

R1. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Determineu els valors de x, y que satisfan

$$A^2 + xA + yI = N,$$

on I i N són la matriu identitat i la matriu nul·la d'ordre 2.

L'equació matricial amb dues incògnites (x, y) de l'enunciat conté 4 equacions escalars que resulten d'igualar els 4 coeficients de les matrius 2x2. Calculant els productes de l'equació tenim:

$$\begin{pmatrix} 2 + 2x + y & 5 + x \\ -10 - 2x & 7 + 3x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les equacions corresponents als coeficients 12 y 21 son equivalents y permeten calcular:

$$5 + x = 0 \Leftrightarrow x = -5.$$

De l'equació del coeficient 11 tenim doncs

$$2 + 2x + y = -8 + y = 0 \Leftrightarrow y = 8.$$

Els valors $x = -5, y = 8$ verifiquen també l'equació del coeficient 22 i per tant són la solució. □

R2. Si $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), A \neq 0$ i $x \in \mathbb{R}$, determineu aquests elements per tal que es compleixi:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{4}{8} \end{pmatrix} \cdot A.$$

Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calculem els productes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + xc & 3b + xd \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 4c & 2b + 4d \\ 6a + 8c & 6b + 8d \end{pmatrix}.$$

Igualant les dues matrius resultants obtenim les 4 equacions següents:

$$a + 2c = 2a + 4c \Leftrightarrow a = -2c \quad (1)$$

$$b + 2d = 2b + 4d \Leftrightarrow b = -2d \quad (2)$$

$$3a + xc = 6a + 8c \Leftrightarrow c(x - 2) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ ó } x = 2 \quad (3)$$

$$3b = xd = 6b + 8d \Leftrightarrow d(x - 2) = 0 \Leftrightarrow d = 0 \text{ ó } x = 2 \quad (4)$$

i tenim les següents possibilitats:

- Si $x = 2$, llavors les úniques condicions independents són $a = -2c$ i $b = -2d$ i per tant

$$A = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \forall c, d \in \mathbb{R}.$$

- Si $x \neq 2$, llavors $c = d = 0$ i de les equacions (1) i (2) resulta també $a = b = 0$ i tenim que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, independentment del valor de x .

En resum, la solució és:

$$\left(x = -2 \text{ i } \forall c, d \in \mathbb{R} \quad A = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}, \quad x \neq 2 \text{ i } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

□

R3. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

efectueu les operacions següents, si són possibles:

$$A + B, A - B, 2A - 3B, A \cdot B^T, A^T \cdot B, A \cdot B, B \cdot A.$$

Resultats:

- $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

- $A - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- $2A - 3B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$
- $A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$
- $A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$
- $A \cdot B$ no és possible.
- $B \cdot A$ no és possible.

□

R4. Calculeu la matriu $A^3 - 3A^2 - 5A + 2I$ en els casos:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{0}{1} \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resultats:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & \frac{0}{3} \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{13} & \frac{0}{5} & \frac{0}{2} \end{pmatrix}$$

□

R5. Comproveu que les matrius del tipus $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$ commuten per al producte.

Hem de veure que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ es compleix que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

D'una banda tenim que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + bd & ad + bc \\ bc + ad & bd + ac \end{pmatrix},$$

i d'altra banda resulta que

$$\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca + db & cb + da \\ da + cb & db + ca \end{pmatrix}.$$

Per la propietat commutativa de la suma i producte de reals la igualtat queda provada. □

R6. Si $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, simplifiqueu l'expressió:

$$(A + B - I) \cdot (A - B + I) + (A + 2B) \cdot (B - A).$$

Resultat: $B(2B - A - 2I) - I$

□

R7. Determineu totes les matrius de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tals que el seu quadrat és la matriu unitat I_2 .

Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, llavors

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 & (1) \\ ab + bd = 0 \Leftrightarrow b(a + d) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \text{ o } a = -d & (2) \\ ca + dc = 0 \Leftrightarrow c(a + d) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ o } a = -d & (3) \\ bc + d^2 = 1 & (4) \end{cases}$$

Tenim llavors les següents possibilitats:

Cas 1: $b = 0$

En aquest cas, de l'equació (1) tenim $a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$ i de l'equació (4) $d^2 = 1 \Leftrightarrow d = \pm 1$. Per verificar l'equació restant (3) tenim llavors dues possibilitats:

Cas 1.1: $c = 0$

En aquest cas, les solucions són:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cas 1.2: $c \neq 0$

En aquest cas necessàriament ha de ser $a = -d$ i per tant les solucions són, $\forall c \in \mathbb{R}, c \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

Cas 2: $b \neq 0$

Per verificar l'equació (2) ha de ser $a = -d$, i llavors l'equació (3) es verifica automàticament. De l'equació (1) tenim $bc = 1 - a^2 \Leftrightarrow c = (1 - a^2)/b$ i per tant, la solució és:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ (1 - a^2)/b & -a \end{pmatrix}$$

En resum, les matrius de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tals que el seu quadrat és la matriu unitat I_2 són $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ (1 - a^2)/b & -a \end{pmatrix}$$

□

R8. Dues matrius es diuen que commuten amb el producte si es compleix $AB = BA$. Trobeu totes les matrius de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ que conmuten amb el producte amb la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Hem de trobar $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tals que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

es a dir, tals que

$$\begin{pmatrix} a + 3b & 2a + 4b \\ c + 3d & 2c + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = a + 2c & \Leftrightarrow 3b = 2c \\ 2a + 4b = b + 2d & \Leftrightarrow 2d = 2a + 3b = 2a + 2c \Leftrightarrow d = a + c \\ c + 3d = 3a + 4c & \Leftrightarrow 3d = 3a + 3b \Leftrightarrow d = a + c \\ 2c + 4d = 3b + 4d & \Leftrightarrow 3b = 2c \end{cases}$$

Per tant, les quatre condicions es redueixen a $d = a + c$ i $3b = 2c$.

Les solucions tenen llavors dos paràmetres, p.e. $a, c \in \mathbb{R}$, i es poden escriure com:

$$\begin{pmatrix} a & 2c/3 \\ c & a + c \end{pmatrix}.$$

□

R9. Determineu el rang de les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -6 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

Resultats: 3,2,4,3,3,4,3,2,3,4,

- $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a^2+a-2 \end{pmatrix}$

- si $a \neq 1$ i $a \neq -2$, rang = 3

- si $a = 1$, rang = 1

- si $a = -2$, rang = 2

- $\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & a^2-a+2 \\ 0 & 0 & a^3+3a \end{pmatrix}$

- si $a \neq 0$, rang = 3

- si $a = 0$, rang = 2

□

R10. Troba, si és possible, les matrius inverses de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Resultats:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ singular}, \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 9 & -14 & 13 & -2 \\ 17 & 20 & -5 & -8 \\ -1 & 10 & 7 & -4 \\ -6 & -16 & 4 & 14 \end{pmatrix}, \text{ singular},$$

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 5/2 & 2 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 6 & -2 \\ -6 & 2 & 1 & 1 \\ -10 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

R11. Donades les matrius \mathbb{I}_4 i A :

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

calcula: la inversa de $\mathbb{I}_4 - A$, La inversa de $\mathbb{I}_4 + A$,
 $(\mathbb{I}_4 + A) (\mathbb{I}_4 - A)^{-1}$.

Resultats:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

R12. Demosta que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. Comprova-ho en el cas particular:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Per demostrar que la matriu $B^{-1} \cdot A^{-1}$ és l'inversa de $A \cdot B$ fem servir la definició d'inversa, es a dir,

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

i, per tant, $B^{-1} \cdot A^{-1} = (A \cdot B)^{-1}$.

Fem la comprovació pel cas particular de l'enunciat:

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/2 \\ 1/8 & 5/8 & -1 \\ 3/8 & -1/8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 \\ -3/2 & -3/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 3/8 & -1/8 \\ -3/2 & -25/16 & 11/16 \\ 0 & -3/16 & 1/16 \end{pmatrix}.$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & -10 \\ 18 & 6 & -14 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/8 & -1/8 \\ -3/2 & -25/16 & 11/16 \\ 0 & -3/16 & 1/16 \end{pmatrix}.$$

□

R13. Aplicant la definició, calculeu el determinant de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resultats: 13,0,-24.

□

R14. Calculeu els següents determinants, transformant-los prèviament en d'altres més simples:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Resultats: -286,2,(a + 3)(a - 1)³.

