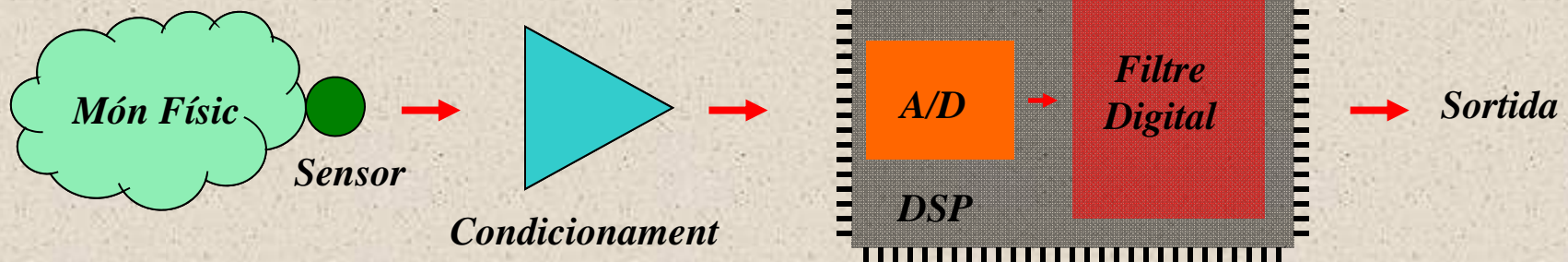


Filtres analògics i digitals (FEAD)

***Conceptes bàsics sobre
processat digital***

Punt de partida

- Consideracions generals:
 - Els senyals contenen informació de l'activitat física que ens envolta (*veu, imatge, dades del ambient, etc*)
 - Analitzar aquesta informació implica realitzar un **processament** determinat.
 - El **filtratge** és un tipus de processament de senyal, ja sigui analògic o digital
 - El filtratge digital electrònic requereix:
 - L'ús de dispositius programables (**FPGA, μ P o DSP**)
 - Conversió d'analògic a digital



Senyals: Temps continu vs. Temps discret

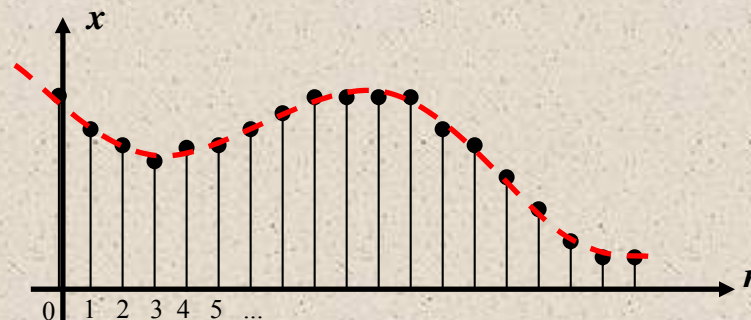
- Domini *analògic*



$$x = \{x(t)\}, \forall t \in [-\infty, \infty]$$

- x està definit per qualsevol valor de t dintre del rang

- Domini *digital*



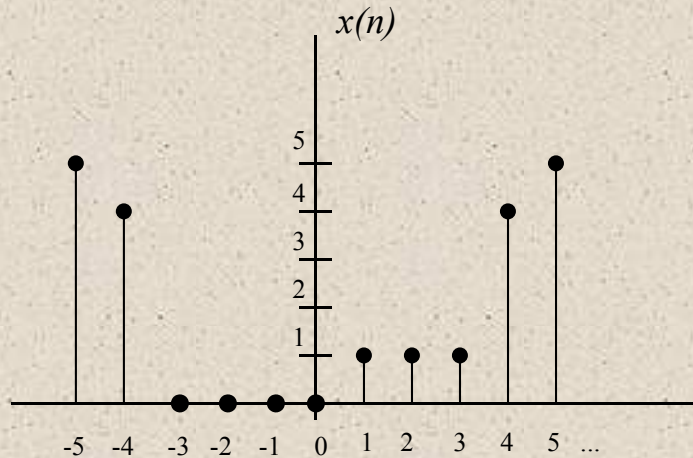
$$x = \{x(n)\}, \forall n \in I[-\infty, \infty]$$

$$t \equiv n \cdot T$$

- x està definit només per a valors *enters* de n dintre del rang.
- Existeix un interval de mostreig T . No hi ha valor definit durant el interval

Representacions discretes

- Gràfica



- Funcional

$$x(n) = \begin{cases} 0, & \text{per } -3 \leq n \leq 0 \\ 1, & \text{per } 1 \leq n \leq 3 \\ |n|, & \text{per qualsevol altre cas} \end{cases}$$

- Tabulada

n	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$x(n)$...	4	0	0	0	0	1	1	1	4	5	...

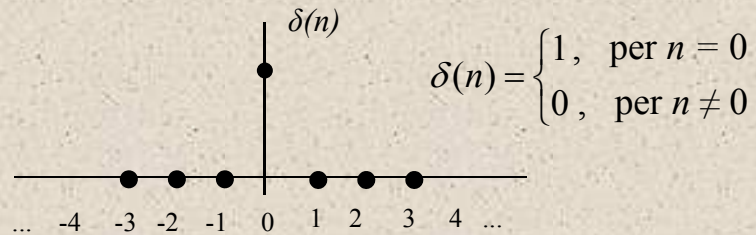
- Seqüència

$$x(n) = \{ \dots -4, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 4, 5 \}$$

