DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA IV
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

PROPOSTA D'ACTIVITATS DIRIGIDES PER A UN CURS DE CÀLCUL

Curs 2009-10

Coordinació: S.C. López

Altres autors: C. Dalfó, C. Huemer i E. Tramuns

Presentació

La proposta que presentem ha estat utilitzada en l'assignatura de Càlcul de l'EPSC, en el marc dels graus: Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació i Grau en Enginyeria Telemàtica que s'han començat a impartir el setembre del 2009.

A més de tres sessions de teoria i una de problemes, aquest curs de Càlcul consta de 14 activitats dirigides (AD), que s'articulen de forma paral·lela a la teoria i els problemes. Al final d'aquest document hi ha un annex amb el temari de l'assignatura. Exceptuant la primera AD, la qual és un test individualitzat, i la darrera, en la que es treballa un aspecte puntual del darrer tema del curs, la resta AD estan recollides en aquest document. L'horari de l'assignatura preveu una sessió d'una hora a la setmana per a cada AD (excepte el test inicial), tot i que quatre de les activitats, les AD4, AD7, AD8 i AD11 comencen en la sessió de teoria. Totes les activitats són en grup excepte el test inicial, l'AD1, i les AD6 i AD9, que són individuals.

Tot seguit, expliquem breument la temàtica treballada en les activitats dirigides. Hi ha dues AD que fan servir recursos informàtics: les AD2 i AD10. La primera, permet una introducció als recursos gràfics (usant programari informàtic) com a complement de l'estudi de les equacions i gràfiques del primer tema. L'objectiu és incorporar la vessant gràfica com a eina habitual en l'estudi de les funcions, i permetre el reconeixement de les gràfiques de les còniques. A més, es treballen algunes propietats de les funcions: caràcter parell/senar, periodicitat, etc. A l'AD10 es treballa la relació entre les equacions de les quàdriques i la seva gràfica. La vessant gràfica com a eina habitual en l'estudi de les superfícies permet identificar els seus elements característics i treballar la intersecció entre diferents superfícies.

Les AD3 i AD12 estan centrades en el treball sobre els errors més comuns detectats en exàmens de quadrimestres anteriors. L'objectiu és que els alumnes millorin la redacció dels exercicis a partir, per una banda, del contrast entre el que es demana en un enunciat i la resposta que s'aporta, i per altra, de la detecció d'errors.

Les AD4, AD7, AD8 i AD11 són activitats tipus puzle. Es penja a ATENEA (la plataforma virtual) un document pdf amb l'explicació teòrica del tema corresponent, distribuïda en tres parts o rols. Abans de la sessió, cada alumne es prepara una part (corresponent al rol que li ha estat assignat). La sessió es desenvolupa en tres fases. En començar la classe, durant 10 minuts, es fa una reagrupació en grups d'experts (alumnes als quals els ha estat assignat el mateix rol) per aclarir dubtes. En una segona fase de 30 minuts, cada alumne (en 10 minuts) explica a la resta del grup formal la seva part. Finalment, els grups resolen exercicis del tema. Els exercicis es lliuren en acabar la classe o al començament de la propera sessió de teoria.

A l'AD5 es revisa el concepte d'extrem absolut i relatiu, així com els mètodes explicats a teoria per al seu càlcul. A l'AD13 es treballa el canvi de coordenades com a mètode de resolució de les integrals dobles (amb especial èmfasi en el canvi a coordenades polars) i la seva aplicació al càlcul de volums de regions limitades per dues superfícies.

Agraïments: Volem expressar el nostre agraïment a la Margarida Espona, pel seu suport i ajuda, i a la Sílvia Gago, per les seves idees i suggerències en la preparació de les activitats dirigides.

Índex

Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball AD 2. Funcions i gràfiques

L'objectiu d'aquesta activitat dirigida és que l'estudiant es familiaritzi amb programari informàtic (lliure) disponible a la xarxa, per treballar les funcions i els seus gràfics. En particular, es pretén treballar: les funcions elementals i les còniques, les seves transformacions elementals i algunes propietats.

1 Programari informàtic

En aquesta secció us suggerim dos programes que podeu trobar en format lliure a la xarxa, però n'hi ha molts més. Fent una recerca amb paraules clau, per exemple: *gràfiques funcions*, trobareu diferents materials que us poden ajudar.

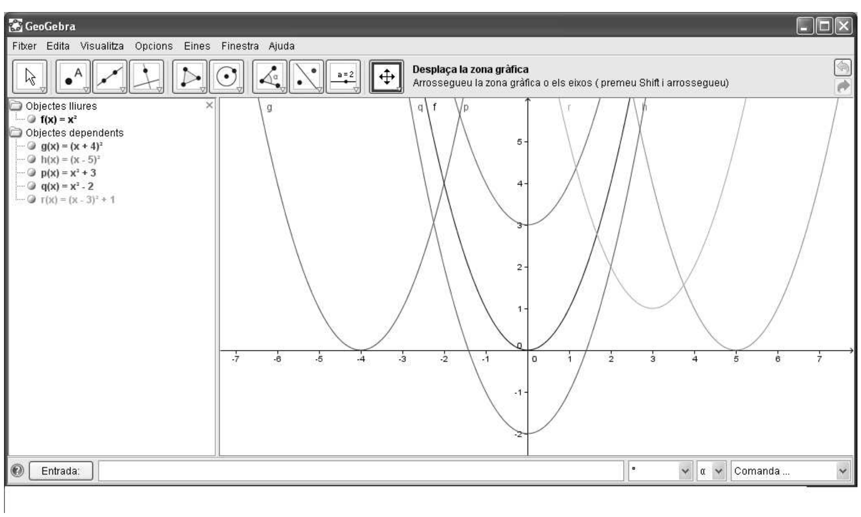
En particular, us suggerim el *GeoGebra* i la calculadora *Wiris*.

GeoGebra

GeoGebra és un programari de distribució lliure i interactiu que combina geometria, àlgebra i càlcul. Podeu trobar informació detallada i el podeu descarregar en:

http://www.geogebra.org/cms/index.php?lang=ca.

El seu aspecte:

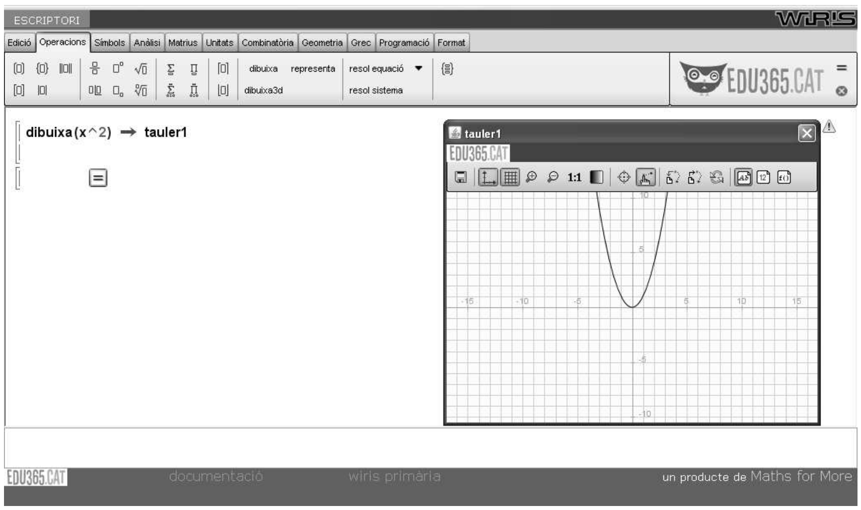


Wiris

La Wiris és una calculadora simbòlica amb diverses funcionalitats com ara calcular límits, derivades, integrals, matrius, unitats de mesura i estadístiques, entre d'altres. A més, permet realitzar gràfics en 3D. (Els necessitarem en el tema de funcions de dues variables.) Podeu trobar informació detallada i utilitzar-la en línia des del web:

http://calculadora.edu365.cat/wiris/ca/index.html

El seu aspecte:



Nota: Trobareu una àmplia proposta d'activitats de matemàtiques realitzades amb Wiris, a *EVAM* (eina d'aprenentatge virtual de les matemàtiques) al web:

http://wiris.upc.es/EVAM/

2 Funcions elementals

Descarregueu la carpeta comprimida *Exemples.zip* d'Atenea. En aquesta carpeta trobareu tres tipus de fitxers:

- **.html* Són fitxers que els podeu obrir amb qualsevol navegador, però heu de tenir una versió actualitzada de Java, ja que contenen aplets.
- **.ggb* Són fitxers generats amb el programa GeoGebra. Cadascun d'ells està vinculat a un fitxer *.html (amb el mateix nom) que s'ha obtingut exportant la construcció interactiva com a pàgina html, a partir del desplegable *Fitxer* del programa GeoGebra.
- **.jar* Són cinc fitxers executables que es generen a partir d'un fitxer *.ggb quan es crea un fitxer *.html. Són necessaris per a la visualització dels fitxers *.html.

En els fitxer d'aquesta carpeta es fa un recorregut per algunes funcions elementals, les seves gràfiques i les còniques. Obriu els fitxers *.html i fixeu-vos en les diferents qüestions que hi ha.

Amb el GeoGebra

Per introduir una funció en el GeoGebra, utilitzem la casella que hi ha a la part inferior, on posa *Entrada*, els desplegables de la vora contenen símbols i algunes funcions que el GeoGebra ja té introduïdes. Un cop introduïda la funció, prement l'*INTRO* del teclat es dibuixa la funció en el tauler gràfic i en el menú de l'esquerra apareix la fórmula de la funció (de vegades en un format diferent de l'introduït):

Exemple 1 Per introduir $f(x) = \sin(\pi x)$ escriurem (ajudant-nos amb el desplegable):

Exemple 2 Si volem dibuixar la funció $\sin(\pi x)$ definida en l'interval $[-2, 3]$ caldrà especificar el domini, amb la instrucció *Funció*:

Exemple 3 Si volem dibuixar la funció definida a trossos,

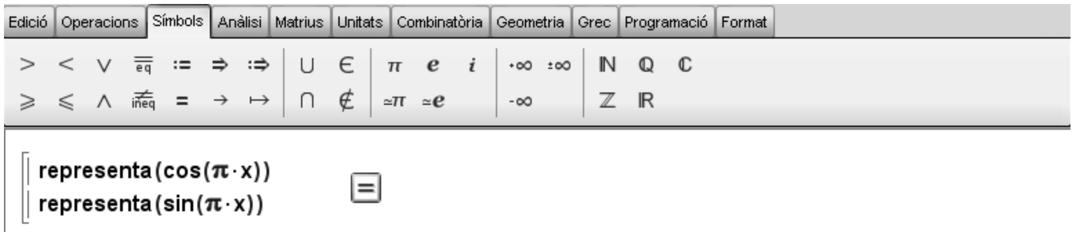
$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 0 \\ \sin(\pi x) + 2, & \text{si } 0 \leq x \leq 3/2 \\ 1. & \text{si } x > 3/2 \end{cases}$$

podem utilitzar la instrucció *Si*

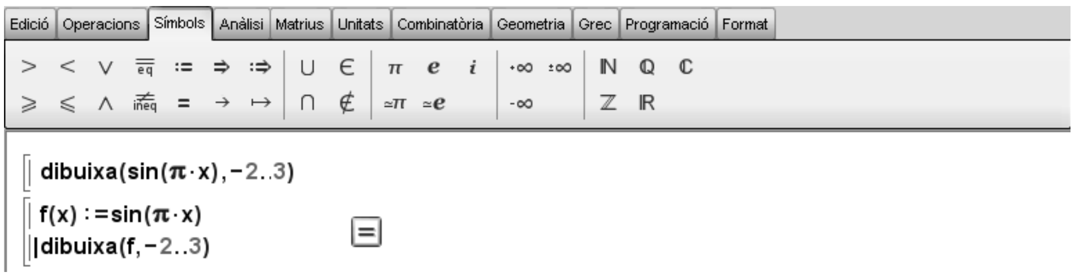
Amb la Wiris

Per dibuixar la gràfica d'una funció amb la Wiris, podem utilitzar la instrucció *dibuixa* o la de *representa*. Els menús que hi ha a la part superior contenen símbols i expressions que la Wiris ja té incorporats. Un cop introduïda la funció, prement el símbol *IGUAL* del teclat es dibuixa la funció en el tauler. Per realitzar més d'una instrucció, cal escriure-les en un mateix bloc. Per afegir línies a un bloc, cal prémer la tecla *INTRO*:

Exemple 1 Per dibuixar les funcions $f(x) = \sin(\pi x)$ i $g(x) = \cos(\pi x)$ escriurem (ajudant-nos amb els diferents menús):



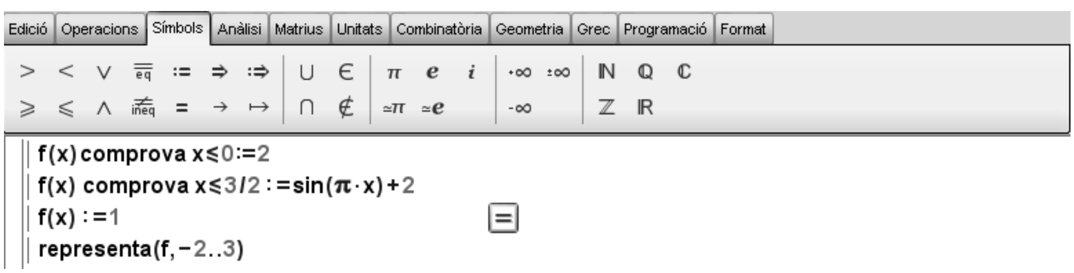
Exemple 2 Si volem dibuixar la funció $\sin(\pi x)$ definida en l'interval $[-2, 3]$ caldrà especificar el domini:



Exemple 3 Si volem dibuixar la funció definida a trossos,

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 0 \\ \sin(\pi x) + 2, & \text{si } 0 \leq x \leq 3/2 \\ 1. & \text{si } x > 3/2 \end{cases}$$

podem utilitzar la instrucció *comprova*:



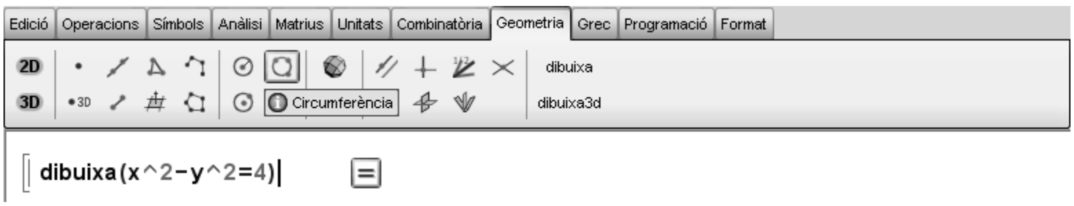
3 Còniques

Amb el GeoGebra

Per dibuixar una cònica amb el GeoGebra, introduïm l'equació en la casella d'*Entrada*. Un cop introduïda l'equació, prement l'*INTRO* del teclat es dibuixa la cònica en el tauler gràfic i en el menú de l'esquerra apareix l'equació (de vegades en un format diferent a l'introduït):

Amb la Wiris

Per dibuixar una cònica amb la Wiris, podem utilitzar la instrucció *dibuixa*, escrivint directament l'equació de la cònica. Un cop introduïda l'equació, prement l'*IGUAL* es dibuixa la cònica en el tauler:



4 Transformacions

En aquesta secció construirem funcions a partir de transformacions elementals d'una funció donada. L'objectiu és identificar la relació entre les gràfiques de les funcions obtingudes i la gràfica de la funció original.

Trieu una funció $f(x)$ i dibuixeu la seva gràfica. A partir d'ella, compareu les gràfiques de les funcions obtingudes per a les transformacions següents:

Considereu un nombre $a > 0$

- $f(x + a)$
- $f(x - a)$
- $f(x) + a$
- $f(x) - a$
- $f(-x)$
- $-f(x)$
- $af(x)$
- $f(ax)$

En els dos darrers casos, estudieu què passa si considereu $0 < a < 1$ o $a > 1$ (Hi ha alguna diferència?)

Repetiu l'estudi per a diferents funcions i diferents valors d'a.

