Apunts de Càlcul
Tema 1. Equacions i gràfiques

Lali Barrière, Josep M. Olm
Departament de Matemàtica Aplicada 4 - UPC

Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació
Enginyeria Telemàtica
EETAC

Continguts

Conceptes bàsics (I)

- Una recta està determinada per:
  - Dos punts.
  - Un punt i una direcció. La direcció es dóna mitjançant un vector director.
- **Observacions**
  1. El vector director d'una recta no és únic: si $\vec{v}$ és un vector director d'una recta r, aleshores $\lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, també és vector director de r.
  2. El vector que uneix dos punts qualssevol d'una recta és un vector director de la recta.
- **Exercici 1.** Sigui la recta r que passa pels punts $(1, 3)$ i $(5, 9)$:
  (a) Dibuixa-la.
  (b) Troba'n tres vectors directors.
  (c) Comprova si els punts $(3, 6)$ i $(4, 10)$ són punts de la recta.

Conceptes bàsics (II)

- **Observacions (cont.)**
  3. Si una recta és:
     - Vertical: els seus vectors directors són de la forma $\vec{v} = (0, v_2)$, $v_2 \neq 0$.
     - Horitzontal: els seus vectors directors són de la forma $\vec{v} = (v_1, 0)$, $v_1 \neq 0$.
  4. Quan una recta r no és vertical aleshores admet un vector director de la forma (v_1, v_2), $v_1 \neq 0$. Per tant, el vector

$$\vec{v} = \left(1, \frac{v_2}{v_1}\right)$$

     també és vector director de r.

Exemple. Els vectors $\vec{v} = (2, 6)$ i $\vec{w} = (1, 3)$ són vectors directors de la mateixa recta.

Conceptes bàsics (III)

Definició. Sigui r una recta amb vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $v_1 \neq 0$. Anomenem pendent de la recta el nombre

$$m = \frac{v_2}{v_1}$$

- Notem que $m = \tan \alpha$, on α és l'angle que forma el vector director de la recta r amb el semieix horitzontal positiu.
- Per tant, el pendent ens dóna idea del grau d'inclinació de la recta.

Exercici 2. Troba el pendent de la recta definida a l'Exercici 1.

Equacions de la recta (I)

- L'equació d'una recta és la relació algebraica, en forma d'equació, que satisfan les coordenades de tots els punts de la recta.
- Tota recta queda perfectament identificada amb la seva equació: un punt satisfà l'equació d'una recta si i només si pertany a la recta.
- En aquest apartat estudiarem les diverses maneres de donar l'equació d'una recta.
- En tots els casos suposarem que ens referim a una recta r que passa per un punt (x_0, y_0) i té per vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$. A la vegada, designarem per (x, y) un punt genèric de r.

Equacions de la recta (II)

- Equació vectorial

$$r \equiv (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(v_1, v_2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

  - λ és un paràmetre: variant λ anem trobant tots els punts de r.
  - **Exemple.** L'equació vectorial de la recta de l'exercici 1 és

$$r \equiv (x, y) = (1, 3) + \lambda(4, 6)$$

- Equació paramètrica. S'obté separant l'equació vectorial en components:

$$r \equiv \begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \end{cases}$$

  - **Exemple.** L'equació paramètrica de la recta de l'exercici 1 és

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 3 + 6\lambda \end{cases}$$

Equacions de la recta (III)

- Equació contínua. Es troba aïllant λ de l'equació paramètrica, sempre que r no sigui ni vertical ni horitzontal.

$$r \equiv \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

  - **Exemple.** L'equació contínua de la recta de l'exercici 1 és

$$r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{6}$$

- Equació punt-pendent. Si la recta r passa per (x_0, y_0) i té pendent m, la seva equació punt-pendent és

$$r \equiv y - y_0 = m(x - x_0)$$

  - **Exemple.** L'equació punt-pendent de la recta de l'exercici 1 és

$$r \equiv y - 3 = \frac{3}{2}(x-1)$$

Equacions de la recta (IV)

- Equació explícita. Es troba aïllant y de l'equació contínua o punt-pendent.

$$r \equiv y = mx + n, \quad \text{on} \quad n = y_0 - mx_0$$

  - D'entre totes les equacions de la recta, només l'explícita és única.
  - **Exemple.** L'equació explícita de la recta de l'exercici 1 és

$$r \equiv y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

Comprovem que el punt $(5, 9)$ és de la recta

$$9 = \frac{3}{2}5 + \frac{3}{2} \iff 9 = \frac{15}{2} + \frac{3}{2} \iff 9 = \frac{18}{2} \iff 9 = 9 \quad \text{SÍ!}$$

Equacions de la recta (V)

- Equació implícita. Es troba a partir de l'equació contínua, punt-pendent o explícita, passant-ho tot a una banda i igualant a zero.

$$r \equiv ax + by + c = 0$$

on:

  - $\vec{v} = (-b, a)$ és un vector director de r.
  - r passa pels punts $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ i $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$.

Observacions

1. Notem que $\vec{w} = (a, b)$ és un vector perpendicular al vector director de r, això és, a $\vec{v} = (-b, a)$.
2. L'equació implícita es pot obtenir directament a partir del vector director i un punt.

- **Exercici 3.** Troba l'equació implícita de la recta de l'exercici 1 a partir de la seva equació vectorial.

Propietats de la recta (I)

P1. Per dos punts, (x_A, y_A) i (x_B, y_B), passa una única recta r. La seva equació és:

$$r \equiv y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

P2. Les equacions dels eixos de coordenades són:

- Eix vertical: $x = 0$.
- Eix horitzontal: $y = 0$.

P3. Les equacions de rectes paral·leles als eixos de coordenades són de la forma:

- $x = c \Rightarrow$ Equació d'una recta vertical, diem que té pendent ∞.
- $y = c \Rightarrow$ Equació d'una recta horitzontal, diem que té pendent 0.

Propietats de la recta (II)

P4. Dues rectes de pendents m i m' són:

- Paral·leles $\Longleftrightarrow m = m'$.
- Perpendiculars $\Longleftrightarrow m \cdot m' = -1$.

P5. L'angle format per dues rectes, r i s, es defineix com l'angle del primer quadrant (això és l'angle entre 0 i $\frac{\pi}{2}$) format pels seus vectors directors, $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Axí, designant $\alpha = \angle(r, s)$, tenim que

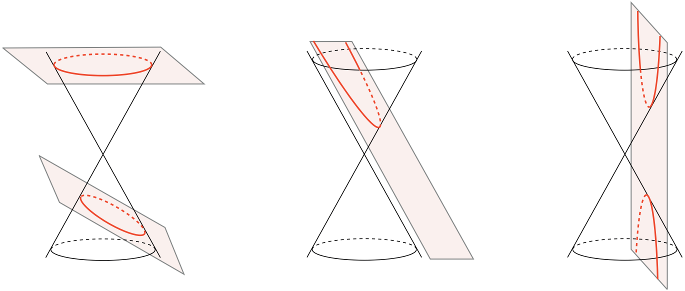
$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

on cal recordar que, donats $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$, resulta que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad \text{i} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Seccions còniques

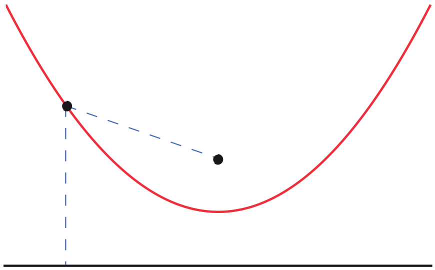
- **Definició geomètrica.** Anomenem seccions còniques o, simplement, còniques, les corbes del pla que resulten de la intersecció d'un con de revolució amb un pla que no passa pel vèrtex.



- **Definició algebraica.** Anomenem còniques les corbes del pla definides per una equació polinòmica de grau 2.