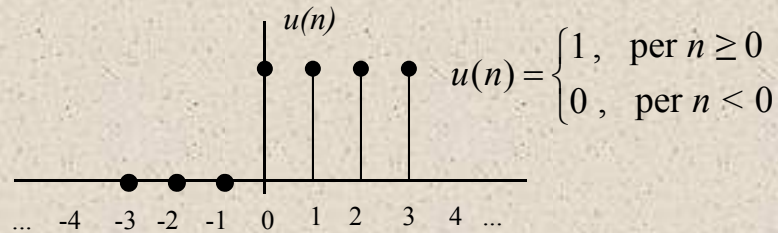
↑

Senyals discrets. Exemples

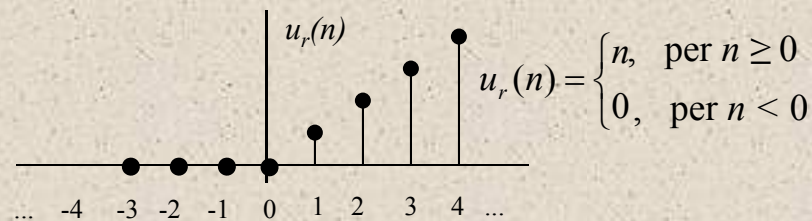
- Impuls unitari: $\delta(n)$



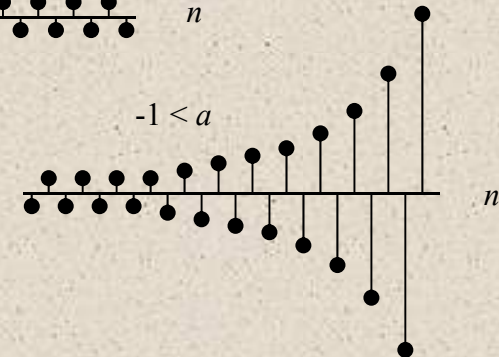
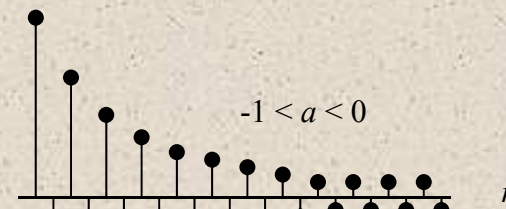
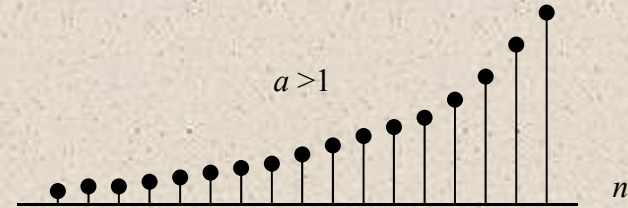
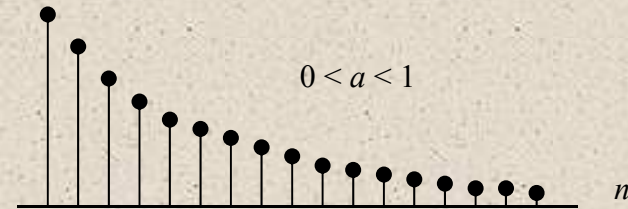
- Graó unitari: $u(n)$



- Rampa: $u_r(n)$



- Exponencial: $x(n) = a^n$, per tot n



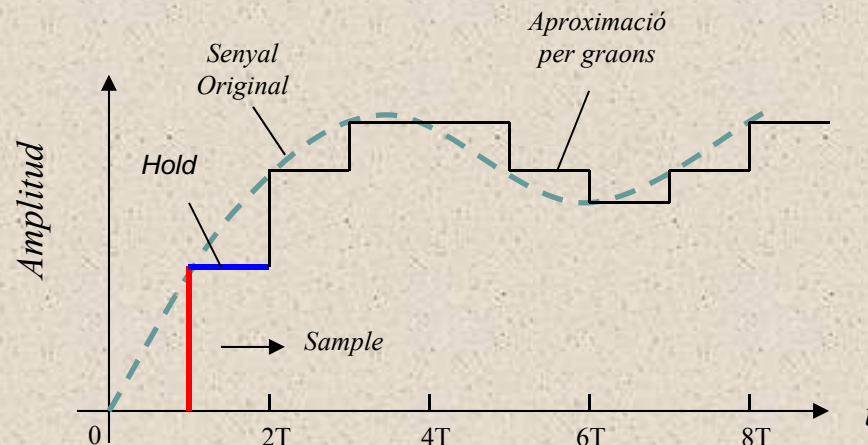
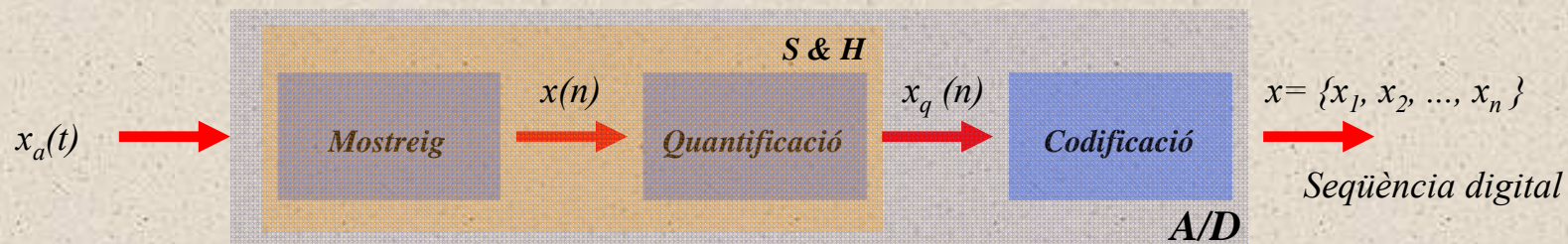
Sinusoides discretes

$$x(n) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot n + \theta), \quad \forall n \in I[-\infty, \infty]$$

- Propietats:
 - Només són periòdiques si f és **racional**. Això implica que ha d'existir un enter k tal que $f = k/N$, on N és el nombre de mostres de $x(n)$
 - Totes les sinusoides de freqüència separades per múltiples enters de $2 \cdot \pi$ són **idèntiques**. Les úniques freqüències diferents entre sí són les que estan dintre del rang: $-1/2 \leq f \leq 1/2$ ($-\pi \leq \Omega \leq \pi$). La resta estan repetides i són **alias** d'aquestes.
 - El grau d'oscil·lació més gran possible només es pot assolir quan $f = 1/2$ (o bé $f = -1/2$) o, de manera equivalent, $\Omega = \pi$ ($\Omega = -\pi$)

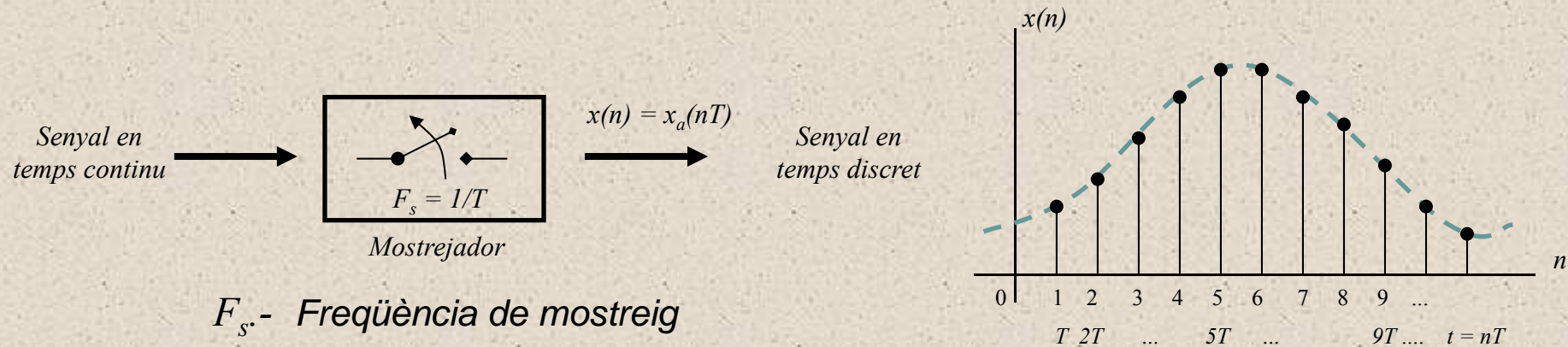
La conversió A/D

- A la pràctica, els senyals tenen **naturalesa analògica**. Per processar-les amb eines digitals, prviament és necessari transformar-les a una seqüència de valors numèrics.
- El procés es realitza mitjançant conversors A/D (ADC.- **A**nalog-**t**o-**D**igital **C**onverter)



Consideracions sobre el mostreig

- El conversor A/D realitza una adquisició de senyals analògiques caracteritzada per un **mostreig periòdic uniforme**.