5 Algunes propietats

A més del domini, la imatge, els intervals de creixement/decreixement, de concavitat/convexitat i la presència o no d'extrems relatius i punts d'inflexió, hi ha d'altres característiques que ajuden a completar l'estudi d'una funció. En aquesta secció estudiarem la simetria i la periodicitat.

5.1 Simetria respecte de $x = 0$

Dibuixeu les gràfiques següents:

- $y = x^2$.
- $y = \dfrac{1}{10}x^4 - x^2$.
- $y = \cos x$.

Què podeu dir en termes de simetria?

Extensió parell d'una funció

Activitat 1 Suposeu que us han donat la funció $f(x) = \sin(\pi x)$, definida en $[0, 4]$. Esteneu-la a l'interval $[-4, 4]$ de manera que la funció obtinguda sigui simètrica com les anteriors. Dibuixeu la seva gràfica.

5.2 Simetria respecte de $(0, 0)$

Dibuixeu les gràfiques següents:

- $y = \sin x$.
- $y = \dfrac{1}{5}x^3 - x$.
- $y = \arcsin x$.

Què podeu dir en termes de simetria?

Extensió senar d'una funció

Activitat 2 Suposeu que us han donat la funció $f(x) = x^2$ definida en $[0, 4]$. Esteneu-la a l'interval $[-4, 4]$ de manera que la funció obtinguda sigui simètrica com les anteriors. Dibuixeu la seva gràfica.

5.3 Simetria respecte de $y = x$

Dibuixeu les gràfiques de les parelles de funcions següents:

- $y = \sin x$ i $y = \arcsin x$.
- $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$ en $[0, +\infty)$.
- $y = e^x$ i $y = \ln x$.

Què podeu dir en termes de simetria?

5.4 Periodicitat

Dibuixeu les gràfiques de les funcions següents:

- $y = \sin x$
- $y = \tan x$
- $y = 3\cos(\pi x) - 2\sin(\pi x)$

Què podeu dir en termes de periodicitat?

Extensió periòdica d'una funció

Activitat 3 Suposeu que us han donat la funció $f(t) = e^{-t}$ definida en $[0, 2]$. Esteneu-la a l'interval $[-4, 4]$ de manera que la funció obtinguda sigui periòdica amb període 2. Dibuixeu la seva gràfica.

6 Activitats proposades

1. Llegiu atentament les tres primeres seccions.
2. Realitzeu les activitats de la secció 5.
3. En cadascun dels apartats següents es dóna una funció definida en un interval $I = [a, b]$ (o $I = (a, b)$) de longitud $T = b - a$. Esteneu-la de forma periòdica i dibuixeu la seva gràfica en l'interval $[a - 2T, b + 2T]$ (o $(a - 2T, b + 2T)$).

   (a) $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -1 < t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq t < 1. \end{cases}$

   (b) $f(t) = |t|$, $t \in (-1, 1)$.

   (c) $f(t) = t$, $t \in (-\pi, \pi)$.

   (d) $f(t) = t^2$, $t \in [-\pi, \pi]$.

   (e) $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{si} \quad -\pi \leq t < 0. \end{cases}$ (ona mig rectificada)

   (f) $p_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| \leq 2 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$ (impuls rectangular)

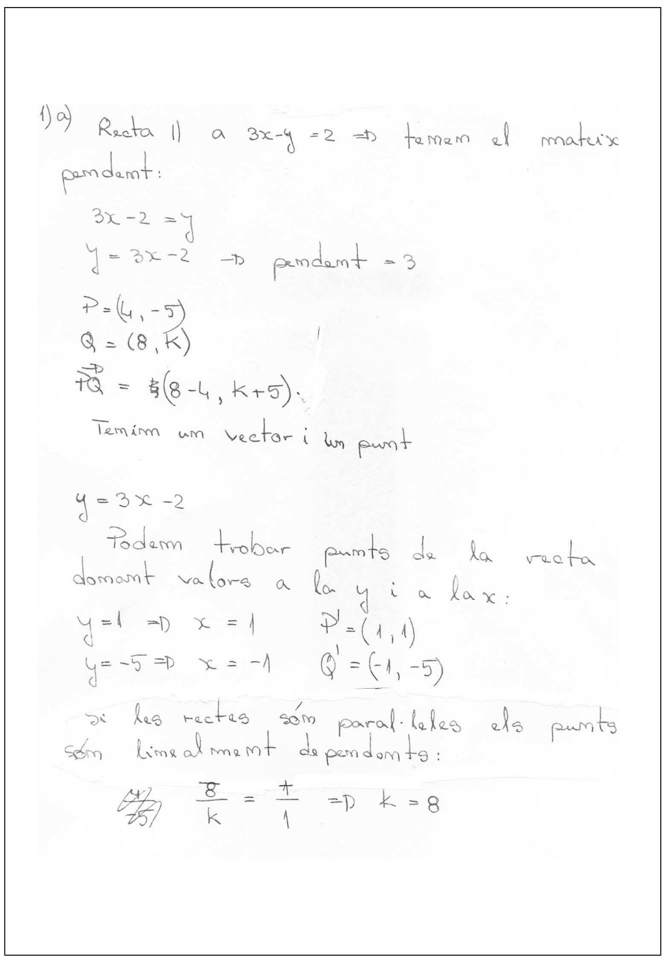
Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball AD 3. Detecció d'errors

A partir dels problemes següents, es presenten diferents propostes de resolució (reals). Llegiu-les i determineu si la resolució és correcta. Justifiqueu la vostra resposta i proposeu una nota. Completeu l'exercici redactant la vostra proposta de resolució.

Rectes

1. Calculeu quant ha de valer k per tal que la recta que passa pels punts $(4, -5)$ i $(8, k)$ sigui paral·lela a la recta $3x - y = 2$.



1) a) Recta $\parallel$ a $3x-y=2 \Rightarrow$ tenem el mateix pendent:

$3x-2=y$

$y=3x-2 \Rightarrow$ pendent $=3$

$P=(4,-5)$

$Q=(8,K)$

$\vec{PQ} = (8-4, K+5)$.

Tenim un vector i un punt

$y=3x-2$

Podem trobar punts de la recta donant valors a la y i a la x:

$y=1 \Rightarrow x=1 \quad P'=(1,1)$

$y=-5 \Rightarrow x=-1 \quad Q'=(-1,-5)$

Si les rectes són paral·leles els punts són linealment dependents:

$\cancel{\frac{4}{5}} \quad \frac{8}{k} = \frac{1}{1} \Rightarrow k=8$

1: a) $(4,-5)$; $(8,k) \in r$

$r \parallel 3x-y=2$

$3x-2=y$

pendiente igual para que sean $\parallel$

$$\left.\begin{array}{l} -5=3\cdot 4+n \\ 8=3k+n \end{array}\right\} \quad n=-17$$

$8=3k-17 \rightarrow \boxed{k=\frac{25}{3}}$

La recta $r \Rightarrow y=3x-17$; pasa por

$(4,-5)$; $\left(8, \frac{25}{3}\right)$

1) r' r

a) $P(4,-5)$ $\quad // \; 3x-y=2$ $\quad r' \rightarrow \frac{x-4}{4}=\frac{y+5}{k+5} \rightarrow (k+5)(x-4)=4y+20$

$P'(8,k)$ $\quad \downarrow$ $\quad \downarrow$

$m=3$ $\quad PP'(4,k+5)$ $\quad kx-4k+5x-20$

$m'=m \rightarrow$ les rectes // tenen el mateix pendent. $\quad kx+5x=m'$

$\hookrightarrow k+5=3$

$\boxed{k=-2}$

Resolució de sistemes: exponencials i logaritmes

2. Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 3\cdot 2^x - 2^y = \frac{-5}{2} \\ 2^{x-y} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

① a) $3\cdot 2^x - 2^y = \frac{-5}{2}$

$2^{x-y} = \frac{1}{8}$

$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

$2^{x-y} = 2^{-3}$

$x - y = -3$

$x = y - 3 \rightarrow x = \frac{-9}{2} - 3 = \frac{-9}{2} - \frac{2\cdot 3}{2} = \frac{-15}{2} = x$

$3\cdot 2^{y-3} - 2^y = -5\cdot 2^{-1}$

$\ln 2^{3y-9} - \ln 2^y = \ln 2^5$

$\frac{2^{3y-9}}{2^y} = 2^5$

$\frac{3y-9}{y} = 5$

$-9 = 5y - 3y$

$-9 = 2y$; $\boxed{y = \frac{-9}{2}}$

3. Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 30 \\ 3^{x+y} = 81 \end{cases}$$

b)

$\begin{cases} 3^x + 3^y = 30 \\ 3^{x+y} = 81 \end{cases}$ $\quad t = 3^x \rightarrow \begin{cases} t + 3^y = 30 \\ t \cdot 3^y = 81 \end{cases}$

$t = 30 - 3^y \rightarrow (30 - 3^y) \cdot 3^y = 81 \rightarrow 90^y - 3^{y^2} = 81$

$\rightarrow -3^y - 3^{y^2} = -3^2 \cdot 5 \cdot 2$

b) Resol:

$4 \quad 3^1 \cdot 10$

$\begin{cases} 3^x + 3^y = 30 \\ 3^{x+y} = 81 \end{cases}$ $\begin{cases} 3^x + 3^y = 30 \\ 3^x \cdot 3^y = 81 \end{cases}$ $\begin{cases} 3^x + 3^y = 30 \\ 3^x \cdot 3^y = 3^4 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 4 \end{cases} \rightarrow x = \frac{4}{y}$

$\frac{4}{y} + y = 10$

$\frac{4 + y^2}{y} = 10$

$y^2 - 10y + 4 = 0$

$y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 16}}{2}$

4. Resoleu:

$$\log_2(4x^3 + 6x^2) - \log_2(\log_3 9^x) = 1.$$

b) $\log_2\left(4x^3+6x^2\right) - \log_2\left(\log_3 9^x\right) = 1$

$\log_2\left(24x^5\right) - \log_2\left(3\right) = 1$

$\log_2\left(\dfrac{24x^5}{3}\right) = 1 \quad \log_2 8x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$

5. Resoleu l'equació $\log_{1/2} x^2 + \log_{1/2}(x^2-3) = 2\log_{1/2} 2$.

b) $\log_{1/2} x^2 + \log_{1/2} (x^2-3) = 2\log_{1/2} 2$

$y = x^2$

$x^2(x^2-3) = 4$

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$y^2 - 3y - 4 = 0$

$\dfrac{3 \pm \sqrt{\underbrace{9-4\cdot(-4)}_{5}}}{2} = \begin{cases} 8/2 = 4 = x_1 \; \begin{cases} \boxed{+2} \\ \boxed{-2} \end{cases} \\ -2/2 = -1 = x_2 \; \begin{cases} +j \\ -j \end{cases} \end{cases}$

b) $\log_{1/2} x^2 + \log_{1/2}(x^2-3) = 2\log_{1/2} 2 = \log_{1/2} 4$

$\longleftrightarrow \quad x^2 + x^2 - 3 = 4$

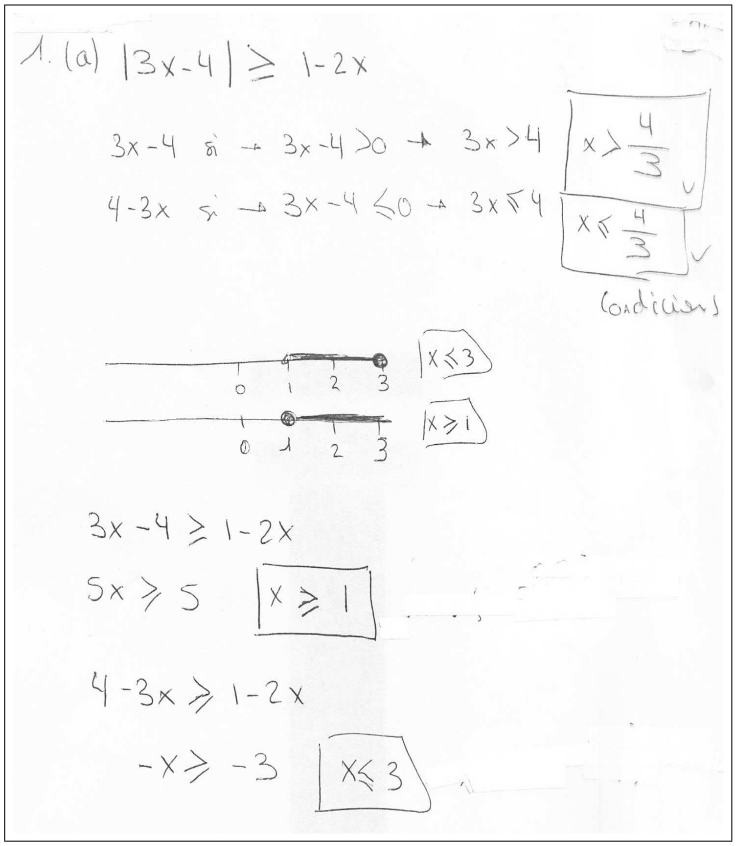
$2x^2 - 7 = 0$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{7}{2}}$

Valor absolut i inequacions

6. Resoleu la inequació:

$$|3x - 4| \geq 1 - 2x.$$



1. (a) $|3x-4| \geq 1-2x$

$3x-4$ si $\rightarrow 3x-4 > 0 \rightarrow 3x > 4$ $\boxed{x > \frac{4}{3}}$ ✓

$4-3x$ si $\rightarrow 3x-4 \leq 0 \rightarrow 3x \leq 4$ $\boxed{x \leq \frac{4}{3}}$ ✓

Condicions

$3x-4 \geq 1-2x$

$5x \geq 5$ $\boxed{x \geq 1}$

$4-3x \geq 1-2x$

$-x \geq -3$ $\boxed{x \leq 3}$

1

a) $|3x-4| \geq 1-2x$:

$$3x-4 \geq \begin{cases} 1-2x \rightarrow 5x \geq 5 \quad \boxed{x \geq 1} \\ 1+2x \rightarrow \boxed{x \geq 5} \text{ — Valor més gran} \end{cases}$$

$3x-4 \geq 1-2x$ si $x \geq \frac{4}{3}$

$-3x+4 \geq 1-2x$ si $x < \frac{4}{3}$

$$3x+4 \geq \begin{cases} 1-2x \rightarrow 5x \geq -3 \quad \boxed{x \geq \frac{-3}{5}} \\ 1+2x \rightarrow \boxed{x \geq -3} \rightarrow \text{Valor més petit} \end{cases}$$

Sempre que la x sigui més ~~gr~~ gran que -3 o igual, la inequació serà certa. Soluci...

7. Donades les funcions $f(x) = |x^2 - 3x|$ i $g(x) = 2x$, trobeu analíticament i gràficament els valors reals on es compleix que $f(x) \geq g(x)$.

$f(x) = |x^2 - 3x|$

$g(x) = 2x$

$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x^2 = 3x \;;\; x = 3$

a) $|x^2 - 3x|$

$x \geq 0 \rightarrow x^2 - 3x \geq 2x \;;\; x^2 \geq 2x + 3x \;;$

$x^2 \geq 5x \;;\quad x \cdot x \geq 5x \;;\quad x \geq \frac{5x}{x} \;;$

$x \geq 5$

$x \leq 0 \rightarrow -x^2 + 3x \geq 2x \;;\; -x^2 \geq 2x - 3x \;;$

$-x^2 \geq -x \quad ; \quad x \leq 1$

$f(x) \geq g(x)$ para $x \geq 5$

$f(x) = \lvert x^2 - 3x \rvert$	x	$g(x) = 2x$
28	-4	-8
10	-2	-4
4	-1	-2
0	0	0
4	1	2
10	2	4
28	4	8

Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball AD 4. Regla de la cadena.

Regla de la cadena

La regla de la cadena s'utilitza per derivar funcions que resulten de la composició d'altres funcions, per exemple: $f(x) = (x^2+4)^7$, és a dir, la potència setena de x^2+4 és la composició de $g(x) = x^7$ amb la funció $u(x) = x^2+4$:

$$x \xmapsto{u} x^2+4 \xmapsto{g} (x^2+4)^7.$$

Per derivar una funció d'aquest tipus, aplicarem la fórmula següent:

$$(g \circ u)'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x).$$

És a dir, derivarem la darrera funció de la composició, g, i l'avaluarem en la primera funció, $u(x)$; l'expressió resultant la multiplicarem per la derivada de la primera funció, u, avaluada en x.

