

PROBLEMAS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA E INSTRUMENTAL

**Unidad 9:
9.2 Asociación de lentes delgadas y dioptrios planos**

Jaume Escofet

Uso de este material

Copyright© 2013 by Jaume Escofet

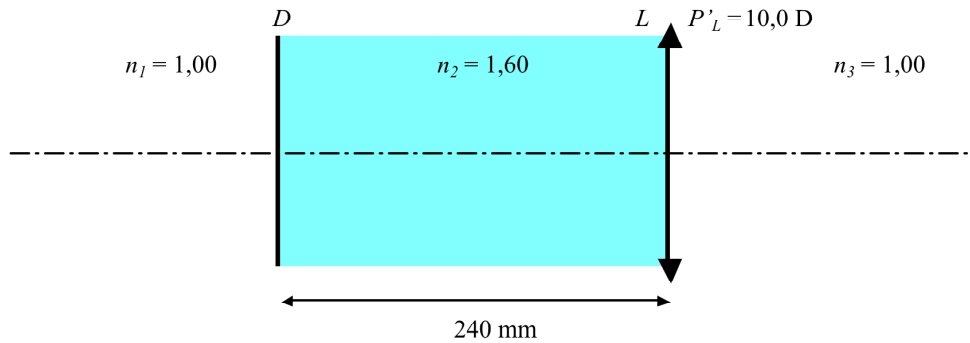
El autor autoriza la distribución de la versión electrónica de **Problemas de Óptica Geométrica e Instrumental. Unidad 9: 9.2 Asociación de lentes delgadas y dioptrios planos** sin previo consentimiento del mismo siempre que se haga de forma gratuita. Se prohíben expresamente la venta, distribución, comunicación pública y alteración del contenido. Por versión electrónica se entiende exclusivamente el archivo en formato PDF; las versiones impresas están sujetas a los usos definidos en la Ley de la Propiedad Intelectual o los acuerdos que puedan tomarse con el autor. El permiso sobre el uso del archivo en formato PDF incluye la realización de una copia impresa para uso exclusivamente personal. Se prohíbe también el paso del archivo electrónico a otro formato a excepción de aquéllos que permitan la compresión, facilitando así su almacenamiento. El autor se reserva el derecho de modificar el contenido tanto textual como de gráficos e imágenes sin necesidad de especificar versiones de trabajo y sin previo aviso por ningún medio.

Terrassa, Abril de 2013.

UNIDAD 9. 9.2 PROBLEMAS

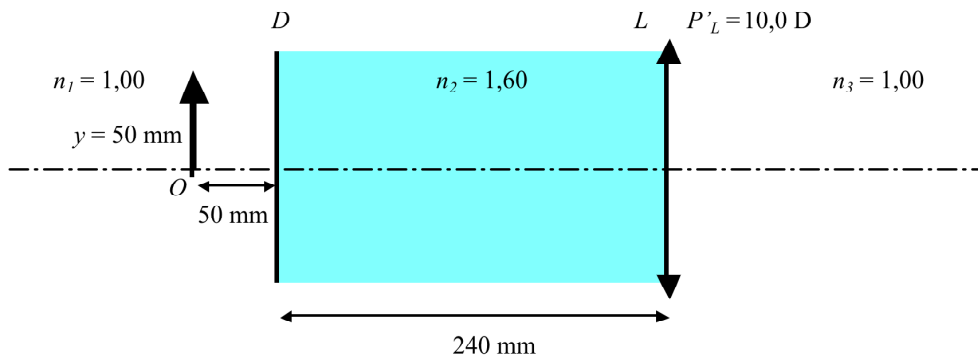
Asociación de una lente delgada y un conjunto de dioptros planos

1. Sea un sistema formado por un dioptrio plano D y una lente delgada L de potencia $P' = 10,0$ D según se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales de este sistema.



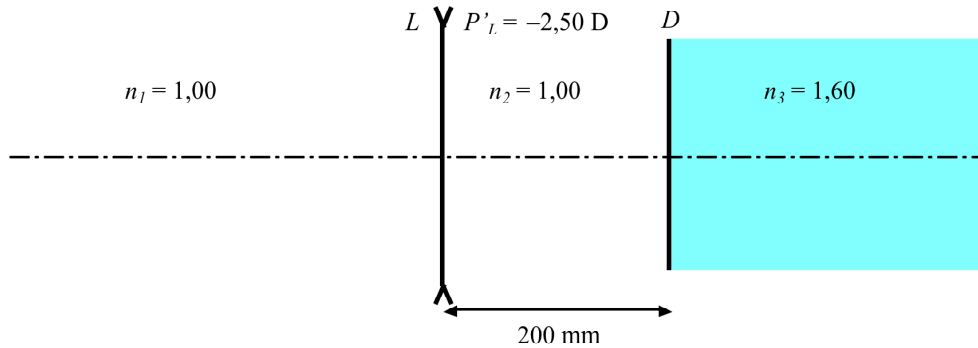
R/ $LH = -90$ mm; $LH' = 0$ mm; $LF = -190$ mm; $LF' = 100$ mm.

2. Determina la posición, el carácter y el aumento de la imagen en el caso siguiente:



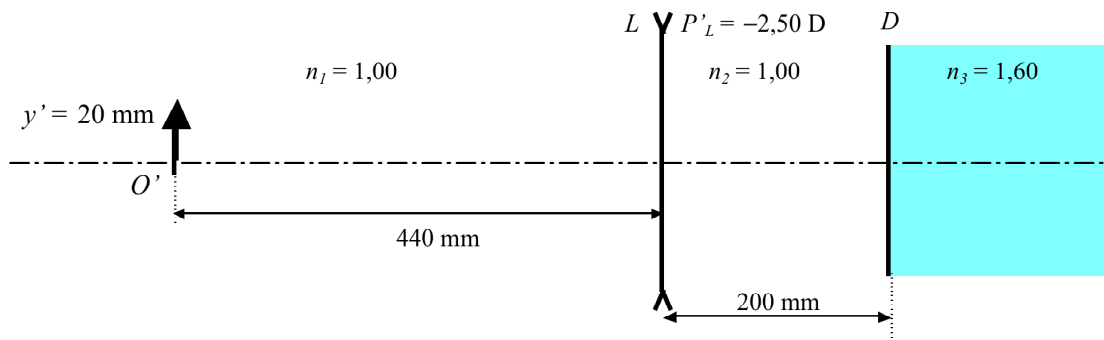
R/ $LO' = 200$ mm; Real; $m = -1$.

3. Sea un sistema formado por una lente delgada L de potencia $P'_L = -2,50$ D un dioptrio plano D según se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales de este sistema.



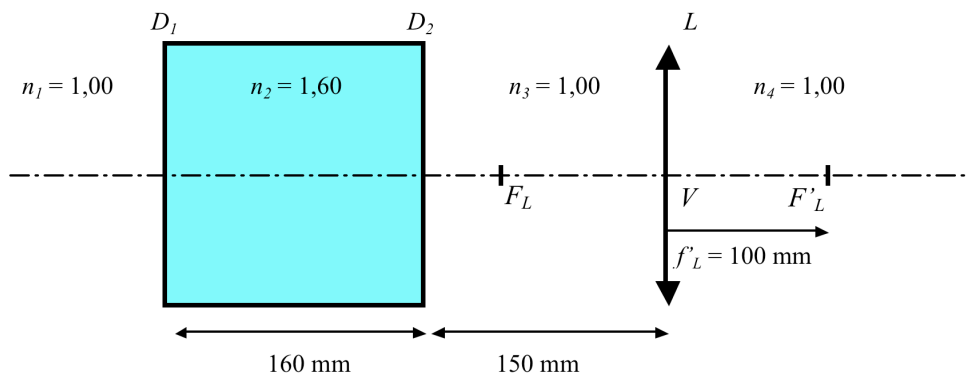
R/ $LH = 0$ mm; $LH' = -120$ mm; $LF = 400$ mm; $LF' = -760$ mm.

4. Conocida la posición y el tamaño de la imagen, determina la posición, el carácter y el tamaño del objeto en el sistema siguiente:



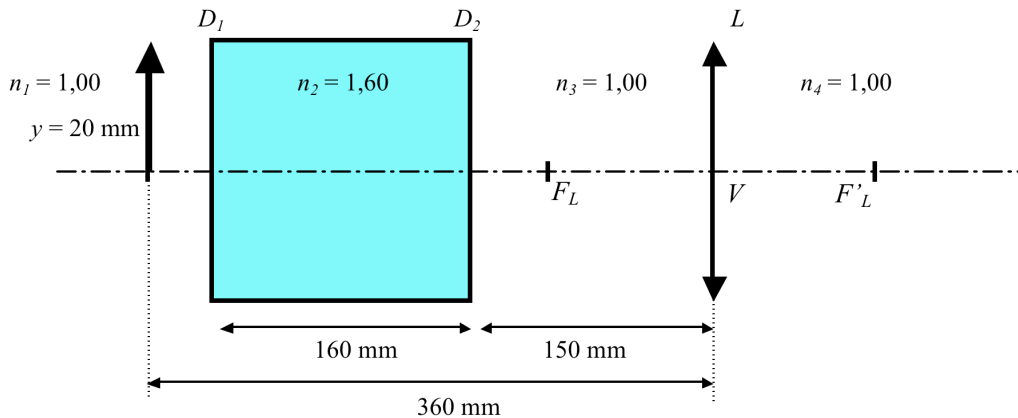
R/ $LO = -400$ mm; Virtual; $m = 1/2$.

5. Considera la asociación de una lámina planoparalela y una lente delgada que se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales este sistema:



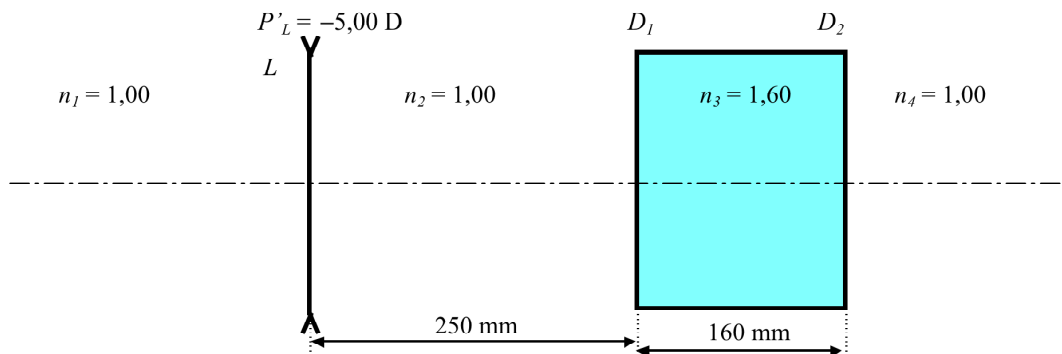
R/ $LH = -60$ mm; $LH' = 0$ mm; $LF = -160$ mm; $LF' = 100$ mm.

6. Determina la posición, el carácter y el aumento de la imagen en el caso siguiente:



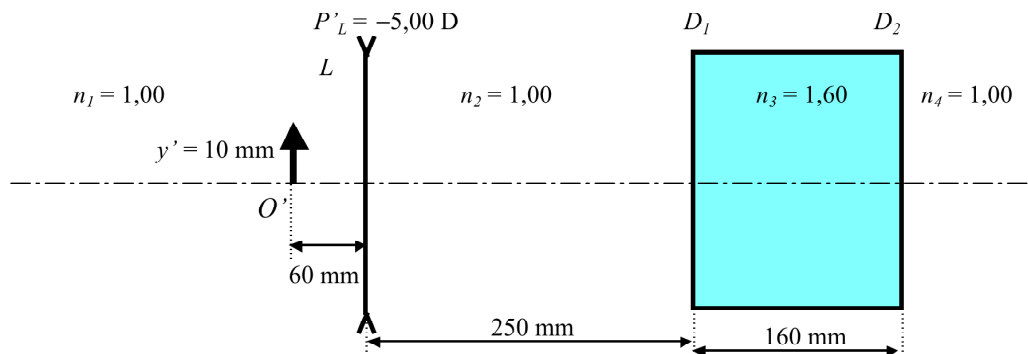
R/ $LO' = -150$ mm; Real; $m = -1/2$.

7. Considera la asociación de una lente delgada negativa y una lámina planoparalela según se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales de este sistema:



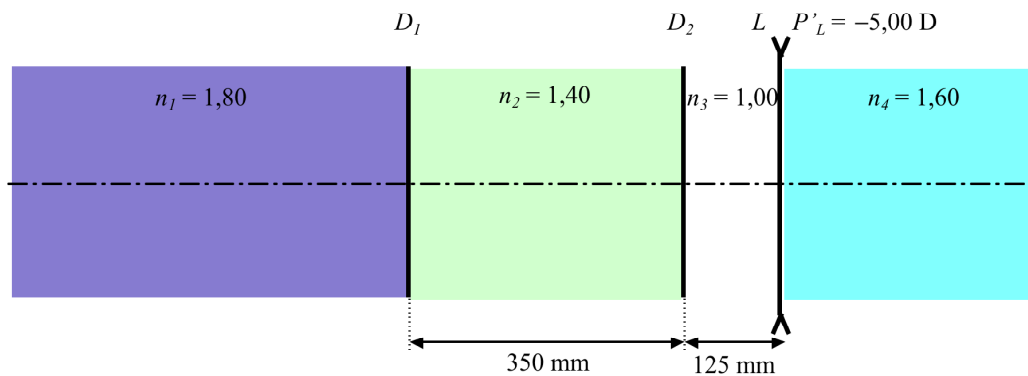
R/ $LH = 0$ mm; $LH' = 60$ mm; $LF = 200$ mm; $LF' = -140$ mm.

8. Conocida la posición y el tamaño de la imagen, determina la posición, el carácter y el tamaño del objeto en el sistema siguiente:



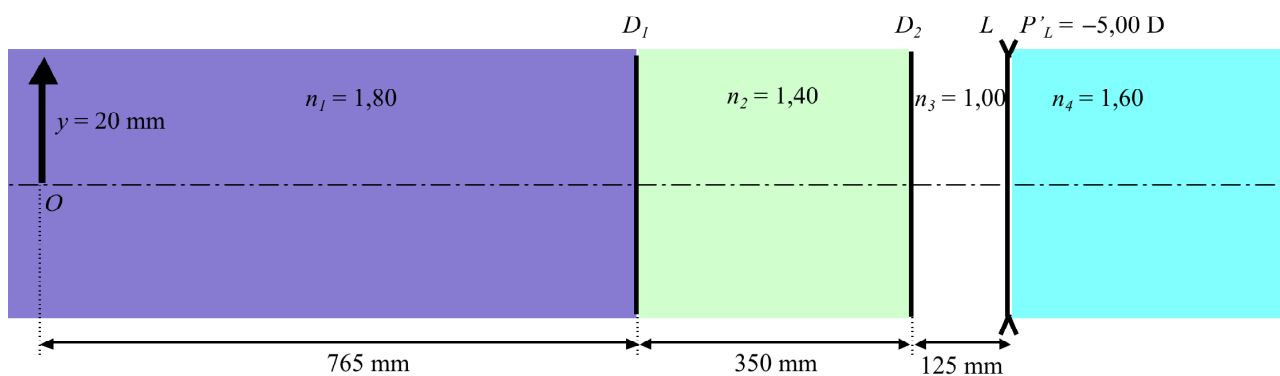
R/ $LO = -300$ mm; Real; $m = 0,40$.

9. Sea un sistema formado por los dioptrios planos D_1 y D_2 y la lente delgada L de potencia $P' = -5,00$ D según se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales de este sistema.



R/ $LH = 200$ mm; $LH' = 0$ mm; $LF = 560$ mm; $LF' = -320$ mm.

10. Conocida la posición y el tamaño del objeto, determina la posición, el carácter y el tamaño de la imagen en el sistema siguiente:



R/ $LO' = -256$ mm; Real; $m = 0,20$.