- Aquest, estableix una relació entre les variables de temps continu i discret $t = nT = n/F_s$ que té implicacions importants, sobretot, en senyals que tenen **components periòdiques** (o freqüencials)

**Pèrdua d'informació
en el mostreig**

Com escollir F_s ?

- **Teorema del mostreig**

- Donat $x_a(t)$ que conté components freqüencials on ($F_{max} = B$) és la component amb la freqüència més elevada, si la freqüència de mostreig F_s és tal que $F_s > 2 \cdot F_{max} \equiv 2 \cdot B$, llavors és possible recuperar el senyal mostrejat mitjançant la funció d'interpolació:

$$g(t) = \frac{\sin(2\pi \cdot B \cdot t)}{2\pi \cdot B \cdot t}$$

realitzant el càlcul:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) \cdot g\left(t - \frac{n}{F_s}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) \cdot \frac{\sin(2\pi \cdot B(t - n/2B))}{2\pi \cdot B(t - n/2B)}$$

- **Tasa de Nyquist.** $F_s \equiv F_N = 2B = 2F_{max}$
- No obstant, aquest procés només té una utilitat teòrica ($N=\infty$). Normalment, s'utilitza un mostreig superior a la tasa de Nyquist i s'interpolava **linealment**

La quantificació

- A la pràctica, la **precisió** dels valors d'una seqüència està **limitada** al nombre de dígit (o bits) utilitzats en l'adquisició A/D.
- **Error de quantificació:**
 - Si Q denota al procés utilitzat en la quantificació de $x(n)$, ($x_q(n) = Q[x(n)]$, **truncament** o **arrodoniment**), l'error de quantificació s'expressa $e_q(n) = x_q(n) - x(n)$

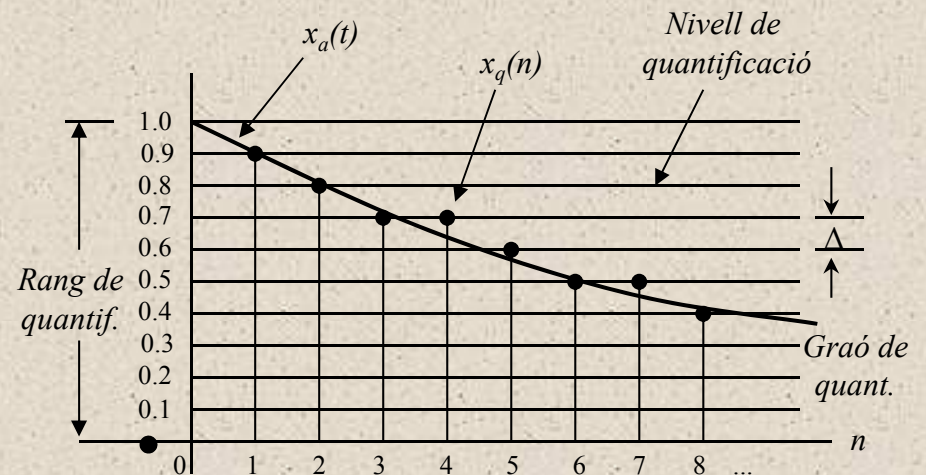
- **Exemple:**

- $x(n) = \begin{cases} 0.9^n, & \text{per } n \geq 0 \\ 0, & \text{per } n < 0 \end{cases}$
- $F_s = 1 \text{ Hz}$
- **Un digit** sigbificatiu (un decimal)
- 11 nivells de qüantificació ($L = 11$)

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{L - 1}$$

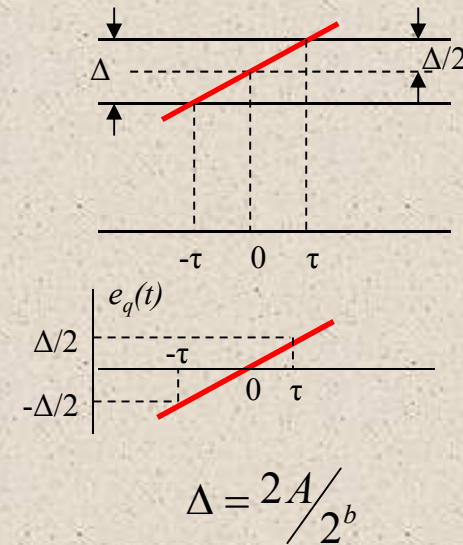
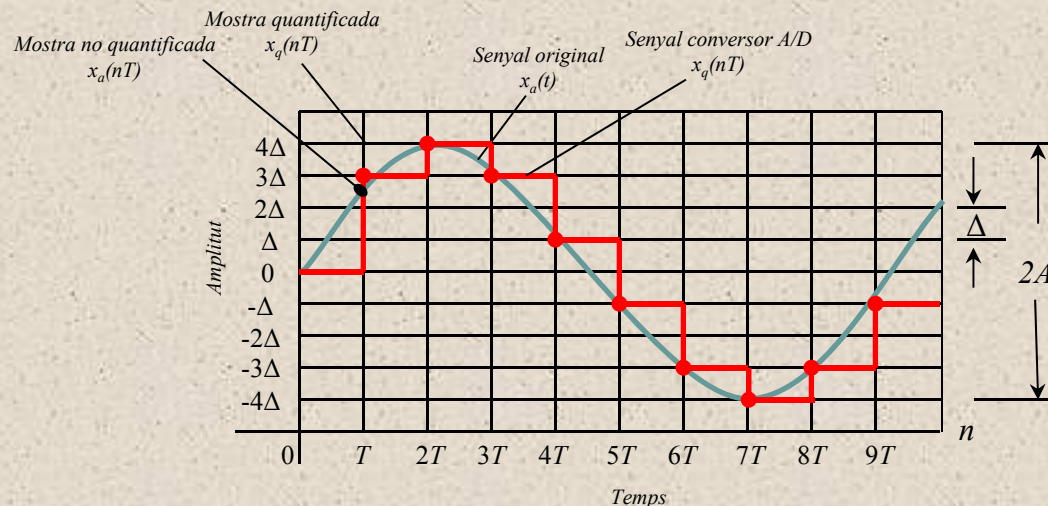
$$-\frac{\Delta}{2} \leq e_q(n) \leq \frac{\Delta}{2}$$

→ L'error màxim no supera la meitat del graó de quantificació



SQNR

- El SQNR (**S**ignal **Q**uantification **N**oise **R**atio) s'utilitza per mesurar la relació entre el senyal i el nivell de soroll produït per la quantificació
- Exemple de càlcul amb un sinus



- Potència mitja del error i del senyal:

$$P_q = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} e_q^2(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} e_q^2(t) dt = \frac{A^2/3}{2^{2b}} \rightarrow \boxed{SQNR = \frac{P_x}{P_q} = \frac{3}{2} \cdot 2^{2b}} \leftarrow P_x = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} (A \cdot \cos \Omega_0 t)^2 dt = \frac{A^2}{2}$$

- $e_q(t) = (\Delta/2\tau) \cdot t, \forall t \in [-\tau, \tau]$ τ denota el temps en que $x_a(t)$ està dintre dels marges de quantificació