Paràbola

- És el conjunt format per tots els punts del pla que es troben a la mateixa distància d'un punt F, anomenat focus, i una recta, coneguda com a directriu.

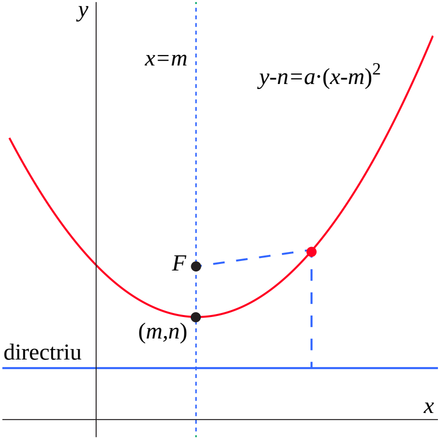


- Totes les paràboles tenen un eix de simetria, que és perpendicular a la recta directriu. A la vegada, la paràbola talla l'eix en un punt anomenat vèrtex.
- Considerarem només paràboles amb eix de simetria vertical o horitzontal.

Paràbola d'eix vertical

Equació canònica: $y - n = a(x - m)^2$, amb (m, n) vèrtex.
Equació general: $y = ax^2 + bx + c$.
El paràmetre a ens indica la direcció i l'obertura de la paràbola.

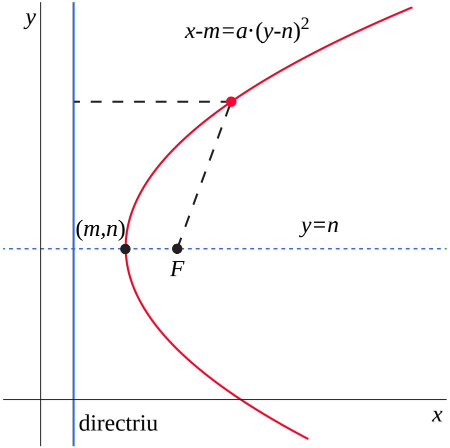
- Eix de simetria:
  $x = m$ o $x = \frac{-b}{2a}$
- Vèrtex:
  $(m, n) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right)$
- Focus:
  $(m, n + \frac{1}{4a})$
- Directriu:
  $y = n - \frac{1}{4a}$



Paràbola d'eix horitzontal

Equació canònica: $x - m = a(y - n)^2$, amb (m, n) vèrtex.
Equació general: $x = ay^2 + by + c$
El paràmetre a ens indica la direcció i l'obertura de la paràbola.

- Eix de simetria:
  $y = n$ o $y = \frac{-b}{2a}$
- Vèrtex:
  $(m, n) = \left(-\frac{b^2}{4a} + c, -\frac{b}{2a}\right)$
- Focus:
  $(m + \frac{1}{4a}, n)$
- Directriu:
  $x = m - \frac{1}{4a}$



Paràboles: exercicis

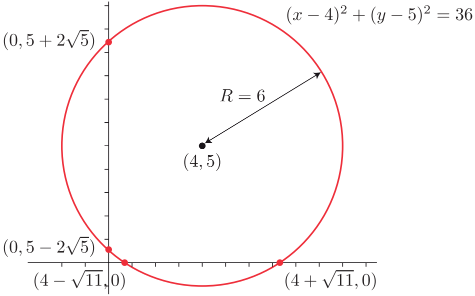
- **Exercici 4.** Determineu els elements principals i representeu les paràboles següents (per fer-ho és recomanable trobar també els punts de tall amb els eixos):
  (a) $y = 2x^2 - 12x + 10$
  (b) $x = -y^2 + y - \frac{17}{4}$
  (c) $4x^2 + 8x - 5 - y = 0$

Circumferència (I)

- És el conjunt format per tots els punts del pla que es troben a distància R, el radi, d'un punt (a, b), el centre.
- Equació canònica de la circumferència de centre (a, b) i radi R:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

- **Exemple.** Circumferència de centre $(4, 5)$ i radi $R = 6$:



Circumferència (II)

- Equació general de la circumferència:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

- Equivalència amb l'equació canònica:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \end{aligned}$$

Per tant:

$$\left.\begin{aligned} A &= -2a \\ B &= -2b \\ a^2 + b^2 - R^2 &= C \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} a &= -\tfrac{A}{2} \\ b &= -\tfrac{B}{2} \\ R^2 &= a^2 + b^2 - C = \tfrac{A^2+B^2}{4} - C \end{aligned}\right\}$$

- Com que R^2 no pot ser negatiu, l'equació defineix una circumferència si i només si

$$\frac{A^2 + B^2}{4} - C > 0$$

Circumferència (III)

- **Observacions.** Equació general: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.
  1. Si $\frac{A^2+B^2}{4} - C > 0$, l'equació defineix una circumferència de centre $\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right)$ i radi $R = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{4} - C}$.
  2. Si $\frac{A^2+B^2}{4} - C = 0$, l'únic punt que compleix l'equació és $\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right)$.
     Podem pensar que es tracta d'una circumferència de radi 0.
  3. Si $\frac{A^2+B^2}{4} - C < 0$, no hi ha cap punt que compleixi l'equació.

Circumferència (IV)

- **Observació.** El pas de l'equació general a l'equació canònica també es pot fer aplicant el mètode de compleció de quadrats.
- **Exemple.** Estudiem l'equació $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$.
  Observem que $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ i que $y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4$.
  Per tant:
  $$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 2 \end{aligned}$$
  L'equació defineix una circumferència de centre $(-1, 2)$ i radi $\sqrt{2}$.
- **Exercici 5.** Aplica el mateix mètode a les equacions
  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$ i $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$

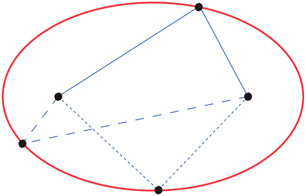
Circumferències: exercicis

- **Exercici 6.** Per a cadascuna de les equacions següents, estudia si defineix una circumferència i, en cas afirmatiu, determina'n els elements principals i dibuixa-la. Igual que amb les paràboles, és recomanable trobar també els punts de tall amb els eixos.

  (a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
  (b) $x^2 + y^2 - 16y + 70 = 0$

El·lipse (I)

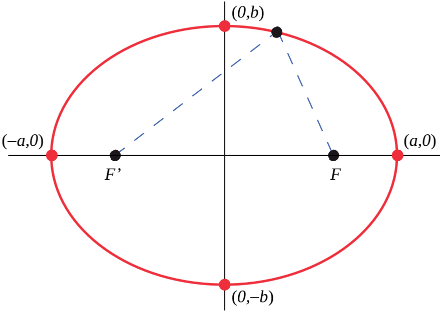
- És el conjunt format per tots els punts del pla tals que la suma de les seves distàncies a dos punts fixats del pla, F i F', anomenats focus, és constant.



- Totes les el·lipses tenen dos eixos de simetria perpendiculars que es tallen al centre. A la vegada, l'el·lipse talla dues vegades cadascun dels eixos de simetria en els punts anomenats vèrtexs.

El·lipse (II)

- Equació de l'el·lipse amb centre $(0,0)$ i eixos de simetria $x=0$, $y=0$:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
on $a, b \in \mathbb{R}^+$ són els semieixos de l'el·lipse.
- Vèrtexs: $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$.
- Focus, F, F': $\begin{cases} (\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0), \text{ si } a>b; \\ (0, \pm\sqrt{b^2-a^2}), \text{ si } a<b. \end{cases}$



El·lipse (III)

- Equació de l'el·lipse amb centre (x_0, y_0) i eixos de simetria $x = x_0$, $y = y_0$:

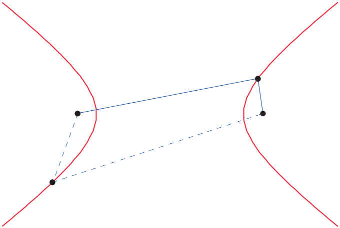
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

on $a, b \in \mathbb{R}^+$ són els semieixos de l'el·lipse.

