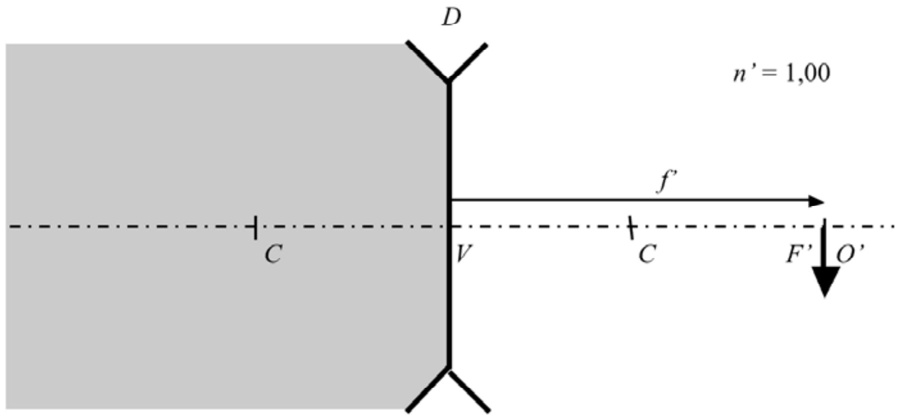
10. Sea una superficie esférica que separa dos medios de índices diferentes. Se sabe que:

- El índice posterior es *n'* = 1,00.
- Un objeto situado en el infinito, que subtiende un ángulo θ tal que $\tan\theta = \frac{1}{20}$, forma una imagen invertida de 4 mm de altura.
- La distancia entre focos es *FF'* = 130 mm.

Determina:
a) Si el dioptrio es cóncavo o convexo.
b) Las focales del dioptrio.
c) El radio de curvatura del dioptrio.
d) Las potencias del dioptrio.
e) El valor del índice *n* del medio anterior.
f) La posición de la imagen.
g) El carácter real o virtual de la imagen.

SOLUCIÓN:

a) Debido a que el objeto está en el infinito la imagen se formará en el plano focal imagen del dioptrio. Por ser invertida esta imagen se forma a la derecha del dioptrio, lo que significa que *f'* > 0 o bien que *P'* > 0.



Por ser *n'* = 1 y *n* > 1 se deduce que *n'* – *n* < 0.

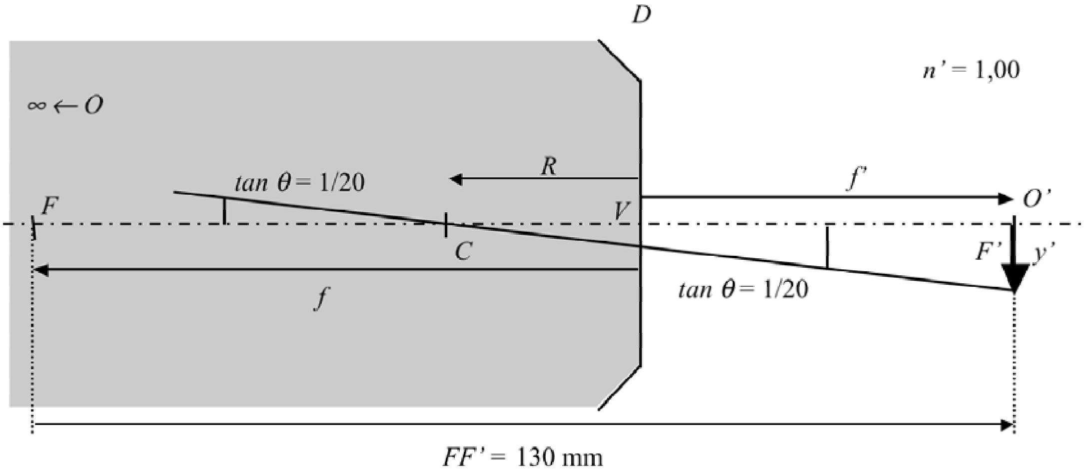
De la fórmula $P' = \frac{n'-n}{R}$ teniendo en cuenta que *P'* > 0 y que *n'* – *n* < 0 resulta que *R* < 0 de lo que se deduce que el dioptrio es cóncavo.

b) De la figura siguiente:

$$(R - f')\tan\theta = y'.$$

Teniendo en cuenta que $R = f' + f$; $\quad ((f' + f) - f')\tan\theta = y.$

$f \tan\theta = y'$; $\quad f\,\dfrac{1}{20} = -4$; $\quad f = -80$ mm..



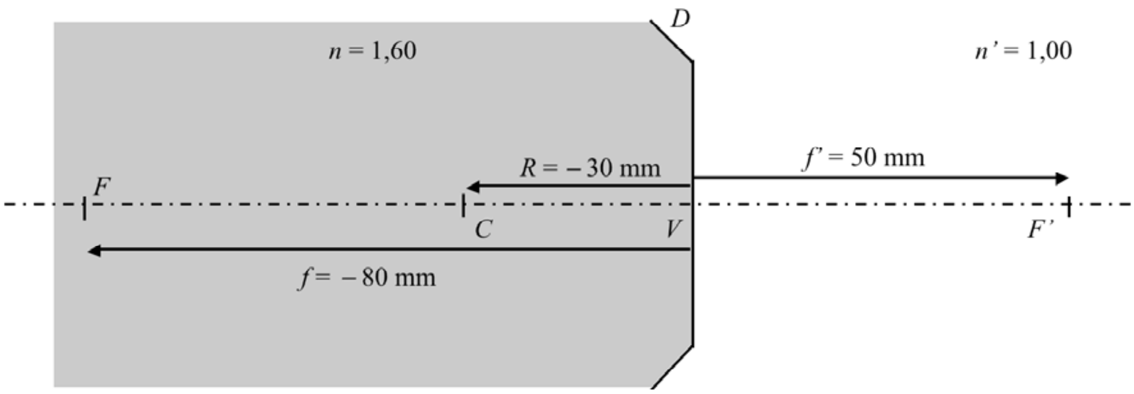
Por otro lado:

$$FF' = -f + f' = 130\,;\;\; -(-80) + f' = 130\,;\;\; f' = 50 \text{ mm.}$$

c) $R = f' + f = 50 - 80 = -30$ mm.

d) $P' = \dfrac{n'}{f'} = \dfrac{1}{0{,}05} = 20$ D. $\qquad P = -P' = -20$ D.

e) $P = \dfrac{n}{f}$; $\qquad -20 = \dfrac{n}{-0{,}080}$; $\qquad n = 1{,}60$.



f) La posición de la imagen es $VO' = f' = +50$ mm.

g) Por estar situada la imagen a la derecha del vértice del dioptrio la imagen es real.