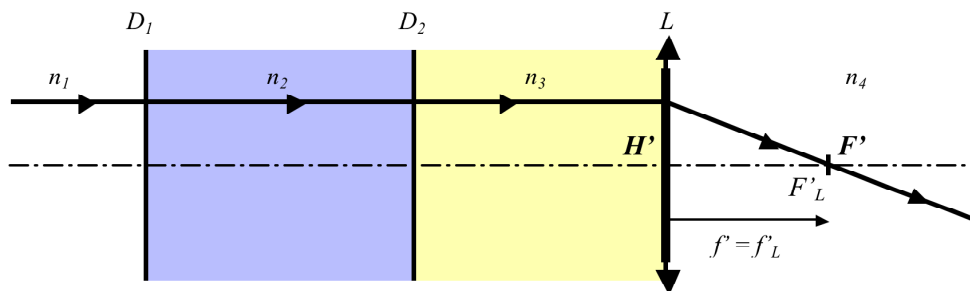
Comentarios a los problemas de la Unidad 9.2

Los dioptrios planos no desvian los rayos que inciden paralelos al eje óptico.

Caso 1: Dioptrio plano o asociación de dioptrios planos situados delante de la lente L .

En este caso la focal imagen del sistema F' estará situado en la focal imagen de la lente F'_L .

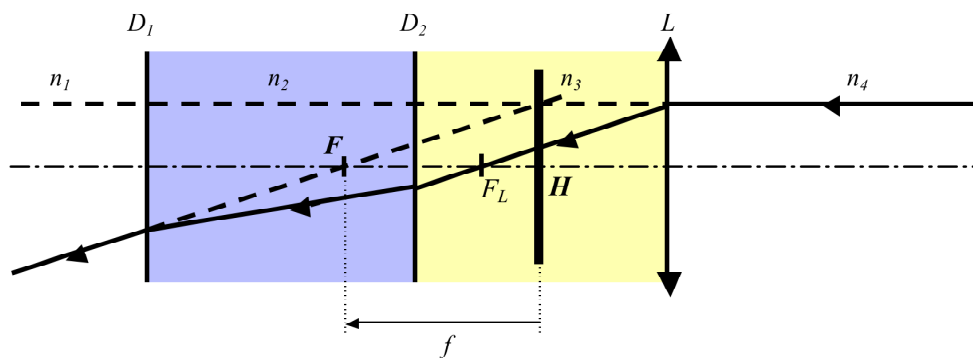
La posición del plano principal imagen H' coincidirá con el plano de la lente L .



H será el conjugado objeto de H' a través de todo el sistema óptico (la lente L y todos los dioptrios).

Para encontrar la posición de la focal objeto F se puede proceder de dos maneras diferentes.

La primera considera que F es el conjugado objeto de F_L a través del conjunto de dioptrios.



La segunda tiene en cuenta que $P' = -P$ donde P es la potencia objeto del sistema y P' es la potencia imagen del sistema. De este modo la distancia focal objeto f del sistema vendrá dada por:

$$\frac{f}{n} = -\frac{f'}{n'}$$

Donde n y n' representan los índices extremos del sistema. Tomando en nuestro caso $n = n_1$ y $n' = n_4$, f viene dada por:

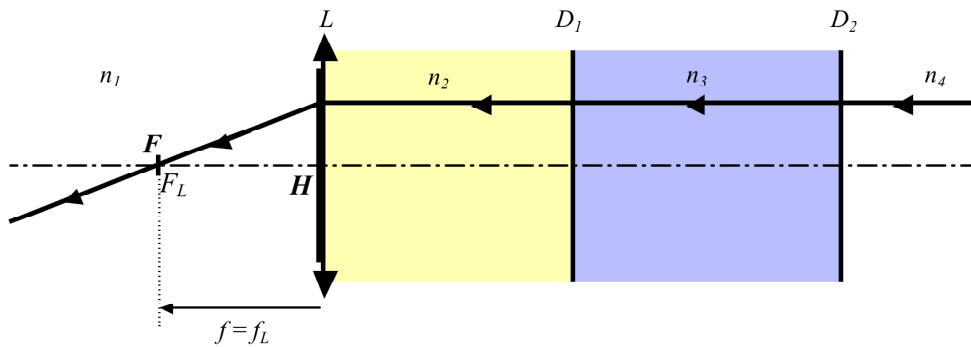
$$f = -\frac{n_1}{n_4} f'$$

Conocida la posición de H y conocida la distancia focal f puede determinarse la posición de F teniendo en cuenta que $f = HF$.

Caso 2: Dioptrio plano o asociación de dioptrios planos situados detrás de la lente L .

En este caso la focal objeto del sistema F estará situado en la focal objeto de la lente F_L .

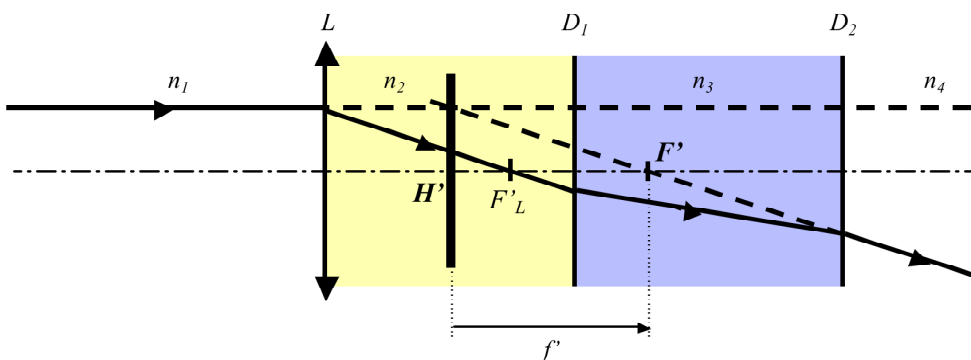
La posición del plano principal objeto H coincidirá con el plano de la lente L .



H' será el conjugado imagen de H a través de todo el sistema óptico (la lente L y todos los dioptrios).

Para encontrar la posición de la focal imagen F' se puede proceder de dos maneras diferentes.

La primera considera que F' es el conjugado imagen de F'_L a través del conjunto de dioptrios.



La segunda tiene en cuenta que $P' = -P$ donde P es la potencia objeto del sistema y P' es la potencia imagen del sistema. De este modo la distancia focal imagen f' del sistema vendrá dada por:

$$\frac{f}{n} = -\frac{f'}{n'}$$

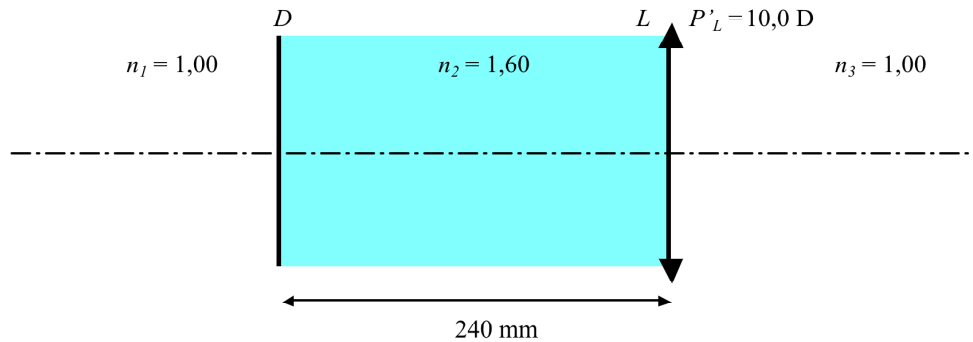
Donde n y n' representan los índices extremos del sistema. Tomando en nuestro caso $n = n_1$ y $n' = n_4$, f' viene dada por:

$$f' = -\frac{n_4}{n_1} f$$

Conocida la posición de H' y conocida la distancia focal f' puede determinarse la posición de F' teniendo en cuenta que $f' = H'F'$.

UNIDAD 9. 9.2 SOLUCIONES

1. Sea un sistema formado por un dioptrio plano D y una lente delgada L de potencia $P' = 10,0$ D según se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales de este sistema.



SOLUCIÓN:

Distancias focales de la lente L :

$$f'_L = \frac{n'}{P'_L} = \frac{n_3}{P'_L} = \frac{1,00}{10,0} = 0,100 \text{ m} = 100 \text{ mm.}$$

$$f_L = \frac{n}{P_L} = \frac{n_2}{-P'_L} = -\frac{1,60}{10,0} = -0,160 \text{ m} = -160 \text{ mm.}$$

Las distancias focales f_L y f'_L no coinciden en valor absoluto ya que la lente L está sumergida en medios extremos diferentes.

a) Determinación de H' y F' del sistema:

Utilizando trazado gráfico de rayos se deduce que H' coincide con la posición de L y F' con la posición de F'_L (Figura 1).

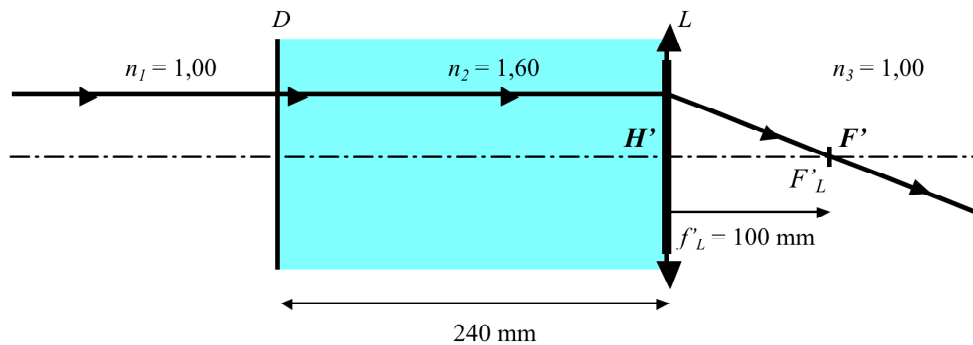


Figura 1

$$LH' = 0 \text{ mm.}$$

$$LF' = LF'_L = 100 \text{ mm.}$$

$$f' = H'F' = H'L + LF' = 0 + 100 = 100 \text{ mm.}$$

La potencia imagen P' del sistema es:

$$P' = \frac{n'}{f'} = \frac{n_3}{f'} = \frac{1,00}{0,100} = 10,0 \text{ D.}$$

b) Determinación de H y F :

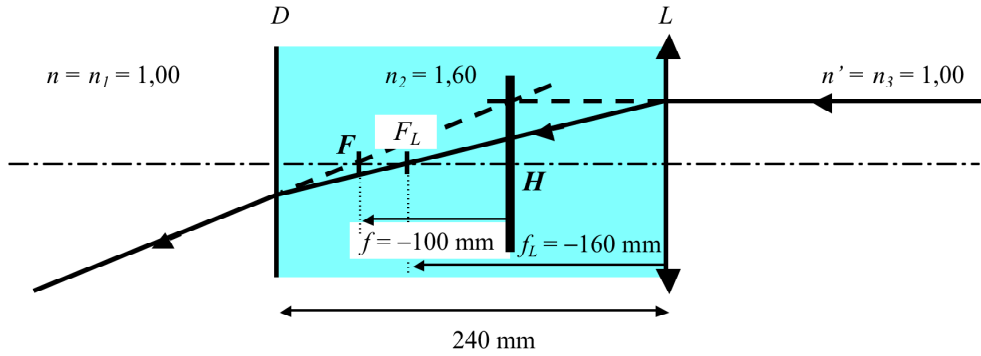


Figura 2

Teniendo en cuenta que el valor de las potencias objeto e imagen del sistema son iguales y cambiadas de signo:

$$P' = -P; \quad P = -10,0 \text{ D.}; \quad \frac{n'}{f'} = -10,0; \quad \frac{n_3}{f'} = -10,0; \quad \frac{1,00}{f'} = -10,0;$$

$$f' = H'F' = -0,100 \text{ m} = -100 \text{ mm.}$$

Posición de F :

Si consideramos la reversibilidad del rayo de luz la figura 3 muestra que F_L es el conjugado imagen de F a través del dioptrio D .

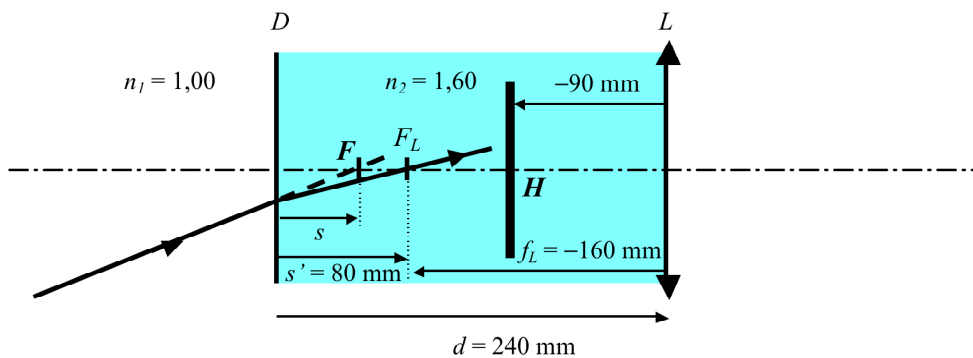


Figura 3

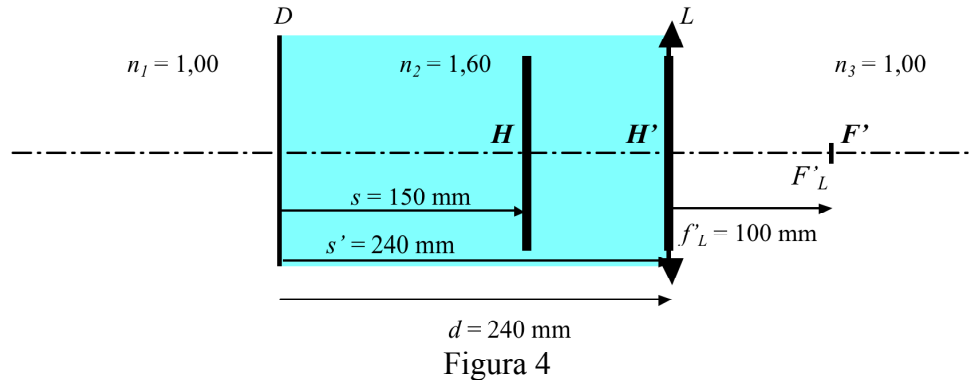
$$\bar{s} = \bar{s}'; \quad \frac{s}{n} = \frac{s'}{n'}; \quad \frac{s}{n_1} = \frac{s'}{n_2}; \quad s = \frac{n_1}{n_2} s' = \frac{1,00}{1,60} 80 = 50 \text{ mm} = DF.$$

$$LF = LD + DF = -240 + 50 = -190 \text{ mm.}$$

Posición de H :

H es el conjugado objeto de H' a través del sistema óptico.

Debido que H' está situado en la posición de L , H es el conjugado objeto de H' a través del dioptrio D .

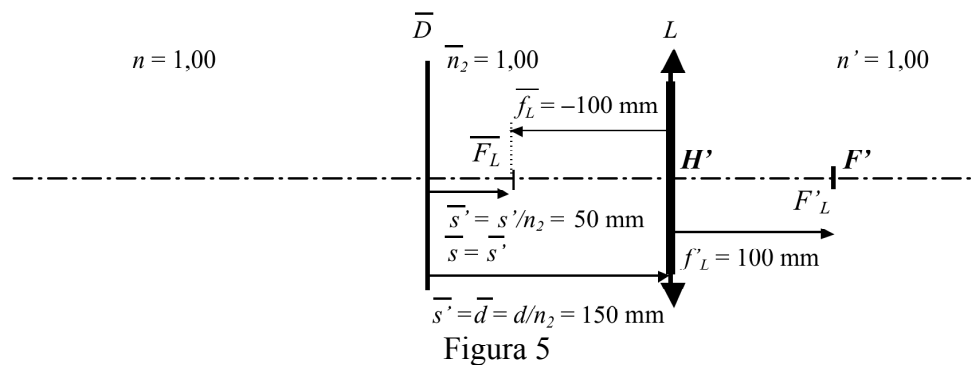


$$\bar{s} = \bar{s}'; \quad \frac{s}{n} = \frac{s'}{n'}; \quad \frac{s}{n_1} = \frac{s'}{n_2}; \quad s = \frac{n_1}{n_2} s' = \frac{1,00}{1,60} 240 = 150 \text{ mm} = DH.$$

$$LH = LD + DH = -240 + 150 = -90 \text{ mm}.$$

$$HH' = HL + LH' = 90 + 0 = 90 \text{ mm}.$$

Las posiciones de H y F pueden determinarse también a partir del sistema reducido en aire (Figura 5):



$$\bar{f}_L = \frac{f_L}{n_2} = \frac{-160}{1,60} = -100 \text{ mm}.$$

Posición de F : $s = n\bar{s} = 1,00(50) = 50 \text{ mm} = DF.$

Posición de H : $s = n\bar{s} = n\bar{d} = 1,00(150) = 150 \text{ mm} = DH.$

Valor que coincide con el encontrado anteriormente.