- **Exercici 7.** Representa cadascuna de les el·lipses següents i indica'n els seus elements principals:
  (a) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$
  (b) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$

Hipèrbola (I)

- És el conjunt format per tots els punts del pla tals que el valor absolut de la diferència de les seves distàncies a dos punts fixats del pla, F i F', anomenats focus, és constant.



- Totes les hipèrboles tenen dos eixos de simetria perpendiculars que es tallen al centre. A la vegada, la hipèrbola talla un d'aquests dos eixos, l'eix real, en dos punts, anomenats vèrtexs. L'altre eix s'anomena eix imaginari.
- Totes les hipèrboles tenen dues asímptotes obliqües que es tallen al centre.

Hipèrbola (II)

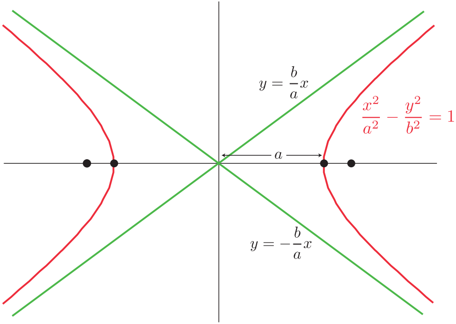
- Equació de la hipèrbola amb centre $(0,0)$ i eixos de simetria $x=0$ i $y=0$:

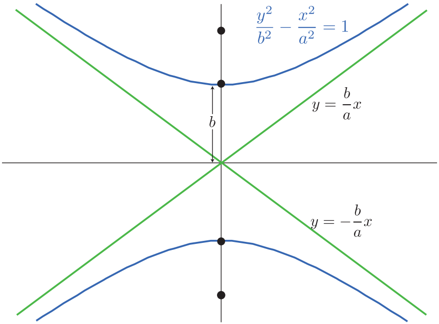
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (HH)} \qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \text{ (HV)}$$

hipèrbola d'eix real horitzontal — hipèrbola d'eix real vertical

on $a, b \in \mathbb{R}^+$ són els semieixos de la hipèrbola.

- En ambdós casos, les equacions de les asímptotes són $y = \pm\frac{b}{a}x$.





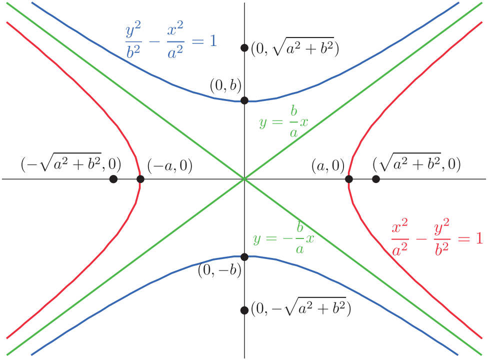
Hipèrbola (III)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (HH)

- Eixos. Real: $y = 0$; imaginari: $x = 0$.
- Semieixos. Real: a; imaginari: b.
- Vèrtexs: $(\pm a, 0)$
- Focus: $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$
- Asímptotes: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ (HV)

- Eixos. Real: $x = 0$; imaginari: $y = 0$.
- Semieixos. Real: b; imaginari: a.
- Vèrtexs: $(0, \pm b)$
- Focus: $(0, \pm\sqrt{a^2+b^2})$
- Asímptotes: $y = \pm\frac{b}{a}x$.



Hipèrbola (IV)

- Equació de la hipèrbola amb centre (x_0, y_0) i eixos de simetria $x = x_0$, $y = y_0$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \text{(HH)}$$

o bé

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1 \quad \text{(HV)}$$

on $a, b \in \mathbb{R}^+$ són els semieixos de la hipèrbola.

- **Exercici 8.** Representa cadascuna de les hipèrboles següents i indica'n els seus elements principals:
  (a) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$
  (b) $5x^2 - 3y^2 - 10x + 12y - 22 = 0$

Hipèrbola equilàtera (I)

- És una hipèrbola que té els semieixos iguals i, per tant, les asímptotes perpendiculars.
- Equació de la hipèrbola equilàtera amb centre $(0,0)$ i eixos de simetria coincidents amb els eixos de coordenades:

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad \text{o bé} \qquad y^2 - x^2 = a^2$$

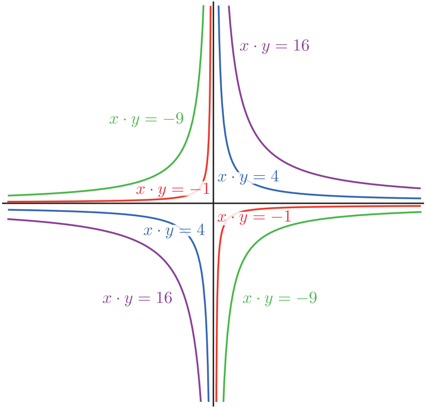
- Equació de la hipèrbola equilàtera amb centre $(0,0)$ i asímptotes coincidents amb els eixos de coordenades:

$$xy = c, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Si $c > 0$, branques al primer i tercer quadrant.
Si $c < 0$, branques al segon i quart quadrant.

Hipèrbola equilàtera (II)

- **Exemple:**



- **Exercici 9.** Representa, identificant els seus elements principals:
  (a) $\dfrac{y^2}{144} - \dfrac{x^2}{25} = 1$
  (b) $xy = 3$

Identificació de còniques segons la seva equació

Tipus de cònica	Casos	Equació
Paràbola. Només una de les dues variables, x o y, és al quadrat.	Eix vertical Eix horitzontal	$y = a(x-m)^2 + n$ $y = ax^2 + bx + c$ $x = a(y-n)^2 + m$ $x = ay^2 + by + c$
Circumferència. x^2 i y^2 amb el mateix coeficient.	Canònica General o implícita	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$
El·lipse. x^2 i y^2 amb coeficients del mateix signe.	Canònica, centre $(0,0)$ Canònica, centre (x_0, y_0) General o implícita	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ $mx^2+ny^2+Ax+By+C = 0$, $\text{sign}(m) = \text{sign}(n)$
Hipèrbola. x^2 i y^2 amb coeficients de signe contrari.	Canònica, centre $(0,0)$ Canònica, centre (x_0, y_0) General o implícita	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (HH) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ (HV) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ (HH) $\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$ (HV) $mx^2+ny^2+Ax+By+C = 0$, $\text{sign}(m) \neq \text{sign}(n)$
Hipèrbola equilàtera. Hipèrbola amb $a = b$.	Eix real $y = 0$ Eix real $x = 0$ Asímptotes als eixos	$x^2 - y^2 = a^2$ $y^2 - x^2 = a^2$ $xy = C$

Casos particulars

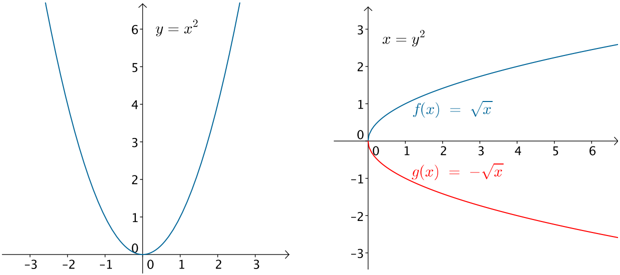
- Equacions de la forma $mx^2 + ny^2 = 0$.
  - Si $\text{sign}(m) = \text{sign}(n) \neq 0$, l'únic punt que la satisfà és el $(0, 0)$.
  - Si $\text{sign}(m) \neq \text{sign}(n)$, $m, n \neq 0$, l'equació correspon a un parell de rectes que es tallen a $(0, 0)$.
  - Si $m = 0$, l'equació és $y^2 = 0$, que equival a $y = 0$, l'eix X.
  - Si $n = 0$, l'equació és $x^2 = 0$, que equival a $x = 0$, l'eix Y.
- "Circumferències" de radi 0: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$.
  Només el punt (a, b) satisfà l'equació.
  Observació. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 0$ és l'equació del punt (x_0, y_0).
- Equacions de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = C$, amb $C < 0$.
  La solució és el conjunt buit, ja que cap punt la verifica.
  Observació. Cap punt verifica l'equació $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$.