11. Un objeto real, *O*, de tamaño y = 10 mm, situado perpendicularmente al eje óptico de un dioptrio esférico forma una imagen real, *O'*, de tamaño y' = –20 mm.
a) Sabiendo que la distancia *OO'* = 60 mm. Determina gráficamente, en un esquema a escala 1:1, el centro *C* del dioptrio.
Si se desplaza el objeto 10 mm hacia la izquierda la imagen se desplaza también 10 mm en el mismo sentido.
b) Determina, en este caso, el nuevo tamaño de la imagen.
c) Construye el dioptrio indicando su vértice *V*, su foco objeto *F* y su foco imagen *F'*.
d) Determina el radio *R* del dioptrio.
e) Determina el cociente *n'/n*.

SOLUCIÓN:

a) Sabemos que el rayo que sale desde el punto objeto y que llega al punto imagen sin desviarse pasa por el centro del dioptrio. Así pues uniendo los extremos de *O* y *O'* se determina el centro *C* (Figura 1).

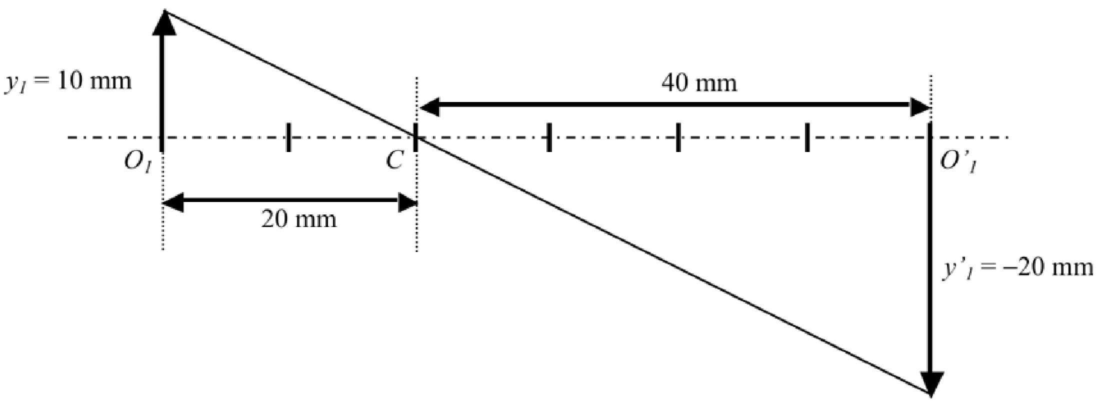


Figura 1

Aplicando semejanza de triángulos a la figura anterior y tomando valores absolutos:

$$\frac{|CO'_1|}{|CO_1|} = \frac{|y_2|}{|y_1|} = 2.$$

De lo que se deduce que $|CO'_1| = 2|CO_1|$.

Teniendo en cuenta que $O_1O'_1$ = 60 mm las distancias anteriores son O_1C = 20 mm y CO'_1 = 40 mm.

b) Al desplazar el objeto y la imagen 10 mm hacia la izquierda el esquema será el de la figura 2:

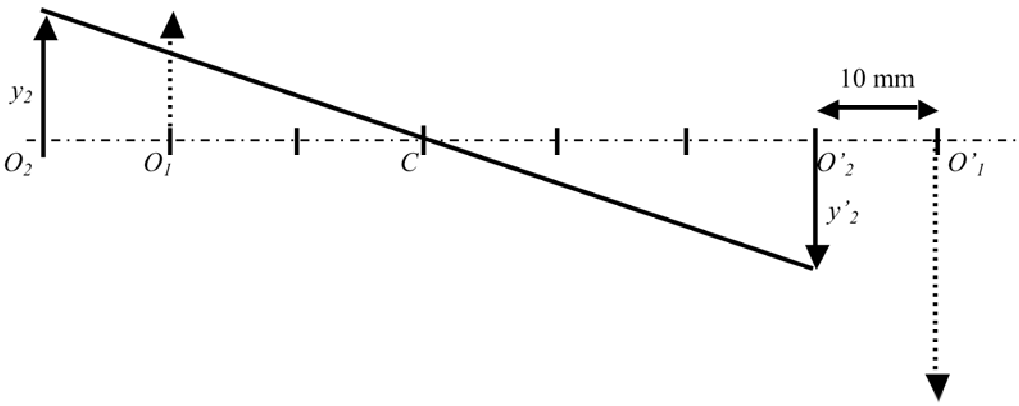


Figura 2

A la vista de la figura 2 se observa que: O_2C = 30 mm y CO'_2 = 30 mm. También se deduce que $y_2 = -y'_2$ = 10 mm.

c) Si tenemos en cuenta que un rayo incidente paralelo al eje, a la salida del dioptrio pasa por el foco imagen *F'*, el rayo paralelo incidente, *1*, que pasa por los extremos de O_1 y O_2 pasará, a la salida del dioptrio, rayo *1'*, por los extremos de O'_1 y O'_2. La intersección del rayo *1'* con el eje óptico determina el punto focal imagen *F'* (Figura 3).

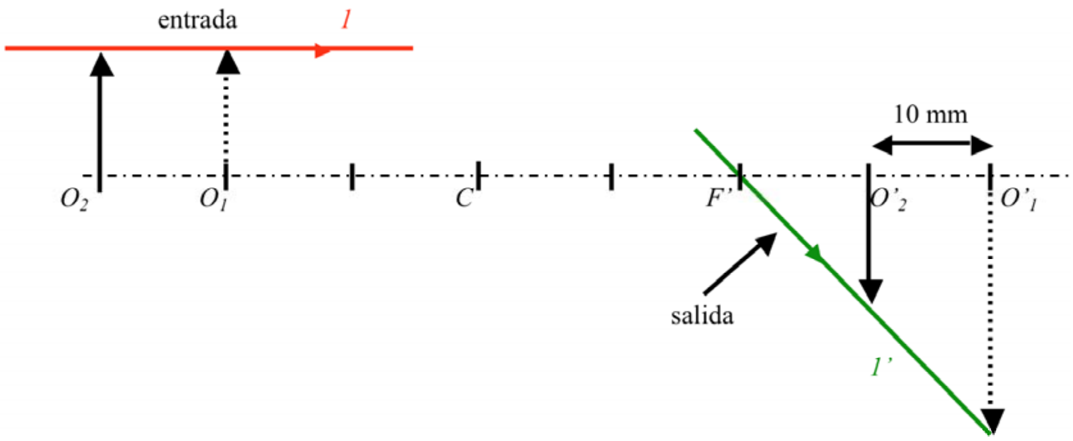


Figura 3

La intersección entre los rayos *1* y *1'* determina la superficie del dioptrio y, en consecuencia, la posición del vértice *V* del dioptrio (Figura 4).