□

R15. Comproveu que:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c-a \\ 1 & b & a+b+c-b \\ 1 & c & a+b+c-c \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}}_{=0 \text{ (} c_3=(a+b+c) \cdot c_1 \text{)}} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a & -a \\ 1 & b & -b \\ 1 & c & -c \end{vmatrix}}_{=0 \text{ (} c_3=-c_2 \text{)}} = 0$$

□

R16. Demostreu, sense calcular els determinants, l'igualtat:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

□

R17. Raoneu, sense aplicar la regla de Sarrus, que les arrels del següent polinomi són 5, 7 i -12:

$$p(x) = \begin{vmatrix} x & 7 & 7 \\ 7 & x & 5 \\ 5 & 5 & x \end{vmatrix}$$

El determinant de l'enunciat és un polinomi de tercer grau i per tant té tres arrels en \mathbb{C} (es a dir tres valors de x que fan zero el

determinant). Per veure que els valors donats són arrels del polinomi només hem de comprovar que fan zero el determinant i com ens donen tres valors, aquests seran les tres arrels del polinomi.

$$\bullet p(5) = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 7 \\ 7 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0 \text{ per que } c_2 = c_3.$$

$$\bullet p(7) = \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 5 \\ 5 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0 \text{ per que } c_1 = c_2.$$

$$\bullet p(-12) = \begin{vmatrix} -12 & 7 & 7 \\ 7 & -12 & 5 \\ 5 & 5 & -12 \end{vmatrix} = 0 \text{ per que } f_1 = -(f_2 + f_3).$$

□

R18. Raoneu sense calcular-lo si serà nul o no el determinant de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3/5 \end{vmatrix} = 0, \text{ per que } f_1 = 5f_2.$$

$$\bullet \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \text{ per que } c_3 = 2c_1 + c_2.$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \text{ per que } f_4 = f_1 + f_2 + f_3.$$

□

R19. Sabent que els nombres 204, 527, 255 són múltiples de 17, demostreu que també ho és el determinant:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}.$$

□

R20. Demostreu sense desenvolupar el determinant i aplicant només les propietats dels determinants, que:

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 3 & 3 \\ 3 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 9).$$

Veiem que el determinant és un polinomi de tercer grau amb coeficient director 1 i per tant es pot escriure com $(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$, on $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{C}$ són les tres arrels del polinomi. Només hem de veure llavors que $r_{1,2,3} = 2, 3, 9$, es a dir, que el determinant es fa zero per aquests valors.

- $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, per que $c_2 = c_3$.

- $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, per que $c_1 = c_2$.

- $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, per que $c_3 = c_4$.

□

R21. Discussiu i resoleu els següents sistemes d'equacions lineals:

(a) $x + y + z = 6$

$2x - y = 0$

$3y - 2z = 0$

(c) $x - 2y + z - t = 1$

$2x + y + 3z = 2$

$-x + 3y - z + 4t = -1$

(e) $3x - 2y + 2z = 4$

$2x + y - 3z = 1$

$x - 3y + 4z = 2$

(g) $x + y - z + 2u = 0$

$2x - y - t = 1$

$3x - z + t = 1$

(i) $x - 2y + z + 2t = 2$

$-2x + y + 3z - t = 0$

$3x - y - 2z - t = 2$

$-x + 5y - z - 3t = -1$

(k) $x + y + z = 1$

$2x - 2y - z = 0$

$x + 3y + 5z = 2$

$5x + 3y + 6z = 4$

(b) $2x + 3y + z = 4$

$x - 2y + z = -2$

$8x + 5y + 5z = 1$

(d) $x + 2y - z = 1$

$x + y + 3z = 0$

$x + 7z = -1$

(f) $2x + y + 3z = 0$

$-2x - y = 1$

$z = 2$

(h) $x + y + z = 3$

$x + 2y - 4z = 1$

(j) $x + 2y = 1$

$2x - z = 1$

$x + y - z = 0$

$x - y + 2z = 3$

Resultats:

(a) $\{1, 2, 3\}$

(c) $\{1 - \frac{18}{13}z, -\frac{3}{13}z, z, \frac{1}{13}z\}, \forall z \in \mathbb{R}$

(e) $\{\frac{10}{7}, \frac{8}{7}, 1\}$

(g) $\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} - z, z, z\}, \forall z \in \mathbb{R}$

(i) $\{\frac{37}{25}, \frac{2}{5}, \frac{23}{25}, \frac{1}{5}\}$

(k) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\}$

(b) S.I.