Més sobre senyals i sistemes

- Conceptes importants a conèixer
 - Energia i potència
 - Periodicitat
 - Simetria
- Transformacions bàsiques
 - Desplaçaments (*shifting*)
 - Reflexe
 - **Compressió i Descompressió** de dades
 - **Operacions aritmètiques:** *escalat, suma i multiplicació punt a punt*



Energia vs Potència

- Energia

$$E \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

- Potència

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2$$

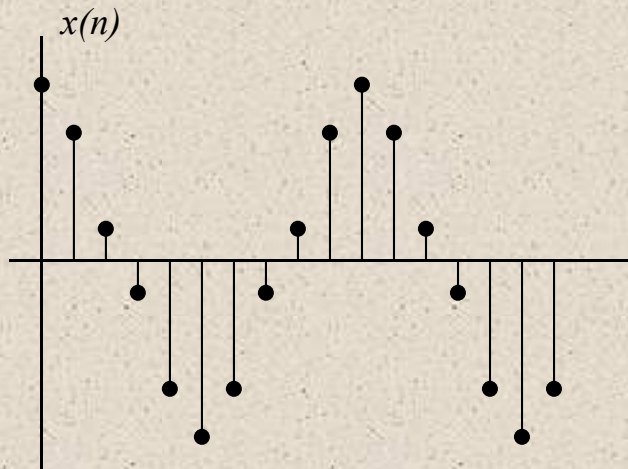
- N .- Nombre de mostres de $x(n)$
- Consideracions:
 - Si E és finit ($0 < E < \infty$), $P = 0$ i $x(n)$ és un **senyal d'energia**. Aquest és el cas de tots els senyals que tenen un caràcter **transitori**
 - Si E és infinit, P pot ser tant finit com infinit. En el cas que P tingui un valor finit $x(n)$ és un **senyal de potència**
 - **Graons** i **exponencials** i **senyals periòdiques** són exemples de senyals de potència. La rampa no és cap de les dues

Periodicitat

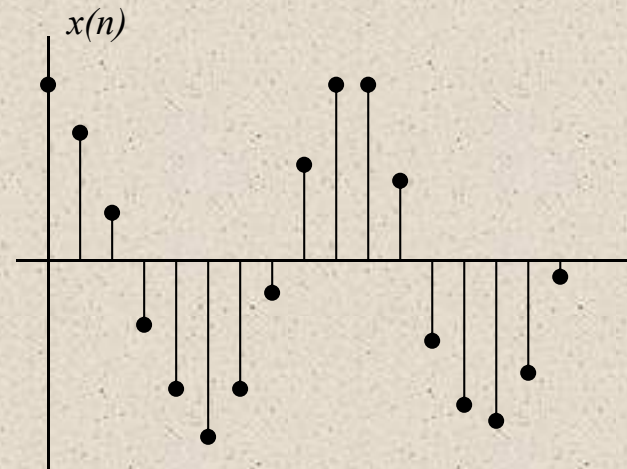
- Un senyal $x(n)$ és **periòdic** N ($N > 0$) si compleix que:

$$x(n + N) = x(n), \forall n$$

en cas contrari, estarem parlant s'un senyal **aperiòdic**

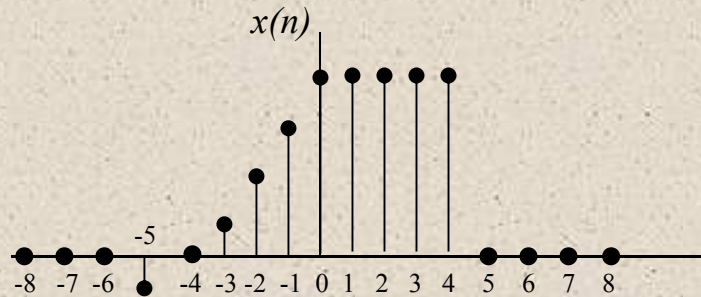


Senyal periòdic



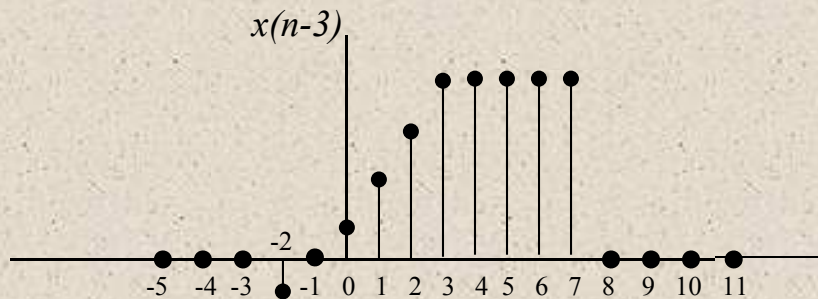
Senyal aperiòdic

Transformacions bàsiques

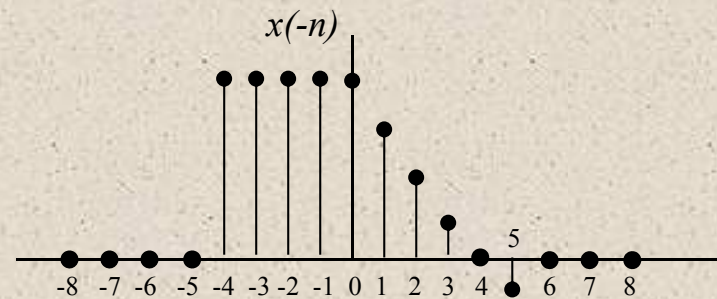


- De desplaçament

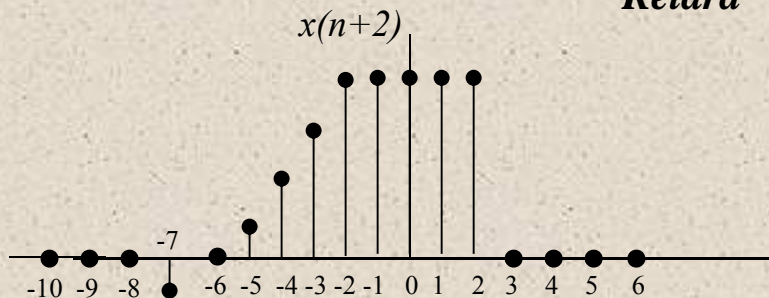
- Reflexe



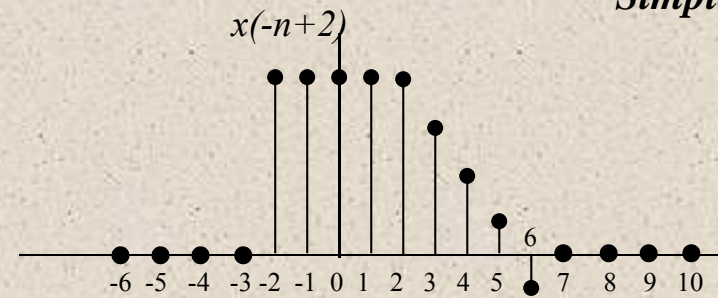
Retard



Simple



Avançament

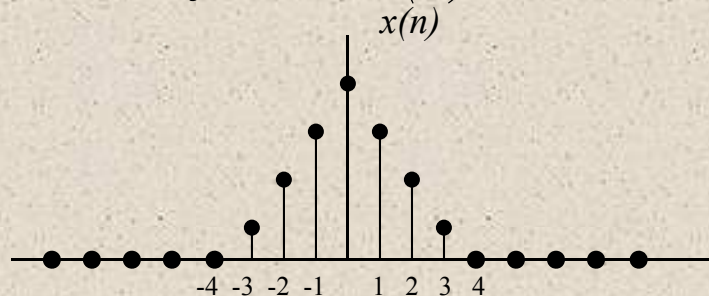


Compost

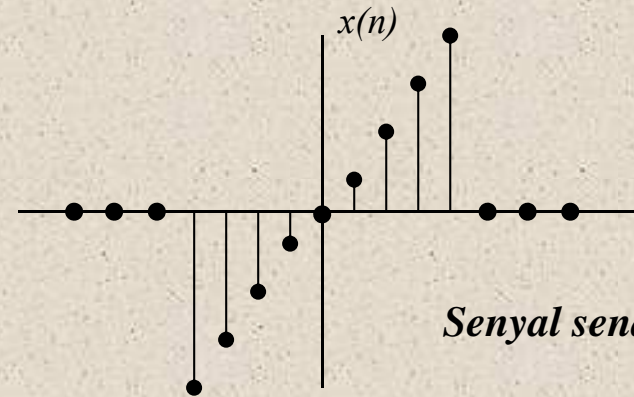


Simetria

- Un senyal real $x(n)$ és **simètric** (o **parell**) si $x(n) = x(-n)$
- Un senyal real $x(n)$ és **antisimètric** (o **senar**) si $x(-n) = -x(n)$



Senyal parell



Senyal senar

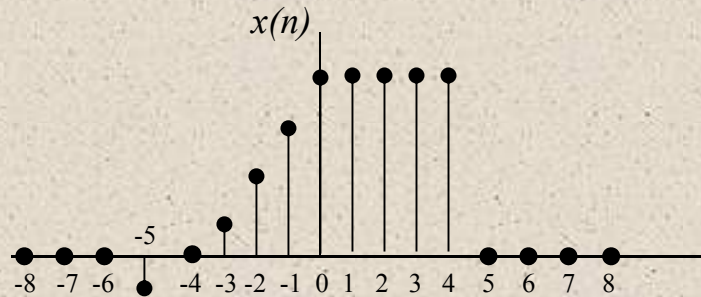
- Qualsevol senyal arbitrari pot expressar-se com a una suma de dos components: un parell i l'altre senar

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x(-n)] \rightarrow \text{Component parell}$$

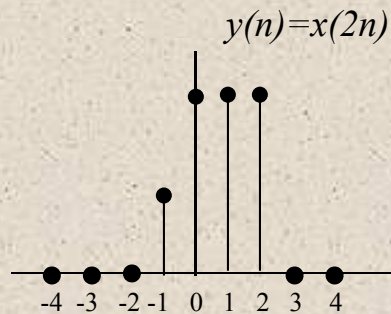
$$x_o(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x(-n)] \rightarrow \text{Component senar}$$

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

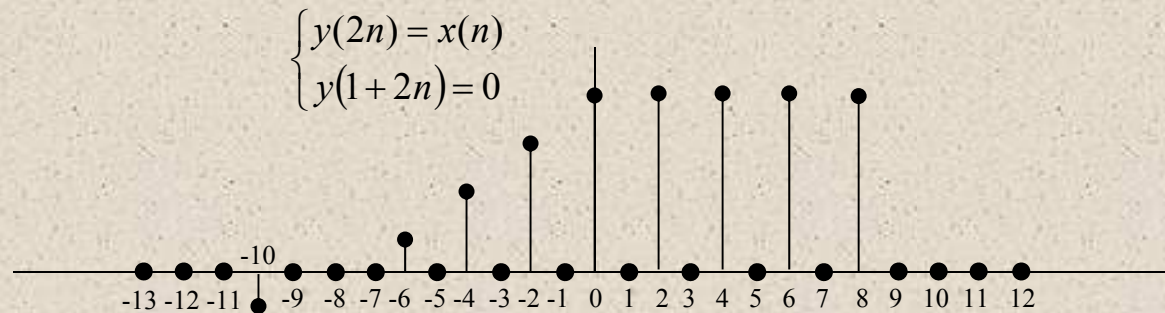
Altres transformacions



- **Downsampling** (Compresió)



- **Upsampling** (Descompresió)



- **Altres operacions**

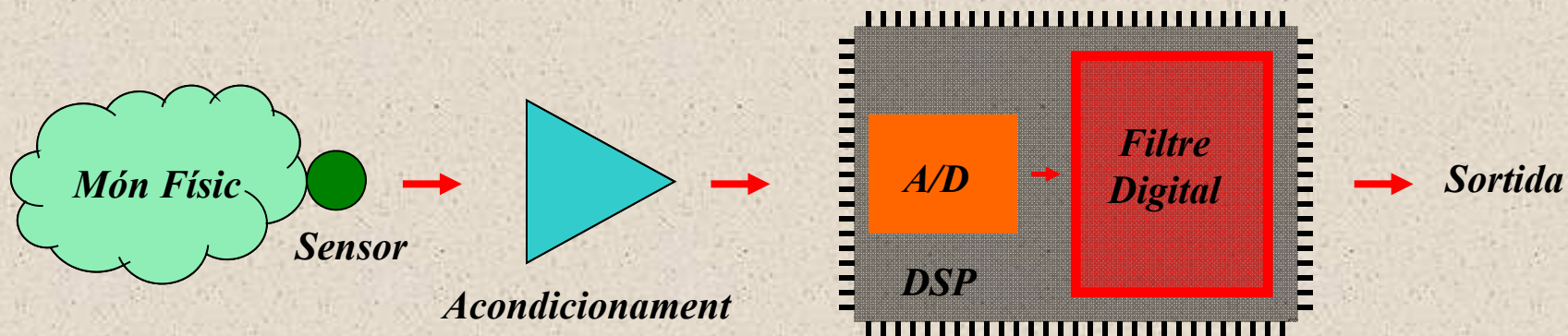
- **Escalat:** $y(n) = A \cdot x(n)$
 - **Suma:** $y(n) = x_1(n) + x_2(n)$
 - **Multiplicació punt a punt:** $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$
- }, \forall n \in I[-\infty, \infty]

Filtres analògics i digitals (FEAD)

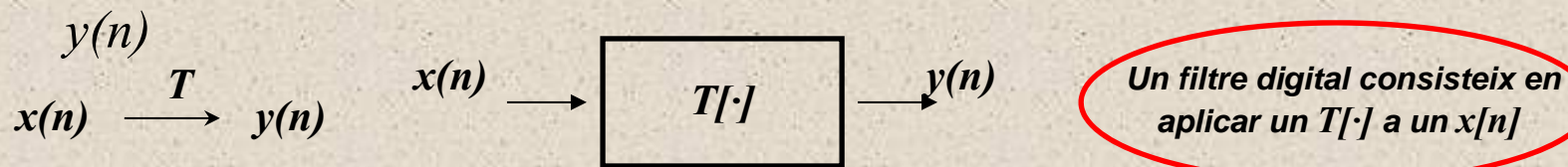
***Sistemes en
temps discret***

Definició

- Tècnicament
 - Un sistema és un dispositiu (programable) que realitza operacions sobre un senyal discret d'*entrada* per generar un altre senyal discreta que s'anomena *sortida*