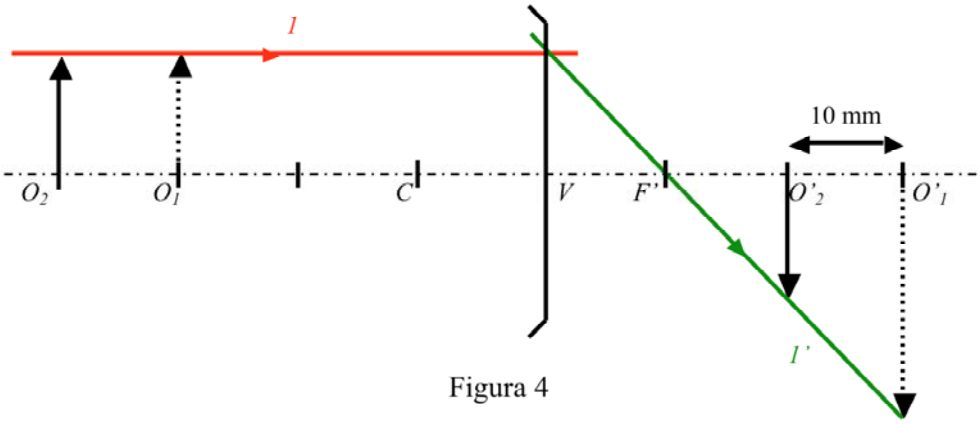


Figura 4

d) $R = f' + f = 10 - 20 = -10$ mm.

La posición de F pude determinarse fácilmente teniendo en cuenta la reversibilidad del rayo de luz. El rayo emergente *2'* que es paralelo al eje y pasa por el extremo de O'_2, a la entrada debe pasar por el extremo de O_2. La intersección del rayo *2* con el eje óptico determina el punto focal objeto F (Figura 5).

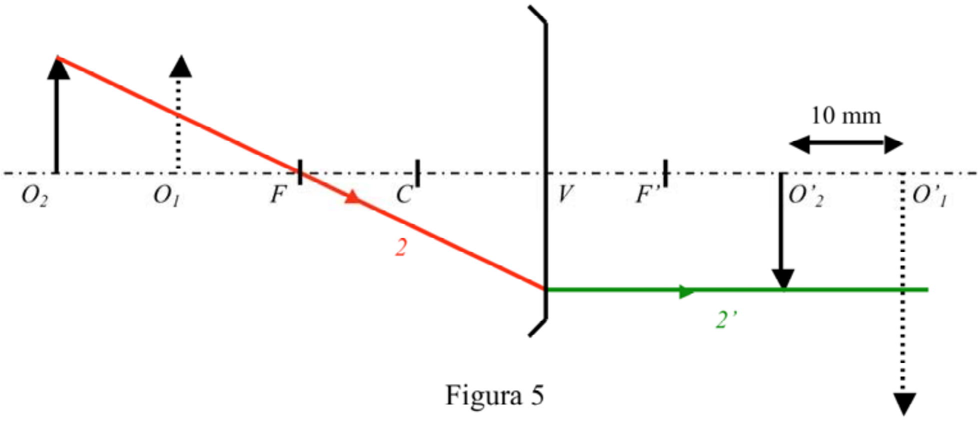


Figura 5

Así pues, el dioptrio está caracterizado por:

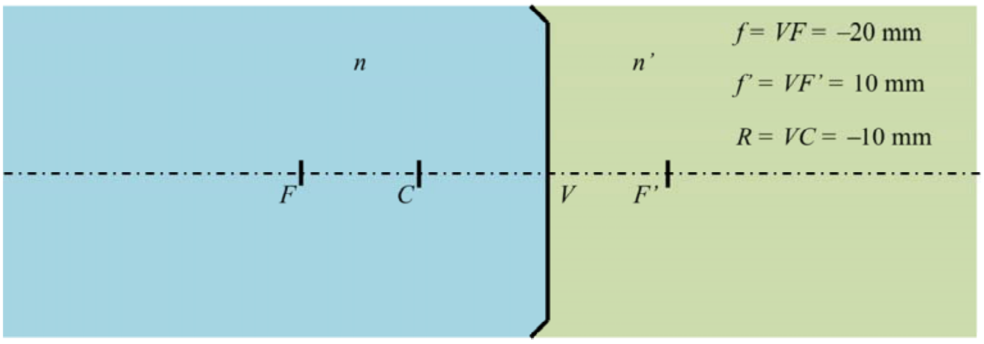
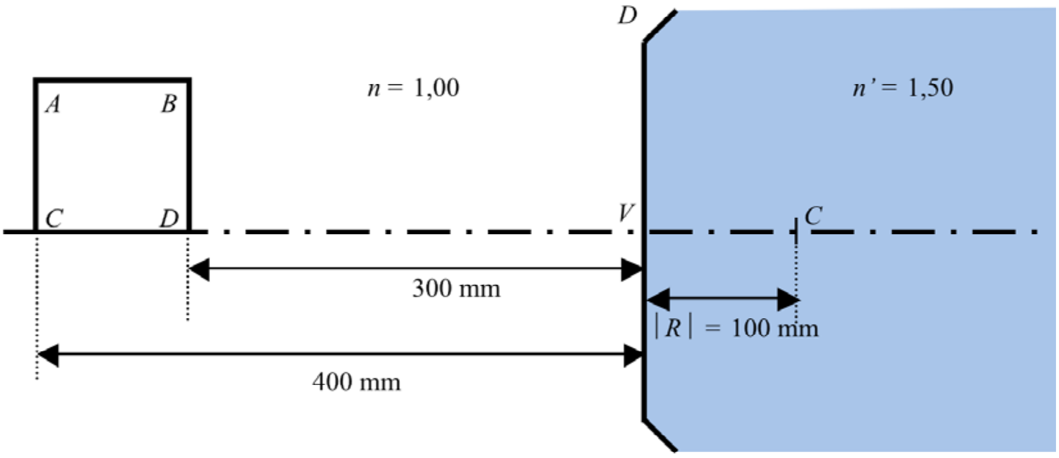


Figura 6

e) Finalmente: $\dfrac{n'}{n} = -\dfrac{f'}{f}$; $\quad \dfrac{n'}{n} = -\dfrac{10}{-20} = \dfrac{1}{2}$.

12. Sea un dioptrio esférico, convexo, de radio $|R|$ =100 mm e índices n = 1,00 y n' = 1,50. Un objeto de forma cuadrada *ABCD*, de 100 mm de lado, se situa delante del dioptrio según se muestra en la figura.
Determina:
a) La posición de los 4 puntos *A'B'C'D'*.
b) Dibuja la forma de la imagen.