El sistema óptico equivalente al sistema anterior es el que se muestra en la figura 6:

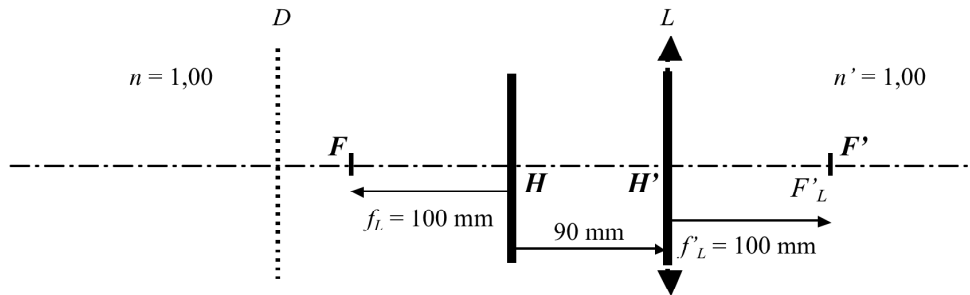


Figura 6

Una manera alternativa de resolver el problema es utilizando la asociación de sistemas ópticos. Consideremos el sistema óptico formado por la asociación de dos sistemas, el dioptrio plano D y la lente L (Figura 7).

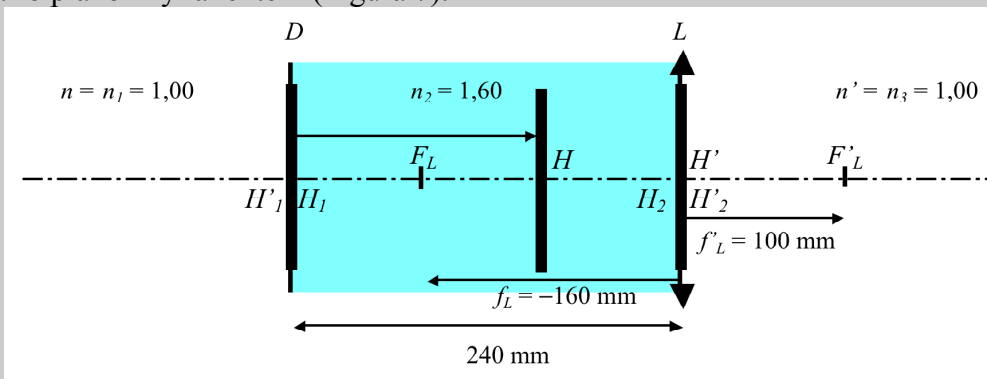


Figura 7

Las características del sistema son las siguientes:

- 1: Dioptrio plano D : $P'_1 = P'_D = 0$ D; $f'_1 = f'_D = \infty$; $f_1 = \infty$.
 2: Lente L : $P'_2 = P'_L = 10,0$ D; $f'_2 = f'_L = 100$ mm. $f_2 = -160$ mm.
 $e = 240$ mm
 $t = \infty$

La potencia total del sistema es:

$$P' = P'_1 + P'_2 - \frac{e}{n_2} P'_1 P'_2 = 0 + 10,0 - \frac{240}{1,60} 0(10,0) = 10,0 \text{ D.}$$

$$P = -10,0 \text{ D.}$$

Las focales del sistema son:

$$f' = \frac{n'}{P'} = \frac{1,00}{10,0} = 0,100 \text{ m} = 100 \text{ mm.}$$

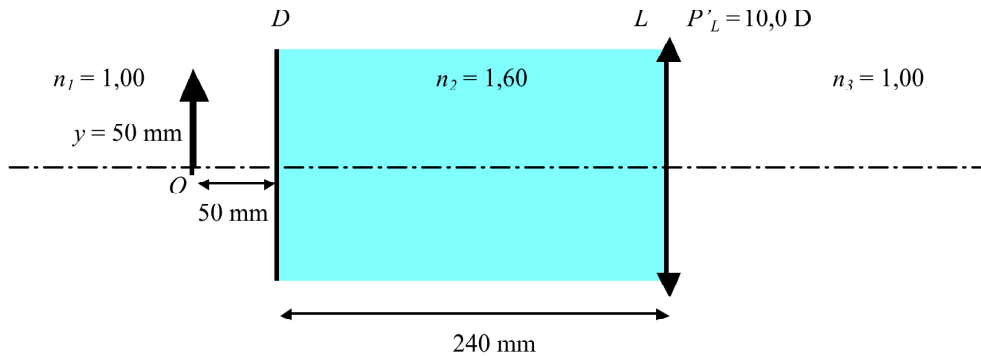
$$f = \frac{n}{P} = \frac{1,00}{-10,0} = -0,100 \text{ m} = -100 \text{ mm.}$$

Posición de los planos principales:

$$H_1 H = \frac{f e}{f_2} = \frac{-100(240)}{160} = 150 \text{ mm} = DH.$$

$$H'_2 H' = -\frac{f' e}{f'_1} = \frac{-100(240)}{\infty} = 0 \text{ mm} = LH'.$$

2. Determina la posición, el carácter y el aumento de la imagen en el caso siguiente:



SOLUCIÓN:

Consideremos los elementos cardinales del sistema anterior:

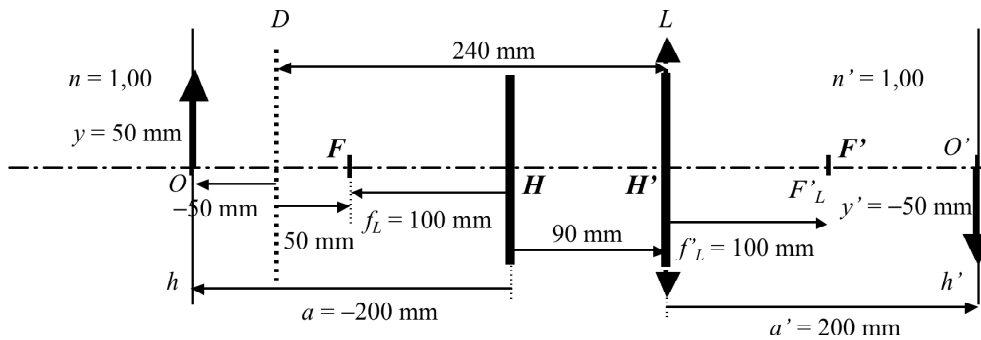


Figura 1

Aplicando la ecuación de Descartes:

$$-\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n'}{f'}; \quad n = 1,00; \quad n' = 1,00; \quad f' = 100 \text{ mm}; \quad a = HO = -200 \text{ mm}.$$

$$-\frac{1,00}{-200} + \frac{1,00}{a'} = \frac{1,00}{100}; \quad \frac{1}{a'} = \frac{1}{100} - \frac{1}{200} = \frac{2-1}{200} = \frac{1}{200}; \quad a' = H'O' = LO' = 200 \text{ mm}.$$

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = \frac{200}{-200} = -1$$

La imagen es real, por estar situada a la derecha de la lente L , invertida y del mismo tamaño.

El objeto O y la imagen O' están situados, respectivamente, en los planos principales h y h' del sistema.

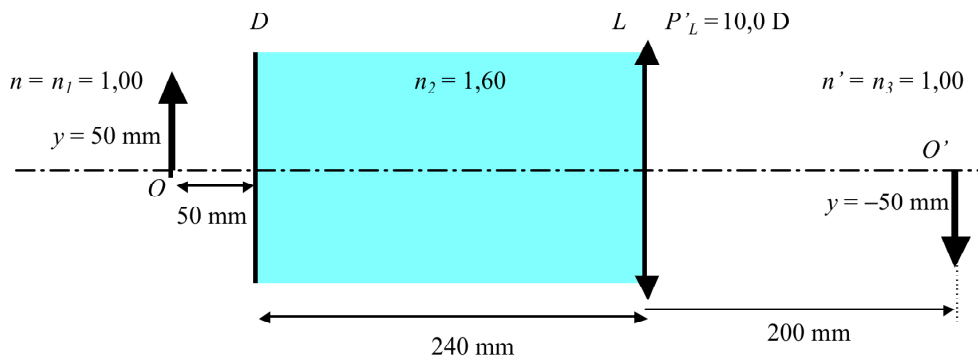


Figura 2

El ejercicio también puede solucionarse considerando el sistema reducido en aire:

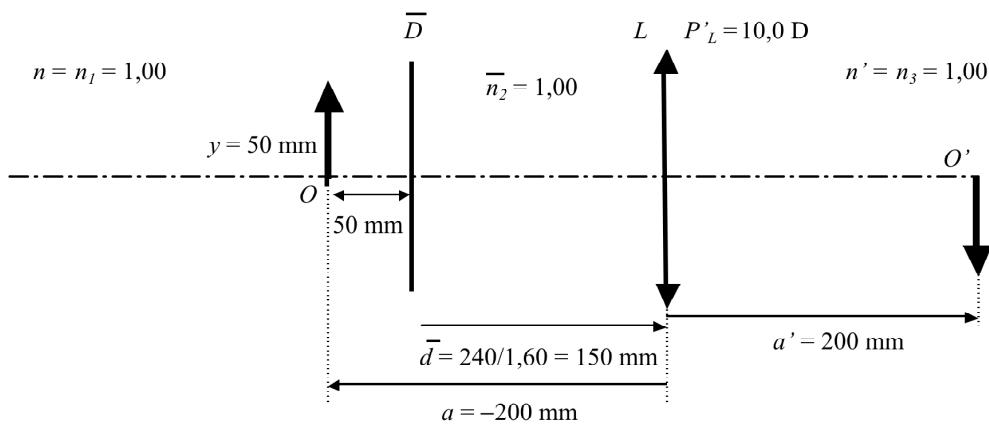
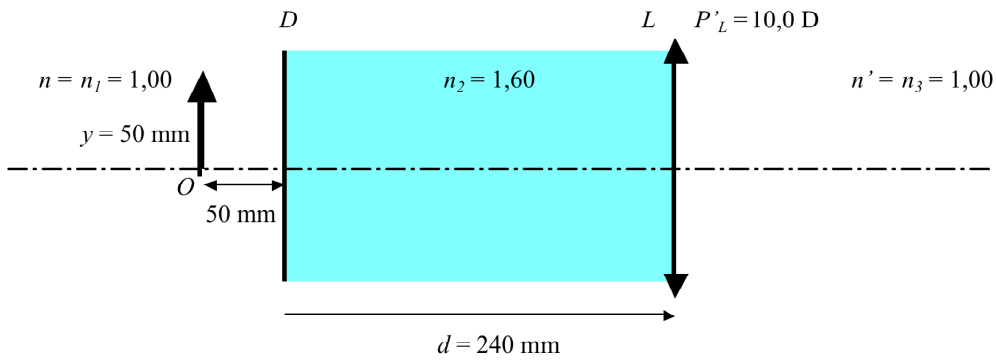


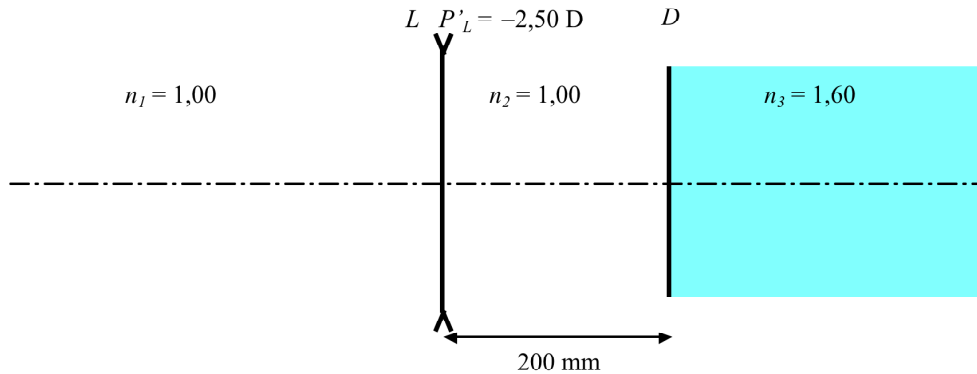
Figura 3

$$-\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n'}{f'}; \quad n = 1,00; \quad n' = 1,00; \quad f' = 100 \text{ mm}; \quad a = -200 \text{ mm}.$$

$$-\frac{2}{-200} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{100}; \quad \frac{1}{a'} = \frac{1}{100} - \frac{2}{200} = \frac{2-1}{200} = \frac{1}{200}; \quad a' = 200 \text{ mm} = LO'.$$

Resultado que coincide con el encontrado anteriormente.

3. Sea un sistema formado por una lente delgada L de potencia $P' = -2,50$ D un dioptrio plano D según se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales de este sistema.



SOLUCIÓN:

Distancias focales de la lente L :

$$f'_L = \frac{n'}{P'_L} = \frac{n_2}{P'_L} = \frac{1,00}{-2,50} = -0,400 \text{ m} = -400 \text{ mm}.$$

$$f_L = \frac{n}{P_L} = \frac{n_1}{P_L} = \frac{1,00}{2,50} = 0,400 \text{ m} = 400 \text{ mm}.$$

Las distancias focales f_L y f'_L coinciden en valor absoluto ya que los índices anterior y posterior de la lente L son iguales.

a) Determinación de H y F :

Utilizando trazado gráfico de rayos se deduce que H coincide con la posición de L y F con la posición de F_L (Figura 1).

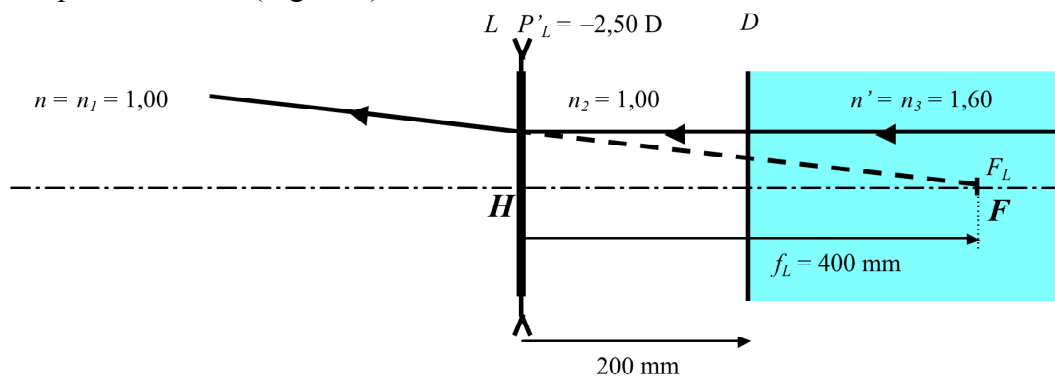


Figura 1

$$LH = 0 \text{ mm}.$$

$$LF = LF_L = 400 \text{ mm}.$$

La distancia focal objeto del sistema vale:

$$f = HF = HL + LF = 0 + 400 = 400 \text{ mm} = 0,400 \text{ m.}$$

La potencia objeto P del sistema es:

$$P = \frac{n}{f} = \frac{n_1}{f} = \frac{1,00}{0,400} = 2,5 \text{ D.}$$

b) Determinación de H' y F' :

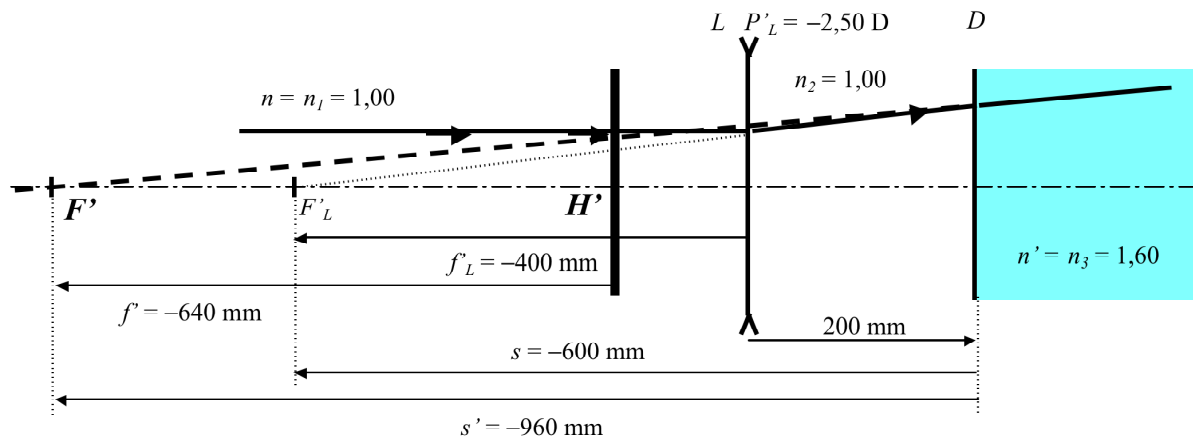


Figura 2

Teniendo en cuenta que el valor de las potencias objeto e imagen del sistema son iguales y cambiadas de signo:

$$P' = -P; \quad P' = -2,5 \text{ D.}; \quad \frac{n'}{f'} = -2,5; \quad \frac{n_3}{f'} = -2,5; \quad \frac{1,60}{f'} = -2,5;$$

$$f' = H'F' = -0,640 \text{ m} = -640 \text{ mm.}$$

Las distancias focales f y f' no coinciden en valor absoluto ya que el sistema está sumergido en medios extremos diferentes.