Definició de funció

Una funció $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assigna a cada element x del conjunt A un únic nombre real $f(x)$.

Observació

- L'equació $y = x^2$ defineix y com a funció de x, per a qualsevol valor real de x.
- L'equació $x = y^2$ no defineix y en funció de x: per a cada valor de $x \geq 0$ hi ha dos possibles valors de y. Tenim dues funcions. Aïllant y, tenim $y = \sqrt{x}$ o bé $y = -\sqrt{x}$, per a $x \geq 0$.



Domini d'una funció $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

El conjunt A és el conjunt de punts en els quals la funció està definida i s'anomena domini de f.

El domini d'una funció $y = f(x)$ pot no estar explícit en la seva definició. Llavors, el domini és el conjunt de punts per als quals la funció existeix, és a dir, es pot calcular.

Exemples

1. $f(x) = \sqrt{x}$ es pot calcular sempre i quan $x \geq 0$. Per tant, $Dom\ f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{3x - 2}$ es pot calcular sempre i quan $3x - 2 \neq 0$. Per tant, $Dom\ f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$.
3. $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$ es pot calcular sempre i quan $x^2 - 2x - 3 > 0$. Per tant, $Dom\ f = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

Funcions i domini de funcions: exercicis

Exercici 10.

- Quines són les dues funcions que defineix l'equació $x^2 + y^2 = 4$? Quin es el seu domini?
- Quines són les dues funcions que defineix l'equació $2x^2 - y^2 - 4x - 4y + 2 = 0$? Quin és el seu domini?

Límits de funcions: definició formal

- Diem que ℓ és el límit de la funció $f(x)$ en el punt a,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell,$$

si $\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \;:\; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

- Límits laterals:
  - Diem que ℓ és el límit de la funció $f(x)$ en el punt a, per l'esquerra,

  $$\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell,$$

  si $\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \;:\; a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.
  - Diem que ℓ és el límit de la funció $f(x)$ en el punt a, per la dreta,

  $$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell,$$

  si $\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \;:\; a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

Per al càlcul de límits NO utilitzarem aquesta definició!

Límits de funcions: observacions

- $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$:
  Els valors de la funció $f(x)$ s'acosten a ℓ quan x s'acosta a a.
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$:
  Els valors de la funció $f(x)$ s'acosten a ℓ quan $x < a$ s'acosta a a.
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$:
  Els valors de la funció $f(x)$ s'acosten a ℓ quan $x > a$ s'acosta a a.
- Si el límit d'una funció $f(x)$ en el punt a existeix, aleshores és únic.
- El límit d'una funció $f(x)$ en el punt a existeix i val ℓ si:

$$\exists \lim_{x \to a^-} f(x),$$

$$\exists \lim_{x \to a^+} f(x), \text{ i}$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$$

- Perquè existeixi el límit d'una funció en un punt, no cal que el punt sigui del domini de la funció.

Límits de funcions: exemples

- La funció $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ no està definida en $x = 2$. Tot i així, els límits laterals de la funció en el punt 2 existeixen i valen tots dos 4. Per tant, existeix el límit de la funció en el punt 2 i és igual a 4.
- La funció $f(x) = \frac{|x|}{x}$ no està definida en $x = 0$. Tot i així, els límits laterals de la funció en el punt 0 existeixen.
  Com que els límits laterals són diferents, no existeix el límit de la funció.
- La funció $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ no està definida en $x = 0$. El límit de la funció tampoc existeix, perquè sigui quin sigui el valor de δ que triem, la funció oscil·la entre -1 i 1 infinites vegades en els intervals $(0, \delta)$ i $(-\delta, 0)$.

Càlcul de límits: propietats (I)

1. $\lim_{x\to a} k = k$
2. $\lim_{x\to a} x = a$
3. $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$, si $P(x)$ és un polinomi.
   Si $a = \pm\infty$, llavors el valor de $P(a)$ és $+\infty$ o $-\infty$, depenent de la paritat del grau del polinomi i del signe del coeficient del terme de grau màxim.

Si existeixen $\lim_{x\to a} f(x)$ i $\lim_{x\to a} g(x)$:

4. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
5. $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x\to a} f(x)) \cdot (\lim_{x\to a} g(x))$
6. Si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

Càlcul de límits: propietats (II)

7. $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\frac{p}{q}} = (\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\frac{p}{q}}$, amb les condicions d'existència següents:
   - Si $p < 0$, aleshores $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$;
   - si q és parell, aleshores $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$.
8. $\lim\limits_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$, sempre que $b > 0$.
9. $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = (\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, sempre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$.
10. $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = \ln(\lim\limits_{x\to a} f(x))$, sempre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$.
11. $\lim\limits_{x\to a} \sin f(x) = \sin(\lim\limits_{x\to a} f(x))$, $\lim\limits_{x\to a} \cos f(x) = \cos(\lim\limits_{x\to a} f(x))$.

Límits de funcions: funcions no acotades quan $x \to a$

- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall\, M > 0 \,\exists\, \delta > 0 \,:\, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$
  Diem que el límit de $f(x)$ en el punt a val $+\infty$.
- $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \forall\, M < 0 \,\exists\, \delta > 0 \,:\, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < M$
  Diem que el límit de $f(x)$ en el punt a val $-\infty$.

Les definicions són anàlogues per a límits laterals.

Per al càlcul de límits NO utilitzarem aquesta definició!

Exemples

- La funció $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ tendeix a $+\infty$ quan x tendeix a -1.
- La funció $f(x) = \frac{1}{x}$ compleix:
  - $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, i
  - $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Límits de funcions: quan x tendeix a infinit

- Límit de f quan x tendeix a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} \ell \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, K > 0 \,:\, x > K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon \\ +\infty \Leftrightarrow \forall\, M > 0\, \exists\, K > 0 \,:\, x > K \Rightarrow f(x) > M \\ -\infty \Leftrightarrow \forall\, M < 0\, \exists\, K > 0 \,:\, x > K \Rightarrow f(x) < M \end{cases}$$

- Límit de f quan x tendeix a $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \ell \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, K < 0 \,:\, x < K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon \\ +\infty \Leftrightarrow \forall\, M > 0\, \exists\, K < 0 \,:\, x < K \Rightarrow f(x) > M \\ -\infty \Leftrightarrow \forall\, M < 0\, \exists\, K < 0 \,:\, x < K \Rightarrow f(x) < M \end{cases}$$

Per al càlcul de límits NO utilitzarem aquesta definició!

Exemple

- La funció $f(x) = e^x$ compleix:
  - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, i
  - $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Regles informals per al càlcul amb infinits

Podem tenir en compte les regles següents:

- $+\infty + k = +\infty$, $-\infty + k = -\infty$;
  $\infty - \infty$ és una indeterminació.
- $k \cdot (+\infty) = +\infty$, $k \cdot (-\infty) = -\infty$, si $k > 0$, (incloent $k = +\infty$);
  $k \cdot (+\infty) = -\infty$, $k \cdot (-\infty) = +\infty$, si $k < 0$, (incloent $k = -\infty$);
  $0 \cdot (\pm\infty)$ és una indeterminació.
- $\dfrac{k}{0} = \pm\infty$. Cal estudiar en detall el signe.
  $\dfrac{k}{\pm\infty} = 0$.
  $\dfrac{\infty}{\infty}$ i $\dfrac{0}{0}$ són indeterminacions.
- $0^k = \begin{cases} 0, \text{ si } k > 0, & (\text{incloent } k = +\infty); \\ \infty, \text{ si } k < 0, & (\text{incloent } k = -\infty). \end{cases}$
  $k^{+\infty} = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \le k < 1; \\ +\infty, \text{ si } 1 < k, & (\text{incloent } k = +\infty). \end{cases}$
  0^0, ∞^0, 1^∞ són indeterminacions.