SOLUCIÓN:

a) Potencia del dioptrio:

$$P' = \frac{n' - n}{R}; \quad n = 1{,}00;\ n' = 1{,}50;\ R = 100 \text{ mm} = 0{,}100 \text{ m.}$$

$$P' = \frac{1{,}50 - 1{,}00}{0{,}100} = 5 \text{ D}; \qquad P = -P' = -5 \text{ D.}$$

Distancias focales:

$$f' = \frac{n'}{P'} = \frac{1{,}50}{5} = 0{,}300 \text{ m} = 300 \text{ mm.}$$

$$f = \frac{n}{P} = \frac{1{,}00}{-5} = -0{,}200 \text{ m} = -200 \text{ mm.}$$

Posición de *C'* y *D'*:

$$-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = P'; \qquad \frac{n'}{s'} = P' + \frac{n}{s} = \frac{P's + n}{s}; \qquad s' = \frac{n's}{n + P's} \quad (1)$$

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's}; \qquad y' = \frac{n\dfrac{n's}{n+P's}}{n's}y; \qquad y' = \frac{ny}{n+P's} \quad (2)$$

Sustituyendo en (1) y (2): $s = s_C = -400$ mm; $n = 1{,}00$; $n' = 1{,}50$ y $P' = \dfrac{5}{1000}$ mm^{-1} se obtiene:

$$s'_{C'} = \frac{1{,}50(-400)}{1{,}00 + \dfrac{5}{1000}(-400)} = 600 \text{ mm}.$$

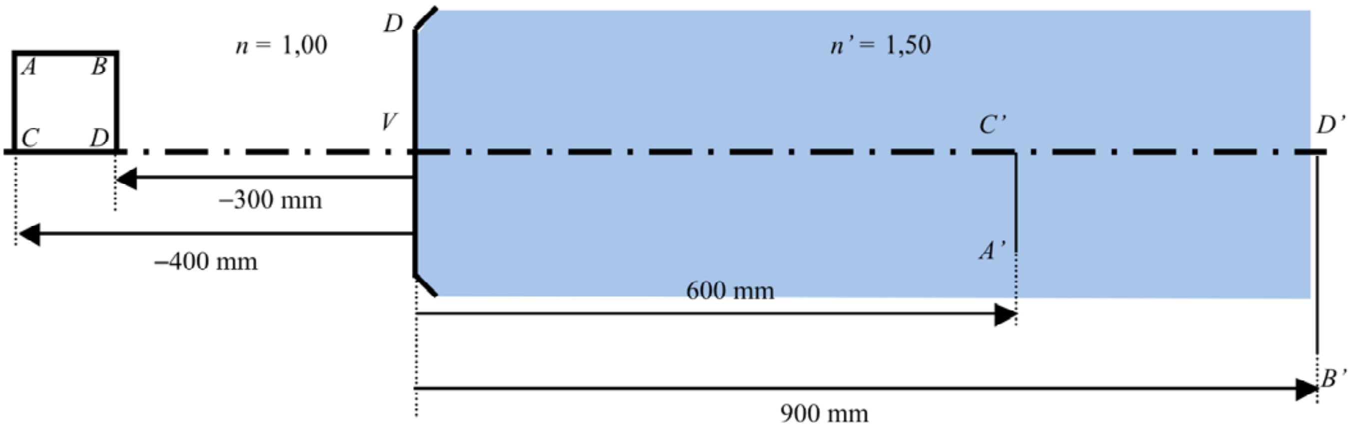
$$C'A' = y' = \frac{1{,}00(100)}{1{,}00 + \dfrac{5}{1000}(-400)} = -100 \text{ mm}.$$

Procediendo de la misma manera para: $s = s_D = -300$ mm; $n = 1{,}00$; $n' = 1{,}50$ y $P' = \dfrac{5}{1000}$ mm^{-1} se obtiene:

$$s'_{D'} = \frac{1{,}50(-300)}{1{,}00 + \dfrac{5}{1000}(-300)} = 900 \text{ mm}.$$

$$D'B' = y' = \frac{1{,}00(100)}{1{,}00 + \dfrac{5}{1000}(-300)} = -200 \text{ mm}.$$

La posición de los puntos *A'B'C'D'* es la que se muestra en la figura:



Vemos que la imagen de los puntos *A'B'C'D'* no es proporcional a los puntos *ABCD*.

b) Queda por determinar la imagen del segmento horizontal *AB*. En la figura se observa que, debido a que el augmento lateral depende de la posición del objeto, la imagen del segmento horizontal *AB* no será un segmento horizontal. Determinemos la curva que une los puntos situados entre *A'* y *B'* en este caso.

Despejando *s* en (1) se obtiene (3). Despejando *y* en (2) y substituyendo *s* por (3) se obtiene (4).

$$s = \frac{ns'}{n' - P's'} \qquad (3)$$

$$y = \frac{n'y'}{n' - P's'} \qquad (4)$$

Consideremos en caso general de un segmento *AB* de ecuación $y = as + b$.

La imagen formada por el dioptrio esférico vendrá de sustituir en la ecuación anterior los valores de *s* e *y* por los de las ecuaciones (3) y (4).

$\dfrac{n'y'}{n' - P's'} = a\dfrac{ns'}{n' - P's'} + b$. Operando se obtiene:

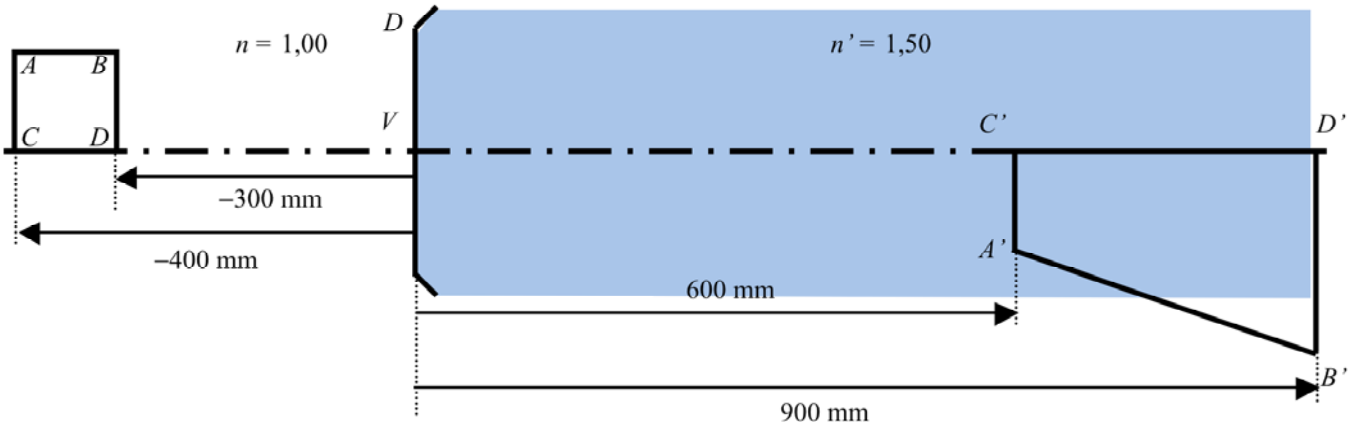
$y' = \left(\dfrac{an - bP'}{n'}\right)s' + b$. Lo que significa que la imagen de un segmento recto es otro segmento recto.