Posición de F' :

Para determinar la posición de F' tenemos en cuenta, tal como se observa en la figura 2, que F' es el conjugado imagen de F'_L a través del dioptrio D .

$$s = DF'_L = DL + LF'_L = -200 - 400 = -600 \text{ mm.}$$

$$\frac{s}{n} = \frac{s'}{n'}; \quad \frac{s}{n_2} = \frac{s'}{n_3}; \quad s' = n_3 \frac{s}{n_2} = 1,60 \frac{-600}{1,00} = -960 \text{ mm} = DF'.$$

$$LF' = LD + DF' = 200 - 960 = -760 \text{ mm.}$$

Posición de H' :

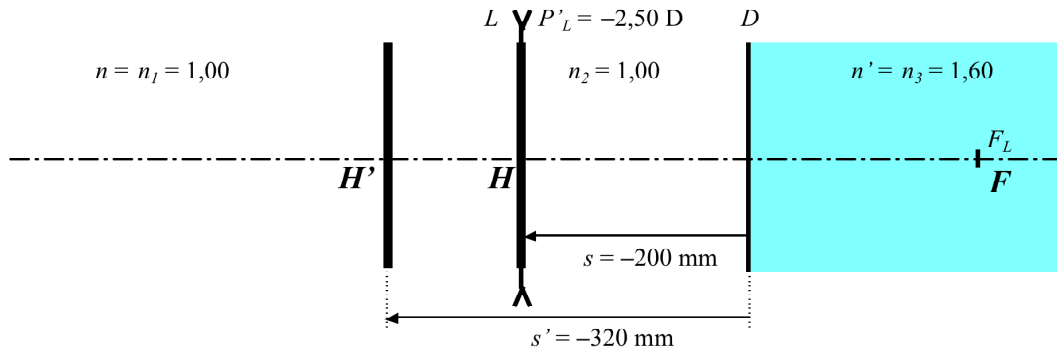


Figura 3

H' es el conjugado imagen de H a través del sistema óptico.

Debido que H está situado en la posición de L , H' es el conjugado imagen de H a través del dioptrio D .

$$s = DH = -200 \text{ mm.}$$

$$\bar{s} = \bar{s}'; \quad \frac{s}{n} = \frac{s'}{n'}; \quad \frac{s}{n_2} = \frac{s'}{n_3}; \quad s' = n_3 \frac{s}{n_2} = 1,60 \frac{-200}{1,00} = -320 \text{ mm} = DH'.$$

$$LH' = LD + DH' = 200 - 320 = -120 \text{ mm.}$$

$$HH' = HL + LH' = 0 - 120 = -120 \text{ mm.}$$

Las posiciones de F' y H' pueden determinarse más fácilmente a partir del sistema reducido en aire (Figura 4):

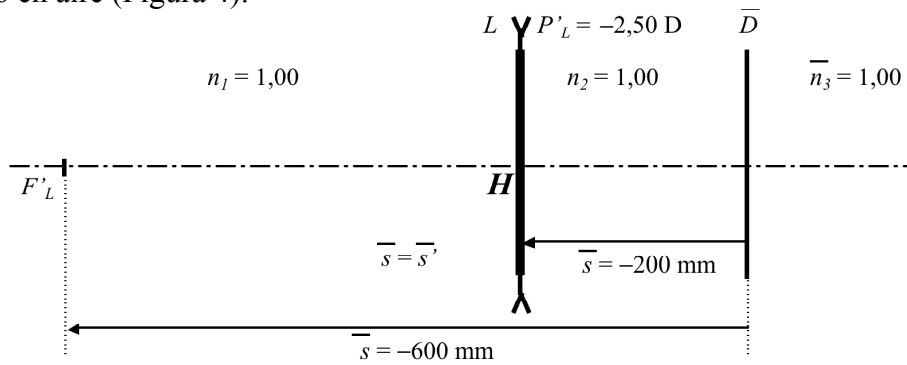


Figura 4

Posición de F' : $s = n\bar{s} = n_3\bar{s} = 1,60(-600) = -960 \text{ mm} = DF'.$

Posición de H' : $s' = n'\bar{s} = n_3\bar{s} = 1,60(-200) = -320 \text{ mm} = DH'.$

Valor que coincide con el encontrado anteriormente.

El sistema óptico equivalente al sistema anterior es el que se muestra en la figura 5:

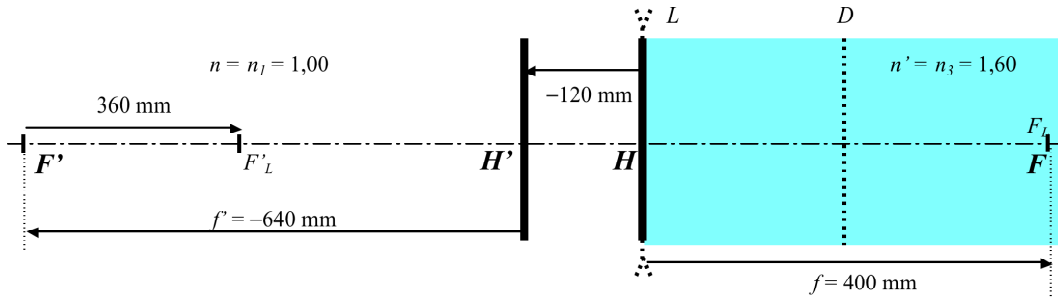


Figura 5

Una manera alternativa de resolver el problema es utilizando la asociación de sistemas ópticos. Consideremos el sistema óptico formado por la asociación de dos sistemas, el dioptrio plano D y la lente L (Figura 6).

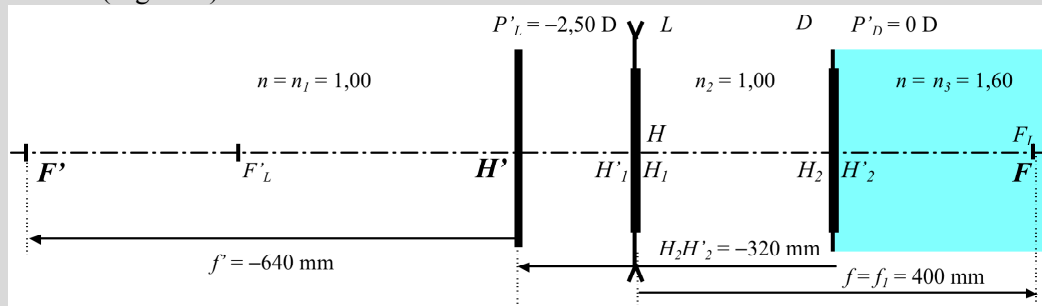


Figura 6

Las características del sistema son las siguientes:

- 1: Lente L : $P'_1 = P'_L = -2,50 \text{ D}$; $f'_1 = f'_L = -400 \text{ mm}$. $f_1 = 400 \text{ mm}$.
 - 2: Dioptrio plano D : $P'_2 = P'_D = 0 \text{ D}$; $f'_2 = f'_D = \infty$; $f_2 = \infty$.
- $e = 200 \text{ mm}$
 $t = \infty$

La potencia total del sistema es:

$$P' = P'_1 + P'_2 - \frac{e}{n_2} P'_1 P'_2 = P'_1 + P'_2 - \frac{e}{n_2} P'_1 P'_2 = -2,50 + 0 - \frac{200}{1,00} (-2,50) 0 = -2,50 \text{ D}.$$

$$P = 2,50 \text{ D}.$$

Las focales del sistema son:

$$f' = \frac{n'}{P'} = \frac{1,60}{-2,50} = -0,640 \text{ m} = -640 \text{ mm}.$$

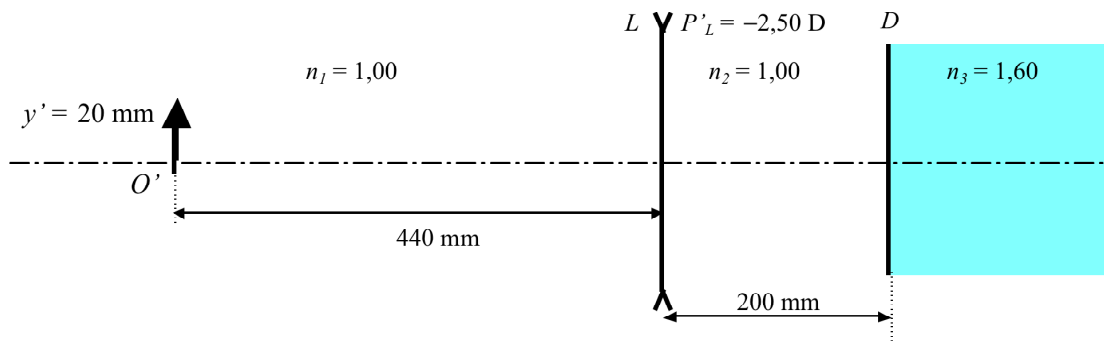
$$f = \frac{n}{P} = \frac{1,00}{2,50} = 0,400 \text{ m} = 400 \text{ mm}.$$

Posición de los planos principales:

$$H_1 H = \frac{f e}{f_2} = \frac{400(200)}{\infty} = 0 \text{ mm} = L_1 H.$$

$$H'_2 H' = -\frac{f' e}{f_1} = -\frac{-640(200)}{-400} = -320 \text{ mm} = D_2 H'.$$

4. Conocida la posición y el tamaño de la imagen, determina la posición, el carácter y el tamaño del objeto en el sistema siguiente:



SOLUCIÓN:

Consideremos los elementos cardinales del sistema anterior:

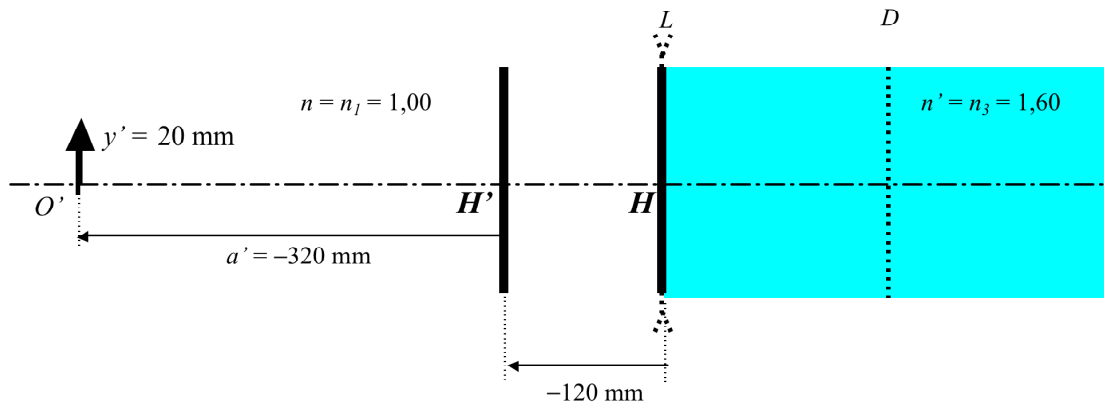


Figura 1

Aplicando la ecuación de Descartes:

$$-\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n'}{f'}; \quad n = 1,00; \quad n' = 1,60; \quad f' = -640 \text{ mm}; \quad a' = H'O' = -320 \text{ mm}.$$

$$-\frac{1,00}{a} + \frac{1,60}{-320} = \frac{1,60}{-640}; \quad \frac{1}{a} = \frac{1,60}{640} - \frac{1,60}{320} = \frac{1,60 - 3,20}{640} = -\frac{1,60}{640};$$

$$a = HO = -400 \text{ mm}.$$

La imagen es virtual por estar situada a la izquierda de la lente L .

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{na'}{n'a} = \frac{1,00(-320)}{1,60(-400)} = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{y'}{m} = \frac{20}{\frac{1}{2}} = 40 \text{ mm}.$$

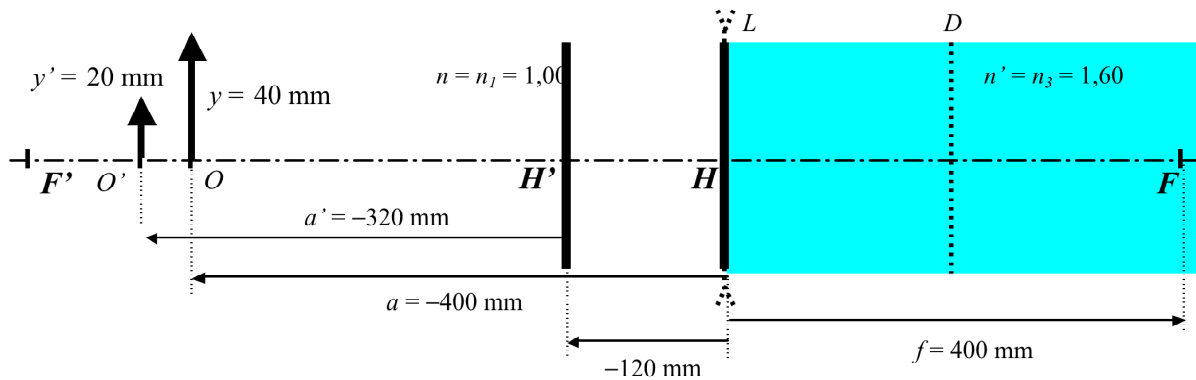


Figura 2

La distancia de la lente L al objeto es:

$$LO = LH + HO = 0 - 400 = -400 \text{ mm.}$$

El ejercicio también puede solucionarse considerando el sistema reducido en aire (Figura 3):

Debe tenerse en cuenta que la imagen O'_2 , por ser imagen del dioptrio D , está sumergida en el medio de índice $n_3 = 1,60$.

$$s' = -640 \text{ mm}; \quad \bar{s}' = \frac{s'}{n'} = \frac{-640}{1,60} = -400 \text{ mm}; \quad DO' = DO'_2.$$

