# Matemàtica Discreta

## PROBLEMES DE GRAFS

Mercè Claverol
Ester Simó
Marisa Zaragozá

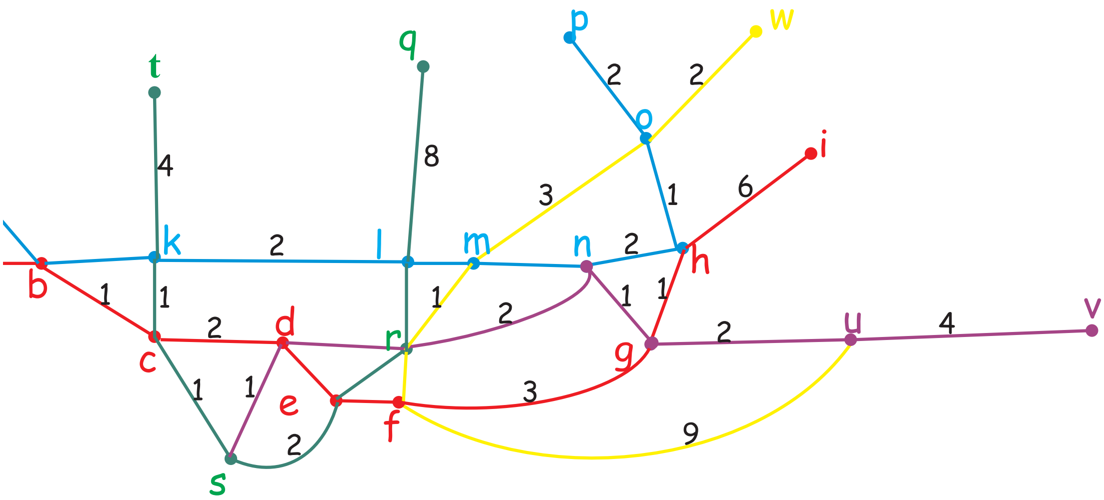
Departament Matemàtica Aplicada IV
EPSEVG - UPC

# Index

## Problemes Grafs: Conceptes bàsics

1. Disposem de 6 ordinadors i 9 cables de connexió i volem que cada ordinador es connecti amb altres 3 ordinadors. Existeix alguna forma de connectar-los? És única?

2. El graf de la figura representa el metro de Barcelona, on els vèrtexs són les estacions d'enllaç entre les diferents línies i el pes de cada aresta és el número d'estacions que hi ha entre elles (les que no tenen número són de pes 0). Calcula l'ordre i la mida del graf.




3. Representeu gràficament el graf ponderat $G = (V, E)$, on $V$ és el conjunt de cadenes binaries de longitud 3 i amb regla d'adjacència donada de la següent manera: hi ha aresta des dels vèrtexs $a_1a_2a_3$ als vèrtexs $a_2a_3a_4$ de $V$.

4. Es poden dibuixar 7 segments en un full de tal manera que cadascun d'ells talli exactament a altres 3? Formuleu el problema en termes de grafs. Si feu que cada segment sigui un vèrtex, com definirieu les arestes?

5. Demostreu que la mida de $K_n$ és $\frac{n(n-1)}{2}$.

6. Si $G$ és un graf simple amb 45 arestes, quin és el menor nombre de vèrtexs que pot tenir $G$?

7. Representeu gràficament el graf $G = (V, E)$ amb matriu d'adjacència:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Donat el graf G amb matriu d'adjacència

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Representar-ho gràficament i a partir de la seva gràfica obteniu la seva matriu d'incidència.

9. Obteniu la matriu d'adjacència de l'hipercub $Q_3$.

10. Donat el graf $K_{m,n}$, calculeu:
    (a) L'ordre i la mida.
    (b) Per a quins valors d'$m$ i $n$ és un graf regular?
    (c) Determineu $\overline{K_{m,n}}$.
    (d) Com és la matriu d'adjacència del graf $K_{m,n}$?

11. Existeix un graf simple amb seqüència de graus $\{2, 2, 2, 3\}$?

12. Calculeu $\mid V \mid$ per als grafs següents:
    (a) Graf de mida 9 i amb tots els seus vèrtexs de grau 3.
    (b) Graf regular de mida 15.
    (c) Graf de mida 10, amb 3 vèrtexs de grau 4 i la resta de vèrtexs de grau 2.