Obsérvese que el resultado obtenido es independiente de la concavidad o convexidad del dioptrio, sin embargo debe tenerse en cuenta que el segmento *AB* no contenga el punto que satisface $s = f$, o, dicho de otro modo, el segmento *AB* no debe cortar el plano focal objeto *F*.

En nuestro caso el segmento *AB*, por ser horizontal (*a* = 0), se representa por la recta de ecuación $y = b$. La recta imagen será:

$y' = -\dfrac{bP'}{n'}s' + b$. Teniendo en cuenta que *b* = 100 mm, *n'* = 1,50 y $P' = \dfrac{5}{1000}\ \text{mm}^{-1}$.
El valor de *y'* en los puntos *s'*= 600 mm y *s'*= 900 mm toma los valores respectivos de *y'* = –100 mm e *y'* = –200 mm.

Así pues, la imagen del segmento *AB* será el segmento de recta que une los puntos *A'* y *B'*.

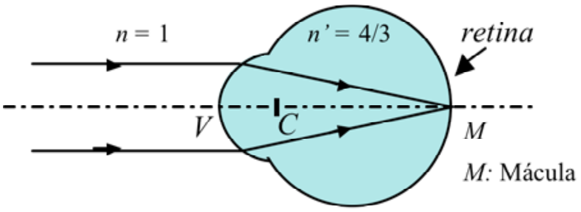


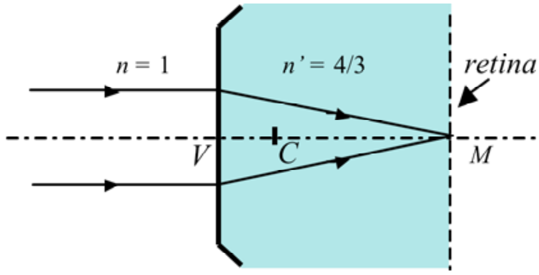
La imagen formada no es proporcional al objeto.

En el caso general de que el objeto tenga una forma dada por $y = f(s)$ la forma de la imagen viene dada por:

$y' = \frac{n' - P's'}{n'} f\left(\frac{ns'}{n' - P's'}\right) = h(s')$, lo que significa que, en gneral, la forma del objeto y de la imagen no coinciden.

13. Desde mediados de siglo XIX, con el afán de simplificar los estudios de los fenómenos ópticos que ocurren en el ojo, se establecieron patrones teóricos y matemáticos del mismo. El patrón más sencillo es el del **ojo reducido** en el que el ojo **emétrope**, u ojo que enfoca un objeto situado en el infinito, se modeliza como un dioptrio esférico convexo de 60,00 D de potencia que separa dos medios de índices n = 1,00 y n' = 4/3.





Determina para este modelo de ojo:
a) Las focales.
b) La dimensión axial, *VM*.
b) El radio de curvatura.

SOLUCIÓN:

$$a)\ \ f' = \frac{n'}{P'}; \qquad f' = \frac{\frac{4}{3}}{60{,}00} = \frac{4}{3.60{,}00} = 0{,}02222 \text{ m} = 22{,}22 \text{ mm}.$$

$$f = \frac{n}{P}; \qquad f = \frac{1}{-60{,}00} = -16{,}67 \text{ m} = -16{,}67 \text{ mm}..$$

b) $VM = f'$ = 22,22 mm.

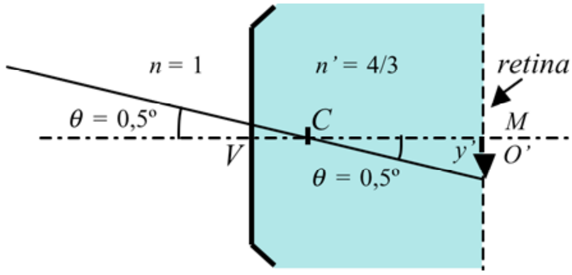
c) $R = f + f' = -16{,}67 + 22{,}22 = 5{,}55$ mm.

---

14. Un observador emétrope está mirando un objeto situado en el infinito, que subtiende un ángulo de 0,5º. Teniendo en cuenta el modelo de ojo reducido determina:
a) La posición de la imagen.
b) El carácter de la imagen.
c) El tamaño de la imagen.
d) La orientación de la imagen.

SOLUCIÓN:

Consideramos el modelo de ojo reducido con: n = 1; n' = 4/3; f = –16,67 mm; f' = 22,22 mm y R = 5,55 mm.



a) Por estar el objeto en el infinito la imagen se forma en el plano focal imagen o plano de la retina.

$s' = VO' = f' = 22{,}22$ mm;

b) A la vista de la figura la imagen es real.

c) $y' = CO' \tan\theta$; $\quad CO' = CV + VO' = -5{,}55 + 22{,}22 = 16{,}67$ mm.

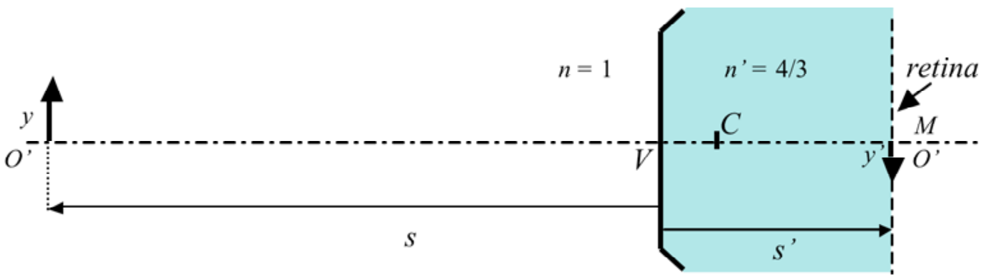
$y' = 16{,}67 \tan\left(0{,}5^\circ\right) = 0{,}145$ mm.

d) La imagen es invertida.

---

15. En el proceso de visión el ojo enfoca sobre la retina los objetos situados a diferentes distancias de él. El proceso de enfoque se denomina acomodación y en el caso del ojo reducido consiste en variar la potencia del dioptrio de forma que la imagen se sitúe en la retina. Determina:
a) La potencia.
b) Las focales.
c) El radio de curvatura.
d) El tamaño de la imagen retiniana.
Cuando un ojo emétrope mira un objeto de 100 mm de altura situado a:
i) 10,00 m.
ii) 1,00 m.
iii) 0,50 m.