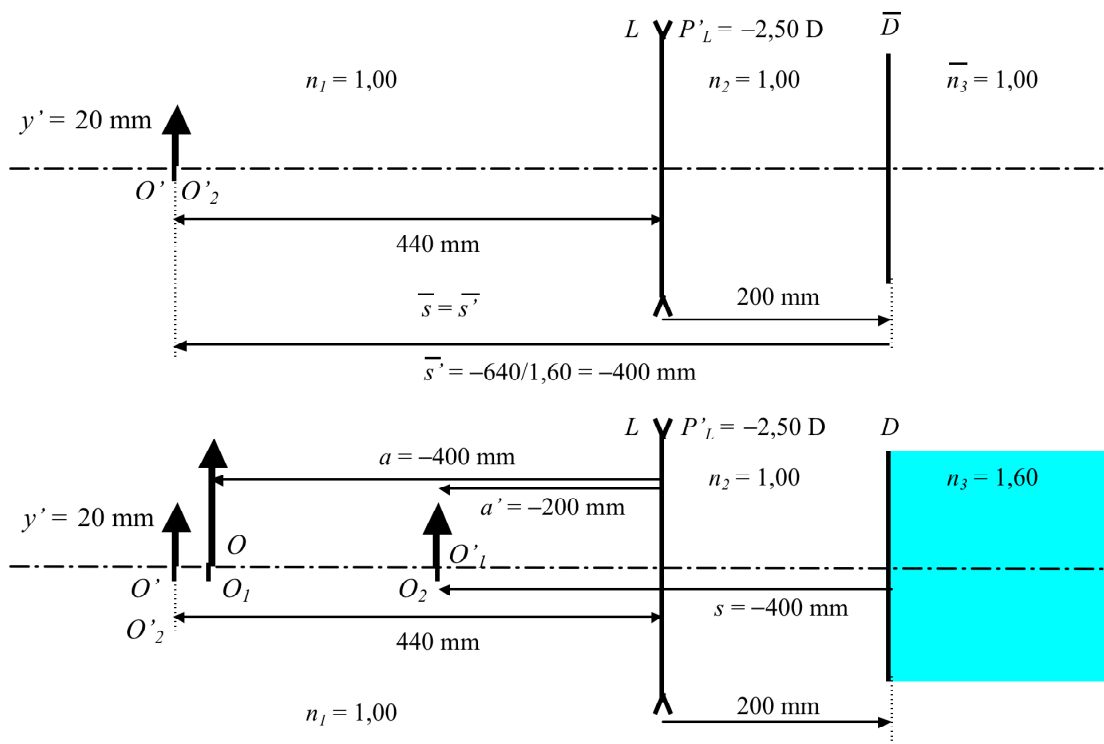


Figura 3

Conjugado objeto del dioptrio:

$$\bar{s} = \bar{s}' ; \quad \frac{s}{n} = \frac{\bar{s}'}{n'} ; \quad \frac{s}{n_2} = \frac{\bar{s}'}{n_2'} ; \quad s = n_2 \bar{s}' = 1,00(-400) = -400 \text{ mm} = DO_2.$$

Conjugado objeto a través de la lente L :

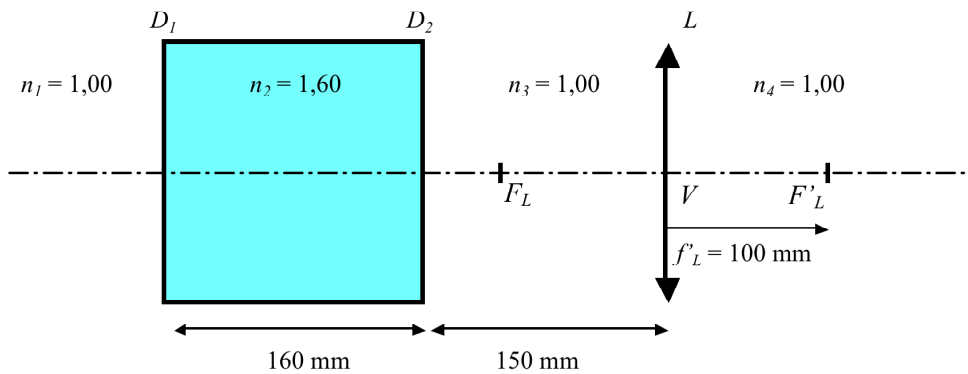
$$-\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n'}{f'} ; \quad n = n_1 = 1,00 ; \quad n' = n_2 = 1,00 ; \quad f' = -400 \text{ mm} ; \quad a' = LO_1 = LO_2 = -200 \text{ mm}.$$

$$-\frac{1,00}{-a} + \frac{1,00}{-200} = \frac{1,00}{-400} ; \quad \frac{1}{a} = -\frac{1}{400} + \frac{1}{200} = \frac{1-2}{400} = -\frac{1}{400} ;$$

$$a = -400 \text{ mm} = LO_1 = LO.$$

Resultado que coincide con el encontrado anteriormente.

5. Considera la asociación de una lámina planoparalela y una lente delgada que se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales este sistema:



SOLUCIÓN:

a) Determinación de H' y F' :

Utilizando trazado gráfico de rayos se deduce que H' coincide con la posición de L y F' con la posición de F'_L (Figura 1).

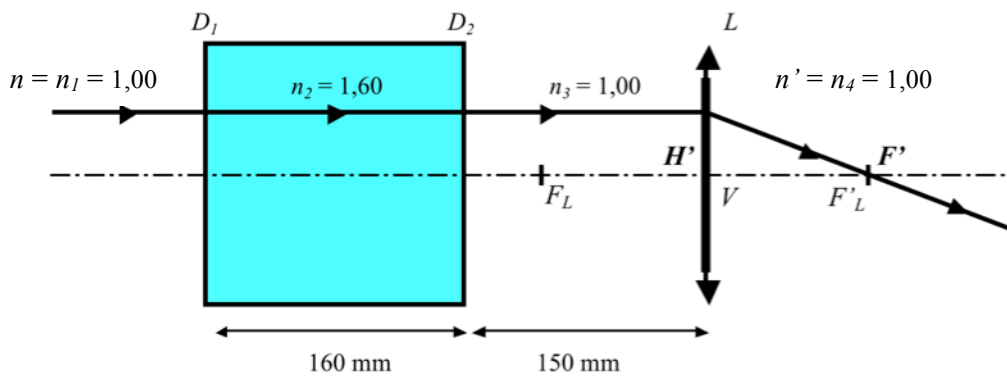


Figura 1

$$LH' = 0 \text{ mm.}$$

$$LF' = LF'_L = 100 \text{ mm.}$$

$$f' = H'F' = H'L + LF' = 100 \text{ mm.}$$

b) Determinación de H y F :

En la figura 2 se observa que F_L es el conjugado imagen de F a través de la lámina planoparalela formada por los dioptrios D_1 y D_2 . Para ello basta considerar la trayectoria reversible del rayo de luz al atravesar la lámina planoparalela.

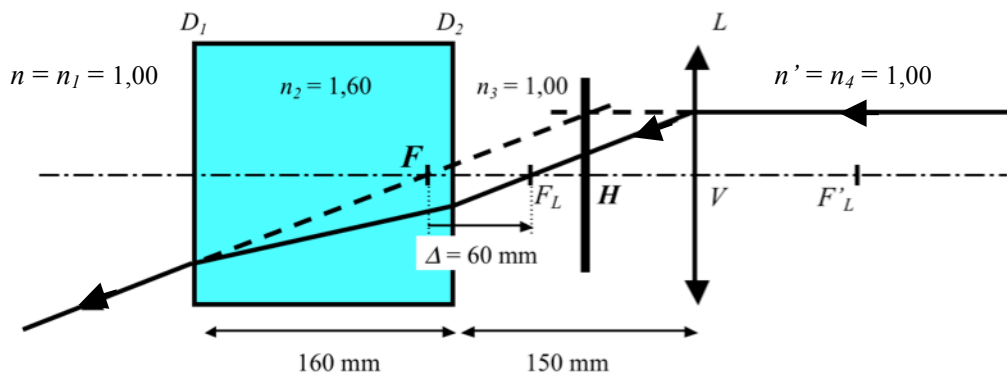


Figura 2

El desplazamiento, entre el objeto y la imagen, producido por una lámina planoparalela de índice n sumergida en aire vale:

$$\Delta = \frac{n-1}{n}d.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior $n = n_2 = 1,60$ y $d = 160$ mm se obtiene:

$$\Delta = \frac{1,60-1}{1,60}160 = 60 \text{ mm.}$$

Por estar el sistema sumergido en medios extremos iguales ($n = n_1 = 1,00$ y $n' = n_4 = 1,00$) la focal objeto f del sistema vale:

$$f = HF = -100 \text{ mm.}$$

$$LF = LF_L + F_LF = LF_L - \Delta = -100 - 60 = -160 \text{ mm.}$$

$$D_1F = D_1L + LF = 310 - 160 = 150 \text{ mm.}$$

$$D_2F = D_2D_1 + D_1F = -160 + 150 = -10 \text{ mm.}$$

$$LH = LF + FH = -160 + 100 = -60 \text{ mm.}$$

Los resultados obtenidos demuestran que la posición de los elementos cardinales es independiente de la distancia que separa la lámina planoparalela de la lente (150 mm).

La posición de F puede determinarse también a partir del sistema reducido en aire (Figura 3).

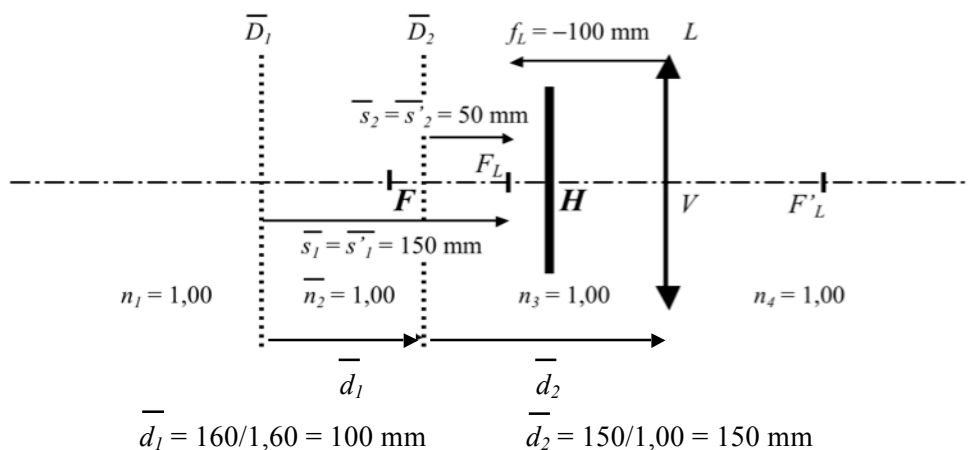


Figura 3

$$\bar{s}'_1 = \bar{s}_1; \quad \frac{s'_1}{n'_1} = \frac{s_1}{n_1}.$$

$$s_1 = n_1 \bar{s}_1 = 1,00(150) = 150 \text{ mm} = D_1 F.$$

Valor que coincide con el encontrado anteriormente.

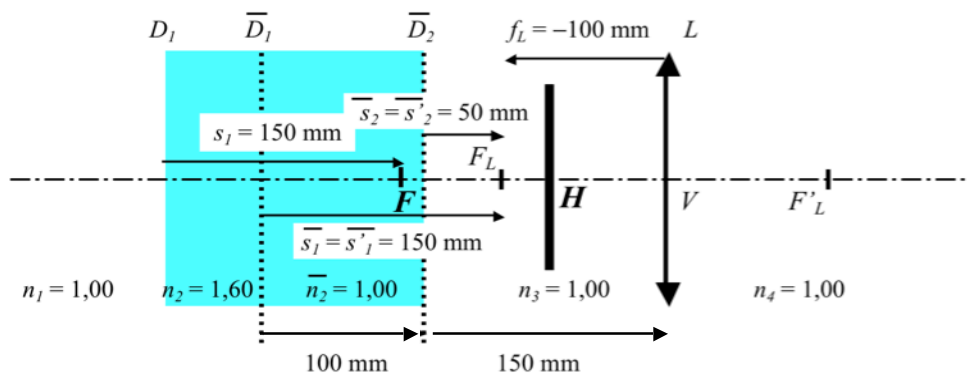


Figura 4

La figura 5 muestra la posición de los elementos cardinales del sistema anterior.

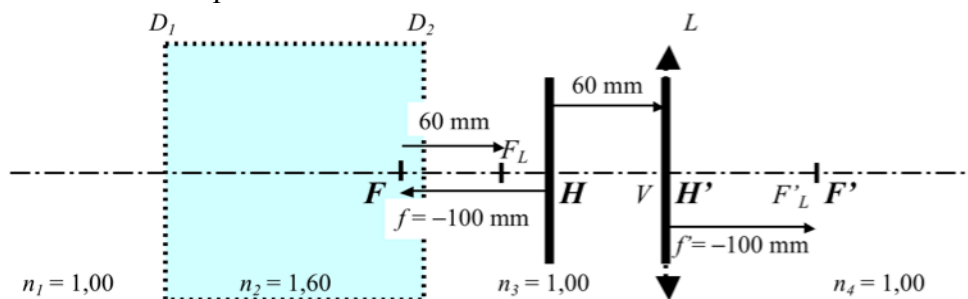
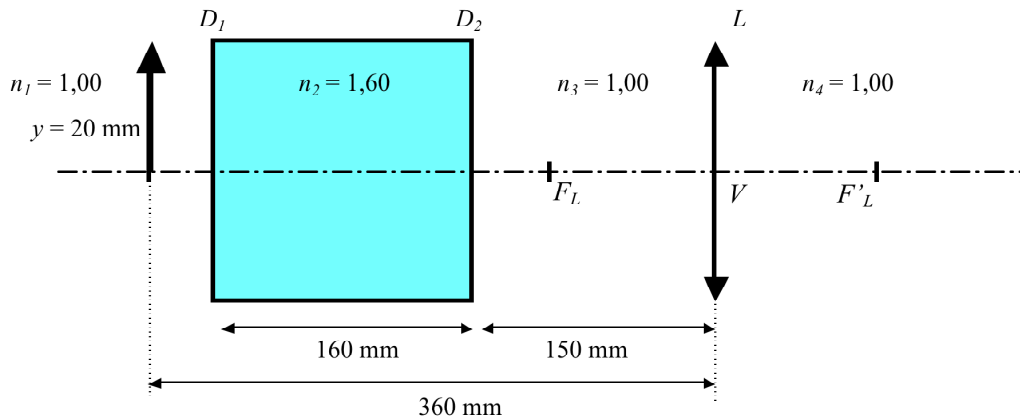


Figura 5

6. Determina la posición, el carácter y el aumento de la imagen en el caso siguiente:



SOLUCIÓN:

Consideremos los elementos cardinales del sistema anterior:

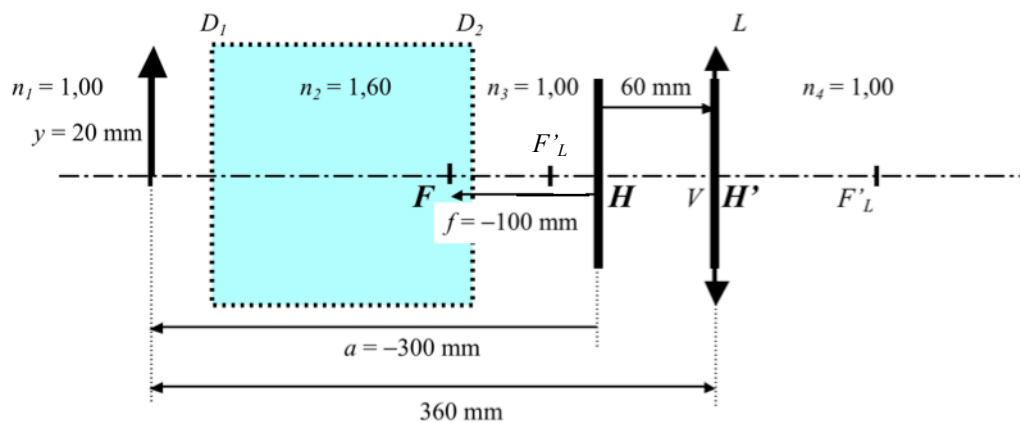


Figura 1

Aplicando la ecuación de Descartes:

$$-\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n'}{f'} \quad n = 1,00; \quad n' = 1,00; \quad f' = 100 \text{ mm}; \quad a = HO = -300 \text{ mm}.$$

$$-\frac{1}{-300} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{100}; \quad \frac{1}{a'} = \frac{1}{100} - \frac{1}{300} = \frac{3-1}{300} = \frac{2}{300} = \frac{1}{150};$$

$$a' = H'O' = LO' = 150 \text{ mm}.$$

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = \frac{150}{-300} = -\frac{1}{2}$$

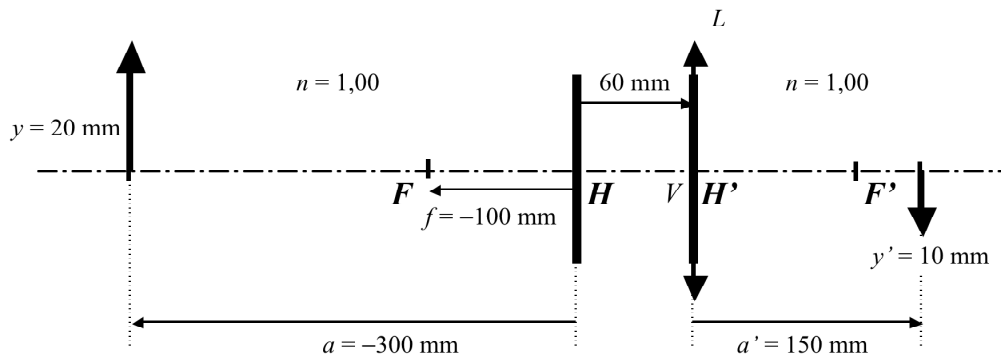


Figura 2

La imagen es real por estar situada a la derecha de la lente L , invertida y de tamaño igual a la mitad del objeto.