En l'exemple anterior tenim:

$$f(x) = (x^2+4)^7 \longrightarrow f'(x) = 7(x^2+4)^6 \cdot 2x.$$

La fórmula anterior també s'escriu:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Observacions

1. Atenció amb l'ordre: la utilització del "de" ens indica quina és la darrera funció que derivarem. Començarem derivant la primera funció que anomenem parlant.

2. En el cas que la funció resulti de la composició de més de dues funcions aplicarem el procés anterior de forma recursiva, començant sempre per la darrera funció de la composició, és a dir, la primera que anomenem parlant.

   Per exemple, per calcular la derivada de: $f(x) = \cos^3(x^4-5)$, és a dir, *el cub del cosinus de* x^4-5. Derivem primer la potència (i l'avaluem en el $\cos(x^4-5)$), després el cosinus (i l'avaluem en x^4-5) i, finalment, la funció x^4-5:

   $$f'(x) = 3\cos^2(x^4-5) \cdot (-\sin(x^4-5)) \cdot 4x^3 = -12x^3\cos^2(x^4-5) \cdot \sin(x^4-5).$$

Material de preparació: (Rol 1)

Derivació de potències

1. Si l'exponent de la potència és una constant:

$$f(x) = u(x)^n \longrightarrow f'(x) = nu(x)^{n-1}u'(x).$$

Exemple. En el cas que la base sigui la funció $u(x) = 3x^5 - 4x$ i l'exponent 7, obtenim: $f(x) = (3x^5 - 4x)^7 \longrightarrow f'(x) = 7(3x^5 - 4x)^6(15x^4 - 4)$. ∎

2. Si la base de la potència és una constant:

$$f(x) = a^{u(x)} \longrightarrow f'(x) = a^{u(x)} \ln a u'(x).$$

Exemple. $f(x) = 5^{(2x^5 - x)} \longrightarrow f'(x) = 5^{(2x^5 - x)}(10x^4 - 1)\ln 5$. ∎

Derivació de logaritmes

1. Si la base del logaritme és el nombre e (logaritme neperià):

$$f(x) = \ln(u(x)) \longrightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Exemple. $f(x) = \ln(x^5 + 3x) \longrightarrow f'(x) = \dfrac{5x^4 + 3}{x^5 + 3x}$. ∎

2. En general, si la base del logaritme és a:

$$f(x) = \log_a(u(x)) \longrightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)\ln a}.$$

Exemple. $f(x) = \log_3(e^{-x} + x^4) \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\ln 3}\dfrac{-e^{-x} + 4x^3}{e^{-x} + x^4}$. ∎

Material de preparació: (Rol 2)

Derivació de funcions trigonomètriques directes

1. **Sinus:**
$$f(x) = \sin(u(x)) \longrightarrow f'(x) = \cos(u(x)) \cdot u'(x).$$

   Exemple. Si tenim la funció $u(x) = 5x$, aleshores: $f(x) = \sin(5x) \longrightarrow f'(x) = 5\cos(5x)$. ∎

2. **Cosinus:**
$$f(x) = \cos(u(x)) \longrightarrow f'(x) = -\sin(u(x)) \cdot u'(x).$$

   Exemple. $f(x) = 10\cos(3x^2+7) \longrightarrow f'(x) = -60x\sin(3x^2+7)$. ∎

3. **Tangent:**
$$f(x) = \tan(u(x)) \longrightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} \left(= u'(x)(1+\tan^2(u(x)))\right).$$

   Exemple. $f(x) = \tan(3x) \longrightarrow f'(x) = \dfrac{3}{\cos^2(3x)} \left(= 3(1+\tan^2(3x))\right)$. ∎

4. **Cotangent**
$$f(x) = \operatorname{cotan}(u(x)) \longrightarrow f'(x) = \frac{-u'(x)}{\sin^2(u(x))} \left(= -u'(x)(1+\operatorname{cotan}^2(u(x)))\right).$$

   Exemple. $f(x) = \operatorname{cotan}(x^2-3) \longrightarrow f'(x) = \dfrac{-2x}{\sin^2(x^2-3)}$. ∎

Material de preparació: (Rol 3)

Derivació de funcions trigonomètriques inverses

1. **Arcsinus:**

$$f(x) = \arcsin(u(x)) \;\longrightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}.$$

Exemple. Si tenim la funció $u(x) = x^3$, aleshores: $f(x) = \arcsin(x^3) \;\longrightarrow f'(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$. ∎

2. **Arccosinus:**

$$f(x) = \arccos(u(x)) \;\longrightarrow f'(x) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}.$$

Exemple. $f(x) = \arccos(x-1) \;\longrightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} \left(= \dfrac{-1}{\sqrt{2x-x^2}}\right)$. ∎

3. **Arctangent:**

$$f(x) = \arctan\ (u(x)) \;\longrightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$$

Exemple. $f(x) = \arctan(e^x) \;\longrightarrow f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$. ∎

4. **Arccotangent**

$$f(x) = \text{arccotan}\ (u(x)) \;\longrightarrow f'(x) = \frac{-u'(x)}{1+(u(x))^2}.$$

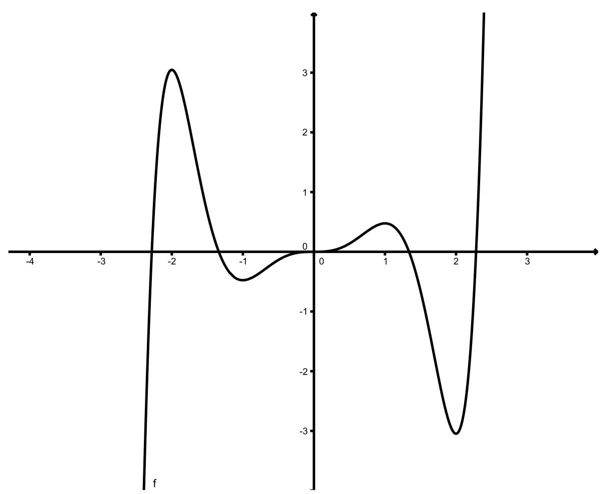
Exemple. $f(x) = \text{arccotan}(\ln x) \;\longrightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{x(1+\ln^2 x)}$. ∎

Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball. Activitat Dirigida 5. Extrems relatius i absoluts.

Resoleu els problemes següents:

1) Marqueu els punts crítics en la gràfica següent.
Indiqueu si es són màxims o mínims (relatius o absoluts) o punts d'inflexió.



2) Calculeu els extrems relatius de la funció $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.
Investigueu si la funció té extrems absoluts en $(-\infty, \infty)$.

3) a) Determineu el vèrtex de la paràbola $y = 4x^2 + 2$ calculant els extrems d'aquesta funció.
És un màxim o un mínim? Dibuixeu la paràbola.
b) Calculeu el vèrtex de la paràbola $x = 8y^2 + 4$. Dibuixeu la paràbola.

4) Estudieu els extrems absoluts de la funció $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (Problema 2.15f de la llista).

5) Calculeu els extrems relatius i absoluts de la funció $f(x) = \ln(e^4 - x^4)$. És pot aplicar el criteri de la segona derivada?

Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball AD 6. Optimització

En aquesta activitat dirigida es planteja que cada estudiant resolgui un problema d'optimització diferent per a cadascú. És, per tant, una activitat dirigida individual.

En els problemes d'optimització hem de resoldre un problema de manera que la solució sigui la millor possible. En un problema real, sovint la millor solució és la més econòmica o la que produeix més beneficis. Formalment, tenim una funció que avalua el cost de la solució i volem minimitzar-la, o bé, tenim una funció que avalua els beneficis de la solució i volem maximitzar-la.

En els problemes d'optimització, hem de calcular extrems de funcions. Els passos per resoldre un d'aquests problemes són:

1. Definir les variables del sistema.
2. Escriure les equacions que relacionen unes variables amb les altres.
3. Escriure la funció a maximitzar o minimitzar en funció de totes les variables que ens calguin.
4. Escriure la funció a maximitzar o minimitzar posant totes les variables en funció d'una sola variable mitjançant les relacions entre les variables.
5. Definir l'interval on es pot trobar l'única variable que tenim. Per exemple, una variable que representi un preu d'un objecte no pot ser negativa ni zero, en aquest cas l'interval del preu seria $(0, \infty)$.
6. Trobar la derivada primera de la funció.
7. Trobar els punts crítics (punts en els quals s'anul·la la derivada primera i punts on la funció no és derivable).
8. Trobar tots els màxims o mínims relatius, utilitzant el criteri de la derivada segona o el de la derivada primera.
9. Trobar el màxim o el mínim absolut de la funció en l'interval de la variable.
10. Trobar, si ho requereix el problema, la solució de totes les variables del problema utilitzant les relacions entre les variables.

Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball AD 6. Optimització

1. Un fil de 100 cm es divideix en dos trossos de longituds x i y. Amb el primer tros es forma un quadrat i amb el segon un cercle.

   (a) Determina quant valen el costat ℓ del quadrat en funció de x i el radi r del cercle en funció de y.

   (b) Calcula x i y per tal que la suma de les àrees del quadrat i del cercle sigui mínima.

2. Volem dissenyar un envàs que tingui forma de prisma rectangular de base quadrada i una capacitat de 80 cm^3. Per a la tapa i la superfície lateral utilitzem un material determinat, mentre que per a la base hem de fer servir un material que és un 50% més car. Calcula les dimensions de l'envàs per tal que el preu sigui el més econòmic possible.

3. Un jardiner ha de crear un parterre de forma rectangular de 16 m^2 de superfície i li ha de posar una tanca al voltant. Quines han de ser les dimensions del parterre si vol que el cost de la tanca sigui mínim?

4. Un cilindre sense tapa ha de contenir 100 m^3. El cost de la base és de 5 euros/m^2 i el de l'àrea lateral és de 2 euros/m^2. Troba el radi r i la longitud ℓ del cilindre que fan que el cost sigui mínim.
   Ajuda: Volum cilindre: $V = \pi r^2 \ell$, àrea base cilindre: $A_{base} = \pi r^2$, àrea lateral cilindre: $A_{lat} = 2\pi r \ell$.

5. Troba la distància mínima del punt $(0, 5)$ a la corba d'equació $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.
   Ajuda: Distància entre els punts (x_1, y_1) i (x_2, y_2): $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

6. La superfície impresa de les pàgines d'un llibre ha de tenir 24 cm^2, amb marges d'un centímetre als dos costats i 1.5 cm a dalt i a baix. Troba les dimensions de les pàgines que permetin fer servir la mínima quantitat de paper.

7. Troba les dimensions del rectangle d'àrea màxima que es pot inscriure en una circumferència de radi 2.

8. Calcula les dimensions del triangles isòsceles d'àrea màxima inscrit en una circumferència de radi 1.

9. Una caixa oberta rectangular de base quadrada ha de contenir 324 litres. El cost per unitat de superfície de la base és 3 vegades el de la superfície lateral. Troba les dimensions més econòmiques.

10. De tots els possibles rectangles amb un perímetre donat P, quin és el d'àrea més gran?

11. La hipotenusa d'un triangle rectangle és 10 cm. Sabent que l'àrea del triangle és màxima, troba els altres dos costats del triangle.

12. Volem construir una llauna cilíndrica de $2000/\pi^2$ cm^3. Quins han de ser el radi r i la longitud ℓ si volem que l'àrea total sigui mínima?
    Ajuda: Volum cilindre: $V = \pi r^2 \ell$, àrea base cilindre: $A_{base} = \pi r^2$, àrea lateral cilindre: $A_{lat} = 2\pi r \ell$.

13. La distància entre dos punts (x_1, y_1) i (x_2, y_2) és

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

    Quina és la distància mínima entre els punts $(5, 5)$ i (x, y) si $y = 2x$?

14. Amb un filferro d'un metre de llarg volem fer una circumferència i un quadrat, de manera que l'àrea total sigui mínima. Quins han de ser els valors del radi de la circumferència i del costat del quadrat?
    Ajuda: Perímetre circumferència: $P = 2\pi r$, àrea circumferència: $A = \pi r^2$.

15. Un rectangle està contingut al primer quadrant, amb els costats paral·lels als eixos de coordenades, un vèrtex a l'origen i el seu vèrtex oposat està situat sobre la corba $y = e^{-x}$. Quines dimensions té el rectangle sabent que la seva àrea és màxima?

16. Tenim un triangle rectangle amb hipotenusa de longitud a. Si el fem girar al voltant d'un dels catets, generem un con circular recte. Troba el màxim volum possible d'aquest con.
    Ajuda: Volum con: $V = \frac{\pi}{3}\pi r^2$.

17. De tots els triangles rectangles de perímetre 20 cm, troba el que té àrea màxima.

18. Calcula les longituds de les arestes d'un prisma recte de base quadrada perquè tingui volum màxim, sabent que la suma de les dues longituds diferents és de 10 cm.

19. Volem vendre un mirall de 70×100 cm a 0.5 euros/cm^2, però se'ns trenca per un costat en un tros en forma de triangle rectangle de 5×7 cm (mesures corresponents als costats petit i gran del mirall). Calcula per on hem de tallar per obtenir un mirall rectangular, suposant que ho fem paral·lelament als costats del mirall original. Quants diners hem perdut?

20. Quines són les dimensions d'un rectangle d'àrea màxima inscrit en el segment de paràbola que determinen $y = x^2$ i $y = 3$?

Solucions:

1. $x = \frac{400}{\pi+4}, \ y = \frac{100\pi}{\pi+4}$.
2. $x = 4, \ y = 5$.
3. $x = 4, \ y = 4$.
4. $r = 2\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}, \ \ell = 5\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$.
5. $d = 4\sqrt{2}$.
6. Dimensió pàgines: 6×9.
7. $2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$.
8. Base: $b = \sqrt{3}$, altura: $h = \frac{3}{2}$.
9. $x = 6, \ y = 9$.
10. $x = \frac{P}{4}, \ y = \frac{P}{4}$.
11. $x = 5\sqrt{2}, \ y = 5\sqrt{2}$.
12. $r = \frac{10}{\pi}, \ \ell = \frac{20}{\pi}$.
13. $d = \sqrt{5}$.
14. $r = \frac{1}{2(\pi+4)}, \ \ell = \frac{1}{\pi+4}$.
15. $x = 1, \ y = \frac{1}{\mathrm{e}}$.
16. $V = \frac{2\pi a^3}{9\sqrt{3}}$.
17. $x = 20 - 10\sqrt{2}, \ y = 20 - 10\sqrt{2}$.
18. $x = \frac{20}{3}, \ y = \frac{10}{3}$.
19. $x = \frac{1055}{14}, \ y = \frac{191}{2}$.
20. Base: $b = 2$, altura: $h = 2$.

Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball AD 7. Integració de funcions racionals.

Funcions racionals i fraccions simples

Les funcions racionals són les funcions que s'expressen com a quocient de dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$:

$$\frac{p(x)}{q(x)}.$$

Si el grau del polinomi del numerador és més gran o igual que el grau del polinomi del denominador, començarem fent la divisió entera de polinomis. D'aquesta manera, la integral original és redueix a la integral d'un polinomi (el quocient de la divisió) més la integral d'una altra funció racional, ara amb el grau del numerador (el residu de la divisió) estrictament més petit que el grau del denominador (el divisor).

Les funcions $\frac{p(x)}{q(x)}$, on $p(x)$ i $q(x)$ són dos polinomis tals que $gr\ p(x) < gr\ q(x)$ i $p(x) \neq kq'(x)$ (on k representa una constant), s'integren a partir de la descomposició en *fraccions simples.* Són fraccions simples les funcions racionals següents:

$$\frac{A}{(x-a)^r}, \text{ o bé, } \frac{Mx+N}{((x-a)^2+b^2)^r},$$

on A, M, N, a, b, r són constants. Per exemple,

$$\frac{3}{(x-2)^3}, \text{ o bé, } \frac{2x-1}{(x-1)^2+3}.$$

La descomposició en fraccions simples de $\frac{p(x)}{q(x)}$ depèn de les arrels del denominador.