13. Demostreu que si $G$ és $d$-regular, $d$ senar, llavors $G$ sempre té ordre parell.

14. Sigui $G$ un graf d'ordre $n$ i mida $m$. Denotem per $\delta(G)$ el grau mínim de $G$ i per $\Delta(G)$ el grau màxim de $G$. Proveu el següent:
    (a) $\delta(G) \leq \frac{2m}{n}$.
    (b) $\frac{2m}{n} \leq \Delta(G)$.

15. En un grup de 15 persones, és possible que cadascuna tingui exactament 3 amics?

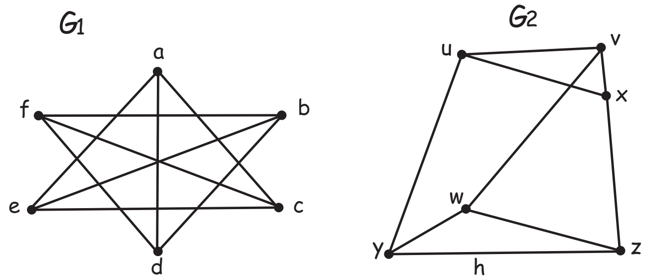
16. Quina relació existeix entre l'ordre i la mida d'un graf 2-regular?

17. Demostreu que no existeix cap graf simple d'ordre més gran o igual a 2 i amb tots els graus dels vèrtexs diferents.

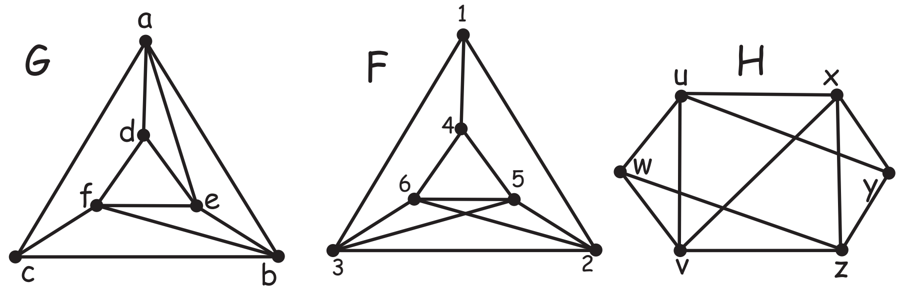
18. Digueu per a quins valors d'$n$ les següents famílies de grafs són regulars: $K_n$, $C_n$, $W_n$ i $Q_n$.

19. Hi ha algun graf 5-regular d'ordre senar?

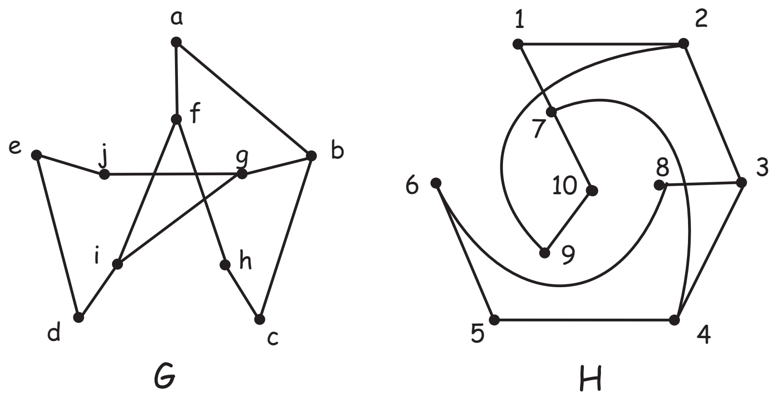
20. Demostra que els grafs $G_1$ i $G_2$ són isomorfs.




21. Si el graf $G$ és isomorf a algun dels grafs $F$ o $H$, dóna l'aplicació bijectiva entre els vèrtexs que preservi adjacències. Altrament raona per què no són isomorfos.




22. Sabent que l'aplicació $f$ entre els vèrtexs de $G$ i $H$ demostra que són grafs isomorfs i coneixent els valors $f(\mathrm{f}) = 2, f(h) = 9$ i $f(j) = 5$, completeu l'aplicació.




23. Quants grafs hi ha no isomorfs 4-regulars d'ordre 7?

24. Quants grafs hi ha no isomorfs d'ordre 20 i mida 188?

25. (a) Sigui $G$ un graf simple amb $n$ vèrtexs. Si $G$ és isomorf al seu graf complementari, quantes arestes té $G$? (Aquest graf es coneix amb el nom de *graf autocomplementari*).
    (b) Trobeu un exemple d'un graf autocomplementari amb 4 vèrtexs i d'un altre amb 5 vèrtexs.
    (c) Si $G$ és un graf autocomplementari d'ordre $n$, $n > 1$, demostreu que $n = 4k$ o $n = 4k + 1$, per algún $k \in \mathbb{Z}^+$.