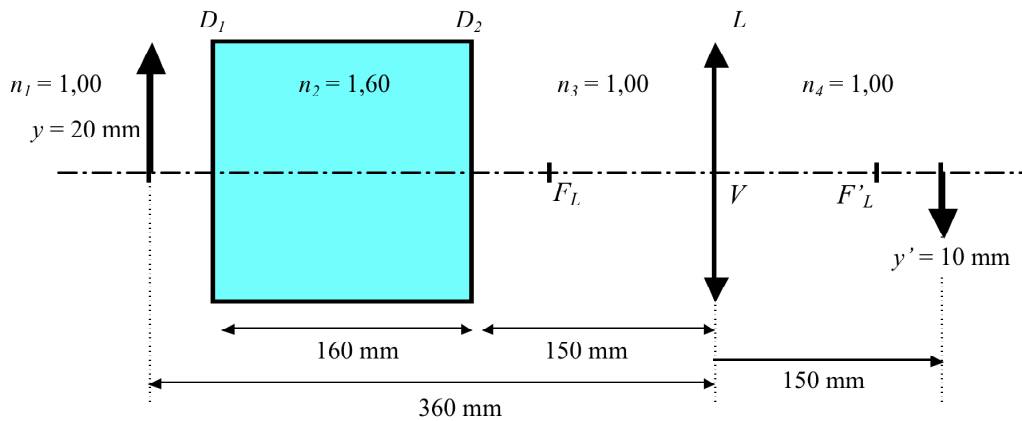


Figura 3

Otra manera de hacerlo sería a partir de la acción encadenada de los diferentes elementos que configuran el sistema.

a) Imagen formada por la lámina planoparalela (Dioptrios D_1 y D_2):

El desplazamiento Δ producido por la lámina planoparalela es:

$$\Delta = \frac{n-1}{n}d = \frac{1,60-1}{1,60}160 = 60 \text{ mm.}$$

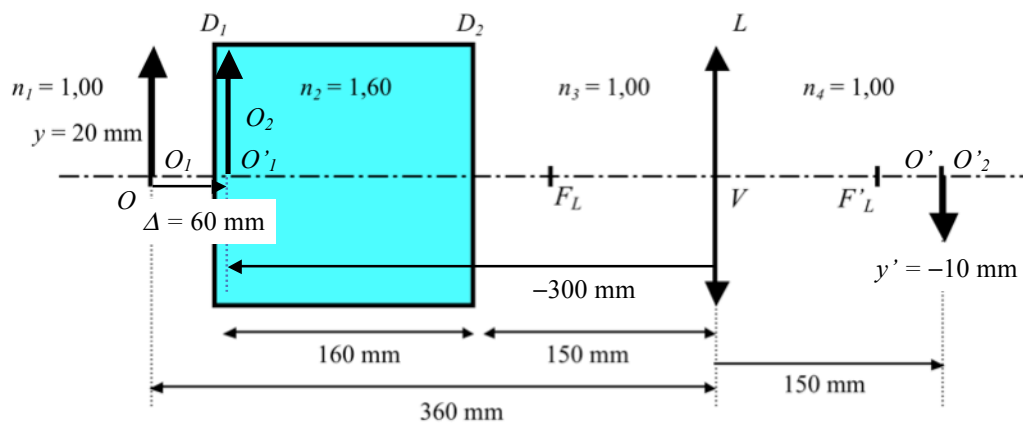
b) Imagen formada por la lente L :

$$-\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n'}{f'}; \quad n = n_3 = 1,00; \quad n' = n_4 = 1,00; \quad f' = 100 \text{ mm}; \quad a = LO_2 = -300 \text{ mm.}$$

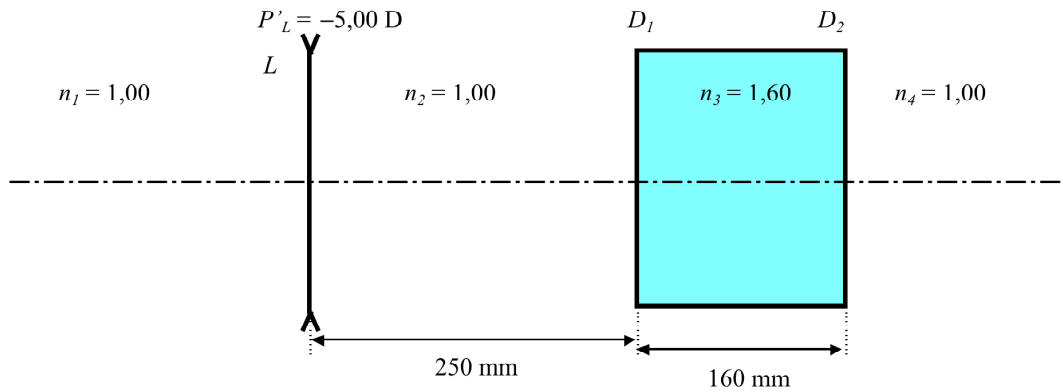
$$-\frac{1}{-300} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{100}; \quad \frac{1}{a'} = \frac{1}{100} - \frac{1}{300} = \frac{3-1}{300} = \frac{2}{300} = \frac{1}{150}; \quad a' = 150 \text{ mm.}$$

El aumento lateral del sistema es el de la lente:

$$m = m_L = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = \frac{150}{-300} = -\frac{1}{2}$$



7. Considera la asociación de una lente delgada negativa y una lámina planoparalela según se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales de este sistema:



SOLUCIÓN:

Distancias focales de la lente L :

$$f'_L = \frac{n'}{P'_L} = \frac{n_2}{P'_L} = \frac{1,00}{-5,00} = -0,200 \text{ m} = -200 \text{ mm}.$$

Por estar sumergida en medios extremos iguales:

$$f_L = -f'_L = -(-200) = 200 \text{ mm}.$$

a) Determinación de H y F :

Mediante trazado gráfico se observa que H coincide con la posición de L y F con la posición de F_L (Figura 1).

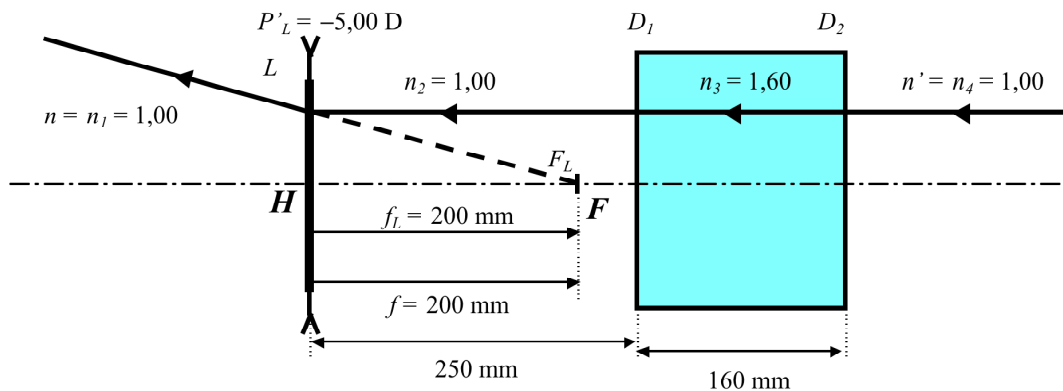


Figura 1

$$LH = 0 \text{ mm.}$$

$$LF = LF_L = 200 \text{ mm.}$$

$$f = HF = HL + LF = 0 + 200 = 200 \text{ mm.}$$

b) Determinación de F' y H' :

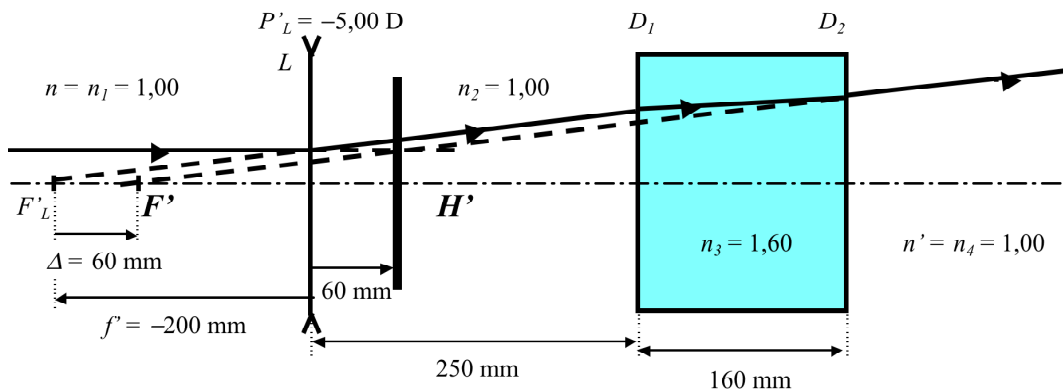


Figura 2

Por estar el sistema sumergido en medios extremos iguales ($n = n_1 = 1,00$ y $n' = n_4 = 1,00$) la focal imagen f' del sistema es igual a la focal objeto cambiada de signo.

$$f' = -f = -200 \text{ mm.}$$

$$f' = H'F' = -200 \text{ mm.}$$

Posición de F' :

En la figura 2 se observa que F' es el conjugado imagen de F'_L a través de la lámina planoparalela formada por los dioptros D_1 y D_2 .

El desplazamiento entre el objeto y la imagen producido por una lámina planoparalela de índice n sumergida en aire vale:

$$\Delta = \frac{n-1}{n} d.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior $n = n_3 = 1,60$ y $d = 160 \text{ mm}$ se obtiene:

$$\Delta = \frac{1,60-1}{1,60} 160 = 60 \text{ mm.}$$

$$LF' = LF'_L + F'_L F' = -200 + 60 = -140 \text{ mm.}$$

$$D_2 F' = D_2 D_1 + D_1 L + LF' = -100 - 250 - 200 = -550 \text{ mm.}$$

$$LH' = LF' + F'H' = -140 + 200 = 60 \text{ mm.}$$

La posición de F' puede determinarse también a partir del sistema reducido en aire.

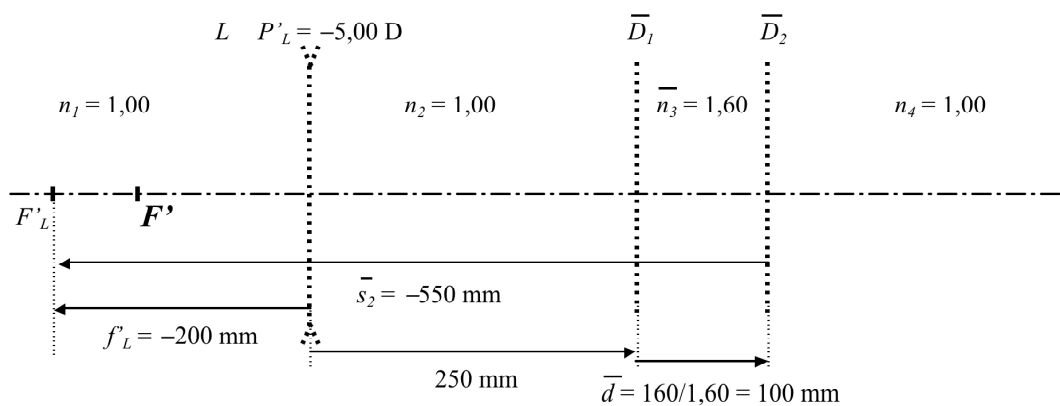


Figura 3

$$\overline{s'_2} = \overline{s_2}; \quad \frac{s'_2}{n'_2} = \frac{s_2}{n_2}.$$

$$s'_2 = n'_2 \overline{s_2};$$

Teniendo en cuenta que $n'_2 = n_4 = 1,00$.

$$s'_2 = 1,00(-550) = -550 \text{ mm} = D_2F'.$$

Valor que coincide con el encontrado anteriormente.

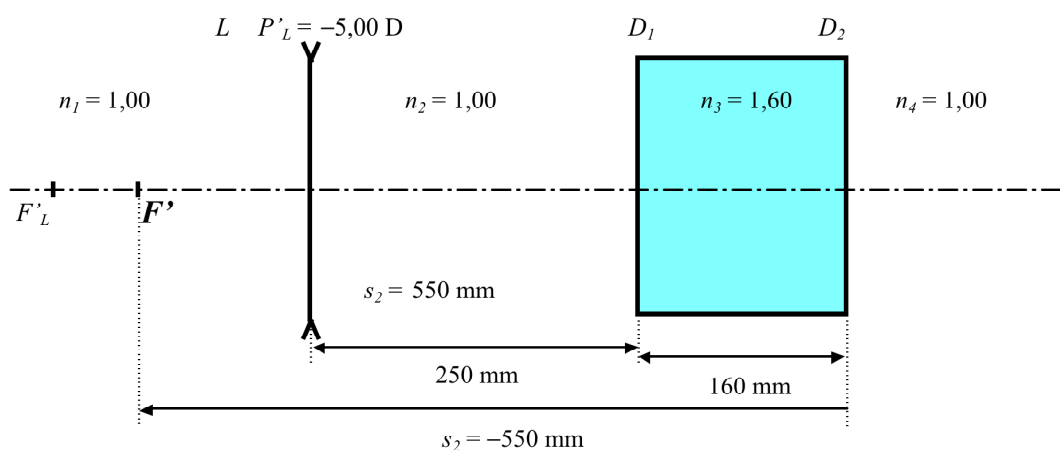


Figura 4

Igualmente se puede proceder con la posición de H' . H' es el conjugado imagen de H a través del sistema. Debido que la posición de H coincide con la de L , H' es el conjugado imagen de H a través de la lámina planoparalela formada por los dioptros D_1 y D_2 .