- Científicament
 - Consisteix una transformació de l'entrada $x(n)$ per produir una sortida



Exemples:

- Activitat:
 - Determineu la resposta $y(n)$ dels següents sistemes al senyal d'entrada $x(n)$

$$x(n) = \begin{cases} |n|, & \text{per } -3 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{en qualsevol altre cas} \end{cases}$$

a) $y(n) = x(n)$

d) $y(n) = 1/3 \cdot [x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$

b) $y(n) = x(n-1)$

e) $y(n) = \max \{x(n+1), x(n), x(n-1)\}$

c) $y(n) = x(n+1)$

f) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + \dots$

Primeres consideracions

- La sortida en un instant $n = n_0$ no pot sols dependre de l'entrada en aquest instant, $x(n_0)$, si no pot dependre dels instants *anteriors* i *posteriors* tant de l'entrada com la sortida

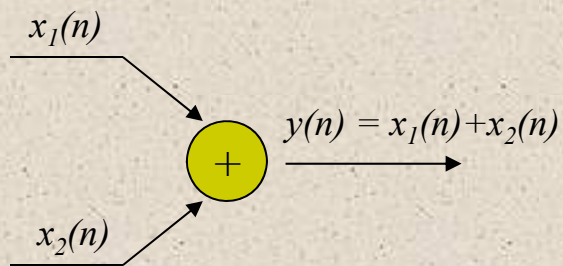
- Exemple: L'acumulador

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k) + x(n) = y(n-1) + x(n)$$

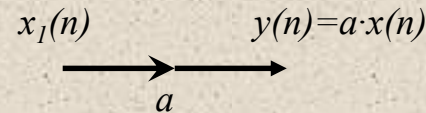
- De fet, són les condicions inicials, $\{y(n_0-1), y(n_0-2), \dots\}$ que juntament amb $x(n)$ per $n \geq n_0$ determinen unívocament la sortida $y(n)$
- Si $y(n_0-1) = y(n_0-2) = \dots = y(n_0-N) = 0$ es diu que les condicions inicials son *nul·les* o bé que el sistema està en *repòs*

Representació gràfica de sistemes discrets

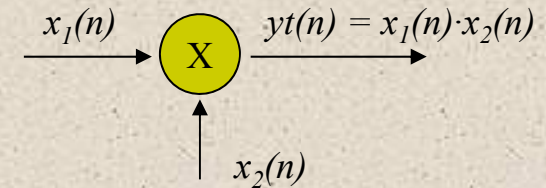
- El mètode més estès consisteix en utilitzar diagrames de blocs
- Blocs bàsics:



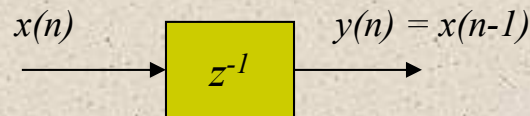
Sumador



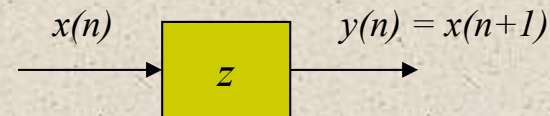
Factor d'escala



Producte mostra a mostra



Retard



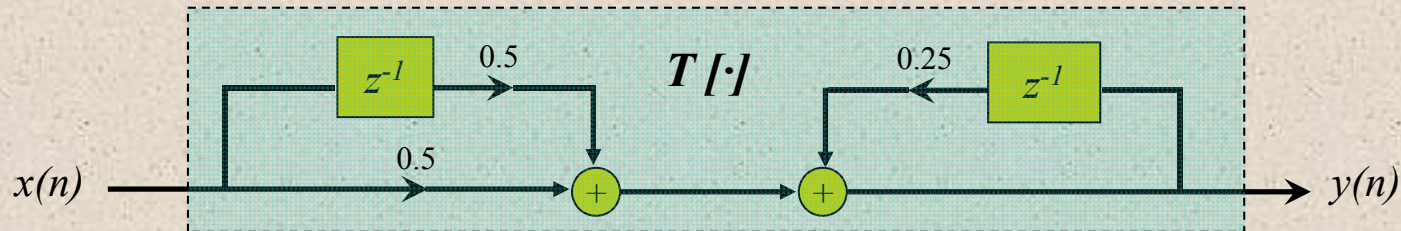
Avançament

Diagrama de blocs. Exemple

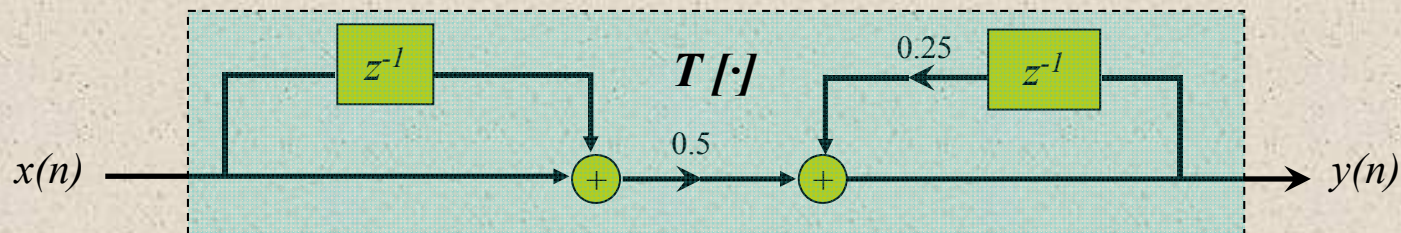
$$y(n) = \frac{1}{4} y(n-1) + \frac{1}{2} x(n) + \frac{1}{2} x(n-1)$$

- Implementació:

1. Estructura bàsica



2. Optimització de multiplicadors



Característiques generals dels sistemes discrets

- Serveixen per classificar sistemes discrets en base al comportament, tant de la variable de sortida com els seus paràmetres
- En molts casos, determinen l'ús de certes *eines matemàtiques* en l'anàlisi
- Característiques de comportament:
 - Segons les variables d'entrada-sortida:
 - **Estàtic o dinàmic**
 - **Estable o inestable**
 - **Causal o no causal**
 - Segons els paràmetres del propi sistema:
 - **Invariant o variant** en el temps
 - Linealitat: **Lineal o no lineal**
 - Recursivitat: **Recursiu o no recursiu**
 - Resposta impulsional: **finita (FIR) o infinita (IIR)**
- Per complir amb la característica (o propietat), aquesta ha de donar-se per *qualsevol* senyal d'entrada $x(n)$



Sistemes estàtics i dinàmics

- **Sistema estàtic** (o *sense memòria*) és un sistema en que la sortida per a qualsevol instant n depèn de l'entrada, **nomès** en aquet instant
- En cas que també depengui de *mostres passades* o *futures* de l'entrada és un **sistema dinàmic** (o *amb memòria*)
- Exemple:

$$y(n) = a \cdot x(n)$$

$$y(n) = n \cdot x(n) + b \cdot x^3(n)$$

Sistemes sense memòria

$$y(n) = x(n) + 3 \cdot x(n-1)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)$$