SOLUCIÓN:



i) $s = -10{,}00$ m.

a) Aplicando la ecuación de Descartes en notación de vergencias:

$-S+S'=P'$; $n = 1$; $n' = 4/3$;

$s = -10{,}00$ m; $S=\dfrac{n}{s}=\dfrac{1{,}00}{-10{,}00}=-\,0{,}10$ D.

$s' = 0{,}02222$ m. $S'=\dfrac{n'}{s'}=\dfrac{\frac{4}{3}}{0{,}02222}=60{,}00$ D.

$-S+S'=P'$; $-(-0{,}10)+60{,}00=P'$ $P'=60{,}10$ D.

$P = -P' = -60{,}10$ D.

b) $f'=\dfrac{n'}{P'}$; $f'=\dfrac{\frac{4}{3}}{60{,}10}=\dfrac{4}{3.60{,}10}=0{,}02218 \text{ m}=22{,}18 \text{ mm}.$

$f=\dfrac{n}{P}$; $f=\dfrac{1}{-60{,}10}=-\,0{,}01664 \text{ m}=-\,16{,}64 \text{ mm}.$

c) $R = f' + f = 22{,}18 - 16{,}64 = 5{,}54$ mm.

d) $m=\dfrac{y'}{y}=\dfrac{S}{S'}$; $y = 100$ mm; $\dfrac{y'}{100}=\dfrac{(-0{,}10)}{60{,}00}$; $y' = -0{,}167$ mm.

ii) $s = -1{,}00$ m.

a) $-S+S'=P'$; $n = 1$; $n' = 4/3$;

$s = -1{,}00$ m; $S=\dfrac{n}{s}=\dfrac{1{,}00}{-1{,}00}=-\,1{,}00$ D.

$s' = 0{,}02222$ m. $S'=\dfrac{n'}{s'}=\dfrac{\frac{4}{3}}{0{,}02222}=60{,}00$ D.

$-S+S'=P'$; $-(-1{,}00)+60{,}00=P'$ $P'=61{,}00$ D.

$P = -P' = -61{,}00$ D.

b) $f'=\dfrac{n'}{P'}$; $f'=\dfrac{\frac{4}{3}}{61{,}00}=\dfrac{4}{3.61{,}00}=0{,}02185 \text{ m}=21{,}85 \text{ mm}.$

$$f = \frac{n}{P}; \qquad f = \frac{1}{-61{,}00} = -0{,}01639 \text{ m} = -16{,}39 \text{ mm.}$$

c) $R = f' + f = 21{,}85 - 16{,}39 = 5{,}46$ mm.

d) $m = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{S}{S'}$; $\qquad y = 1000$ mm; $\qquad \dfrac{y'}{100} = \dfrac{(-1{,}00)}{60{,}00}$; $\qquad y' = -1{,}67$ mm.

iii) $s = -0{,}50$ m.

a) $-S + S' = P'$; $\qquad n = 1$; $n' = 4/3$;

$s = -0{,}50$ m; $\qquad S = \dfrac{n}{s} = \dfrac{1{,}00}{-0{,}50} = -2{,}00$ D.

$s' = 0{,}02222$ m. $\qquad S' = \dfrac{n'}{s'} = \dfrac{\frac{4}{3}}{0{,}02222} = 60{,}00$ D.

$-S + S' = P'$; $\qquad -(-2{,}00) + 60{,}00 = P' \qquad P' = 62{,}00$ D.

$P = -P' = -62{,}00$ D.

b) $f' = \dfrac{n'}{P'}$; $\qquad f' = \dfrac{\frac{4}{3}}{62{,}00} = \dfrac{4}{3.62{,}00} = 0{,}02150 \text{ m} = 21{,}50$ mm.

$f = \dfrac{n}{P}$; $\qquad f = \dfrac{1}{-62{,}00} = -0{,}01613 \text{ m} = -16{,}13$ mm.

c) $R = f' + f = 21{,}50 - 16{,}13 = 5{,}37$ mm.

d) $m = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{S}{S'}$; $\qquad y = 100$ mm; $\qquad \dfrac{y'}{100} = \dfrac{(-2{,}00)}{60{,}00}$; $\qquad y' = -3{,}33$ mm.

La tabla siguiente muestra los resultados obtenidos:

s (m)	*S* (D)	*s'* (mm)	*S'* (D)	*P'* (D)	*f'*	*f*	*R* (mm)
∞	0	22,22	60,0	60,0	22,22	–16,67	5,55
–10,0	–0,10	22,22	60,0	60,1	22,18	–16,67	5,55
–1,0	–1,0	22,22	60,0	61,0	21,85	–16,39	5,46
–0,5	–2,0	22,22	60,0	62,0	21,50	–16,13	5,37

16. El punto más cercano que el ojo puede enfocar se llama punto próximo (*PP*) y el punto más alejado que el ojo puede enfocar se llama punto remoto (*PR*). En el caso del ojo emétrope el *PR* está situado en el infinito mientras que la posición del *PP* varía con la edad. La vergencia del punto próximo, S_{PP}, expresada en dioptrías, y la edad *E*, expresada en años, están relacionadas de forma aproximada mediante la fórmula de Hofstetter: $S_{PP} = -\left(18{,}5 - \frac{E}{3}\right)$. Determina:

a) La vergencia del punto próximo.
b) La posición del punto próximo.
c) La potencia del ojo reducido cuando enfoca al punto próximo.
En el caso de un observador emétrope cuya edad es:
i) 18 años.
ii) 48 años.

SOLUCIÓN:

i) Observador emétrope de 18 años de edad:

a) $S_{PP} = -\left(18{,}5 - \frac{E}{3}\right) = -\left(18{,}5 - \frac{18}{3}\right) = -12{,}5$ D.

b) $s_{PP} = \frac{n}{S_{PP}} = \frac{1}{-12{,}5} = -0{,}080\text{ m} = -80\text{ mm}.$

c) $-S + S' = P'$; $S = S_{PP} = -12{,}5\text{ D}$; $S' = 60\text{ D}$.