Teniendo en cuenta que la lámina planoparalela produce, entre el objeto H y la imagen H' , un desplazamiento Δ de valor:

$$\Delta = \frac{n-1}{n}d.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior $n = n_3 = 1,60$ y $d = 160$ mm se obtiene:

$$\Delta = \frac{1,60-1}{1,60}160 = 60 \text{ mm.}$$

$$HH' = \Delta = 60 \text{ mm.}$$

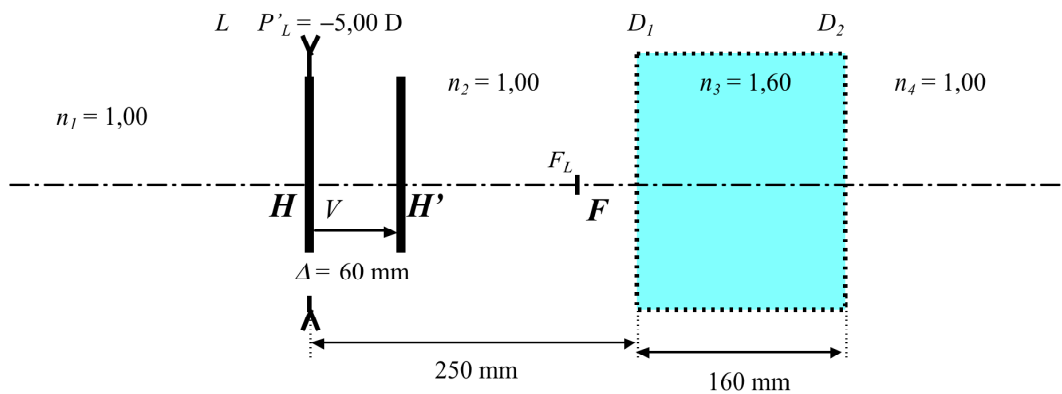


Figura 5

La posición de H' también puede obtenerse utilizando distancias reducidas:

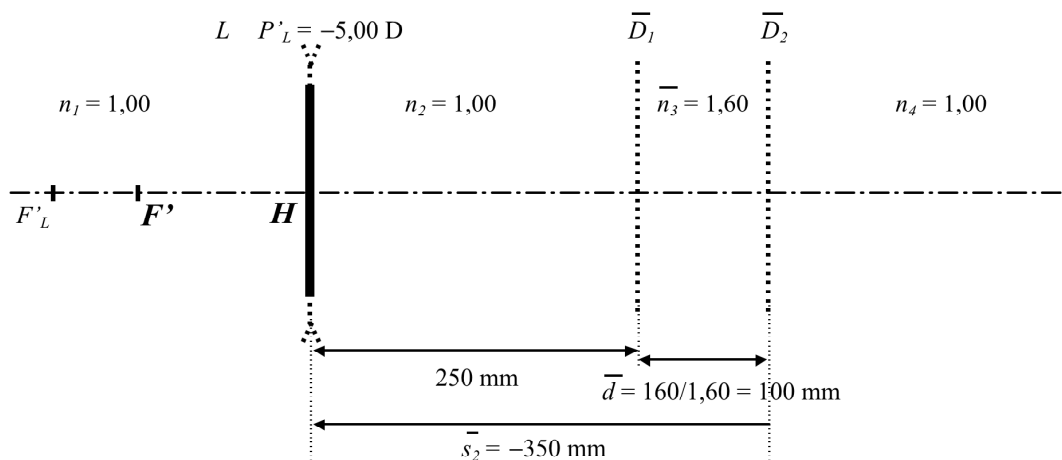


Figura 6

$$\overline{s'_2} = \overline{s_2}; \quad \frac{s'_2}{n'_2} = \frac{s_2}{n_2}.$$

$$s'_2 = n'_2 \overline{s_2};$$

Teniendo en cuenta que $n'_2 = n_4 = 1,00$.

$$s'_2 = 1,00(-350) = -350 \text{ mm} = D_2 H'.$$

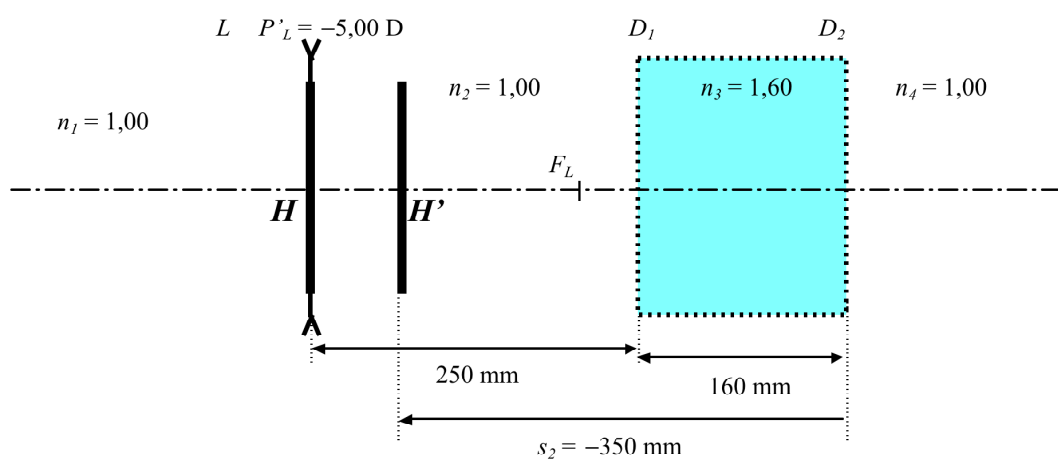
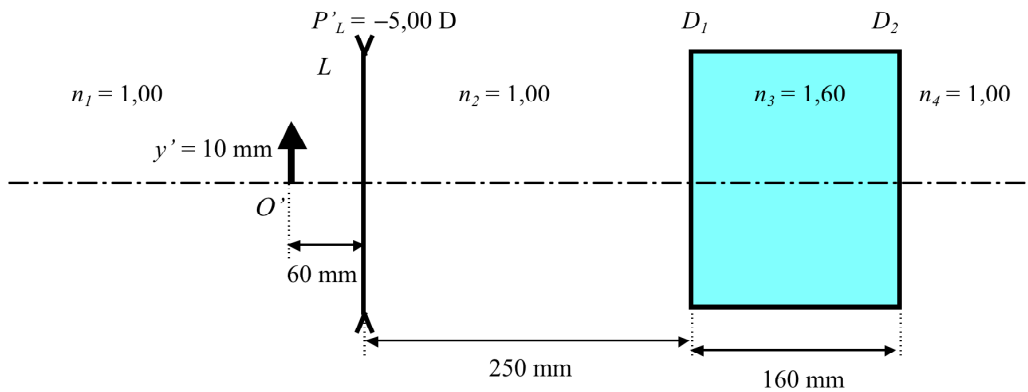


Figura 7

8. Conocida la posición y el tamaño de la imagen, determina la posición, el carácter y el tamaño del objeto en el sistema siguiente:



SOLUCIÓN:

Consideremos los elementos cardinales del sistema anterior:

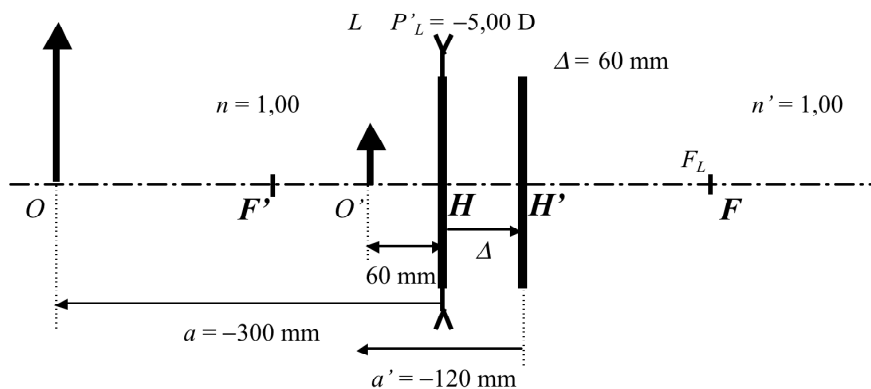


Figura 1

Se trata de una imagen virtual por estar situada a la izquierda de la última superficie del sistema (D_2).

Aplicando la ecuación de Descartes:

$$-\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n'}{f'} \quad n = 1,00; \quad n' = 1,00; \quad f' = -200 \text{ mm}; \quad a' = H'O' - 120 \text{ mm}.$$

$$-\frac{1,00}{a} + \frac{1,00}{-120} = \frac{1,00}{-200}; \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{200} - \frac{1}{120} = \frac{3-5}{600} = -\frac{2}{600}; \quad a = HO = LO = -300 \text{ mm}.$$

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = \frac{-120}{-300} = 0,40; \quad y = \frac{y'}{m} = \frac{10}{0,40} = 25 \text{ mm};$$

El objeto es real por estar situado a la izquierda de la primera superficie del sistema (L).

La imagen es virtual por estar situada a la izquierda de última superficie del sistema (D_2), derecha y de tamaño menor que el objeto.

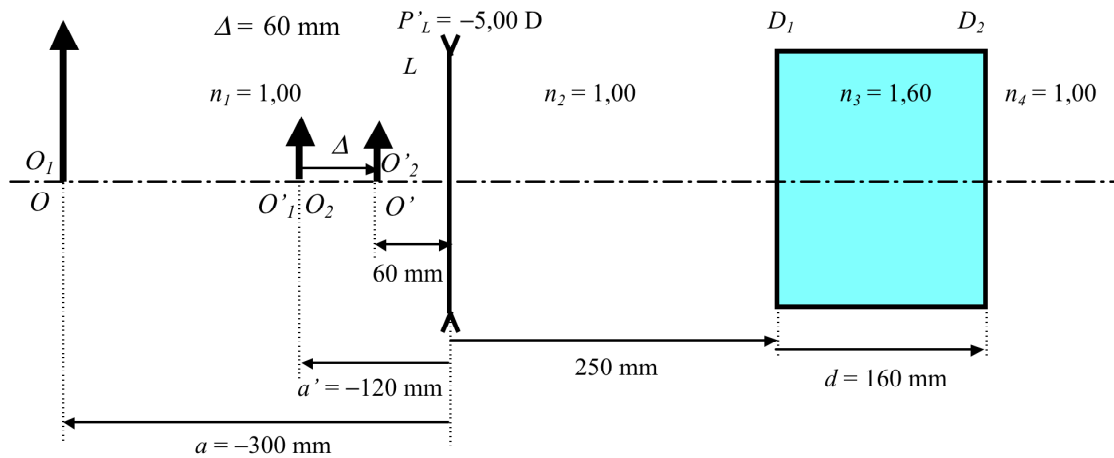


Figura 3

Otra manera de hacerlo sería a partir de la acción encadenada de los diferentes elementos que configuran el sistema.

a) Conjugado objeto a través de la lámina planoparalela.

El desplazamiento entre el objeto y la imagen en una lámina planoparalela sumergida en aire vale:

$$\Delta = O_2O'_2 = \frac{n-1}{n}d = \frac{1,60-1}{1,60}160 = 60 \text{ mm.}$$

El tamaño del objeto es el mismo que el de la imagen.

b) Conjugado objeto a través de la lente.

$$-\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n'}{f'}; \quad n = n_1 = 1,00; \quad n' = n_2 = 1,00; \quad f' = -200 \text{ mm}; \quad a' = -120 \text{ mm.}$$

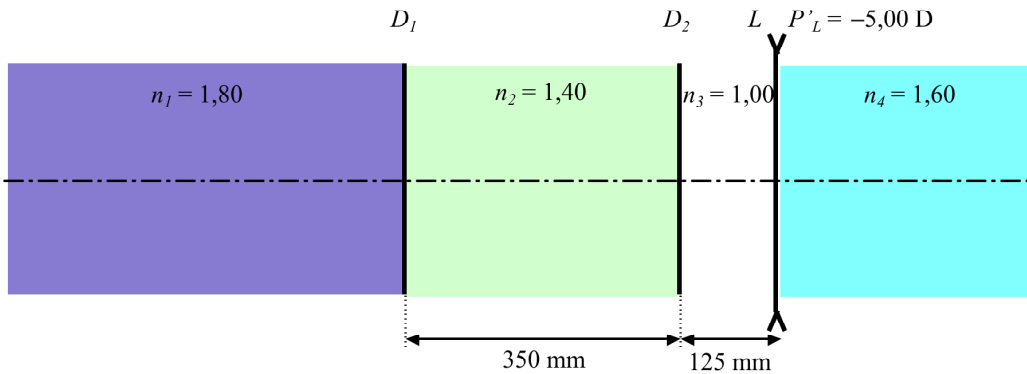
$$-\frac{1,00}{a} + \frac{1,00}{-120} = \frac{1,00}{-200}; \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{200} - \frac{1}{120} = \frac{3-5}{600} = -\frac{2}{600}; \quad a = -300 \text{ mm.}$$

$$m_L = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = \frac{-120}{-300} = 0,40.$$

Tamaño del objeto:

$$y = \frac{y'}{m} = \frac{10}{0,40} = 25 \text{ mm.}$$

9. Sea un sistema formado por los dioptros planos D_1 y D_2 y la lente delgada L de potencia $P' = -5,00$ D según se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales de este sistema.



SOLUCIÓN:

Distancias focales de la lente L :

$$f'_L = \frac{n'}{P'_L} = \frac{n_4}{P'_L} = \frac{1,60}{-5,00} = -0,320 \text{ m} = -320 \text{ mm.}$$

$$P_L = -P'_L.$$

$$f_L = \frac{n}{P_L} = \frac{n_3}{P_L} = \frac{1,00}{5,00} = 0,200 \text{ m} = 200 \text{ mm.}$$

a) Determinación de H' y F' :

Utilizando trazado gráfico de rayos se deduce que H' coincide con la posición de L y F' con la posición de F_L (Figura 1).

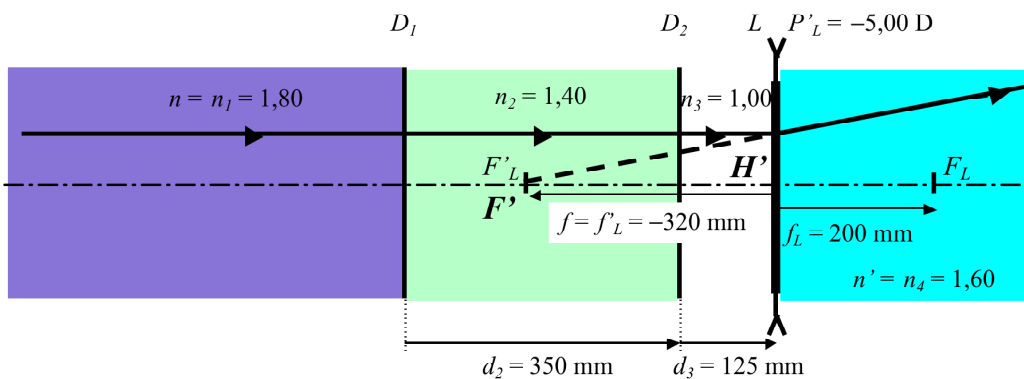


Figura 1

$$LH' = 0 \text{ mm.}$$

$$LF' = LF'_L = -320 \text{ mm.}$$

$$f' = H'F' = H'L + LF' = 0 - 320 = -320 \text{ mm}$$

La potencia imagen P' del sistema es:

$$P' = \frac{n'}{f'} = \frac{1,60}{-0,320} = -5,00 \text{ D.}$$

Valor que coincide con la potencia de la lente L .

b) Determinación de H y F :

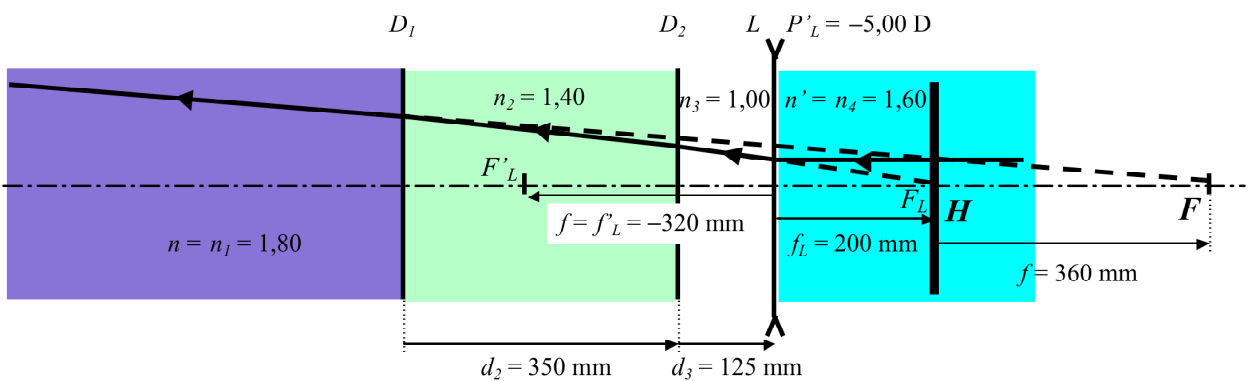


Figura 2

$$P = -P'; \quad \frac{n}{f} = -\frac{n'}{f'}; \quad \frac{n_1}{f} = -\frac{n_4}{f'}; \quad \frac{1,80}{f} = -\frac{1,60}{-320};$$

$$f = -\frac{1,80(-320)}{1,60} = 360 \text{ mm} = HF.$$

Las distancias focales f y f' son diferentes en valores absolutos por estar el sistema sumergido en medios extremos diferentes.