Esquema En aquesta activitat dirigida expliquem com integrar les funcions racionals. En el Rol 1, trobem exemples de com es fa la primera simplificació del càlcul usant la divisió entera de polinomis i expliquem un primer tipus d'integrals. En el Rol 2 i el Rol 3, expliquem com integrar les funcions racionals a partir de la seva descomposició en fraccions simples i la integració d'aquestes fraccions simples (ens reduirem al cas d'arrels reals). A la part final, trobem un annex que complementa l'estudi al cas que les arrels del polinomi del denominador no són reals.

Material de preparació: (Rol 1)

Cas $gr\ p(x) \geq gr\ q(x)$

Si el grau del polinomi del numerador és més gran o igual que el grau del polinomi del denominador, començarem fent la divisió entera de polinomis:

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x),$$

on o bé, $gr\ r(x) < gr\ q(x)$ o bé, $r(x) = 0$.

Dividint per $q(x)$ l'expressió anterior, obtenim: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{q(x)c(x)}{q(x)} + \dfrac{r(x)}{q(x)}$. I simplificant, tenim:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

D'aquesta manera, la integral original és redueix a la integral d'un polinomi (el quocient de la divisió) més la integral d'una funció racional, ara amb el grau del numerador (el residu de la divisió) estrictament més petit que el grau del denominador (el divisor):

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int c(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx.$$

Exemple. Per calcular la integral

$$\int \frac{2x^3 + 5x^2 - 12x + 1}{x - 1} dx,$$

comencem fent la divisió entera: $\dfrac{2x^3 + 5x^2 - 12x + 1}{x - 1}$. Com que en aquest cas, el divisor és de primer grau, podem fer la divisió usant la *Regla de Ruffini*:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & -12 & 1 \\ 1 & & 2 & 7 & -5 \\ \hline & 2 & 7 & -5 & |-4 \end{array}$$

El quocient és $c(x) = 2x^2 + 7x - 5$ i el residu $r(x) = -4$. És a dir,

$$\frac{2x^3 + 5x^2 - 12x + 1}{x - 1} = 2x^2 + 7x - 5 + \frac{-4}{x - 1}.$$

Usant aquesta descomposició, resolem la integral: $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 5x^2 - 12x + 1}{x - 1} dx =$

$$= \int (2x^2 + 7x - 5) dx + \int \frac{-4}{x - 1} dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 5x - 4 \ln |x - 1| + C,$$

on C és una constant qualsevol. ▮

Exemple. Per calcular la integral

$$\int \frac{x^5 - 2x^4 + x^3 - 9x^2 + 2x - 4}{x^2 + 1} dx,$$

comencem fent la divisió entera: $x^5 - 2x^4 + x^3 - 9x^2 + 2x - 4 = (x^2 + 1)c(x) + r(x)$.

$$
\begin{array}{rrrrrr|lll}
x^5 & -2x^4 & +x^3 & -9x^2 & +2x & -4 & x^2 & + & 1\\ \cline{7-9}
-x^5 & & -x^3 & & & & x^3 & -2x^2 & -7\\ \cline{1-3}
& -2x^4 & & -9x^2 & & & & & \\
& 2x^4 & & +2x^2 & & & & & \\ \cline{2-4}
& & & -7x^2 & +2x & -4 & & & \\
& & & +7x^2 & & 7 & & & \\ \cline{4-6}
& & & & 2x & +3 & & &
\end{array}
$$

El quocient és $c(x) = x^3 - 2x^2 - 7$ i el residu $r(x) = 2x + 3$. És a dir,

$$\frac{2x^3 + 5x^2 - 12x + 1}{x - 1} = x^3 - 2x^2 - 7 + \frac{2x + 3}{x^2 + 1}.$$

Usant aquesta descomposició, resolem la integral: $\displaystyle\int \frac{x^5 - 2x^4 + x^3 - 9x^2 + 2x - 4}{x^2 + 1} dx =$

$$= \int (x^3 - 2x^2 - 7)dx + \int \frac{2x + 3}{x^2 + 1} dx = \int (x^3 - 2x^2 - 7)dx + \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{3}{x^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 7x + \ln(x^2 + 3) + 3 \arctan x + C,$$

on C és una constant qualsevol. ∎

Com hem vist en els exemples anteriors, utilitzant la divisió entera de polinomis, podem reduir la integral de qualsevol funció racional a la suma de dues integrals: una d'un polinomi, i l'altra d'una funció racional, però ara, amb *el grau del numerador estrictament més petit que el grau del denominador.*

Cas $gr\ p(x) < gr\ q(x)$ i $p(x) = kq'(x)$, k constant

Com hem vist en la introducció, la divisió entera de polinomis ens permet reduir les integrals de les funcions racionals a integrals racionals on el grau del polinomi del numerador és estrictament més petit que el grau del polinomi del denominador.

En aquest cas, hi ha una primera situació que s'ha de comprovar abans de començar a fer càlculs: $p(x) = kq'(x)$, on k és una constant, és a dir, si el numerador és un múltiple constant de la derivada del denominador.

Aquesta situació és un cas particular d'una de més general, on la funció a integrar és el quocient de dues funcions i la funció del numerador és un múltiple constant de la derivada del denominador. La integral en aquest cas més general és la constant pel logaritme neperià del valor absolut de la funció que hi ha al denominador més una constant:

$$\int \frac{kq'(x)}{q(x)}dx = k \ln |q(x)| + C.$$

Exemple. Considerem la integral:

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 - 5}{x^4 + 8x^3 - 20x + 7}dx.$$

En aquest cas, el polinomi del numerador verifica: $\frac{1}{4}(4x^3 + 24x^2 - 20x) = x^3 + 6x^2 - 5$. Per tant, podem integrar directament (multiplicant per una constant adequada).

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 - 5}{x^4 + 8x^3 - 20x + 7}dx = \frac{1}{4} \int \frac{4(x^3 + 6x^2 - 5)}{x^4 + 8x^3 - 20x + 7}dx = \frac{1}{4} \ln |x^4 + 8x^3 - 20x + 7| + C,$$

on C és una constant qualsevol. ∎

Material de preparació: (Rol 2)

Cas $gr\ p(x) < gr\ q(x)$, $p(x) \neq kq'(x)$ i $q(x)$ amb arrels reals simples

En aquest cas, escriurem la funció racional com a suma de fraccions simples:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = F_1 + \ldots + F_n$$

i integrarem aquestes fraccions.

El tipus de fraccions simples que apareixen en la descomposició depèn de les arrels del polinomi del denominador.

Suposem que $q(x) = a_n(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$, on $a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ són constants i $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$ (és a dir, totes les arrels són simples). Aleshores, existeixen unes constants $A_1, \ldots, A_n$ tals que:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}.$$

Per trobar $A_1, \ldots, A_n$ sumem les fraccions simples i imposem la igualtat de les dues fraccions (atenció amb el coeficient del terme dominant):

$$\frac{A_1}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n} = \frac{A_1(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) + \cdots + A_n(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{n-1})}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)}.$$

D'on, multiplicant numerador i denominador per a_n, ha de complir-se que:

$$p(x) = a_n \left(A_1(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) + \cdots + A_n(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{n-1})\right).$$

Igualant els coeficients dels polinomis o, alternativament, avaluant els polinomis en n valors diferents, es planteja un sistema amb n equacions i incògnites $A_1, \ldots, A_n$. En aquest darrer cas, és recomanable avaluar l'expressió anterior en les arrels del polinomi $q(x)$.

Observació Si és polinomi del denominador no és mònic, també podem plantejar:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \frac{1}{a_n}\int \frac{p(x)}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)}\,dx. \qquad (1)$$

Exemple.

Escrivim els passos a seguir per resoldre la integral

$$I = \int \frac{7-x}{5x^2+5x-10}dx = \frac{1}{5}\int \frac{7-x}{x^2+x-2}dx.$$

1. Com el grau del numerador és més petit que el grau del denominador passem al pas següent.

2. Calculem la descomposició factorial del polinomi del denominador (Ruffini):

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2).$$

Com totes les arrels són simples, la fracció pot expressar-se de la forma:

$$\frac{7-x}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2},$$

on A i B són constants adequades (que cal trobar).

3. Tornant a sumar les fraccions simples, calculem aquestes constants:

$$\begin{aligned} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} &= \frac{A(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{B(x-1)}{(x+2)(x-1)}, \\ \frac{7-x}{x^2+x-2} &= \frac{A(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{B(x-1)}{(x+2)(x-1)}. \end{aligned}$$

Igualant els numeradors: $7 - x = A(x+2) + B(x-1)$ i donant valors a x (avaluem en les arrels, ja que d'aquesta forma els càlculs són més simples), trobem A i B:

- Per a $x = 1: \quad 6 = 3A \rightarrow \ A = 2.$
- Per a $x = -2: \quad 9 = -3B \rightarrow \ B = -3.$

4. Substituint ara per la descomposició en fraccions simples, integrem:

$$I = \frac{1}{5}\left[\int \frac{2dx}{x-1} - \int \frac{3dx}{x+2}\right] = \frac{1}{5}\left[2\ln|x-1| - 3\ln|x+2| + C\right],$$

on C és una constant qualsevol.

▮

Exemple. Escrivim els passos a seguir per resoldre la integral $I = \displaystyle\int \frac{3x-10}{2x^2-3x+1}dx$.

1. Com el grau del numerador és més petit que el grau del denominador passem al pas següent.

2. Calculem la descomposició factorial del polinomi del denominador (Ruffini):

$$2x^2 - 3x + 1 = 2(x - \frac{1}{2})(x-1).$$

Utilitzant la igualtat anterior, tenim:

$$\int \frac{3x-10}{2x^2-3x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3x-10}{(x-\frac{1}{2})(x-1)}dx.$$

Com que totes les arrels són simples, la fracció pot expressar-se de la forma:

$$\frac{3x-10}{(x-\frac{1}{2})(x-1)} = \frac{A}{x-\frac{1}{2}} + \frac{B}{x-1},$$

on A i B constants adequades (que cal trobar).

3. Tornant a sumar les fraccions (que s'anomenen simples), calculem aquestes constants:

$$\begin{aligned} \frac{A}{x-\frac{1}{2}} + \frac{B}{x-1} &= \frac{A(x-1)}{(x-\frac{1}{2})(x-1)} + \frac{B(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})(x-1)}, \\ \frac{3x-10}{(x-\frac{1}{2})(x-1)} &= \frac{A(x-1)}{(x-\frac{1}{2})(x-1)} + \frac{B(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})(x-1)}. \end{aligned}$$

Igualant els numeradors, obtenim: $3x-10 = A(x-1) + B(x-\frac{1}{2})$ i donant valors a x (avaluem en les arrels, ja que d'aquesta forma els càlculs són més simples), trobem A i B:

- Per a $x = 1:\quad -7 = \frac{1}{2}B \rightarrow\; B = -14.$
- Per a $x = \frac{1}{2}:\; -\frac{17}{2} = -\frac{1}{2}A \rightarrow\; A = 17.$

4. Substituint ara per la descomposició en fraccions simples, integrem:

$$I = \frac{1}{2}\left[\int \frac{17dx}{x-\frac{1}{2}} + \int \frac{-14dx}{x-1}\right] = \frac{1}{2}\left[17\ln\left|x-\frac{1}{2}\right| - 14\ln|x-1| + C\right],$$

on C és una constant qualsevol.

∎

Material de preparació: (Rol 3)

Arrels reals múltiples ($gr\ p(x) < gr\ q(x)$, $p(x) \neq q'(x)$)

Suposem que $q(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_n)^{k_n}$, on $k_1, \dots k_n$ són nombres naturals més grans o igual que 1; $a_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ són constants i $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$. Aleshores, existeixen unes constants $A_{11}, \dots, A_{1k_1}, \dots, A_{n1}, \dots, A_{nk_n}$ tals que:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \cdots + \frac{A_{n1}}{x-\alpha_n} + \cdots + \frac{A_{nk_n}}{(x-\alpha_n)^{k_n}}.$$

(És a dir, per a cada arrel α de multiplicitat k de $q(x)$, tenim $\dfrac{A_1}{(x-\alpha)} + \dfrac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \dfrac{A_k}{(x-\alpha)^k}$, on $A_1, \dots, A_k$ són constants.)

Per trobar $A_{11}, \dots, A_{nk_n}$ sumen les fraccions simples i imposem la igualtat de les dues fraccions (atenció amb el coeficient del terme dominant):

$$\frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_{nk_n}}{(x-\alpha_n)^{k_n}} = \sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,k_i}} \frac{A_{ij}(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_i)^{k_i-j}\cdots(x-\alpha_n)^{k_n}}{(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_n)^{k_n}}.$$

D'on, multiplicant numerador i denominador per a_n, ha de complir-se que:

$$p(x) = a_n \sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,k_i}} A_{ij}(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_i)^{k_i-j}\cdots(x-\alpha_n)^{k_n}.$$

Igualant els coeficients dels polinomis o, alternativament, avaluant els polinomis en $m =$ gr $q(x)$ valors diferents, es planteja un sistema amb m equacions i incògnites $A_{11}, \dots, A_{nk_n}$. En aquest darrer cas, és recomanable avaluar l'expressió anterior en les arrels del polinomi $q(x)$.

Observació Si és polinomi del denominador no és mònic, també podem plantejar:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \frac{1}{a_n}\int \frac{p(x)}{(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_n)^{k_n}}\,dx. \tag{2}$$

Exemple.

Escrivim els passos a seguir per resoldre la integral

$$I = \int \frac{3x^2 - x - 10}{x^3 + x^2 - x - 1}dx.$$

1. Com el grau del numerador és més petit que el grau del denominador passem al pas següent.

2. Calculem la descomposició factorial del polinomi del denominador (Ruffini):

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)^2(x-1).$$

La fracció original pot expressar-se de la forma:

$$\frac{3x^2 - x - 10}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1},$$

on A, B, i C són constants adequades (que cal trobar).

Observació Com que en la descomposició factorial del polinomi del denominador, l'exponent de $x+1$ és 2 (la multiplicitat de l'arrel -1 és 2), hi ha dues fraccions simples relacionades amb $x+1$. En canvi, $x-1$ només aporta una fracció simple perquè té exponent 1.

3. Tornant a sumar les fraccions calculem aquestes constants:

$$\frac{3x^2 - x - 10}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{A(x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} + \frac{B(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} + \frac{C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)}.$$

Igualant els numeradors, tenim:

$$3x^2 - x - 10 = A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2$$

i donant valors a x (avaluem en les arrels, ja que d'aquesta forma els càlculs són més simples, i en algun altre valor, perquè hi ha tres incògnites) trobem A, B i C:

- Per a $x = 1: \quad -8 = 4C \rightarrow \ C = -2.$
- Per a $x = -1: \quad -6 = -2B \rightarrow \ B = 3.$
- Per a $x = 0: \quad -10 = -A - B + C \rightarrow \ -10 = -A - 3 - 2 \ A = 5.$

4. Substituint ara per la descomposició en fraccions simples, integrem:

$$I = \int \frac{5}{x+1}dx + \int \frac{3}{(x+1)^2}dx - \int \frac{2}{x-1} = 5\ln|x+1| - \frac{3}{x+1} - 2\ln|x-1| + C,$$

on C és una constant qualsevol.

∎

Exemple.

Escrivim els passos a seguir per resoldre la integral:

$$I = \int \frac{4}{x^3(x-1)^2}dx.$$

1. Com el grau del numerador és més petit que el grau del denominador passem al pas següent.

2. En aquest cas, com que ja tenim la descomposició factorial del polinomi del denominador, podem plantejar directament la descomposició en fraccions simples de la fracció donada:

$$\frac{4}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2},$$

on $A,\ B,\ C,\ D$ i E són constants adequades (que cal trobar).

Observació En aquest cas, el factor x aporta tres fraccions simples i $x-1$ n'aporta dues.