26. Sigui $G$ un graf simple amb $n$ vèrtexs i $m$ arestes. Quantes arestes té el graf $\overline{G}$ (graf complementari de $G$)?

27. Si $G$ és un graf simple de mida 15 i $\overline{G}$ té mida 13. Quin ordre té $G$?

28. Representeu el graf complementari del graf bipartit complet $K_{3,2}$.

29. Sigui $C_n$ el cicle d'ordre $n$. Demostreu que $C_n$ és autocomplementari si i només si $n = 5$.

30. Hi ha algun graf k-regular d'ordre parell autocomplementari?

## Problemes Grafs: Camins i connexió

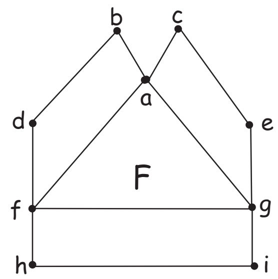
1. Quina llista correspont a un recorregut en el graf $F$ representat a la següent figura? I quina correspont a un camí? I a un circuit? Doneu la longitud dels recorreguts.

   (a) $a, c, e, g, e, g, e, g$.

   (b) $a, b, d, f, g, i$.

   (c) $a, b, d, f, a$.

   (d) $f, g, i, h, a$.

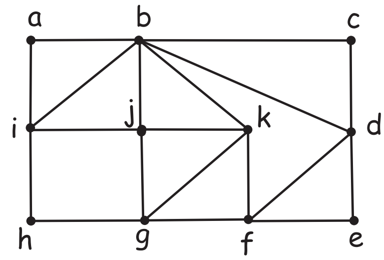



2. Trobeu la longitud màxima d'una cadena en els grafs:

   (a) $K_n$, $\forall n \in \{2, 4, 6, 8\}$.

   (b) $K_{2n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

3. Per al graf següent trobeu:




   (a) Una cadena de longitud 5.

   (b) Un camí de longitud 9.

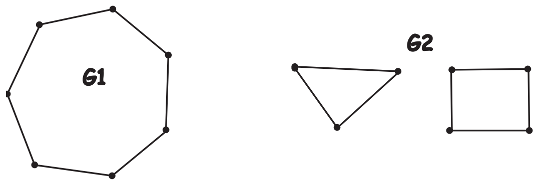
   (c) Cicles de longituds $5, 6, 8, 9$.

4. Demostreu que un graf $G$ és bipartit si i només si tots els seus cicles són de longitud parell.

5. Proveu que un graf connex d'ordre $n$ té com a mínim $n - 1$ arestes.

6. Demostreu que si un graf $G$ té exactament 2 vèrtexs de grau senar necessariament existeix un camí entre ells.

7. Digueu si els següents grafs són o no connexos.




8. Trobeu el nombre de components connexes dels grafs representats per les següents matrius d'adjacència:

   (a)
$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$B(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Proveu que si un graf simple $G$ té $k$ components connexes d'ordres $n_1, n_2, \cdots, n_k$ respectivament, la mida del graf $G$ és com a molt
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(n_i-1)}{2}.$$

10. Proveu que un graf simple $G$ d'ordre $n$ és connex si i només si la seva mida és més gran que
$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

11. Demostrar que si $G$ és un graf connex d'ordre $n$ i mida $m$, llavors $G$ conté almenys $m-n+1$ cicles.

12. Doneu un exemple d'un graf connex $G = (V, E)$ amb $G - \{e\}$ no connex, $\forall e \in E$.

13. Quin és l'ordre màxim en un graf connex de 30 arestes?

14. Si $G$ és un graf connex, quin és el valor màxim de $|V(G)|$, si $|E(G)| = 19$ i $deg(v) \geq 4$ per a tot vèrtex $v$ del graf $G$?

15. Sigui $G$ un graf connex 3-regular. Si $|E(G)| = 2|V(G)| - 6$, trobeu $|V(G)|$ i $|E(G)|$.

16. Sigui $G$ graf amb 13 vèrtexs i 3 components connexes. Demostreu que com a mínim una de les tres components té un mínim de 5 vèrtexs.