(d) $\{-1 - 7z, 1 + 4z, z\}$

(f) $\{0, 2, 3\}$

(h) $\{5 - 6z, -2 + 5z, z\}$

(j) $\{1, 0, 1\}$

□

R22. Discutiu, segons el valor d' $a \in \mathbb{R}$, els següents sistemes

d'equacions i trobeu les solucions en cas d'existir.

$$(a) \quad \begin{aligned} a^2x + y + z &= 3 \\ x + a^2y + z &= 4 - a \\ x + y + a^2z &= 2 + a^2 \end{aligned}$$

$$(e) \quad \begin{aligned} 2x + y - az &= 1 \\ 3x + 2y + z &= a \\ 2x + y + z &= -a \end{aligned}$$

$$(b) \quad \begin{aligned} (1 - a)x + y &= 0 \\ (1 - a)y + z &= 0 \\ x + (1 - a)z &= 0 \end{aligned}$$

$$(f) \quad \begin{aligned} ax + y + 2z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + 2y + z &= a \end{aligned}$$

$$(c) \quad \begin{aligned} ax - 2y + 4z &= a + 2 \\ x - y + 2z &= a \\ -2x + 2y + 2az &= -4 \end{aligned}$$

$$(g) \quad \begin{aligned} ax + 2z &= 1 \\ x + y + (a + 1)z &= 2 \\ 2x - y + 4z &= a \end{aligned}$$

$$(d) \quad \begin{aligned} ax + 3y + z &= 2 \\ 3x + ay + 2z &= 3 \\ -x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

$$(h) \quad \begin{aligned} 3x - 2y + z &= 1 \\ 4x + y - 2z &= 2 \\ 2x - 5y - az &= 3 \end{aligned}$$

Resultats:

- (a) • si $a = 1$, $\{3 - y - z, y, z\}$
 • si $a = -1$, \nexists solució (S.I.)
 • si $a \neq \pm 1$ $\left\{ \frac{2a+3}{(a+1)(2+a^2)}, -\frac{a^2-2a-1}{(a+1)(2+a^2)}, \frac{a^3+a^2+4a+5}{(a+1)(2+a^2)} \right\}$

- (b) • si $a = 2$, $\{x, x, x\}$
 • si $a \neq 2$, $\{0, 0, 0\}$

(c) Podem escriure el sistema en forma matricial com:

$$\begin{pmatrix} a & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2 \\ a \\ -4 \end{pmatrix}$$

Veiem per què valors del paràmetre a es fa zero el

determinant de la matriu associada al sistema

$$\begin{vmatrix} a & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 2a \end{vmatrix} = -2a^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

Podem diferenciar llavors els següents casos:

Cas 1: $a \neq \pm 2$

$$\begin{pmatrix} a & -2 & 4 & | & a+2 \\ 1 & -1 & 2 & | & a \\ -2 & 2 & 2a & | & -4 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} a & -2 & 4 & | & a+2 \\ 0 & -1 & 2 & | & a+1 \\ 0 & 0 & a+2 & | & a-2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{a^2+a+6}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{a-2}{a+2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{a^2+a+6}{a+2} \\ z = \frac{a-2}{a+2} \end{cases}$$

Cas 2: $a = 2$

En aquest cas la matriu ampliada es pot transformar en

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Cas 3: $a = -2$

En aquest cas tenim:

$$\text{rang}(A) = 2 \neq 3 = \text{rang}(A|b) \Rightarrow \text{S.I.}$$

En resum tenim:

- si $a \neq \pm 2$, $\{-1, -\frac{a^2+a+6}{a+2}, \frac{a-2}{a+2}\}$
- si $a = 2$, $\{2 + y, y, 0\}$
- si $a = -2$, S.I.

- (d)
- si $a \neq 2, -3$, $\{\frac{3a-14}{(a-2)(a+3)}, \frac{5a-8}{(a-2)(a+3)}, \frac{4-a}{a-2}\}$
 - si $a = 2$, S.I.