3. Tornant a sumar les fraccions calculem aquestes constants:

$$\frac{4}{x^3(x-1)^2} = \frac{Ax^2(x-1)^2}{x^3(x-1)^2} + \frac{Bx(x-1)^2}{x^3(x-1)^2} + \frac{C(x-1)^2}{x^3(x-1)^2} + \frac{Dx^3(x-1)}{x^3(x-1)^2} + \frac{Ex^3}{x^3(x-1)^2}.$$

Igualant els numeradors, obtenim:

$$4 = Ax^2(x-1)^2 + Bx(x-1)^2 + C(x-1)^2 + Dx^3(x-1) + Ex^3.$$

Donant valors a x (avaluem en les arrels, ja que d'aquesta forma els càlculs són més simples, i algun altre valor, perquè hi ha sis incògnites) trobem les constants:

- Per a $x = 0: \quad 4 = C.$
- Per a $x = 1: \quad 4 = E.$
- Per a $x = 2: \quad 4 = 4A + 2B + C + 8D + 8E \rightarrow\ -32 = 4A + 2B + 8D$ (1).
- Per a $x = -1: \quad 4 = 4A - 4B + 4C + 2D - E \rightarrow\ -8 = 4A - 4B + 2D$ (2).
- Per a $x = -2: \quad 4 = 36A - 18B + 9C + 24D - 8E \rightarrow\ 0 = 36A - 18B + 24D$ (3).

Aïllant D de l'equació (2): $D = 2B - 2A - 4$ (4) i substituint en (1) i (3), obtenim:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & -6A + 9B \ (5) \\ 96 & = & -12A + 30B \ (6) \end{array} \right.$$

Restant 2 vegades l'equació (5) a l'equació (6), obtenim: $96 = 12B \Rightarrow B = 8$. Substituint B en l'equació (5), obtenim: $0 = -6A + 72 \Rightarrow A = 12$. Finalment, substituint A i B en l'equació (4) trobem D: $D = -12$.

4. Substituint ara per la descomposició en fraccions simples, integrem:

$$I = \int \frac{12}{x}dx + \int \frac{8}{x^2}dx + \int \frac{4}{x^3} + dx + \int \frac{-12}{x-1}dx + \int \frac{4}{(x-1)^2}dx$$

$$= 12\ln|x| - \frac{8}{x} - \frac{2}{x^2} - 12\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C,$$

on C és una constant qualsevol.

∎

Annex

Integració de fraccions simples del tipus $\dfrac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$

Considerem la descomposició:

$$\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2} = \frac{M}{2}\,\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2} + \frac{Ma+N}{(x-a)^2+b^2}.$$

A partir d'aquesta descomposició, la integral es resol de la manera següent:

$$\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}dx + (Ma+N)\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}dx =$$

$$\underbrace{\overset{(*)}{=}} \frac{M}{2}\ln((x-a)^2+b^2) + \frac{Ma+N}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C.$$

Per a resoldre la segona integral de $(*)$ es planteja el canvi de variable: $t = \frac{x-a}{b}$. D'on, $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}dx =$

$$= \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{\left(\frac{(x-a)}{b}\right)^2+1}dx \underbrace{=}_{bdt=dx} \frac{1}{b}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{b}\arctan t + C \underbrace{=}_{t=\frac{x-a}{b}} \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C.$$

Exemple. Així, per integrar $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+1}$, considerem

$$\int \frac{3x}{x^2+1}dx + \int \frac{4}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{4}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + 4\arctan x + C.$$

∎

Exemple. La integral $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3}dx$ es pot calcular directament fent servir la fórmula: $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}dx = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C.$

$$\int \frac{1}{x^2+3}dx = \int \frac{1}{x^2+(\sqrt{3})^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}x}{3} + C.$$

(**Atenció** Cal tenir en compte que en el denominador tipus de la integral inicial hi ha una suma de quadrats, per això escrivim $3 = (\sqrt{3})^2$.) ∎

Exemple. Per resoldre la integral $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^2+2x+5}$, comencem buscant les arrels del denominador. En aquest cas, l'equació $x^2+2x+5=0$ no admet solucions reals. Completant quadrats, podem escriure el denominador com

$$x^2+2x+5 = (x+1)^2+2^2.$$

És a dir,

$$\int \frac{x-5}{x^2+2x+5}dx =$$

$$= \int \frac{x+1}{(x+1)^2+4}dx + \int \frac{-6}{(x+1)^2+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x+1)^2+2^2}dx - 6\int \frac{1}{(x+1)^2+2^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln((x+1)^2+4) - \frac{6}{2}\arctan(\frac{x+1}{2}) + C,$$

on C és una constant qualsevol. ▮

Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball AD 8. Integració per canvi de variable.

Integració per canvi de variable: funcions irracionals

La integració per canvi de variable és el mètode que s'utilitza en integrals del tipus

$$\int f(g(x))g'(x)dx.$$

L'estructura de la funció a integrar s'assembla a l'estructura de les integrals quasi-immediates. La diferència és que, enlloc de f', ara tenim una funció f. El procés que seguirem per integrar aquest tipus de funcions consisteix en introduir un canvi de variable, que transforma la integral en una de més senzilla, trobarem la primitiva d'aquesta última i, finalment, desfarem el canvi:

1. Considerem el canvi $t = g(x)$ derivant respecte de x:

$$dt = g'(x)dx.$$

2. Substituïm en la integral, i trobem (*si és factible*) una primitiva de $f(t)$:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C.$$

3. Finalment, desfem el canvi:

$$F(t) + C = F(g(x)) + C.$$

Exemple $I = \int \sin(3x+1)dx$.

Plantegem el canvi: $t = 3x + 1 \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt$, i substituïm:

$$I = \int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin t dt = \frac{-1}{3}\cos t + C.$$

Finalment, desfem el canvi: $I = \frac{-1}{3}\cos(3x+1) + C$.

Esquema En aquesta activitat dirigida treballarem la integració de funcions irracionals per canvi de variable. En el Rol 1, treballarem les funcions en les quals hi ha radicals de polinomis de primer grau. En el Rol 2 i Rol 3 treballarem la integració de dos tipus funcions amb arrels quadrades. Un tercer tipus d'aquestes funcions està detallat a l'Annex.

Material de preparació: (Rol 1)

Integrals del tipus $\int F(\sqrt[m]{ax+b}, x)dx$, on a, b són constants

El canvi de variable $ax + b = t^m$, transforma les integrals d'aquest tipus, en integrals sense radicals. En aquest cas, derivant respecte de x, obtenim:

$$adx = mt^{m-1}dt.$$

Exemple. Per integrar

$$I = \int x\sqrt{x+4}dx,$$

plantegem $t^2 = x + 4 \to 2tdt = dx$. Substituïm a la integral:

$$I = \int x\sqrt{x+4}dx = \int (t^2-4)t \cdot 2tdt = 2\int (t^4 - 4t^2)dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{8}{3}t^3 + C,$$

on C és una constant qualsevol.

Finalment, desfent el canvi:

$$I = \frac{2}{5}\sqrt{x+4}^5 - \frac{8}{3}\sqrt{x+4}^3 + C.$$

∎

Material de preparació: (Rol 2)

Integrals del tipus $\int F(\sqrt{a^2-x^2}, x)dx$, on a és una constant

El canvi de variable $x = a\sin t$ transforma les integrals d'aquest tipus en integrals sense radicals. En aquest cas, derivant respecte de x, obtenim:

$$dx = a\cos t dt.$$

Exemple. Per integrar

$$I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}},$$

plantegem $x = 3\sin t \to dx = 3\cos t dt$. Substituïm a la integral:

$$I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{9\sin^2 t \cdot 3\cos t dt}{\sqrt{9-9\sin^2 t}} = \int \frac{9\sin^2 t \cdot 3\cos t dt}{\sqrt{9(1-\sin^2 t)}} \underbrace{=}_{\cos^2 t = 1-\sin^2 t}$$

$$= \int \frac{9\sin^2 t \cdot 3\cos t}{3\cos t} dt = 9\int \sin^2 t dt.$$

Considerant ara la relació: $\sin^2 A = \frac{1-\cos(2A)}{2}$, la integral es pot escriure com:

$$I = 9\int \frac{1-\cos(2t)}{2} dt = \frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\sin(2t) + C,$$

on C és una constant qualsevol.

Finalment, desfent el canvi, obtenim: $x = 3\sin t$, $1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \cos^2 t \to \cos t = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$, i com que $\sin(2A) = 2\sin A\cos A$, obtenim

$$\sin(2t) = \frac{2}{9}x\sqrt{9-x^2},$$

i d'aquí

$$I = \frac{9}{2}\arcsin(\frac{x}{3}) - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C,$$

on C és una constant qualsevol.

∎

Exemple. La integral

$$I = \int \sqrt{1-4x^2} dx,$$

pot reduir-se a una integral d'aquest tipus, ja que:

$$\sqrt{1-4x^2} = \sqrt{4(\frac{1}{4}-x^2)} = 2\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - x^2}.$$

Plantegem el canvi $x = \frac{1}{2}\sin t \to dx = \frac{1}{2}\cos t dt$. Substituïm a la integral:

$$I = 2\int\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - x^2}dx = 2\int\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2}\sin t)^2}\cdot\frac{1}{2}\cos t dt = \frac{1}{2}\int\cos^2 t dt.$$

Considerant ara la relació: $\cos^2 A = \frac{1+\cos(2A)}{2}$, la integral es pot escriure com:

$$I = \frac{1}{2}\int\frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}\sin(2t) + C,$$

on C és una constant qualsevol.

Finalment, desfent el canvi: $x = \frac{1}{2}\sin t$, $1-(2x)^2 = \cos^2 t \to \cos t = \sqrt{1-4x^2}$, i com que $\sin(2A) = 2\sin A\cos A$, obtenim:

$$\sin(2t) = 4x\sqrt{1-4x^2},$$

i d'aquí,

$$I = \frac{1}{4}\arcsin(2x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2} + C,$$

on C és una constant qualsevol. ∎

Material de preparació: (Rol 3)

Integrals del tipus $\int F(\sqrt{a^2+x^2}, x)dx$, on a és una constant

El canvi de variable $x = a\tan t$, transforma les integrals d'aquest tipus en integrals sense radicals. En aquest cas, derivant respecte de x, obtenim:

$$dx = a(1+\tan^2 t)dt.$$

Exemple. Per integrar

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx,$$

plantegem $x = \tan t \rightarrow dx = (1+\tan^2 t)dt$. Substituïm a la integral:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}(1+\tan^2 t)dt \underbrace{=}_{1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}(\frac{1}{\cos^2 t})dt = \int \frac{dt}{\cos t}.$$

Aquesta darrera integral, que no conté cap radical, es pot resoldre fent un nou canvi de variable: $u = \sin t \rightarrow du = \cos t dt$. Introduint aquest canvi, la integral es transforma en una de tipus racional:

$$I = \int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{\cos dt}{\cos^2 t} \underbrace{=}_{\cos^2 t = 1-\sin^2 t} \int \frac{du}{1-u^2}.$$

Recordem que les integrals de tipus racional es resolen buscant la descomposició en fraccions simples, a partir de la descomposició factorial del polinomi del denominador. Com $1-u^2 = -(u^2-1) = -(u-1)(u+1)$, la fracció es pot escriure com:

$$\frac{1}{1-u^2} = -\frac{1}{u^2-1} = -\left(\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}\right) \rightarrow 1 = A(u+1)+B(u-1).$$

Si avaluem en les arrels, obtenim:

- $u = 1:$ $\quad 1 = 2A \rightarrow A = \frac{1}{2}$,
- $u = -1:$ $\quad 1 = -2B \rightarrow B = \frac{-1}{2}$.

Finalment, tenim que

$$I = -\left(\int \frac{\frac{1}{2}}{u-1}dt - \int \frac{\frac{1}{2}}{u+1}dt\right) = -\frac{1}{2}\ln|u-1| + \frac{1}{2}\ln|u+1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + C,$$

on C és una constant qualsevol.

Finalment, desfem els canvis: $x = \tan t \rightarrow 1+x^2 = 1+\tan^2 t$. D'on, $\cos^2 t = \frac{1}{1+x^2}$ i $\sin^2 t = 1-\frac{1}{1+x^2} \rightarrow \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. És a dir, $u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. D'aquí, la integral es pot escriure com:

$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}\right| + C = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C,$$

on C és una constant qualsevol. ∎

Exemple. Donada la integral

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx,$$

la transformació

$$\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4(\frac{1}{4}+x^2)}} = \frac{1}{2\sqrt{(\frac{1}{2})^2+x^2}},$$

la converteix en una d'aquest tipus. Per tant, el canvi:

$$x = \frac{1}{2}\tan t,$$

la redueix a una integral sense radicals. ∎

Annex

Integrals del tipus $\int F(\sqrt{x^2 - a^2}, x)dx$, on a és una constant

El canvi de variable $x = \dfrac{a}{\cos t}$ transforma les integrals d'aquest tipus en integrals sense radicals. En aquest cas, derivant respecte de x, obtenim:

$$dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt.$$

Exemple. Per integrar

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x} dx,$$

plantegem $x = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos t} \to dx = \dfrac{\sqrt{3} \sin t}{\cos^2 t} dt$. Substituïm a la integral:

$$I = \int \frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos t}\right)^2 - 3}}{\frac{\sqrt{3}}{\cos t}} \frac{\sqrt{3} \sin t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{\sqrt{\frac{3 - 3\cos^2 t}{\cos^2 t}}}{\cos t} \sin t dt = \sqrt{3} \int \frac{\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\cos^2 t} \sin t =$$

$$= \sqrt{3} \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt = \sqrt{3} \int \tan^2 t dt = \sqrt{3} \int (1 + \tan^2 t - 1) dt =$$

$$\sqrt{3} \left(\int (1 + \tan^2 t) dt - \int dt \right) = \sqrt{3} (\tan t - t) + C,$$

on C és una constant qualsevol.

Finalment, desfent el canvi: $x = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos t} \to \dfrac{x^2}{3} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$. D'on, $\dfrac{x^2}{3} = 1 + \tan^2 t$, és a dir,

$$\tan t = \sqrt{\frac{x^2 - 3}{3}}.$$

D'aquí,

$$I = \sqrt{3} \left(\sqrt{\frac{x^2 - 3}{3}} - \arctan(\sqrt{\frac{x^2 - 3}{3}}) \right) + C = \sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{3} \arctan(\sqrt{\frac{x^2 - 3}{3}}) + C,$$

on C és una constant qualsevol.

∎

Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball AD 9. Àrees i volums de revolució

En aquesta activitat dirigida es planteja que cada estudiant resolgui un problema d'àrees o volums de revolució diferent per a cadascú. És, per tant, una activitat dirigida individual.

Les integrals definides tenen moltes aplicacions i molt variades. Aquí només en treballem dues, el càlcul d'àrees i de volums de sòlids de revolució.

- **Càlcul d'àrees**
  Si tenim una regió del pla delimitada superiorment per la funció $f_{\text{dalt}}(x)$, inferiorment per $f_{\text{baix}}(x)$, a l'esquerra per la recta vertical $x = a$ i a la dreta per la recta vertical $x = b$, amb $b > a$, l'àrea d'aquesta regió ve donada per la fórmula següent:
  $$A = \int_a^b \left(f_{\text{dalt}}(x) - f_{\text{baix}}(x)\right) dx.$$
  Si en l'interval (a, b), la regió del pla ve delimitada superiorment per més d'una funció, caldrà dividir la regió d'integració en tantes subregions com funcions hi hagi delimitant la regió superiorment. De forma similar, si la regió del pla ve delimitada inferiorment per més d'una funció, també haurem de dividir la regió d'integració en tantes subregions com funcions hi hagi delimitant la regió inferiorment.

  Si la regió del pla ve delimitada a la dreta per la funció $f_{\text{dreta}}(y)$, a l'esquerra per $f_{\text{esq}}(y)$, inferiorment per la recta horitzontal $y = c$ i superiorment per la recta horitzontal $y = d$, amb $d > c$, aleshores l'àrea d'aquesta regió és:
  $$A = \int_c^d \left(f_{\text{dreta}}(y) - f_{\text{esq}}(y)\right) dy.$$
  Si en l'interval (c, d), la regió del pla ve delimitada a la dreta per més d'una funció, caldrà dividir la regió d'integració en tantes subregions com funcions hi hagi delimitant la regió per la dreta. De forma similar, si la regió del pla ve delimitada a l'esquerra per més d'una funció, també haurem de dividir la regió d'integració en tantes subregions com funcions hi hagi delimitant la regió per l'esquerra.