$-(-12{,}5) + 60 = P'$; $P' = 72{,}5$ D.

ii) Observador emétrope de 48 años:

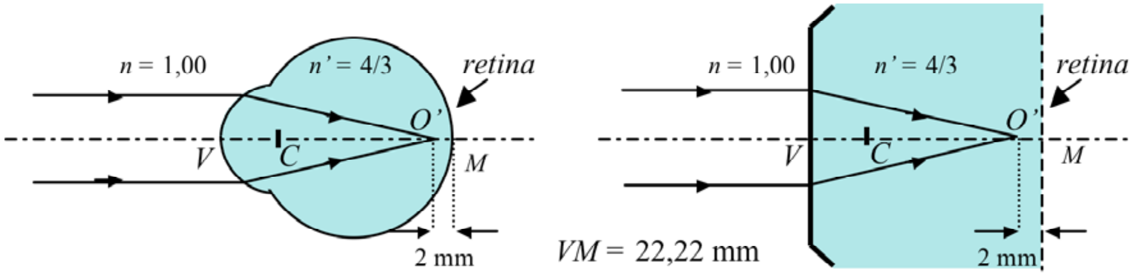
a) $X_{PP} = -\left(18{,}5 - \frac{E}{3}\right) = -\left(18{,}5 - \frac{48}{3}\right) = -2{,}5$ D.

b) $s_{PP} = \frac{1}{S_{PP}} = \frac{1}{-2{,}5} = -0{,}400\text{ m} = -400\text{ mm}.$

c) $-S + S' = P'$; $S = S_{PP} = -2{,}5\text{ D}$; $S' = 60\text{ D}$.

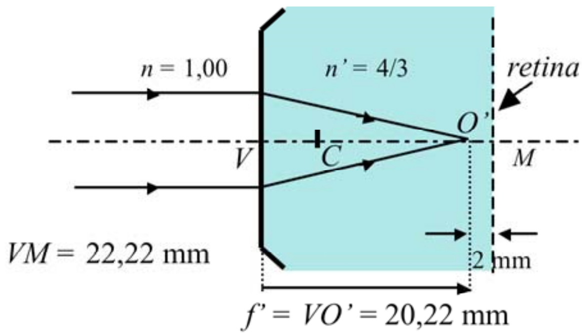
$-(-2{,}5) + 60 = P'$; $P' = 62{,}5$ D.

17. El ojo miope se caracteriza por formar delante de la retina la imagen de un objeto situado en el infinito. Sea un ojo miope donde la distancia entre el punto imagen y la retina es de 2 mm. Teniendo en cuenta los índices del ojo reducido y tomando *VM* = 22,22 mm. Determina:



a) La potencia del ojo miope.
b) Las focales del ojo miope.
c) El radio de curvatura del ojo miope.
d) La posición dónde debe situarse el objeto (*PR*) de manera que la imagen que forme el ojo miope esté situada en la retina.

SOLUCIÓN:

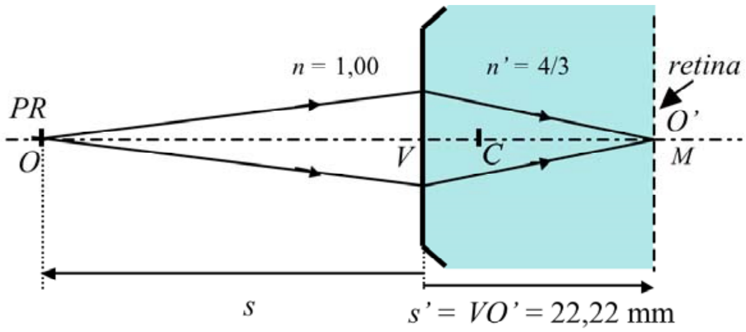


a) *f'* = *VO'* = 22,22 − 2 = 20,22 mm.

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}; \qquad \frac{20,22}{f} = -\frac{\frac{4}{3}}{1} = -\frac{4}{3}; \qquad f = -\,15,16 \text{ mm.}$$

b) *f* + *f'* = *R*; *R* = − 15,16 + 20,22 = 5,06 mm.

c) $P' = \dfrac{n'}{f'} = \dfrac{\frac{4}{3}}{0,02022} = \dfrac{4}{3.0,02022} = 65,94$ D. $\qquad P = -\,P' = -65,94$ D.

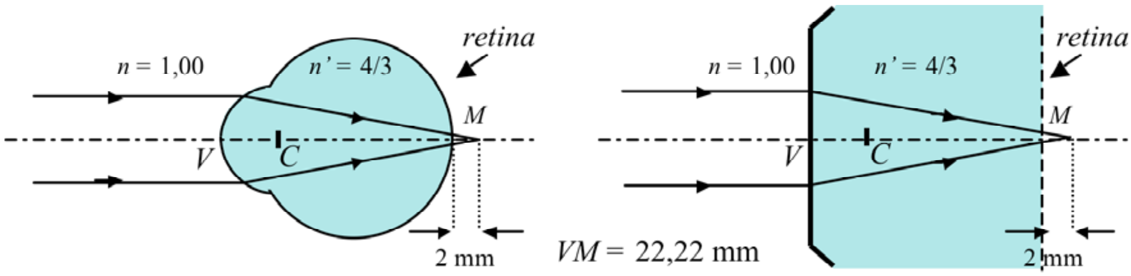


d) $-S + S' = P'$; $\quad S' = \dfrac{n'}{s'} = \dfrac{\frac{4}{3}}{0{,}02222} = 60\ \text{D}$. $\quad P' = 65{,}94$ D.

$-S + 60 = 65{,}94$; $\quad S = -5{,}94$ D; $\quad s = \dfrac{n}{S} = \dfrac{1}{-5{,}94} = -0{,}168\ \text{m} = -168\ \text{mm}$.

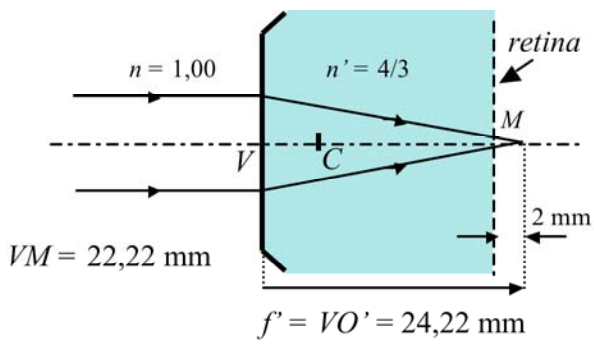
---

18. El ojo hipermétrope se caracteriza por formar detrás de la retina la imagen de un objeto situado en el infinito. Sea un ojo hipermétrope donde la distancia entre el punto imagen y la retina sea de 2 mm. Teniendo en cuenta los índices del ojo reducido y tomando *VM* = 22,22 mm. Determina:



a) La potencia del ojo hipermétrope.
b) Las focales del ojo hipermétrope.
c) El radio de curvatura del ojo hipermétrope.
d) La posición dónde debe situarse el objeto (*PR*) de manera que la imagen que forme el ojo hipermétrope esté situada en la retina.

SOLUCIÓN:



a) $f' = VO' = 22{,}22 + 2 = 24{,}22$ mm.