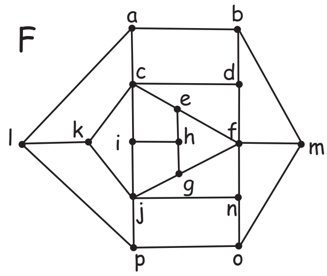
17. Demostreu que el complementari d'un graf no connex és connex.

18. Representeu un graf $G$ de manera que ell i el seu complementari siguin connexos.

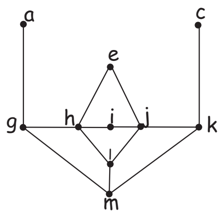
19. Demostreu que un graf autocomplementari és connex.

20. Si $G$ és un graf no connex, quina és la distància màxima entre qualsevol parell de vèrtexs del seu graf complementari $\overline{G}$?

21. En el següent graf $F$, trobeu les distàncies des del vèrtex $d$ a tots els altres.




22. Trobeu tots els vèrtexs de tall del següent graf.




23. Sigui un graf $G$ i un vèrtex $v$ de $G$. Demostreu que si $v$ és vèrtex de tall de $G$, $v$ no pot ser vèrtex de tall de $\overline{G}$.

24. Calculeu la connectivitat i l'aresta-connectivitat de les següents famílies de grafs: $K_n, K_{r,s}, P_n$, i $C_n$.

25. Trobeu un graf $G$ que compleixi: $\kappa(G) < \lambda(G) < \delta(G)$. Explica què vol dir cada símbol.

26. Sigui $G$ un graf connex amb una aresta pont. Proveu que G té algun vèrtex de grau senar.

27. Sigui $G$ un graf connex amb tots els seus vèrtexs de grau senar. Determineu la paritat del cardinal dels subgrafs resultants d'eliminar qualsevol aresta pont del graf.

28. Doneu exemples de grafs $G$ que verifiquin:

   (a) $G$ és eulerià i hamiltonià.

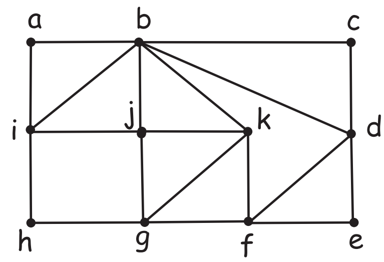
   (b) $G$ és eulerià i no ès hamiltonià.

   (c) $G$ no és eulerià peró és hamiltonià.

   (d) $G$ no és eulerià ni hamiltonià.

29. Demostreu que si $G$ és graf regular d'ordre parell i mida senar, llavors $G$ no és eulerià.

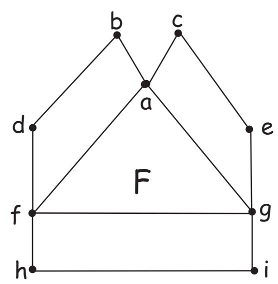
30. Per al graf següent digueu si:




   (a) És eulerià? Admet cadena euleriana? justifica-ho.

   (b) Dóna una descomposició del conjunt d'arestes en cicles fent servir l'algorisme de Fleury.

31. Aplica l'algorisme de Fleury a $F$ per trobar un circuit eulerià i la descomposició de $E(F)$ en cicles.




32. Per a quins valors de $n$ els grafs $K_n, C_n$, i $Q_n$ tenen un circuit d'Euler?

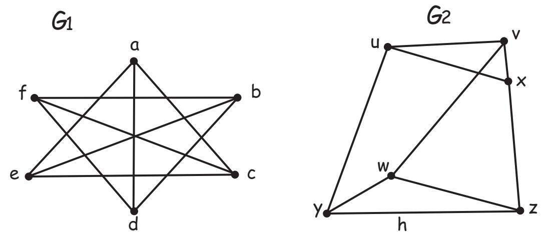
33. Per a quins valors de $m$ i $n$, el graf $K_{m,n}$ té un circuit d'Euler? I una cadena d'Euler?

34. Pot ser eulerià un graf regular, connex, amb un nombre parell de vèrtexs i un nombre senar d'arestes?

35. És possible que a la ciutat de Königsberg una persona realitzi un passeig per la ciutat i travessi cada pont exactament dues vegades, tornant al punt on havia iniciat el passeig?

36. Suposeu que el graf $K_{m,n}$ té 16 arestes i satisfà $m \leq n$. Determineu $m$ i $n$ de manera que $K_{m,n}$ tingui un circuit eulerià però no un cicle hamiltonià.