  Evidentment, les àrees trobades amb les dues fórmules han de coincidir.

  Per poder identificar correctament les funcions i les rectes que delimiten la regió d'integració, és aconsellable que es representin gràficament.

- **Càlcul de volums de cossos de revolució**
  Un cos de revolució s'obté en fer girar una regió del pla al voltant d'un eix. Per calcular el seu volum s'utilitzen integrals definides.

  Per calcular el volum d'un cos de revolució obtingut en girar una regió del pla al voltant de l'eix x utilitzem la fórmula següent:
  $$V_x = \pi \int_a^b \left(f^2_{\text{dalt}}(x) - f^2_{\text{baix}}(x)\right) dx.$$

El volum d'un cos de revolució obtingut en girar una regió del pla al voltant de l'eix y és:

$$V_y = \pi \int_c^d \left(f_{\text{dreta}}^2(y) - f_{\text{esq}}^2(y) \right) dy.$$

Evidentment, en general els volums de revolució obtinguts en fer girar una regió del pla al voltant de l'eix x i y no coincideixen: $V_x \neq V_y$.

Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball AD 9. Integrals - Àrees i volums de revolució

1. Calcula el volum de revolució obtingut fent girar respecte l'eix x la regió limitada per $9x^2 + 16y^2 = 25$.
2. Calcula el volum de revolució obtingut fent girar respecte l'eix y la regió limitada per $9x^2 + 16y^2 = 25$.
3. Calcula l'àrea de la regió limitada per la paràbola $y^2 = 4x$ i la recta $y = x - 3$.
4. Calcula l'àrea de la regió limitada per les funcions $y = 20 - x^2$ i $y = 4x^2$.
5. Troba el volum de revolució obtingut al fer girar respecte de l'eix x la figura limitada per la hipèrbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ i la recta $x = 6$.
6. Troba l'àrea determinada per la funció sinus i l'eix d'abscisses des de $x = 0$ fins a $x = \frac{3\pi}{2}$.
7. Calcula el volum d'una esfera, és a dir, el volum de revolució de la circumferència $x^2+y^2 = R^2$.
8. Troba el volum de revolució al voltant de l'eix x de l'el·lipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
9. Troba el volum de revolució respecte l'eix x de la catenària $y = e^{x/2} + e^{-x/2}$, des de $x = 0$ fins a $x = 10$.
10. Troba el volum de revolució obtingut al fer girar respecte de l'eix y la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = 5^{2/3}$, amb $x, y > 0$.
11. Troba l'àrea total de la figura limitada per les corbes $y = x^3$, $y = 2x$ i $y = x$.
12. Troba el volum de revolució del con obtingut al fer girar, al voltant de l'eix y, el segment de la recta que uneix l'origen de coordenades amb el punt $(3, 4)$.
13. Troba el volum de revolució del torus obtingut al fer girar, al voltant de l'eix x, el cercle $x^2 + (y - 5)^2 = 9$.
14. La figura limitada per la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = 5^{2/3}$, amb $x, y > 0$, gira al voltant de l'eix x. Troba el seu volum de revolució.
15. La figura limitada per la corba $y = xe^x$ i les rectes $y = 0$ i $x = 1$ gira al voltant de l'eix x. Troba el seu volum de revolució.
16. La figura limitada per la paràbola $y^2 = 4x$ i la recta $x = 4$ gira al voltant de l'eix x. Troba el seu volum de revolució.
17. Troba el volum engendrat al fer girar respecte de l'eix y la superfície limitada per al corba d'equació $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ i les rectes $x = 1$ i $x = e$.

18. Troba l'àrea de la figura limitada per la corba $y = x^3$ i les rectes $y = 2$ i $y = x$.
19. Troba l'àrea de la figura limitada pel cercle $x^2 + y^2 = 9$ i les rectes $y = x$ i $y = 4x$.
20. Troba l'àrea de la figura limitada per la paràbola $y^2 = x$ i la recta $y = 4 - x$.

Solucions:

1. $V_x = \frac{125\pi}{36}$.
2. $V_y = \frac{125\pi}{27}$.
3. $A = \frac{64}{3}$.
4. $A = \frac{160}{3}$.
5. $V_x = 64\pi$.
6. $A = 3$.
7. $V_x = V_y = \frac{4}{3}\pi R^3$.
8. $V_x = \frac{320\pi}{3}$.
9. $V_x = \pi(e^{10} - e^{-10} + 20)$.
10. $V_y = \frac{400\pi}{21}$.
11. $A = \frac{3}{2}$.
12. $V_y = 12\pi$.
13. $V_x = 90\pi^2$.
14. $V_x = \frac{400\pi}{21}$.
15. $V_x = \frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$.
16. $V_x = 32\pi$.
17. $V_y = \pi(e^2 - 1)$.
18. $A = \frac{9}{4} - \frac{3}{2^{2/3}} \approx 0.36$.
19. $A = \frac{18}{17} + \frac{9\pi}{8} - \frac{9}{2}\,\mathrm{asin}(\frac{1}{\sqrt{17}}) - \frac{9}{4}\sin\left(2\,\mathrm{asin}(\frac{1}{\sqrt{17}})\right) \approx 2.432$.
20. $A = \frac{17\sqrt{17}}{6} \approx 11.682$.

Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball AD 10. Quàdriques amb Wiris

L'objectiu d'aquesta activitat dirigida és que l'estudiant es familiaritzi amb la representació de superfícies a l'espai i identifiqui els seus trets característics. Representarem les quàdriques utilitzant les seves equacions canòniques i treballarem la seva intersecció amb plans.

1 Wiris

L'eina informàtica que farem servir és la calculadora simbòlica Wiris. Tot i que, fins al moment, la representació en tres dimensions (3D) no està tan desenvolupada con la representació en dues dimensions, la possibilitat de fer dues gràfiques simultàniament permet superar aquesta limitació.

Exemple. Si volem representar l'esfera $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5$, aïllarem la variable z de l'equació anterior:

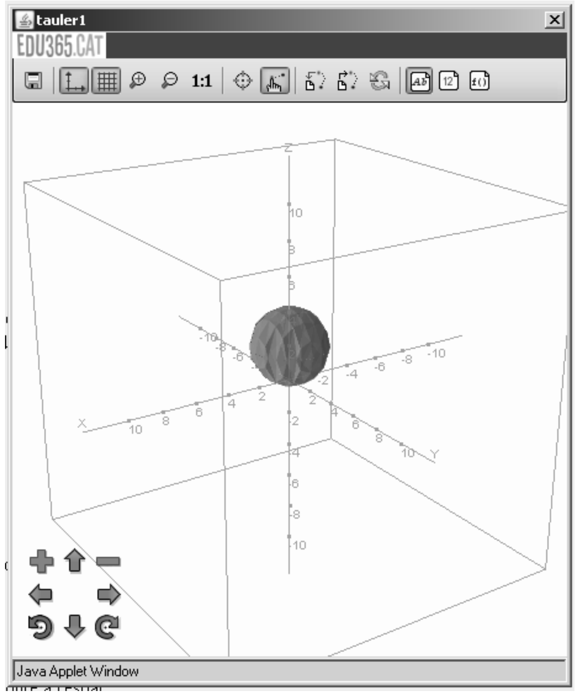
$$\begin{cases} z &= 2 + \sqrt{5 - x^2 - y^2} \\ z &= 2 - \sqrt{5 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

i representarem simultàniament les superfícies associades a les funcions:

$$f(x,y) = 2 + \sqrt{5 - x^2 - y^2} \qquad \text{i} \qquad g(x,y) = 2 - \sqrt{5 - x^2 - y^2}.$$

La instrucció que permet fer-ho és *dibuixa3d*. Per a que dibuixi els dos hemisferis simultàniament, cal escriure les dues instruccions *dibuixa3d* en el mateix bloc, o bé, les dues expressions entre claus i després prémer el signe igual. D'aquesta manera apareix el tauler gràfic amb la superfície que volíem dibuixar.

En la part superior del tauler, hi ha unes icones. Si ens posem amb el ratolí per sobre d'elles s'activa una ajuda que explica la seva funció. En la part inferior del marge esquerre hi ha unes fletxes (en vermell) que permeten canviar la visió de la superfície, i els signes més/menys (en verd) que amplien/redueixen el zoom de la figura.



Plans a l'espai

En la comanda *dibuixa3d* podem escriure l'equació d'un pla. Si volem dibuixar el pla $2x-y+z=4$, podem introduir:

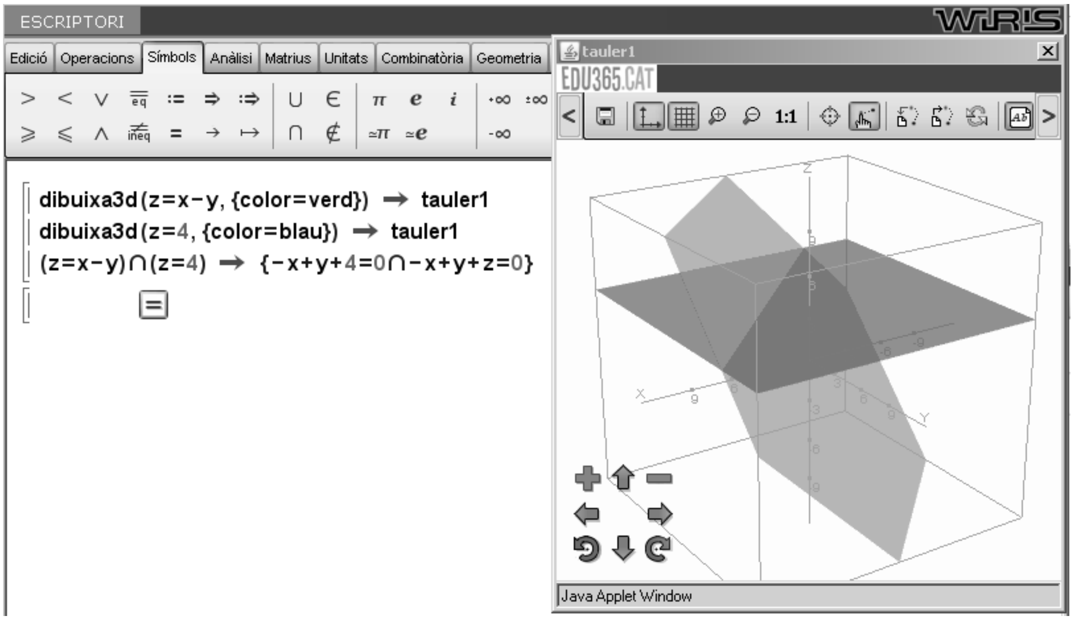
$$dibuixa3d(4-2x+y), \text{ o bé, } dibuixa3d(2x-y+z=4).$$

En particular, podem dibuixar tots els plans, inclosos els d'equació general $Ax+By+C=0$ (A, B i C són constants).

2 Seccions planes: Corbes de nivell

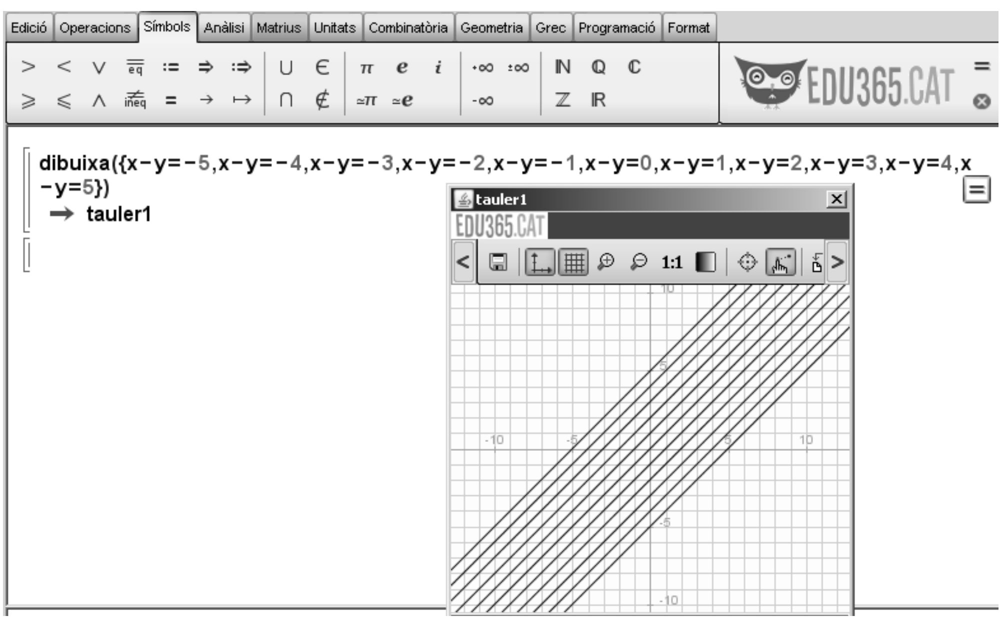
Donada la superfície $z=f(x,y)$ s'anomena *corba de nivell* d'alçada h a la corba $h=f(x,y)$. És a dir, la corba intersecció entre la superfície i el pla $z=h$.

Exemple. La corba de nivell d'alçada 4 de la superfície $z=x-y$ (en verd) és una recta. El pla $z=4$ està representat en blau.



Les corbes de nivell poden representar-se sobre la mateixa superfície, o bé, projectar-se sobre el pla xy. La representació sobre el pla xy de les corbes de nivell (d'alçades $0, \pm h, \pm 2h, \ldots$) s'anomena *mapa de contorn.*

Exemple. La representació sobre el pla xy de les corbes de nivell $x - y = c$ per a $c = -5, -4, \ldots, 5$, pot fer-se usant la instrucció *dibuixa* per a cada corba (posant totes les instruccions en un mateix bloc), o bé, entre claus.



L'operació $\bigcap$ permet calcular les solucions comunes de dues equacions, en particular, trobar els punts d'intersecció de dues superfícies.

Altres seccions

A més de les corbes de nivell, les interseccions de la superfície amb d'altres plans, completen la informació de la superfície i ajuden a representar-la.

A) <u>Plans paral·lels a x=0</u> $\left\{\begin{array}{l} z = f(x,y). \\ x = h \end{array}\right\} \rightarrow z = f(h,y).$

B) <u>Plans paral·lels a y=0</u> $\left\{\begin{array}{l} z = f(x,y) \\ y = h \end{array}\right\} \rightarrow z = f(x,h)$

3 Annex

Aquesta activitat dirigida té associada una pàgina web sobre la plataforma Wiris (cal connexió a internet per a que s'obri) amb les instruccions ja entrades per dibuixar algunes quàdriques. El document s'anomena *Quàdriques-amb-wiris*.

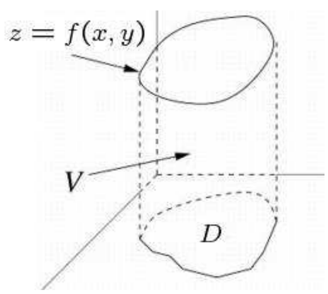
Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball AD 11. Integrals dobles

Introducció

En una sessió prèvia de teoria, hem vist el significat geomètric de la integral doble quan la funció manté el signe constant en el domini d'integració.

Definició Donada una funció real de dues variables reals $f: \ D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ positiva (és a dir, $f(x,y) \geq 0$ en tots els punts de D), la **integral definida** de $z = f(x,y)$ sobre D és el volum V de la regió de l'espai limitada per $z = 0$ i $z = f(x,y)$ per sobre del recinte D. Escrivim:



$$\int\int_D f(x,y)dxdy,$$

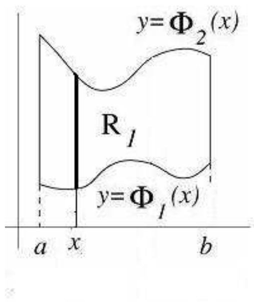
on dx, dy indiquen les variables respecte de les quals es calcula la integral.

Observació Si $f(x,y) \leq 0$ en D, la integral anterior dóna el volum V de la regió canviat de signe.