- si $a = -3$, S.I.
- (e) • si $a \neq -1$, $\{1 - 3a, 5a - 1, -1\}$
- si $a = -1$, $\{3 - z, z - 5, z\}$
- (f) • si $a \neq 2$, $\{-\frac{2a-1}{a-2}, 0, \frac{a^2-1}{a-2}\}$
- si $a = 2$, $\{-z, 1, z\}$
- (g) • si $a \neq 1, -6$, $\{-\frac{1}{a+6}, -\frac{a^2+2a-10}{a+6}, \frac{a+3}{a+6}\}$
- si $a = 1$, $\{1 - 2z, 1, z\}$
- si $a = -6$, S.I.
- (h) • si $a \neq -4$, $\{\frac{5a+11}{11(a+4)}, \frac{2(a-11)}{11(a+4)}, -\frac{3}{a+4}\}$
- si $a = -4$, S.I.

□

R23. Discutiu els sistemes d'equacions lineals següents en funció dels paràmetres reals $a, b \in \mathbb{R}$. Resoleu-lo en els cassos en què sigui possible.

<p>(a) $ax + y + z = b$</p> <p>$x + ay + z = b$</p> <p>$x + y + az = b$</p>	<p>(c) $ax + y - z = 1$</p> <p>$x - ay + z = 4$</p> <p>$x + y + az = b$</p>
<p>(b) $ax + by + z = 1$</p> <p>$x + aby + z = b$</p> <p>$x + by + az = 1$</p>	<p>(d) $3ax + 4y - 2az = 3b + 2$</p> <p>$-ax - y + az = -b$</p> <p>$-ax - 2y + az = -b - 1$</p>

Resultats:

- (a) • si $a = 1$, $\forall b \in \mathbb{R}$, S.C.I., $\{b - y - z, y, z\}$
- si $a = -2$ i $b = 0$, S.C.I., $\{x, x, x\}$
- si $a = -2$ i $b \neq 0$, S.I.
- si $a \neq 1, -2$, $\forall b \in \mathbb{R}$, S.C.D., $\{\frac{b}{a+2}, \frac{b}{a+2}, \frac{b}{a+2}\}$
- (b) • si $b = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, S.I.
- si $a = 1$ i $b = 1$, S.C.I., $\{1 - y - z, y, z\}$

- si $a = 1$ i $b \neq 1, 0$, S.I.
 - si $a = -2$ i $b = -2$, S.C.I., $\{x, -\frac{1}{2}(1+x), x\}$
 - si $a = -2$ i $b \neq -2, 0$, S.I.
 - si $a \neq 1, -2, \forall b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, S.C.D.,
 $\left\{ \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}, \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}, \frac{a-b}{(a-1)(a+2)} \right\}$
- (c)
- si $a = 0$ i $b = 5$, S.C.I., $\{4-z, 1+z, z\}$
 - si $a = 0$ i $b \neq 5$, S.I.
 - si $a \neq 0, \forall b \in \mathbb{R}$, S.C.D.,
 $\left\{ \frac{a^2+ab+4a+5-b}{a(a^2+3)}, -\frac{4a^2-a-ab-b+5}{a(a^2+3)}, \frac{3a-5+a^2b+b}{a(a^2+3)} \right\}$

(d) Considerem la matriu ampliada associada al sistema i fent-hi l'eliminació de Gauss obtenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3a & 4 & -2a & 4+b \\ -a & -1 & a & -1 \\ -a & -2 & a & -2 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -a & 0 & -b \\ 0 & 0 & a & b \end{array} \right)$$

Podem diferenciar llavors els següents casos:

Cas 1: $a = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 1$

Cas 1.1: $b = 0 \Rightarrow \text{rang}(A|B) = 1$

Tenim llavors que el sistema és compatible indeterminat (S.C.I.) i les solucions són:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Cas 1.2: $b \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A|B) = 3$ i per tant el sistema és incompatible (S.I.)

Cas 2: $a \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$

Podem veure també que $\text{rang}(A|B) = 3, \forall b \in \mathbb{R}$, i per tant el sistema és compatible determinat (S.C.D.) i la

solució és, $\forall b \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -a & 0 & -b \\ 0 & 0 & a & b \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = b/a \\ z = b/a \end{cases}$$

En resum tenim:

- si $a \neq 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$, S.C.D., $\{1, b/a, b/a\}$
- si $a = 0$ i $b = 0$, S.C.I., $\{1, y, z\}$
- si $a = 0$ i $b \neq 0$, S.I.

□