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}; \qquad \frac{24{,}22}{f} = -\frac{\frac{4}{3}}{1} = -\frac{4}{3}; \qquad f = -18{,}17 \text{ mm.}$$

b) $f + f' = R$; $\qquad R = -18{,}17 + 24{,}22 = 6{,}05$ mm.

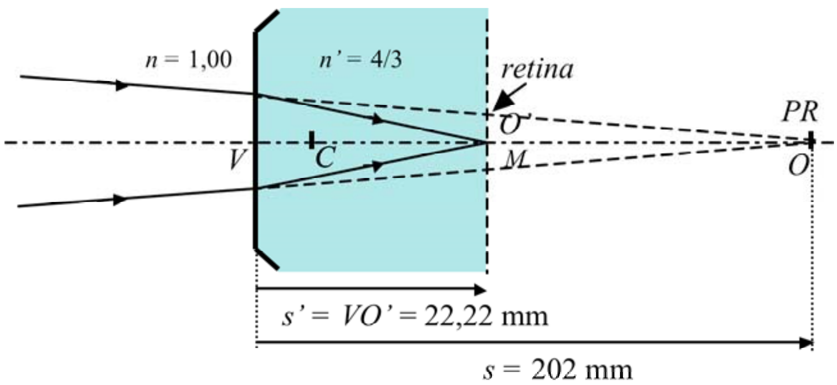
c) $$P' = \frac{n'}{f'} = \frac{\frac{4}{3}}{0{,}02422} = \frac{4}{3.0{,}02022} = 55{,}05 \text{ D.}$$

$P = -P' = -55{,}05$ D.

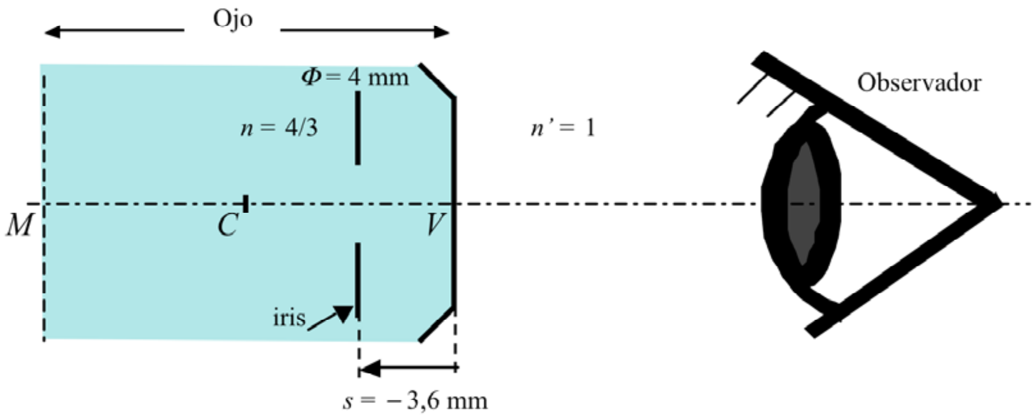
d) $$-S + S' = P'; \qquad S' = \frac{n'}{s'} = \frac{\frac{4}{3}}{0{,}02222} = 60 \text{ D}. \quad P' = 55{,}05 \text{ D.}$$

$$-S + 60 = 55{,}05; \qquad S = 4{,}95 \text{ D}; \qquad s = \frac{n}{S} = \frac{1}{4{,}95} = 0{,}202 \text{ m} = 202 \text{ mm.}$$

Obsérvese que en este caso el *PR* es virtual.



19. Al mirar el iris de cualquier ojo, lo que se ve no es el iris como tal sino la imagen que la córnea forma de dicho iris. Sabiendo que la distancia entre la córnea y el iris es de 3,6 mm, que el diámetro de la pupila es de $\Phi = 4$ mm y que la potencia de la córnea es de 40,00 D. Determina:
a) La posición de la imagen del iris a través de la córnea.
b) El aumento lateral de la imagen.
c) El tamaño de la imagen de la pupila.



SOLUCIÓN:

a) Aplicando la ecuación de Descartes: $-\dfrac{n}{s}+\dfrac{n'}{s'}=P'$. Despejando: $s'=\dfrac{n'\,s}{P'\,s+n}$.

Tomando: n = 4/3; n' = 1; s = –3,6 mm;

$$P'=40{,}00\;D=40{,}00\,\frac{1}{\text{m}}\,\frac{1\text{ m}}{1000\text{ mm}}=0{,}04000\,\frac{1}{\text{mm}}.$$

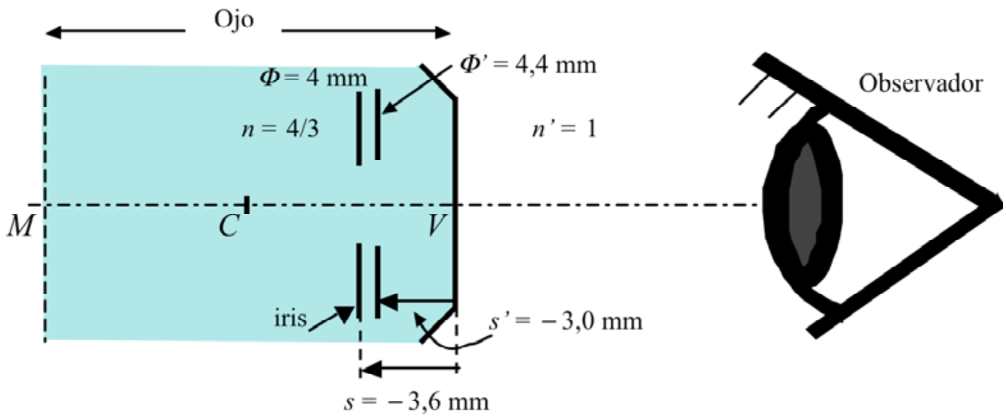
Sustituyendo: $s'=\dfrac{1.(-3{,}6)}{0{,}04000(-3{,}6)+\dfrac{4}{3}}=-\,3{,}0$ mm. Lo que significa que la imagen es virtual.

b) $m=\dfrac{y'}{y}=\dfrac{n\,s'}{n'\,s}=\dfrac{\frac{4}{3}(-3{,}0)}{1(-3{,}6)}=1{,}1$.

El tamaño de la imagen de la pupila será:

$m=\dfrac{\Phi'}{\Phi}$; $\quad 1{,}1=\dfrac{\Phi'}{4}$; $\quad \Phi'=4{,}4$ mm.

La figura siguiente muestra la imagen del iris a través de de la córnea.


Ojo
$\Phi = 4$ mm
$\Phi' = 4{,}4$ mm
Observador
$n = 4/3$
$n' = 1$
M
C
V
iris
$s' = -3{,}0$ mm
$s = -3{,}6$ mm