Esquema En aquesta activitat dirigida estudiarem com es calcula una integral doble, per això ens restringirem al cas que la funció f sigui "contínua" en el recinte d'integració. Un primer pas, clau en el plantejament del càlcul, és la descripció del recinte d'integració. En els Rols 1 i 2, estudiarem dos tipus de recinte i com, a partir de la seva descripció, es pot plantejar el càlcul de la integral doble, mitjançant una integral iterada. En el Rol 3, treballarem el càlcul d'integrals iterades.

Integrals sobre recintes elementals. Tipus I

Els recintes de tipus I són recintes formats per tots els punts (x, y) tals que la primera coordenada pren valors al llarg d'un interval, i en els quals, fixat un valor concret d'aquest interval, els punts del recinte que tenen com abscissa aquest valor, són tots els que la seva ordenada queda entremig de les imatges de dues funcions donades en l'abscissa:



$$(x, y) \in D : a \leq x \leq b \qquad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x).$$

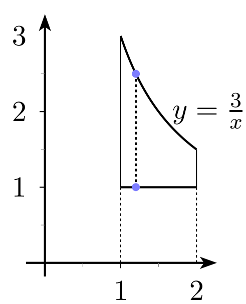
Per calcular la integral doble d'una funció en un recinte d'aquest tipus, usarem la fórmula:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy := \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Notació També s'escriu:

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx; \qquad \text{o bé,} \qquad \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Exemple. Volem calcular la integral doble $\int\int_D f(x,y)dxdy$, on D és el recinte limitat per la hipèrbola $y = \frac{3}{x}$ i les rectes $y = 1$, $x = 1$ i $x = 2$. Començarem fent el dibuix del recinte, i a partir d'aquest, descriurem les coordenades dels seus punts.



Veient la figura de l'esquerra, queda clar que el recinte d'integració D està format pels punts (x, y) que compleixen: $1 \leq x \leq 2$ i, fixada x, les ordenades dels punts del recinte que comparteixen aquesta x, $1 \leq y \leq \dfrac{3}{x}$. És a dir,

$$(x, y) \in D : \qquad 1 \leq x \leq 2, \qquad 1 \leq y \leq \frac{3}{x}.$$

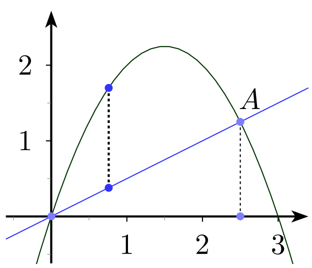
D'aquí, la integral doble es planteja com la integral iterada següent:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy := \int_1^2 dx \int_1^{\frac{3}{x}} f(x,y)dy.$$

∎

Exemple. Volem calcular la integral doble $\int\int_D f(x,y)dxdy$, on D és el recinte limitat per la paràbola $y = 3x - x^2$ i la recta $y = \frac{1}{2}x$, i $f(x,y) = x + y$ començarem fent el dibuix del recinte, i a partir d'aquest, descriurem les coordenades dels seus punts.

Veient la figura, per determinar les coordenades dels punts del recinte, el primer que farem es trobar les coordenades del punt A, punt de tall de la paràbola i la recta: $\begin{cases} y = 3x - x^2, \\ y = \frac{1}{2}x. \end{cases}$ Aleshores,



$$3x - x^2 = \frac{1}{2}x \longrightarrow 5x - 2x^2 = 0 \longrightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{2}.$$

D'aquí, $A = (\frac{5}{2}.\frac{5}{4})$ Els punts (x,y) del recinte D queden descrits per les desigualtats:

$$(x,y) \in D : \qquad 0 \le x \le \frac{5}{4}, \qquad \frac{1}{2}x \le y \le 3x - x^2.$$

D'aquí, la integral doble es planteja com la integral iterada següent:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy := \int_0^{\frac{5}{2}} dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3x-x^2} (x+y)dy.$$

∎

Exemple. La integral doble

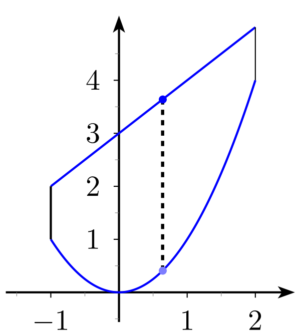
$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+3} (8x - y)dy,$$

és la integral definida de $f(x,y) = 8x - y$ en el recinte D.

Les coordenades dels punts D queden determinades per les desigualtats:

$$(x,y) \in D : \;\; -1 \le x \le 2, \;\; x^2 \le y \le x + 3.$$

Per obtenir la representació del recinte, dibuixarem les gràfiques de les funcions $y = x^2$ i $y = x + 3$, al llarg de l'interval $[-1, 2]$:

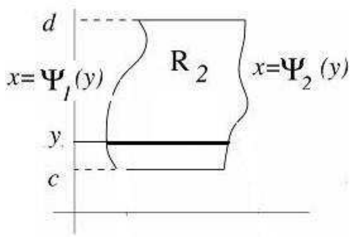


∎

Integrals sobre recintes elementals. Tipus II

Els recintes de tipus II són recintes formats per tots els punts (x, y) tals que la segona coordenada pren valors al llarg d'un interval, i en els quals, fixat un valor concret d'aquest interval, els punts del recinte que tenen com a ordenada aquest valor, són tots els que la seva abscissa queda entremig de les imatges de dues funcions donades en l'ordenada:

$$(x, y) \in D : c \leq x \leq d, \qquad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y).$$



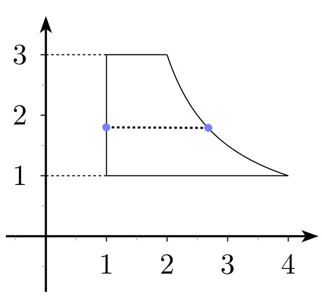
Per calcular la integral doble d'una funció en un recinte d'aquest tipus, usarem la fórmula:

$$\int\int_D f(x, y)dxdy := \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx \right) dy.$$

Notació També s'escriu:

$$\int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dxdy \qquad \text{o bé,} \qquad \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx.$$

Exemple. Volem calcular la integral doble $\int\int_D f(x, y)dxdy$, on D és el recinte limitat per la hipèrbola $y = \frac{3}{x-1}$ i les rectes, $y = 1$, $y = 3$ i $x = 1$. Començarem fent el dibuix del recinte, i a partir d'aquest, descriurem les coordenades dels seus punts.



Veient la figura de l'esquerra, queda clar que el recinte d'integració D està format pels punts (x, y) que compleixen: $1 \leq y \leq 3$ i, fixada y, les abscisses dels punts del recinte que comparteixen y. Per tant, $1 \leq x \leq \dfrac{3}{y} + 1$, és a dir,

$$(x, y) \in D : \qquad 1 \leq y \leq 3, \qquad 1 \leq x \leq \frac{3}{y} + 1.$$

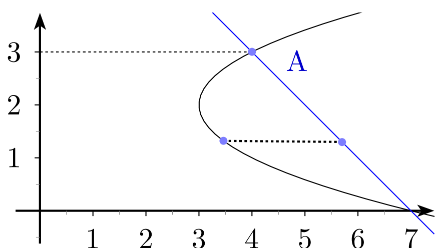
D'aquí, la integral doble es planteja com la integral iterada següent:

$$\int\int_D f(x, y)dxdy := \int_1^3 dy \int_1^{\frac{3}{y}+1} f(x, y)dx.$$

∎

Exemple. Volem calcular la integral doble $\int\int_D f(x,y)dxdy$, on D és el recinte limitat per la paràbola $x-3=(y-2)^2$ i la recta $y=-x+7$, i $f(x,y)=x+y$. Començarem fent el dibuix del recinte, i a partir d'aquest, descriurem les coordenades dels seus punts.

Veient la figura, per determinar les coordenades dels punts del recinte, el primer que farem es trobar les coordenades del punt A, punt de tall de la paràbola i la recta: $\left\{ \begin{array}{c} x-3=(y-2)^2, \\ y=-x+7. \end{array} \right.$ Aleshores,



$7-y=(y-2)^2+3 \longrightarrow y^2-3y=0 \longrightarrow y_1=0, y_2=3$. D'aquí, $A=(4,3)$. Els punts (x,y) del recinte D queden descrits per les desigualtats:

$$(x,y)\in D: \qquad 0\le y\le 3, \qquad (y-2)^2+3\le x\le 7-y.$$

D'aquí, la integral doble es planteja com la integral iterada:

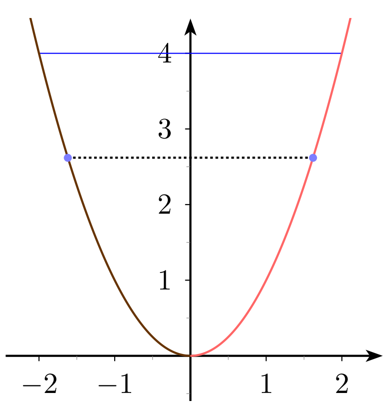
$$\int\int_D f(x,y)dxdy := \int_0^3 dy \int_{(y-2)^2+3}^{7-y} (x+y)dx.$$

∎

Exemple. La integral doble

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 y dx$$

és la integral definida de $f(x,y)=x^2y$ en el recinte D.



Les coordenades dels punts de D queden determinades per les desigualtats:

$$(x,y)\in D: \ \ 0\le y\le 4, \ \ -\sqrt{y}\le x\le \sqrt{y}.$$

Per obtenir la representació del recinte, dibuixarem les gràfiques de les funcions $x=-\sqrt{y}$ i $x=\sqrt{y}$ al llarg de l'interval $[0,4]$ (és a dir, les dues branques de la paràbola $y=x^2$, per a $x\in[-2,2]$). El recinte és el de la figura de l'esquerra.

∎

Material de preparació: (Rol 3)

Integrals iterades

En aquest rol treballarem el càlcul d'integrals iterades, tot calculant algunes de les integrals que han sortit en els rols anteriors.

Per a obtenir el valor d'una integral definida d'una funció de dues variables sobre un recinte, ja plantejada com a integral iterada, ens fixarem en el diferencial que està al costat de la funció a integrar.

Tipus I

En les integrals del tipus

$$\int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

o, equivalentment,

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx, \qquad \text{o bé,} \qquad \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy,$$

es comença per calcular la integral definida (d'una variable) de la funció respecte de y (considerant que la x és una constant). D'aquesta manera s'obté una expressió que depèn de x, que anomenarem $A(x)$:

$$A(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Finalment, es calcula la integral definida de $A(x)$ respecte de x, al llarg de l'interval $[a,b]$.

Exemple. Per calcular $\int_0^{\frac{5}{2}} dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3x-x^2} (x+y)dy$, començarem calculant $\int_{\frac{1}{2}x}^{3x-x^2} (x+y)dy$. És a dir, integrem respecte de y, considerant que la x és una constant:

$$A(x) = \int_{\frac{1}{2}x}^{3x-x^2} (x+y)dy = \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=3x-x^2} =$$

$$= x(3x - x^2 - \frac{1}{2}x) + \frac{1}{2}((3x-x^2)^2 - (\frac{1}{2}x)^2) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + \frac{19}{8}x^2 + \frac{9}{2}x^2.$$

Ara integrem el resultat respecte de x:

$$\int_0^{\frac{5}{2}} dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3x-x^2} (x+y)dy = \int_0^{\frac{5}{2}} A(x)dx = \int_0^{\frac{5}{2}} (\frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + \frac{19}{8}x^2 + \frac{9}{2}x^2)dx =$$

$$= \left[\frac{1}{10}x^5 - x^4 + \frac{19}{24}x^3 + \frac{3}{2}x^3 \right]_{x=0}^{\frac{5}{2}} = \frac{625}{96}.$$

∎

Tipus II

En les integrals del tipus

$$\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

o, equivalentment,

$$\int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dxdy, \qquad \text{o bé,} \qquad \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx,$$

es comença per calcular la integral definida (d'una variable) de la funció respecte de x (considerant que la y és una constant). D'aquesta manera s'obté una expressió que depèn de y, que anomenarem $A(y)$:

$$A(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Finalment, es calcula la integral definida de $A(y)$ respecte de y, al llarg de l'interval $[c,d]$.

Exemple. Per calcular la integral iterada

$$\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 y dx,$$

començarem calculant $\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 y dx$. És a dir, integrem respecte de x, considerant que la y és una constant:

$$A(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 y dx \underbrace{=}_{(*)} y \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 dx = \frac{1}{3} y \left[x^3\right]_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} = \frac{2}{3} y \sqrt{y^3} = \frac{2}{3} y^{5/2}.$$

Ara integrem el resultat respecte de y:

$$\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 y dx = \int_0^4 A(y)dy = \int_0^4 \frac{2}{3} y^{5/2} dy = \frac{2}{3} \left[\frac{2}{7} y^{7/2}\right]_{y=0}^{y=4} = \frac{512}{21}.$$

∎

Observació En els dos exemples anteriors, s'han calculat per separat les dues integrals iterades. Habitualment, el càlcul es fa tot seguit, tal i com es mostra en l'exemple següent.

Exemple.

$$\int_{-1}^2 dv \int_1^{3-v} du = \int_{-1}^2 [u]_{u=-1}^{u=3-v} dv = \int_{-1}^2 (3-v) - (-1))dv = \int_{-1}^2 (4-v)dv =$$

$$= \left[4v - \frac{1}{2} v^2\right]_{v=-1}^{v=2} = \frac{21}{2}.$$

∎

Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball AD 12. Detecció d'errors

A partir de cadascun dels problemes següents es presenten diferents propostes de resolució (reals). Llegiu-les i determineu si la resolució és correcta. Justifiqueu la vostra resposta. Completeu l'exercici redactant la vostra proposta de resolució.

Annex: Llegiu la informació addicional que hi ha a la part final de l'activitat dirigida i utilitzeu-la per completar gràficament els apartats (a) i (b) de l'exercici 2.

1. Considerem la funció $f(x,y) = 7 + \ln(\tan\sqrt{\frac{y}{x}})$ i el punt $P = (16, \pi^2)$.
   (a) Determineu la direcció de màxim creixement de la funció en el punt P.
   (b) Calculeu la direcció tangent a la corba de nivell que passa per P.
   (c) Quin és el valor de la derivada direccional en el punt P, segons la direcció del vector $(-1, 1)$?
   (d) Calculeu l'equació de la recta normal a la gràfica de f en el punt P.

4. $f(x,y) = 7 + \ln\left(\tan\sqrt{y/x}\right)$ i $P = (16, \pi^2)$

a) Per obtenir la direcció de màxim creixement de la funció, tindrem que calcular la seva derivada per parts:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\left(tg\sqrt{y/x}\right)'}{tg\sqrt{y/x}} = -\frac{\frac{\cos\sqrt{y/x}\cdot\cancel{(\sqrt{y/x})'}}{\sin\sqrt{y/x}\cdot\cancel{(\sqrt{y/x})'}}}{tg\sqrt{y/x}} = \frac{-\cancel{tg\sqrt{y/x}}}{\cancel{tg\sqrt{y/x}}} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 \qquad \vec{\nabla} f = (-1,-1)$$

~~$z(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-$~~

b) Si la corba ha de ser tangent al punt P, aquesta ha de ser perpendicular al punt, per tant, la seva direcció serà igu a $(1,-1)$.

c) Podem veure que el valor de la derivada direccional en el punt P serà el de la corba nivell tangent al punt P. Ja que $(1,-1) = (-1,1)$.

d) $F(x,y) = f(P) + \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y-b)$

$z = 7 - (x-16) - (y-\pi^2) \Rightarrow z = 7 - x + 16 - y + \pi^2$

$z + x + y = 25 + \pi^2$

4.