37. Determineu si els grafs de la següent figura tenen un cicle de Hamilton. Justifiqueu la resposta.




38. Demostreu que si $G$ és un graf bipartit amb bipartició $V_1, V_2$, i $|V_1| \neq |V_2|$, llavors $G$ no és hamiltonià.

39. Trobeu un cicle hamiltonià en el graf format pels vèrtexs i arestes de l'hipercub $Q_3$.

40. Sigui $G$ un graf bipartit amb un nombre senar de vèrtexs. Demostreu que $G$ no conté cap cicle hamiltonià.

# Problemes Grafs: Arbres

1. Doneu un exemple d'un graf $G = (V, E)$ que compleixi $|V| = |E| + 1$, però que no sigui arbre.

2. Demostreu que en un arbre tot vèrtex de grau superior a 1 és de tall.

3. (a) Quants arbres no isomorfs hi ha amb 5 vèrtexs?
   (b) Trobeu tots els arbres no isomorfs d'ordre 6, afegint una aresta, de totes les formes possibles, a cada arbre d'ordre 5.

4. Quantes fulles té un arbre amb 6 vèrtexs de grau 2, un de grau 3, 2 de grau 4 i un de grau 5?

5. Siguin $T_1 = (V_1, E_1)$ i $T_2 = (V_2, E_2)$ dos arbres amb $|E_1| = 17$ i $|V_2| = 2|V_1|$. Calculeu $|V_1|$, $|V_2|$ i $|E_2|$.

6. Digueu si pot existir un arbre amb 13 vèrtexs, 4 de grau 3, 3 de grau 4 i 6 de grau 1.

7. En un arbre, quin és el mínim nombre de fulles si sabem que el grau màxim de l'arbre és 17?

8. Quants vèrtexs de grau 1 té un arbre amb 5 vèrtexs de grau 2, 2 de grau 3, 3 de grau 4 i 1 de grau 5?

9. Sigui $T$ un arbre amb $v_2$ vèrtexs de grau 2, $v_3$ vèrtexs de grau $3, \cdots, v_m$ vèrtexs de grau $m$. Quants vèrtexs i arestes té $T$?

10. Sigui $T$ un arbre amb tots els seus vèrtexs de graus 1 o 4. Si té 20 vèrtexs de grau 4, quants en té de grau 1?

11. Proveu que tot arbre és un graf bipartit. Quins arbres són bipartits complets?

12. Poden haver-hi arbres autocomplementaris? Raona la resposta i en cas afirmatiu, troba'ls tots.

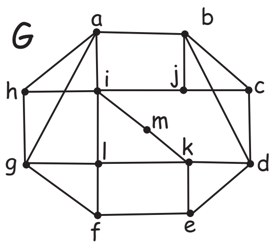
13. Sigui $T$ un arbre. Demostreu que si tots els vèrtexs de $T$ tenen grau senar, les dues components connexes resultants d'eliminar una aresta qualsevol de $T$ tenen ordre senar.

14. Demostra si és certa o falsa l'afirmació:

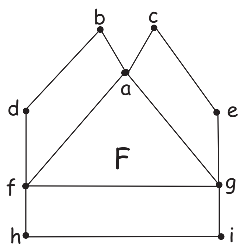
$$\text{Tot arbre compleix que } k(T) = \lambda(T) = \delta(T) = 1.$$

15. Un graf $G$ no connex, on cada component connexa és arbre, s'anomena **bosc**.
    (a) Si $G$ és un bosc amb $k$ components connexes i $|E(G)| = 40$, quin ordre té $G$?
    (b) Si $G$ és un bosc amb 62 vèrtexs i 5 arestes, quantes components connexes té $G$?

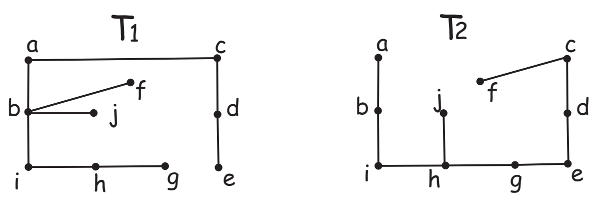
16. Un bosc amb 2 components connexes i 15 arestes, quants vèrtexs té?
17. Quantes arestes té un bosc amb $k$ components connexes?
18. Quin és el màxim nombre d'arestes que podem afegir a un bosc sense que deixi de ser bosc?
19. Apliqueu l'algorisme DFS per donar un arbre generador del graf $K_{4,3}$. Feu el mateix però amb l'algorisme BFS. Començeu els algorismes pel mateix vèrtex i compareu els resultats.
20. Apliqueu l'algorisme DFS per donar un arbre generador del graf de Petersen. Feu el mateix però amb l'algorisme BFS. Començeu els algorismes pel mateix vèrtex i compareu els resultats.
21. Les arestes de $G$ tenen assignat un pes que segueix el criteri: horitzontals pes 0, verticals pes 1 i diagonals pes 2. Aplica l'algorisme de Kruskal a $G$ i explica el resultat.