Exemples

En els exemples següents s'indica el tipus d'indeterminació, i el resultat. Els passos de la resolució es deixen com exercici.

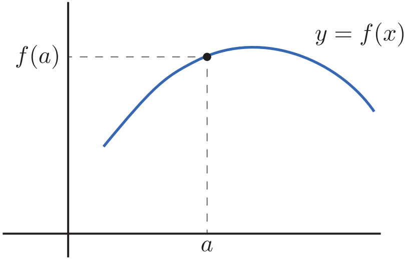
- Indeterminació $\infty - \infty$:
  $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{2x}{x^2-9}\right)=-\frac{1}{6}$$
  $$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-2x}\right)=1$$
- Indeterminació $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2-2x+3}{\sqrt{2x^4+3x^2+2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
- Indeterminació $\frac{0}{0}$:
  $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{4-x}}=4$$
  $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+6x-4}{x^2-7x+6}=-\frac{3}{5}$$
- Indeterminació 1^∞: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x-2}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\sqrt{e}$

Continuïtat de funcions

Una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és contínua en un punt a si existeix el límit de la funció quan x tendeix a a i és igual al valor de la funció en a.

Observació La definició equival a:

- $a \in Dom f$
- $\exists \lim_{x \to a^-} f(x)$ i $\exists \lim_{x \to a^+} f(x)$
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$



La gràfica es pot fer d'un sol traç.

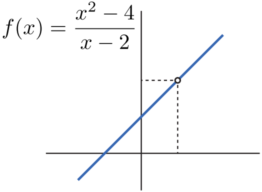
Continuïtat de funcions: discontinuïtats (I)

Una funció f presenta una discontinuïtat en un punt a si f no és contínua en a. Hi ha quatre tipus de discontinuïtat:

- Evitable. Existeix el límit de la funció en a, però no és igual a $f(a)$.
- De salt. Els límits laterals de la funció en a són finits i diferents.
- Asimptòtica. Almenys un dels límits laterals és infinit.
- Essencial. Almenys un dels límits laterals no existeix.

Exemples

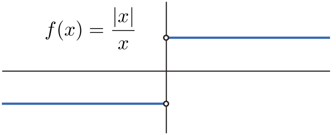
- La funció $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ presenta una discontinuïtat evitable en $x = 2$.



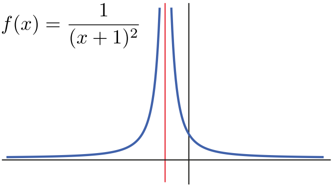
Continuïtat de funcions: discontinuïtats (II)

Exemples

- La funció $f(x) = \frac{|x|}{x}$ presenta una discontinuïtat de salt $x = 0$.



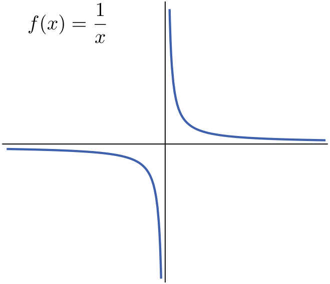
- La funció $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ presenta una discontinuïtat asimptòtica en $x = -1$.



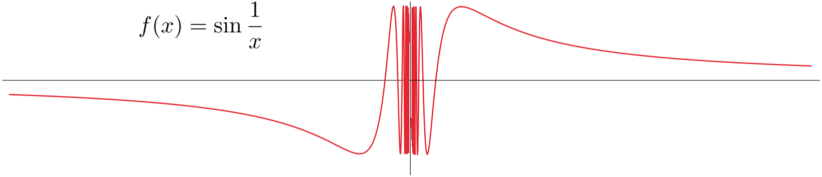
Continuïtat de funcions: discontinuïtats (III)

Exemples

- La funció $f(x) = \frac{1}{x}$ presenta una discontinuïtat asimptòtica en $x = 0$.

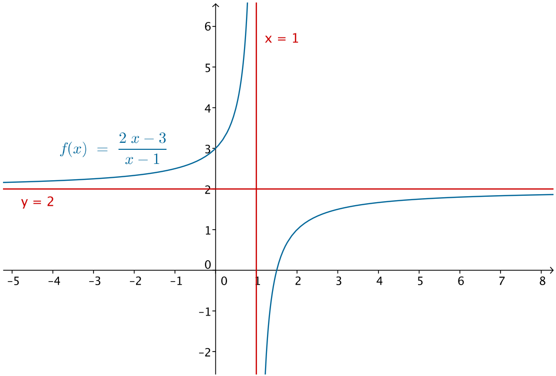


- La funció $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ presenta una discontinuïtat essencial en $x = 0$.



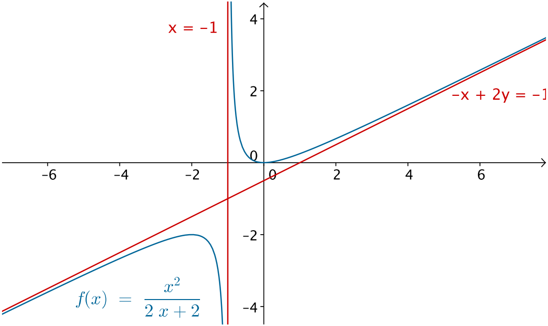
Continuïtat de funcions: asímptotes (I)

- La recta $x = a$ és una asímptota vertical de la funció f si f té una discontinuïtat asimptòtica en a.
- La recta $y = c$ és una asímptota horitzontal de la funció f si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = c$ o bé $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$.



Continuïtat de funcions: asímptotes (II)

- La recta $y = ax + b$ és una asímptota obliqua de f si $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax - b) = 0$ o bé $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax - b) = 0$.



Càlcul de a i b: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a$ i $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = b$.
Anàleg per a $x \to -\infty$.

Polinomis i funcions racionals

Recordem. Les funcions més senzilles es construeixen a partir de les operacions bàsiques: $+$, $-$, $*$, $/$.

- Un polinomi (o funció polinòmica) de grau n, amb $n \in \mathbb{N}$, és una funció $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

  amb $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ i $a_n \neq 0$.
- Una funció racional és un quocient de polinomis, és a dir, una funció $R : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

  amb P i Q polinomis.

La funció exponencial (I)

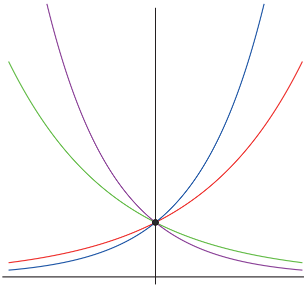
Donat $a > 0$, la funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = a^x$ rep el nom de funció exponencial de base a.

Sigui $f(x) = a^x$, amb $a > 0$. Es compleix:

- $Dom\ f = \mathbb{R}$.
- $Im\ f = \mathbb{R}^+$.
- $f(x)$ és contínua en tot el seu domini.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n}$ i $f(-n) = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- Si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ amb $q > 0$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

La funció exponencial (II)

- Es compleix $f(x) = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$. A més, $f(x) = a^{-x}$ i $g(x) = a^x$ són simètriques respecte de l'eix vertical.
- **Exercici 11.** Identifica les funcions $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$:

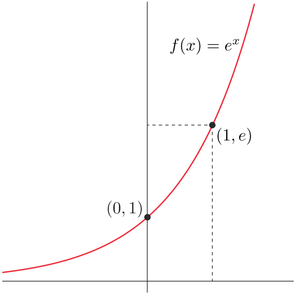


La funció exponencial de base e

- El nombre e es defineix com:

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828\ldots$$

- La funció $f(x) = e^x$ és tal que $f'(x) = f(x)$. Això fa que e sigui la base més utilitzada en funcions exponencials.