$f(x,y) = 7 + \ln\left(\tan\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$

$P = (16, \pi^2)$

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\tan\sqrt{\frac{y}{x}}} + \frac{1}{\cos^2\sqrt{\frac{y}{x}}} + \frac{x}{2\sqrt{y}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P = \frac{\cancel{1}}{\tan\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{16}{2\pi} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\pi}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\pi} + 1 = \frac{2\pi + 8\sqrt{2} + \sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}\pi} = \frac{2\sqrt{2}\pi^2 + 16\pi + 2\pi^2}{2\pi^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\tan\sqrt{\frac{y}{x}}} + \frac{1}{\cos^2\sqrt{\frac{y}{x}}} + \frac{x}{2\sqrt{y}} + 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\pi} + 2 = \frac{2\pi + 8\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\pi}{\sqrt{2}\pi} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\pi^2 + 16\pi + 4\pi + 2\sqrt{2}\pi^2}{2\pi^2} = \frac{4\sqrt{2}\pi^2 + 20\pi}{2\pi^2} = \frac{2\sqrt{2}\pi + 10}{\pi}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} f(a,b) = \left(\frac{\sqrt{2}\pi + 8 + 2\pi}{\pi}, \frac{2\sqrt{2}\pi + 10}{\pi}\right)}$$

b) d. tangent: $\boxed{\frac{\sqrt{2}\pi + 8 + 2\pi}{\pi}(x - 16) + \frac{2\sqrt{2}\pi + 10}{\pi}(y - \pi^2) = 0}$

c)

$$dv = \left(\frac{\sqrt{2}\pi + 8 + 2\pi}{\pi}, \frac{2\sqrt{2}\pi + 10}{\pi}\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-\sqrt{2}\pi - 8 - 2\pi}{\pi} + \frac{2\sqrt{2}\pi}{\pi}$$

$$= \frac{-\sqrt{2} - 8 - 2\pi + 2\sqrt{2}\pi + 10}{\pi} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}\pi - 2\pi + 2 - \sqrt{2}}{\pi}}$$

d)

$$\boxed{\frac{x - 16}{\sqrt{2}\pi + 8 + 2\pi} = \frac{y - \pi^2}{2\sqrt{2}\pi + 10}}$$

2. Donada la superfície d'equació $z = \ln(1 + xy)$. Trobeu:

   (a) La direcció perpendicular a les corbes de nivell en el punt $(2, 1)$.

   (b) Les equacions del pla tangent i de la recta normal a la superfície en $(2, 1)$.

   (c) La derivada direccional de f en el punt $(2, 1)$ segons la direcció del vector $\vec{v} = (1, -5)$.

b)

$$z = \ln(1+xy)$$

$$v_{\text{unitario}} = \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{-5}{\sqrt{26}}\right)$$

$$\nabla z_{(2,1)} = \left(\frac{dz}{dx}(2,1), \frac{dz}{dy}(2,1)\right)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{1+x\cdot y}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{x}{1+x\cdot y}$$

$$\nabla z_{(2,1)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \xrightarrow{\perp} \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$D = \nabla z_{(2,1)} \cdot \vec{v}_{\text{unitario}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{-5}{\sqrt{26}}\right) = \left(\frac{1}{3\sqrt{26}}, \frac{-10}{3\sqrt{26}}\right)$$

$$\frac{dz}{dx}(2,1)\cdot(x-2) + \frac{dz}{dy}(2,1)\cdot(y-1) = \frac{x}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{2}{3} = \frac{x+2y-4}{3}$$

b) ii) Pla tangent $= z + \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_p (x-a) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_p (y-b)$

Pla ~~tangent = ln(1+xy)~~

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+xy}\cdot y = \frac{y}{1+xy} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_p = \frac{1}{1+2\cdot 1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+xy}\cdot x = \frac{x}{1+xy} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_p = \frac{2}{1+2\cdot 1} = \frac{2}{3}$$

$z|_p = \ln 3$

Pla tangent$_z = \ln 3 + \frac{1}{3}\cdot(x-2) + \frac{2}{3}(y-1) =$

$$z = \ln 3 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3} =$$

$$z = \boxed{\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{4}{3} + \ln 3}$$

Recta normal

$$\frac{x-a}{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_p} = \frac{y-b}{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_p} \longrightarrow \frac{x-2}{1/3} = \frac{y-1}{2/3}$$

iii) $D_{\vec{v}} f(a,b) = \nabla f(a,b)\cdot\left(\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{(1,-5)}{\sqrt{26}} =$

$$= \left(\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\sqrt{26}} + \frac{\frac{2}{3}\cdot(-5)}{\sqrt{26}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{26}} + \frac{(-10)}{3\sqrt{26}} = \frac{-9}{3\sqrt{26}} = \frac{-3}{\sqrt{26}} =$$

$$= \frac{-3\cdot\sqrt{26}}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{26}} = \boxed{\frac{-3\cdot\sqrt{26}}{26}}$$

Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Annex. El pla tangent i la recta normal amb Wiris.

Mostrem com es pot dibuixar el pla tangent i la recta normal a una superfície amb Wiris a partir d'un exemple.

Exemple:
Calculeu el pla tangent i la recta normal a la semiesfera $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ en el punt $(2, \sqrt{3}, 3)$.

Tenim $z = f(x, y)$ en forma explícita. Llavors, l'equació del pla tangent és:

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b).$$

Aquí, $a = 2$, $b = \sqrt{3}$ i $f(a, b) = 3$. Calculem les derivades parcials de $f(x, y)$:
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$.
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$.
Substituint a i b, obtenim $\frac{\partial f}{\partial x}(2, \sqrt{3}) = \frac{-2}{3}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(2, \sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{3}$.
Per tant, el pla tangent que busquem és

$$z = 3 - \frac{2}{3}(x - 2) - \frac{\sqrt{3}}{3}(y - \sqrt{3}).$$

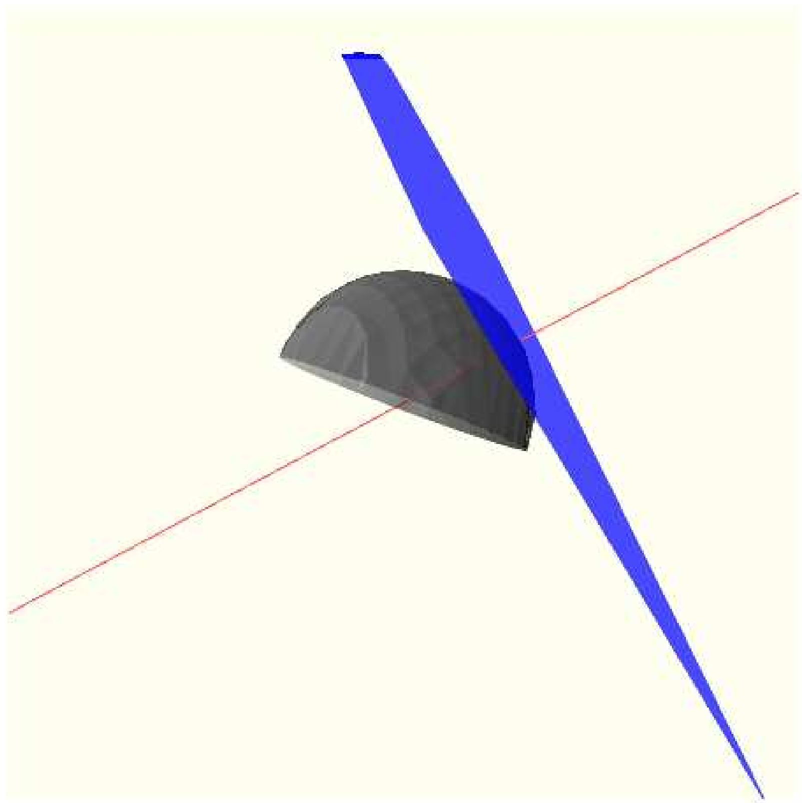
Per calcular la recta normal, utilitzem la fórmula per a superfícies en forma implícita que hem vist a teoria: $F(x, y, z) = 0$. Aquí tenim $F(x, y, z) = \sqrt{16 - x^2 - y^2} - z = 0$ i el punt $(a, b, c) = (2, \sqrt{3}, 3)$. La recta normal té per vector director el vector gradient. Si totes les seves coordenades són diferents de zero, la seva equació contínua és

$$\frac{x - a}{\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c)} = \frac{y - b}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c)} = \frac{z - c}{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)}.$$

Observem que $\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ i $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$. Ens falta calcular $\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) = -1$. Substituint, obtenim $\frac{x-2}{-\frac{2}{3}} = \frac{y-\sqrt{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{z-3}{-1}$. La recta normal és la intersecció de dos plans. Simplifiquem i obtenim: $\sqrt{3}x = 2y$ i $3y = \sqrt{3}z$.

Com dibuixar la semiesfera, el pla tangent i la recta normal amb Wiris:

dibuixa3d$(z=\sqrt{16-x\verb|^|2-y\verb|^|2})$
dibuixa3d$(z=3-(2/3)\cdot(x-2)-(\sqrt{3}/3)\cdot(y-\sqrt{3})$,{color=blau})
dibuixa3d(pla$(\sqrt{3}x=2y)\cap$ pla$(y=\sqrt{3}z/3)$,{color=vermell})

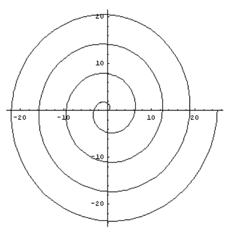


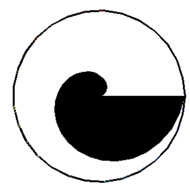
Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball. Activitat Dirigida 13. Àrees i Volums.

Resoleu els problemes següents:

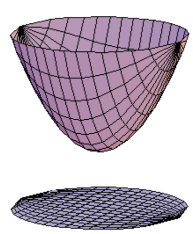
1.) L'espiral d'Arquimedes té per equació en coordenades polars $r = \theta$. Demostreu que l'àrea de l'espiral en la primera volta és igual a la tercera part de l'àrea del cercle que l'envolta, és a dir, $\frac{1}{3}4\pi^3$.



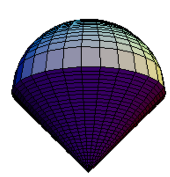


2.) Demostreu que el volum d'una esfera de radi R és $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ fent servir integrals dobles.
Nota: L'equació d'una semiesfera de radi R és $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, i cal calcular la integral $2\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$, on D es el recinte del pla xy definit per $x^2 + y^2 \leq R^2$. Un canvi a coordenades polars pot simplificar els càlculs.

3.) Calculeu el volum per sota del paraboloide $z = x^2 + y^2 + 10$, per sobre de $z = 0$ i a l'interior del cilindre $x^2 + y^2 = 4$.



4.) Calculeu el volum del sòlid format pel con $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ i la semiesfera $z = 4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ fent servir integrals dobles.



Activitats vinculades als puzles

Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball AD 4. Exercicis

1. Calculeu la derivada de les funcions següents:

   (a) $y(x) = (5 - 3x^2)^4$.

   (b) $y(x) = (2x - x^2)^{3/2}$.

   (c) $y(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$.

2. Calculeu la derivada de les funcions següents:

   (a) $y(x) = \tan(3x) + \sin(5x)$.

   (b) $y(x) = \cos(x^2)$.

   (c) $y(x) = \cos^2 x$.

   (d) $y(x) = \arctan \dfrac{5}{x+1}$.

   (e) $y(x) = \arccos(x + 1)$.

   (f) $y(x) = x^2 \arcsin \dfrac{1}{x}$.

   (g) $y(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} - \arcsin \dfrac{x}{2}$.

3. Calculeu la derivada de les funcions següents:

   (a) $y(x) = (\ln(x - 3))^3$.

   (b) $y(x) = \ln \cos 5x$.

   (c) $y(x) = \log_2 \sqrt{3 - x^2}$.

   (d) $y(x) = \ln(\ln \tan x)$.

   (e) $y(x) = e^{-5x}$.

   (f) $y(x) = e^{2x} \cos x$.

   (g) $y(x) = 2^{-x^3}$.

   (h) $y(x) = \arccos e^x$.

   (i) $y(x) = 2^{2^x}$.

Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball AD 7. Integració de funcions racionals. Exercicis

1. Quins aspecte té la descomposició en fraccions simples de:

   (a) $\dfrac{p(x)}{x^3(x-1)^2}$, on $p(x)$ és un polinomi i gr $p(x) \leq 4$.

   (b) $\dfrac{p(x)}{x((x+2)^2+1)}$, on $p(x)$ és un polinomi i gr $p(x) \leq 2$.

   (c) $\dfrac{p(x)}{(x+1)(x-5)}$, on $p(x)$ és un polinomi i gr $p(x) \leq 1$.

   (d) $\dfrac{p(x)}{(x+3)^3}$, on $p(x)$ és un polinomi i gr $p(x) \leq 2$.

2. Resoleu, descomposant en fraccions simples, les integrals següents:

   (a) $\displaystyle\int \frac{11x-1}{2x^2+x-1}\,dx$.

   (b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+4x+4}\,dx$.

   (c) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+4x+5}\,dx$.

3. Resoleu

   (a) $\displaystyle\int \frac{3x^4+12x^3+6}{x^5+5x^4+10x+7}\,dx$. **Ajuda:** Comproveu que el numerador és un múltiple constant de la derivada del denominador.)

   (b) $\displaystyle\int \frac{x^2+7x}{x-4}\,dx$.

   (c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+4}\,dx$.

Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball AD 8. Integració per canvi de variable. Exercicis

1. Resoleu les integrals següents:

   (a) $\displaystyle\int 3x\sqrt{x-5}\,dx.$

   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}.$

   (c) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$

   (d) $\displaystyle\int \sqrt{4-9x^2}\,dx.$

   (e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^2}\,dx.$

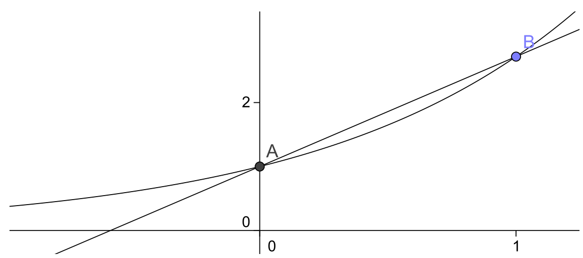
Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Material de treball AD 11. Integrals dobles. Exercicis

1. Calculeu la integral $\int\int_D f(x,y)dxdy$, on $f(x,y) = x$ i D és la regió limitada per les corbes $y = \sin x$, $y = \cos x$ i l'eix OY.

2. Calculeu la integral $\int\int_D f(x,y)dxdy$, on $f(x) = e^{x+y}$ i D és la regió limitada per les corbes $y = x$, $x + y = 2$ i l'eix OX.

3. Donada la regió D limitada per $y = e^x$ i la recta que talla a $y = e^x$ en el punts d'abscisses $x = 0$ i $x = 1$, plantegeu en els dos ordres possibles la integral: $\int\int_D xydxdy$.



4. Donada la integral doble: $\int_0^2 dx \int_{x^2/2}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy$.

   (a) Dibuixeu el recinte d'integració, i

   (b) invertiu l'ordre d'integració.

5. Repetiu l'exercici anterior amb la integral doble:

$$\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_2^6 dx \int_0^{6-x} f(x,y)dy.$$

Annex

Escola Politècnica Superior de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació/Telemàtica
Càlcul. Curs 2009-2010

Temari

1. **Equacions i gràfiques** (2 setmanes)
   (a) Funcions elementals: exponencial, logaritme, valor absolut i funcions trigonomètriques
   (b) Còniques: rectes, circumferències, paràboles, el·lipses i hipèrboles
2. **Derivació de funcions d'una variable** (3 setmanes)
   (a) Concepte de derivada
   (b) Càlcul de derivades
   (c) Rectes tangent i normal
   (d) Extrems
   (e) Regla de l'Hôpital
3. **Integració de funcions d'una variable** (3 setmanes)
   (a) Concepte d'integral
   (b) Càlcul de primitives
   (c) Integral definida
   (d) Aplicacions
   (e) Integral impròpia
4. **Funcions de dues variables** (4 setmanes)
   (a) Funcions de dues variables. Superfícies
   (b) Derivades direccionals i parcials. Definició, derivació explícita i implícita
   (c) Gradient, pla tangent, recta normal
   (d) Corbes del pla en coordenades cartesianes i polars
   (e) Integració en dues variables. Definició
   (f) Integral iterada, teorema de Fubini. Regions elementals
   (g) Canvi de variable: coordenades cartesianes i coordenades polars
5. **Nombres complexos** (1 setmana)
   (a) Forma binòmica. Part real i part imaginària. Operacions bàsiques: suma, resta, producte i divisió
   (b) Representació gràfica. Mòdul, argument i forma polar
   (c) Fórmula d'Euler i forma exponencial. Operacions: producte, divisió i potenciació. Fórmules trigonomètriques
   (d) Càlcul d'arrels n-èsimes