Si consideramos la reversibilidad del rayo de luz, la figura 3 muestra que F_L es el conjugado imagen de F a través de los dioptros D_1 y D_2 .

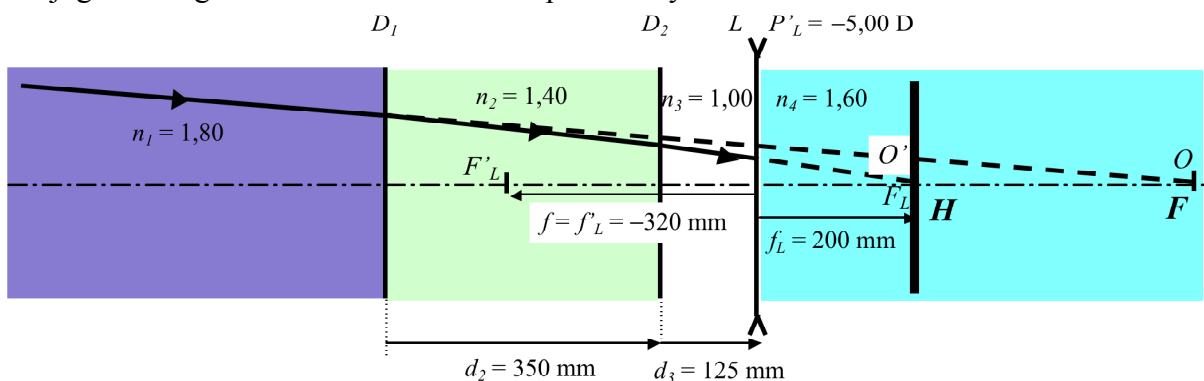


Figura 3

Posición de F :

Si reducimos el sistema en aire (Figura 4).

$$\bar{d}_2 = \overline{D_1 D_2} = \frac{350}{1,40} = 250 \text{ mm.}$$

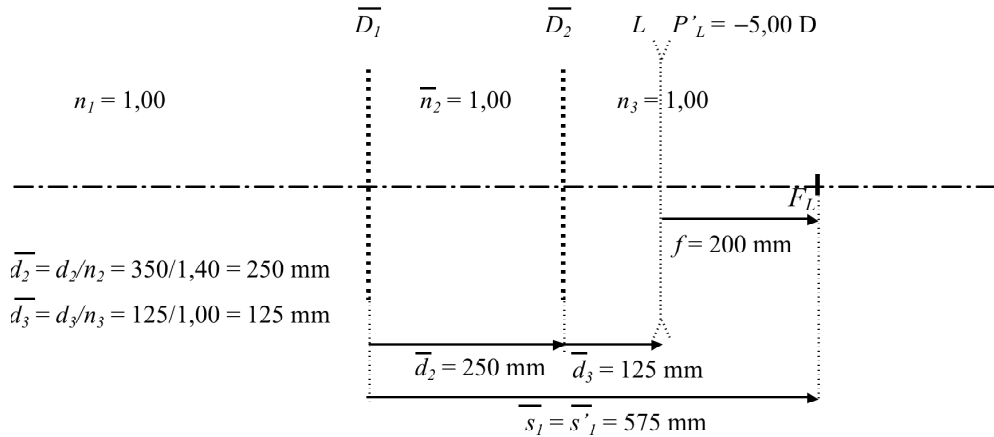


Figura 4

$$\bar{s}_1 = \bar{s}'_1; \quad \frac{s_1}{n_1} = \bar{s}'_1; \quad s_1 = 1,80(575) = 1035 \text{ mm} = D_1 F.$$

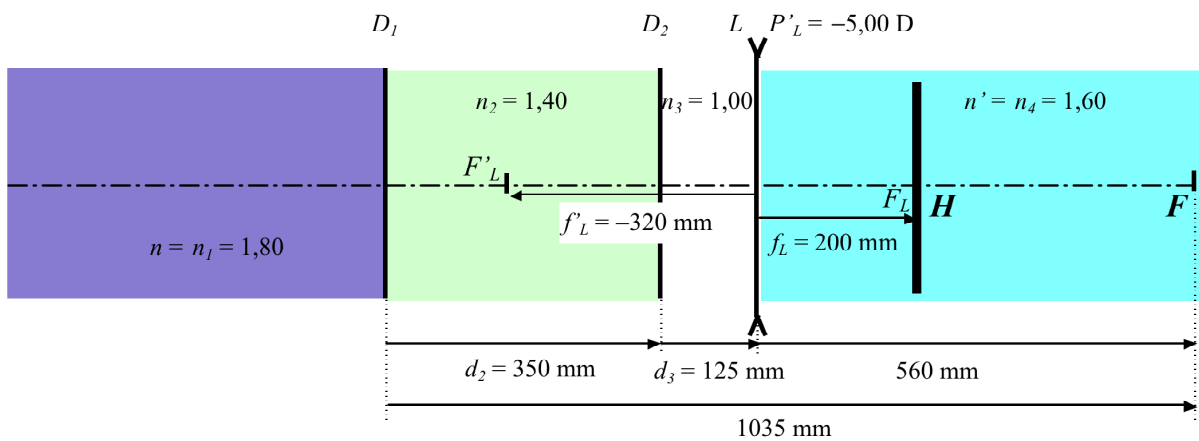


Figura 5

$$LF = LD_1 + D_1 F = -475 + 1035 = 560 \text{ mm.}$$

Posición de H :

H es el conjugado objeto de H' a través del sistema óptico. Debido que H' está situado en la posición de L , H es el conjugado objeto de H' a través de los dioptrios D_1 y D_2 .

Consideremos el sistema reducido en aire (Figura 6):

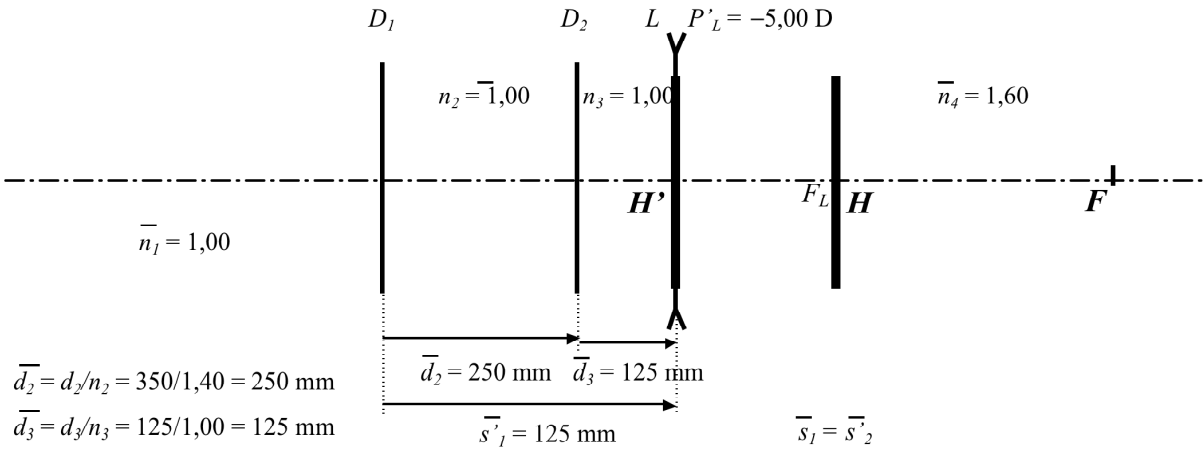


Figura 6

$$\bar{s}_1 = \bar{s}'_1; \quad \frac{s_1}{n_1} = \bar{s}'_1; \quad s_1 = 1,80(375) = 675 \text{ mm} = D_1H.$$

$$LH = LD_1 + D_1H = -475 + 675 = 200 \text{ mm.}$$

$$HH' = HL + LH' = -200 + 0 = -200 \text{ mm.}$$

El sistema anterior es equivalente a:

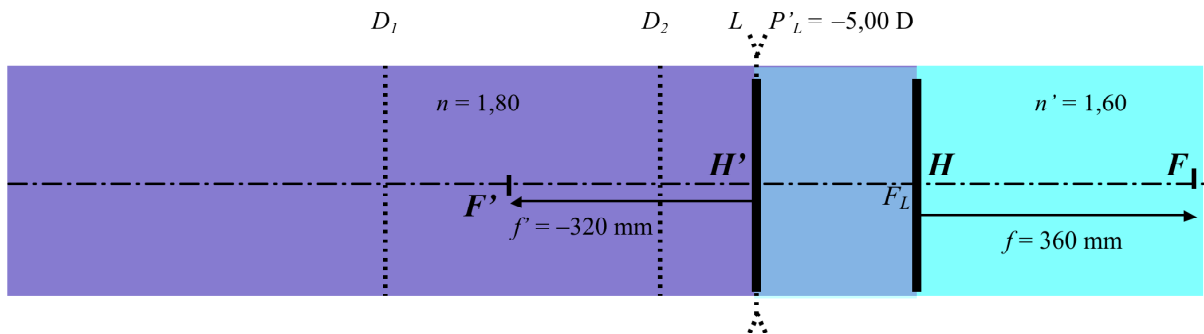
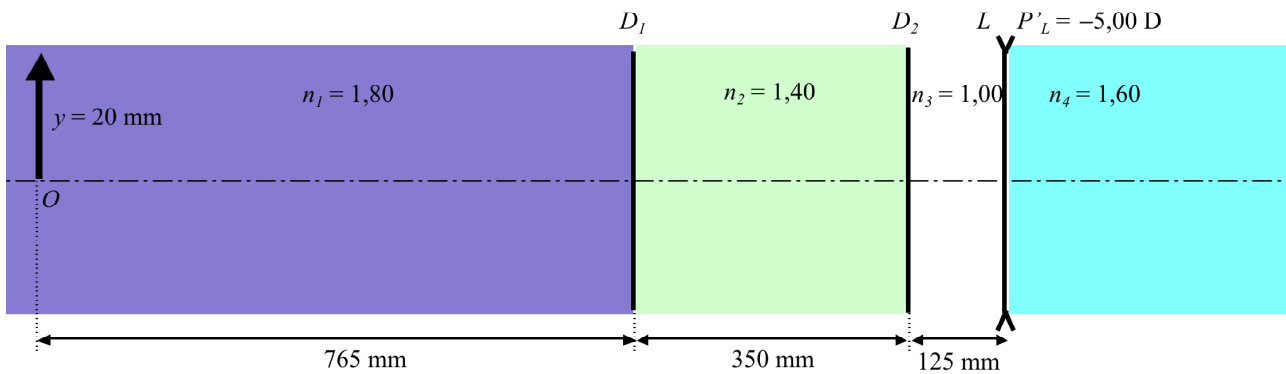


Figura 7

10. Conocida la posición y el tamaño del objeto, determina la posición, el carácter y el tamaño de la imagen en el sistema siguiente:



SOLUCIÓN:

Consideremos los elementos cardinales del sistema anterior:

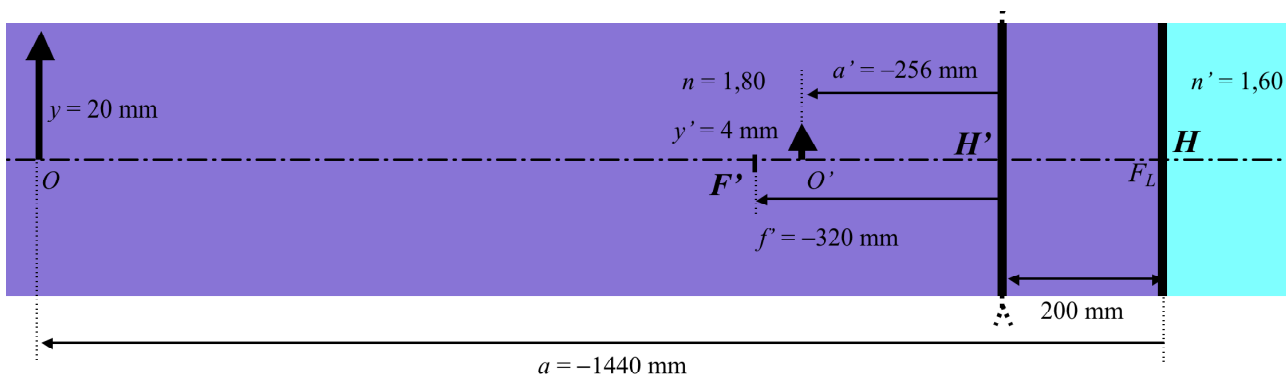


Figura 1

$$-\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n'}{f'}; \quad n = 1,80; \quad n' = 1,60; \quad f' = -320 \text{ mm}; \quad a = HO = -1440 \text{ mm}.$$

$$-\frac{1,80}{-1440} + \frac{1,60}{a'} = \frac{1,60}{-320}; \quad \frac{1,60}{a'} = -\frac{1,60}{320} - \frac{1,80}{1440} = \frac{-14,4 - 3,60}{2880} = -\frac{18,00}{2880};$$

$$a' = HO' = -\frac{1,60(2880)}{18} = -256 \text{ mm}. \quad LO' = LH' + H'O' = 0 - 256 = -256 \text{ mm}.$$

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{na'}{n'a} = \frac{1,80(-256)}{1,60(-1440)} = 0,20.$$

$$y' = my = 0,20(20) = 4 \text{ mm}.$$

Otra manera de hacerlo sería a partir de la acción encadenada de los diferentes elementos que configuran el sistema.

Si consideremos el sistema reducido en aire:

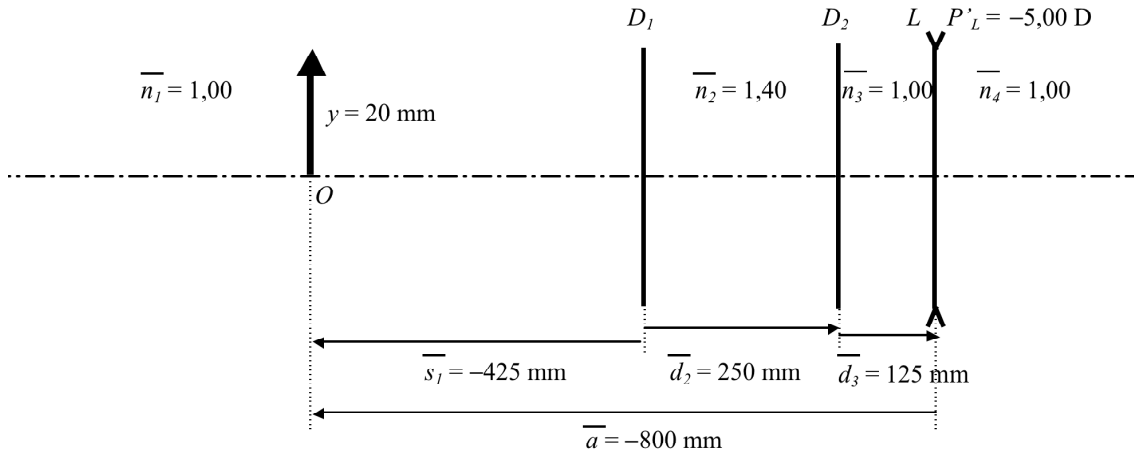


Figura 2

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}; \quad \bar{a} = -800 \text{ mm}; \quad \bar{f}' = \frac{f'}{n'} = \frac{-320}{1,60} = -200 \text{ mm}.$$

$$-\frac{1}{-800} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{-200}; \quad \frac{1}{a'} = -\frac{1}{200} - \frac{1}{800} = \frac{-4-1}{800} = -\frac{5}{800}; \quad \bar{a}' = -160 \text{ mm}.$$

$$\bar{a}' = \frac{a'}{n'}; \quad a' = n' \bar{a}' = 1,60(-160) = -256 = LO'.$$

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{\bar{a}'}{a} = \frac{-160}{-800} = 0,20.$$

$$y' = my = 0,20(20) = 4 \text{ mm}.$$