La funció logarítmica (I)

Donat $a > 0$, la funció $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ inversa de la funció exponencial de base a, rep el nom de funció logarítmica de base a i es denota per $f(x) = \log_a x$.

Observació. El logaritme en base a de x, és el nombre y tal que $a^y = x$:

$$\log_a x = y \Longleftrightarrow a^y = x$$

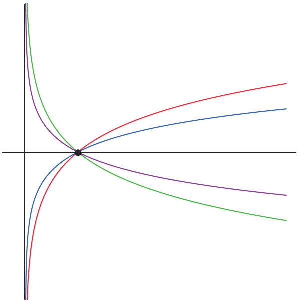
Si $y \in \mathbb{R}$, $a^y > 0$. Per tant, no existeix el logaritme d'un nombre negatiu.

Sigui $f(x) = \log_a x$, amb $a > 0$. Es compleix:

- $Dom\ f = \mathbb{R}^+$.
- $Im\ f = \mathbb{R}$.
- $f(x)$ és contínua en tot el seu domini.

La funció logarítmica (II)

- Es compleix $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$. Per tant, $f(x) = \log_a x$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ són simètriques respecte de l'eix horitzontal.
- **Exercici 12.** Identifica les funcions $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$:



Logaritmes: notació

- Els logaritmes en base e reben el nom de logaritmes naturals o logaritmes neperians, i es solen designar: $\ln x = \log_e x$
- La notació $\log$, sense base, se sol reservar per als logaritmes en base 10, $\log x = \log_{10} x$.

Hi ha una certa ambigüitat en la notació: en alguns àmbits no s'utilitza la notació $\ln$, i es reserva $\log$ per als logaritmes naturals.

Propietats d'exponencials i logaritmes

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

- Per la definició de les funcions exponencial i logaritme es compleix:

$$\begin{array}{ll} a^0 = 1 & \log_a 1 = 0 \\ a^1 = a & \log_a a = 1 \\ a^{\log_a x} = x & \log_a a^u = u \end{array}$$

- Propietats que relacionen l'exponencial i el logaritme amb el producte:

$$\begin{array}{ll} a^{x+y} = a^x a^y & \log_a uv = \log_a u + \log_a v \\ a^{-y} = \frac{1}{a^y} & \log_a \frac{1}{v} = -\log_a v \\ a^{xy} = (a^x)^y & \log_a u^v = v \log_a u \end{array}$$

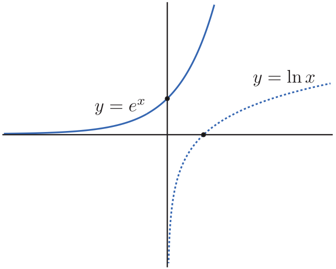
- Propietats que relacionen exponencials i logaritmes de bases diferents:

$$(ab)^x = a^x b^x \qquad a^x = b^{x \log_b a} \qquad \log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}$$

Propietats de les funcions exponencial i logarítmica

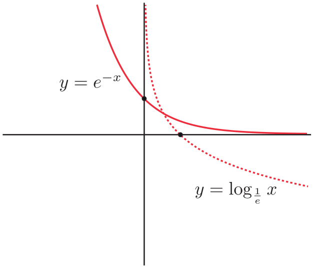
$\boxed{a > 1}$

- $x < 0 \Rightarrow a^x < 1$;
  $x > 0 \Rightarrow a^x > 1$.
- $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0$;
  $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$;
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$.



$\boxed{a < 1}$

- $x < 0 \Rightarrow a^x > 1$;
  $x > 0 \Rightarrow a^x < 1$.
- $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0$;
  $x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$;
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$.



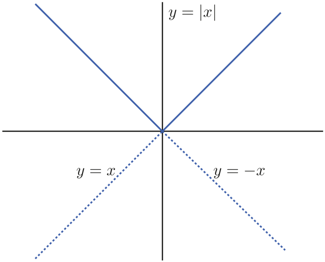
La funció valor absolut

La funció $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

rep el nom de funció valor absolut.

Sigui $f(x) = |x|$. Es compleix:

- $Dom\ f = \mathbb{R}$.
- $Im\ f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
- $f(x)$ és contínua en tot el seu domini.



Propietats del valor absolut

Siguin $x, y, c \in \mathbb{R}$. Es compleix:

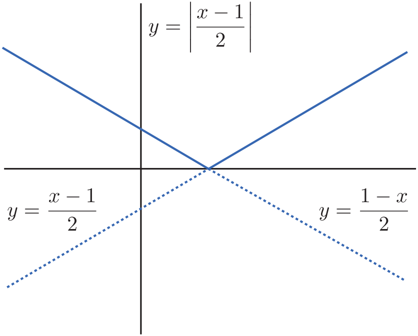
P1. $|x| = |-x|$
P2. $|x+y| \leq |x| + |y|$
P3. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
P4. $|x| = c \Leftrightarrow c \geq 0$ i $x = \pm c$
P5. $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$

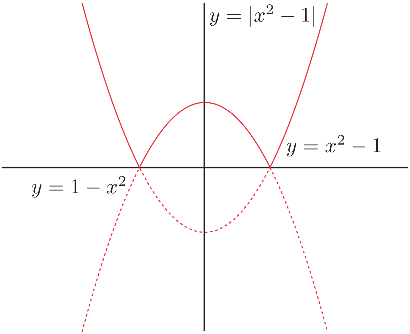
Siguin $x, y \in \mathbb{R}$ i $c \geq 0$. Es compleix:

P6. $|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c \Leftrightarrow x \in [-c, c]$
P7. $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c \Leftrightarrow x \in (-c, c)$
P8. $|x| \geq c \Leftrightarrow x \leq -c$ o bé $x \geq c \Leftrightarrow x \in (-\infty, -c] \cup [c, \infty)$
P9. $|x| > c \Leftrightarrow x < -c$ o bé $x > c \Leftrightarrow x \in (-\infty, -c) \cup (c, \infty)$

La funció valor absolut: representació gràfica

- **Exemples**

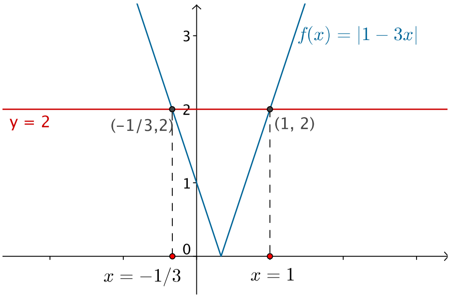




Exemples de resolució d'equacions amb valor absolut (I)

- L'equació $|1-3x|=2$ es resol:

$$|1-3x|=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x=2 \Rightarrow x=\frac{-1}{3} \\ \text{ o bé} \\ 1-3x=-2 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$



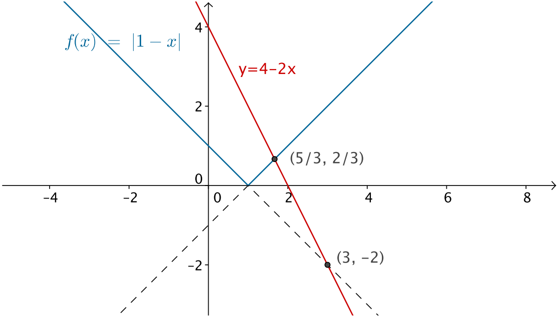
Les solucions de l'equació són els valors de x que la satisfan. Es troben, per tant, sobre l'eix OX.