22. Aplica l'algorisme DFS a $F$, començant per $a$. Detalla el procés. Feu el mateix amb l'algorisme BFS.



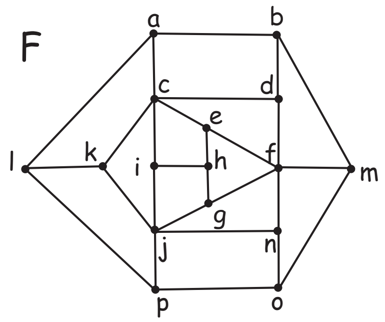

23. Aplicant BFS i DFS a $G$, començant pel vèrtex $a$, s'han obtingut els arbres generadors $T_1$ i $T_2$.



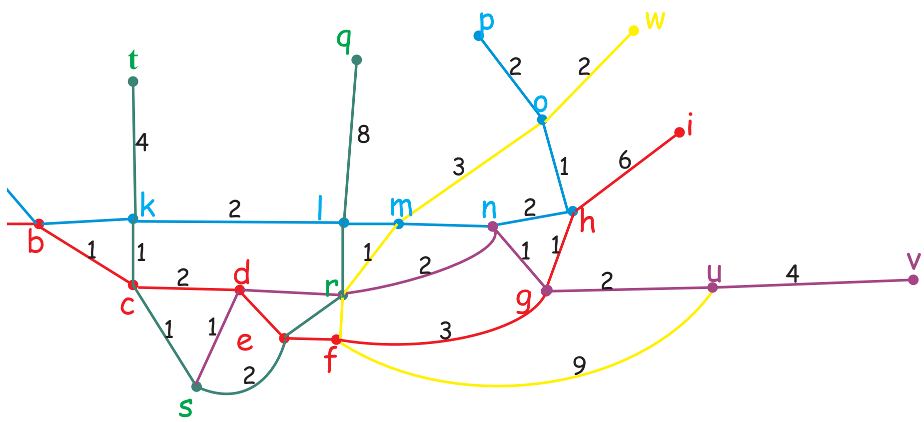

   (a) Digues quin dels arbres $T_1$ i $T_2$ correspon a cadascun dels algorismes DFS i BFS.

(b) Raona quin és el vèrtex a més distància de $a$ en $G$.

24. Si totes les arestes de $F$ tenen pes 1 llevat de les arestes del cicle $a, b, m, o, p, l, a$, que tenen pes 0, calcula el pes d'un arbre generador de pes mínim.




25. El graf de la figura representa el metro de Barcelona, on els vèrtexs són les estacions d'enllaç entre les diferents línies i el pes de cada aresta és el número d'estacions que hi ha entre elles (les que no tenen número són de pes 0). L'ordre és 23 i la mida 34.



Aplica l'algorisme de Prim per obtenir un arbre generador de pes mínim i calcula el seu pes.

26. Digues què s'obté a l'aplicar els algorismes de Prim i Kruskal a un graf ponderat i en què difereixen.

27. Trobeu tots els arbres etiquetats amb 6 fulles.

28. En un arbre binari, podem calcular el nombre de fulles a partir del nombre de vèrtexs de grau 3?

29. Quin és el nombre màxim de fulles que pot tenir un arbre 4-ari d'altura 8?

30. Quin és el nombre de vèrtexs de grau 1 en una arbre binari amb $n$ vèrtexs?

31. Representeu les següents operacions mitjançant un arbre binari:

    (a) $(a + (b * (c - d))) * ((e + f) * g))$
    (b) $\overline{A} \cup \overline{B}$
    (c) $(A \cup B) - ((C \cup D) \cup E))$

32. Representeu les següents expressions mitjançant un arbre amb arrel.

    (a) $((w + x) - y)/(2 * z + 1)$
    (b) $((a - (b * c)) + ((d * (e/f)) * (g + h))$

33. Quantes fulles té un arbre ternari complet d'ordre 121?

34. En un torneig de tenis hi ha $2^k$ participants. Quants partits es tenen que fer per conèixer al guanyador?