Exemples de resolució d'equacions amb valor absolut (II)

- L'equació $|1-x| = 4-2x$ s'ha de resoldre tenint en compte que s'ha de complir $4-2x \geq 0$:

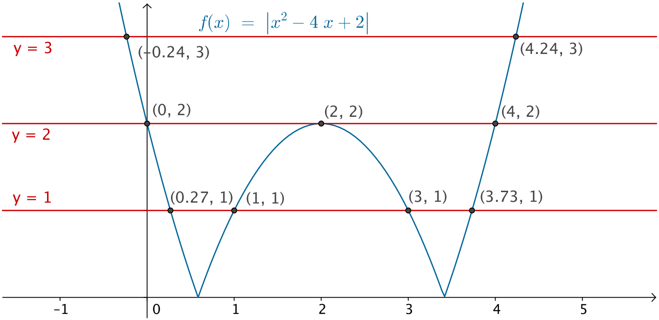
$$|1-x| = 4-2x \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1-x = 4-2x \Rightarrow x = 3 \\ \text{o bé} \\ 1-x = 2x-4 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \end{array} \right\} \text{amb } 4-2x \geq 0$$

La solució $x=3$ no compleix la condició, mentre que la solució $x=\frac{5}{3}$ sí que la compleix. Per tant, només hi ha una solució, $x=\frac{5}{3}$.



Exemples de resolució d'equacions amb valor absolut (III)

- L'equació $|x^2 - 4x + 2| = 1$ es resol:
  $|x^2 - 4x + 2| = 1 \Leftrightarrow$
  $$\begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3} \\ \text{o bé} \\ x^2 - 4x + 2 = -1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1,\, x = 3 \end{cases}$$
- Les solucions de $|x^2 - 4x + 2| = 2$ són $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$.
- Les solucions de $|x^2 - 4x + 2| = 3$ són $x = 2 \pm \sqrt{5}$.

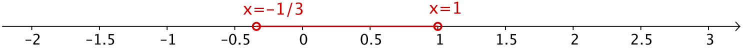


Exemples de resolució d'inequacions amb valor absolut (I)

- Les solucions d'una inequació són un interval o una unió d'intervals.
- Els extrems dels intervals estan determinats per les solucions de l'equació associada.

Exemple. Resoldre $|1-3x|<2$.

- Equació associada: $|1-3x|=2$.
- Hem vist que $|1-3x|=2 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$ o bé $x=1$.
- Hem d'estudiar en quin(s) dels intervals $(-\infty,-\frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{3},1)$ i $(1,+\infty)$, es compleix la desigualtat.



$x=-2$
$|1-3x|=7>2$

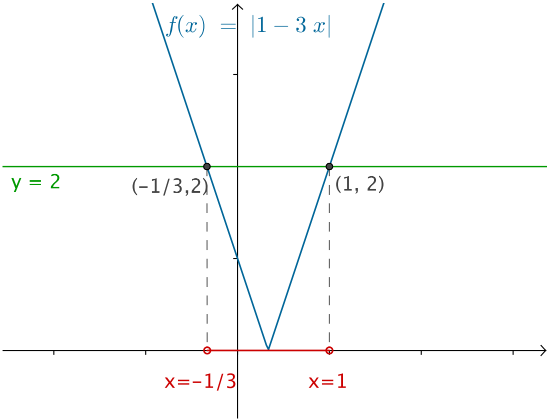
$x=0$
$|1-3x|=1<2$

$x=2$
$|1-3x|=5>2$

- La solució de la inequació és: $(-\frac{1}{3},1)$.

Exemples de resolució d'inequacions amb valor absolut (II)

Gràficament

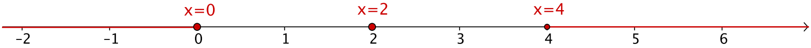


$$|1 - 3x| < 2$$

Exemples de resolució d'inequacions amb valor absolut (III)

Exemple. Resoldre $|x^2 - 4x + 2| \geq 2$.

- Equació associada: $|x^2 - 4x + 2| = 2$.
- Hem vist que $|x^2 - 4x + 2| = 2 \Leftrightarrow x = 0$, $x = 2$ o bé $x = 4$.
- Hem d'estudiar en quin(s) dels intervals $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 4)$ i $(4, +\infty)$, es compleix la desigualtat. A més, els punts $x = 0$, $x = 2$ i $x = 4$ són solució.

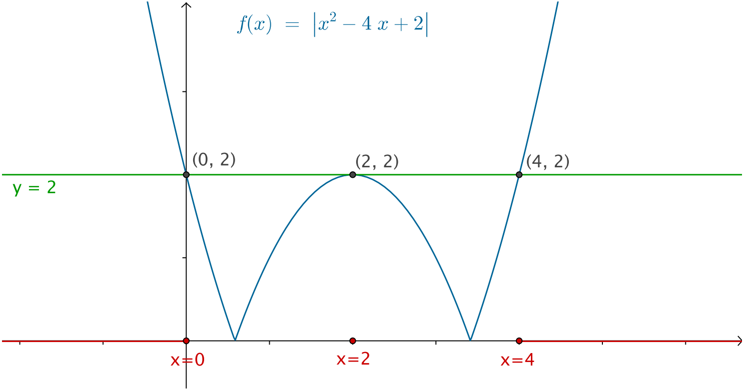


$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$	$x = 5$
$\lvert x^2 - 4x + 2\rvert = 7 > 2$	$\lvert x^2 - 4x + 2\rvert = 1 < 2$	$\lvert x^2 - 4x + 2\rvert = 1 < 2$	$\lvert x^2 - 4x + 2\rvert = 7 > 2$

- La solució de la inequació és: $(-\infty, 0] \cup \{2\} \cup [4, +\infty)$

Exemples de resolució d'inequacions amb valor absolut (IV)

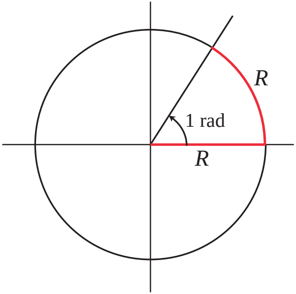
Gràficament



$$|x^2 - 4x + 2| \geq 2$$

Mesura d'angles: radiants

- Diem que l'angle que abasta un arc de circumferència igual al seu radi mesura 1 radiant.
- Gràficament:

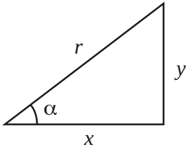


- Equivalència graus-radiants:

$$1 \text{ rad} = \frac{360}{2\pi} \approx 57.295779^{o}$$

Raons trigonomètriques: angles aguts

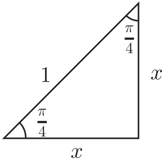
- Relació entre costats d'un triangle rectangle: sinus, cosinus, tangent.



$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

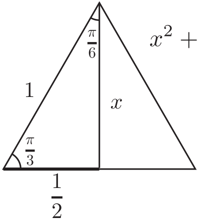
$r = 1 \Rightarrow \sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x$

- Raons trigonomètriques dels angles $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ i $\frac{\pi}{6}$.



$$x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



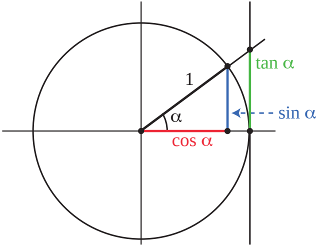
$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

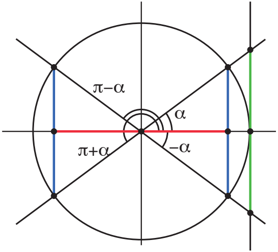
Raons trigonomètriques: angles qualssevol

- Circumferència trigonomètrica: centre $(0,0)$, radi 1.



Angles coneguts del primer quadrant

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞



Reducció al primer quadrant

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

Raons trigonomètriques: propietats

- **Fórmules trigonomètriques importants**
  - $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
  - $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
  - $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
  - $\begin{cases} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{cases}$
  - $\begin{cases} \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \end{cases}$
- **Propietats**
  - $-1 \le \sin\alpha \le 1$
  - $-1 \le \cos\alpha \le 1$
  - $-\infty \le \tan\alpha \le +\infty$
- Altres raons trigonomètriques: cosecant, secant i cotangent.

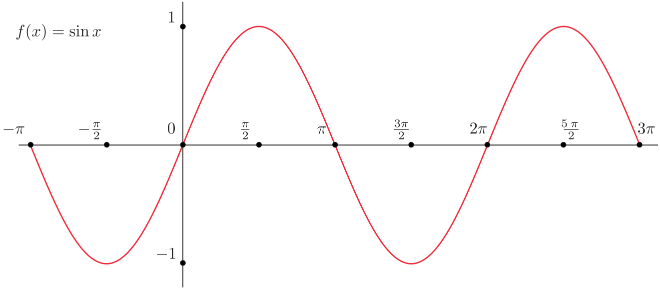
$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Funcions trigonomètriques: la funció sinus

La funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ tal que $f(x) = \sin x$ rep el nom de funció sinus.

Sigui $f(x) = \sin x$. Es compleix:

- $Dom\ f = \mathbb{R}$.
- $Im\ f = [-1, 1]$.
- $f(x)$ és contínua en tot el seu domini.
- $f(x)$ és 2π-periòdica.

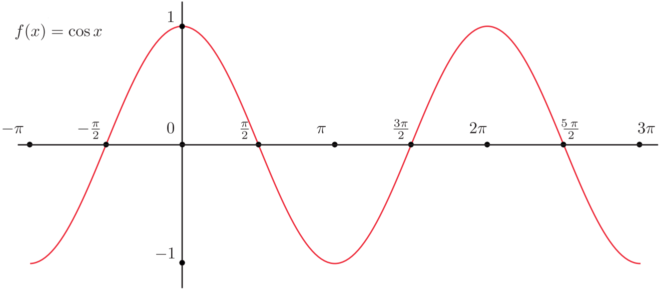


Funcions trigonomètriques: la funció cosinus

La funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ tal que $f(x) = \cos x$ rep el nom de funció sinus.

Sigui $f(x) = \cos x$. Es compleix:

- $Dom\ f = \mathbb{R}$.
- $Im\ f = [-1, 1]$.
- $f(x)$ és contínua en tot el seu domini.
- $f(x)$ és 2π-periòdica.

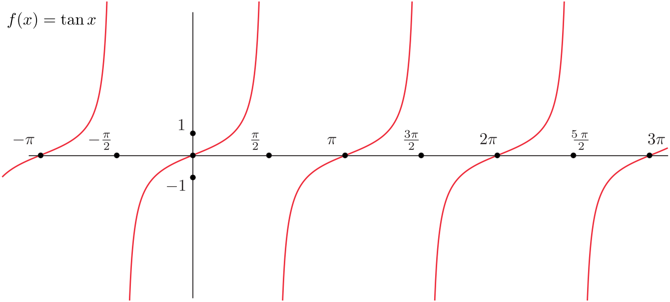


Funcions trigonomètriques: la funció tangent

La funció $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \tan x$ rep el nom de funció tangent.

Sigui $f(x) = \tan x$. Es compleix:

- $Dom\ f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- $Im\ f = \mathbb{R}$.
- $f(x)$ té un conjunt infinit de discontinuïtats.
- $f(x)$ és π-periòdica.



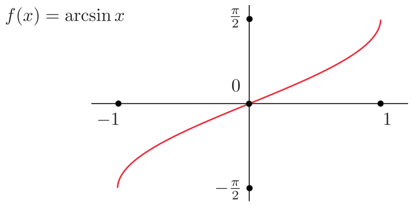
Raons trigonomètriques inverses: la funció arc sinus

La funció $f : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ inversa de la funció sinus, rep el nom de funció arc sinus i es denota per $f(x) = \arcsin x$.

Observació. Donat $a \in [-1, 1]$, es defineix l'arc sinus d'a com l'angle $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\sin \alpha = a$.

Sigui $f(x) = \arcsin x$. Es compleix:

- $Dom\ f = [-1, 1]$.
- $Im\ f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $f(x)$ és contínua en tot el seu domini.



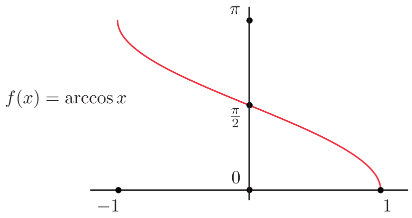
Raons trigonomètriques inverses: la funció arc cosinus

La funció $f : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ inversa de la funció cosinus, rep el nom de funció arc cosinus i es denota per $f(x) = \arccos x$.

Observació. Donat $a \in [-1, 1]$, es defineix l'arc cosinus d'a com l'angle $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos \alpha = a$.

Sigui $f(x) = \arcsin x$. Es compleix:

- $Dom\ f = [-1, 1]$.
- $Im\ f = [0, \pi]$.
- $f(x)$ és contínua en tot el seu domini.



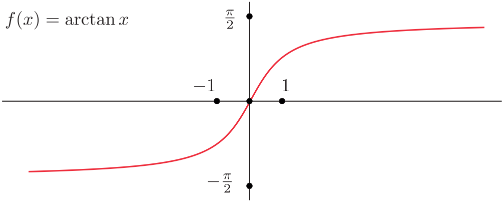
Raons trigonomètriques inverses: la funció arc tangent

La funció $f:\mathbb{R}\longrightarrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ inversa de la funció tangent, rep el nom de funció arc tangent i es denota per $f(x)=\arctan x$.

Observació. Donat $a\in\mathbb{R}$, l'arc tangent d'a és l'angle $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ tal que $\tan\alpha=a$.

Sigui $f(x)=\arcsin x$. Es compleix:

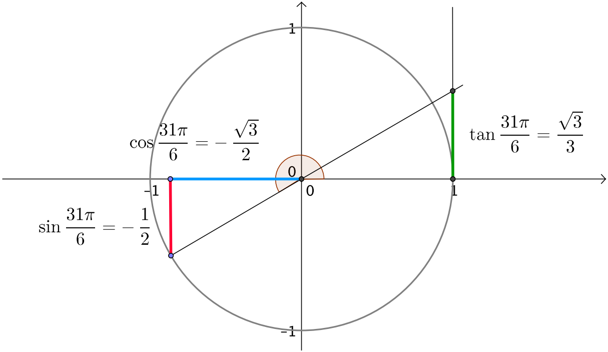
- $Dom\ f=\mathbb{R}$.
- $Im\ f=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
- $f(x)$ és contínua en tot el seu domini.
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ i $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$



Funcions trigonomètriques: exemples (I)

Exemple. Trobar les raons trigonomètriques de l'angle $\frac{31\pi}{6}$ i representar-les gràficament.

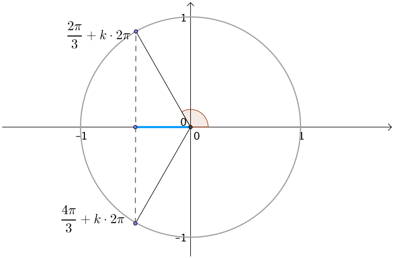
$$\frac{31\pi}{6} = 2\cdot 2\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \sin\frac{31\pi}{6} = \sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ \cos\frac{31\pi}{6} = \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan\frac{31\pi}{6} = \tan\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$



Funcions trigonomètriques: exemples (II)

Exemple. Donar totes les solucions de l'equació $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Els dos angles de la primera volta que compleixen l'equació són $\frac{2\pi}{3}$ i $\frac{4\pi}{3}$.
Per tenir totes les solucions, hem d'afegir els angles que s'obtenen al sumar 2π a les dues solucions de la primera volta:
$x \in \{\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$



Observació. L'equació $x = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ només té una solució, $x = \frac{2\pi}{3}$.

Funcions trigonomètriques: exemples (III)

Exemple. Sigui $\alpha = \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$. Donar els valors d'$\alpha$ i de les seves raons trigonomètriques principals, i representar-les gràficament.

$\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\alpha = -1$.