Sistemes amb memòria



Sistemes invariants i variants en el temps

- Un sistema és **invariant** en el temps si les seves **característiques** d'entrada-sortida no varien en el temps
- **Teorema:**
 - Un sistema en repòs $T[\cdot]$ és *invariant* en el temps (o al **desplaçament**) si, i només si:

$$\boxed{x(n) \xrightarrow{T} y(n)} \implies \boxed{x(n-k) \xrightarrow{T} y(n-k)}$$

per qualsevol $x(n)$ amb $\forall [n, k] \in I[-\infty, \infty]$. En cas contrari, el sistema és considera que és **variant** en el temps.

$$y(n) = x(n) - x(n-1) \quad \text{Sistema invariant en el temps}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(n) = n \cdot x(n) \\ y(n) = x(-n) \end{array} \right\} \text{Sistemes variants en el temps}$$

Linealitat

- Un **sistema lineal** és aquell compleix el *principi de superposició*
- **Teorema:**
 - Un sistema $T[\cdot]$ és *lineal* si, i només si:

$$T[a_1 \cdot x_1(n) + a_2 \cdot x_2(n)] = a_1 \cdot T[x_1(n)] + a_2 \cdot T[x_2(n)]$$

per qualsevol $x_1(n)$ i $x_2(n)$, per $[a_1, a_2] \in \mathfrak{R}$

- **Exemples:**

$$\left. \begin{array}{l} y(n) = n \cdot x(n) \\ y(n) = x(n^2) \end{array} \right\} \text{Sistemes lineals}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(n) = x^2(n) \\ y(n) = e^{x(n)} \end{array} \right\} \text{Sistemes no lineals}$$

Causalitat

- **Teorema:**

- Un sistema $T[\cdot]$ és *causal* si per a qualsevol instant de temps, la sortida només de les entrades *actuals* i *passades* (no futures)

$$\boxed{y(n) = F[x(n), x(n-1), x(n-2), \dots]} , \forall n \in I[0, \infty]$$

- **Exemples:**

$$\left. \begin{aligned} y(n) &= x(n) - x(n-1) \\ y(n) &= \sum_{k=-\infty}^n x(k) \\ y(n) &= a \cdot x(n) \end{aligned} \right\} \text{Sistemes} \\ \text{causals}$$

$$\left. \begin{aligned} y(n) &= x(n) + 3 \cdot x(n+4) \\ y(n) &= x(n^2) \\ y(n) &= x(2n) \\ y(n) &= x(-n) \end{aligned} \right\} \text{Sistemes} \\ \text{no causals}$$

- En la pràctica, és impossible implementar sistemes no causals *en temps real*

Estabilitat

- **Teorema:**

- Un sistema $T[\cdot]$ qualsevol té entrada i sortida acotada (BIBO.- **B**ounded **I**nter- **B**ounded **O**utput) si per una entrada acotada M_x :
 $|x(n)| \leq M_x \leq \infty$, produeix una sortida acotada M_y : $|y(n)| \leq M_y \leq \infty$
per $\forall n \in I[-\infty, \infty]$

- En la pràctica, sistemes inestables presenten comportaments **erràtics** i **extremes** que causen saturació i desbordament) de les aplicacions (*overflow*)
- Per aquest motiu, l'estabilitat és una de les característiques més considerades en el disseny d'aplicacions industrials



Recursivitat

- La sortida d'un sistema *recursiu* depèn de si mateixa, a més de l'entrada

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N), x(n), x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-M)]$$

- En els sistemes *no recursius* la sortida només depèn de l'entrada

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-M)]$$

- Exemples:

$$y(n) = \frac{n}{n+1} y(n-1) + \frac{1}{n+1} x(n)$$

Mitja acumulativa

$$y(n) = \frac{1}{2} \left[y(n-1) + \frac{x(n)}{y(n-1)} \right]$$

per $x(n) = A \cdot u(n)$ i $y(-1) = \hat{J}$ i $J = \sqrt{K}$

Arrel quadrada (\sqrt{A})

Aplicació de la recursivitat

- El següent sistema:

$$y(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x(k), \quad \forall n \in I[0, \infty]$$

requereix guardar $x(k)$ per tot $0 \leq k \leq n$ per calcular $y(n)$. Aquesta implementació no és eficient perquè requereix molta memòria (**n creix**).

- Però fent petits canvis:

$$(n+1)y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n) \quad \longrightarrow \quad y(n) = \frac{n}{n+1} y(n-1) + \frac{1}{n+1} x(n)$$

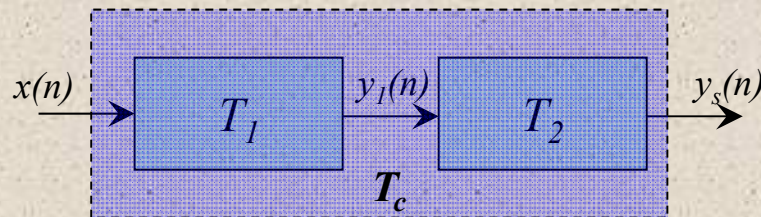
es pot implementar la mateixa operació **estalviant recursos** de memòria

- Per aquesta raó **sempre** és convenient descriure els sistemes des de el punt de vista **recursiu**

Interconnexió de sistemes discrets

- La connexió **sèrie** (cascada) i la connexió **paral·lel** s'utilitzen de manera combinada per formar sistemes discrets més complexos

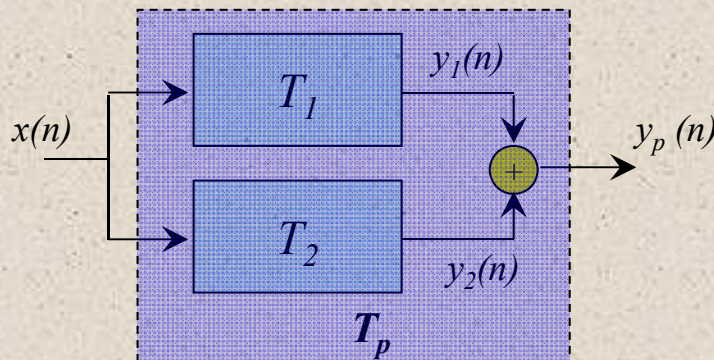
Interconnexió sèrie



$$y_1(n) = T_1[x(n)]$$
$$y_s(n) = T_2\{T_1[x(n)]\} = T_c[x(n)] \longrightarrow \boxed{T_c \equiv T_2 \cdot T_1}$$

- En la connexió sèrie, per a que es compleixi la propietat commutativa T_1 i T_2 han de ser **lineals** i **invariants en el temps** (Sistemes LTI)

Interconnexió paral·lel



$$y_p(n) = T_1[x(n)] + T_2[x(n)] =$$
$$= (T_1 + T_2)[x(n)] = T_p[x(n)]$$

$$\downarrow$$
$$\boxed{T_p = T_1 + T_2}$$

Tècniques d'anàlisi dels sistemes LTI

- Hi han **dos grups** de tècniques considerades com a **generals** en l'àmbit de processament de senyals:

- **1.- Descomposició de components elementals de $x(n)$**

$$x(n) = \sum_k c_k x_k(n) \quad \left\{ \begin{array}{l} k.- \text{ Nombre de components} \\ x_k.- \text{ Component elemental o } \mathbf{descriptor} \text{ } k\text{-èsim de } x(n) \\ c_k.- \text{ Coeficient de ponderació de } x_k \end{array} \right.$$

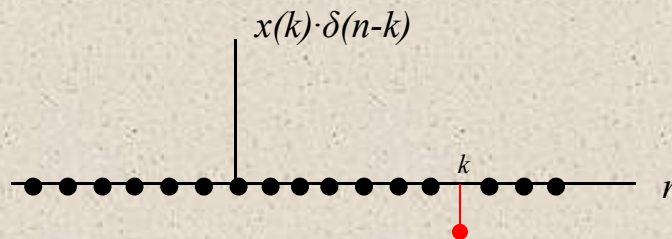
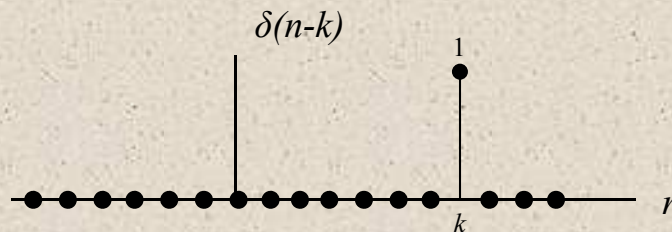
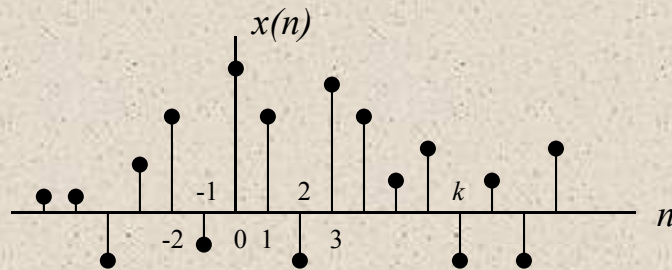
- En la pràctica, hi ha **dos criteris** bàsics per escollir x_k segons el tipus de senyal $x(n)$ a considerar.
 - **Anàlisi impulsional (temporal).**- no hi ha restriccions en $x(n)$
 - **Anàlisi freqüencial.**- Quan $x(n)$ és periòdica ($x_k = e^{j\omega_k n}$. **FFT**)

- **2.- Equacions en diferències (Espai d'estats)**

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) \quad a_k \text{ i } b_k - \text{ Paràmetres constants}$$

Descripció impulsional dels senyals

- Es basa en l'ús del *impuls unitari* com a descriptor del senyal. $x_k(n) = \delta(n-k)$



$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$$

- $x(n)$ s'expressa com una suma ponderada d'impulsos unitaris desplaçats.
- El coeficient de cada mostra està fixada segons el valor de la mostra original en l'instant k

$$c_k = x(k)$$

Resposta impulsional d'un sistema LTI

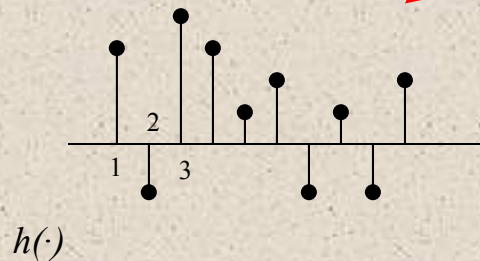
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k) \quad \rightarrow \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot T[\delta(n-k)] \quad \leftarrow \quad y(n) = T[x(n)]$$

Expressió d'un senyal

Sistema

$$h(n-k) = T[\delta(n-k)]$$

Resposta impulsional del sistema



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)$$

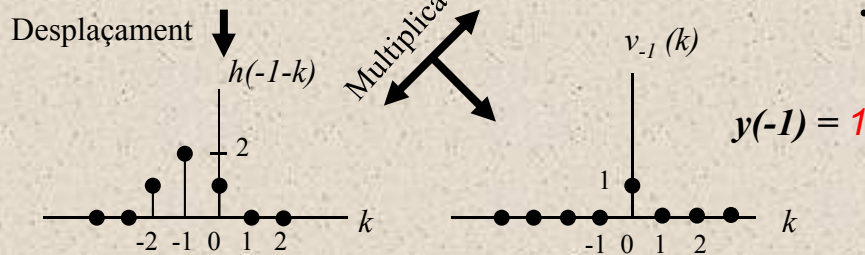
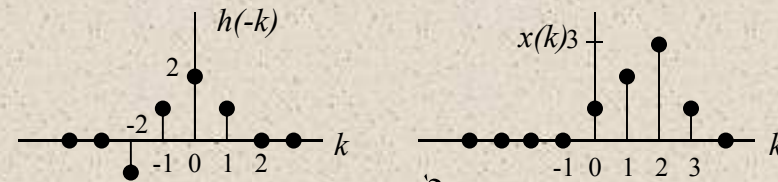
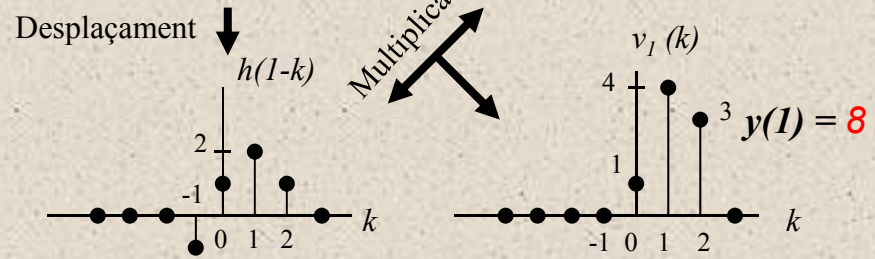
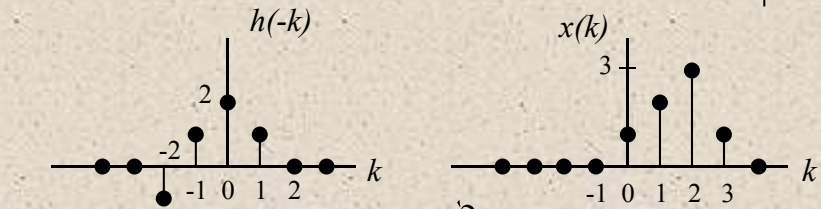
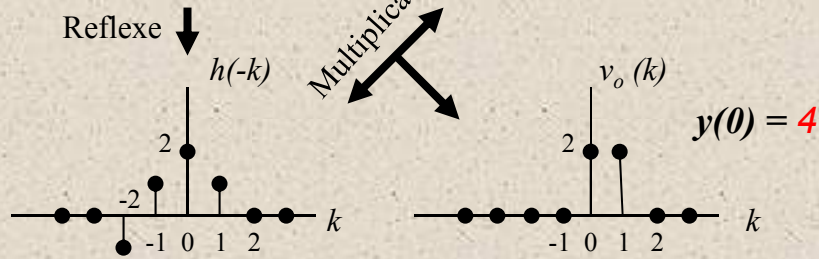
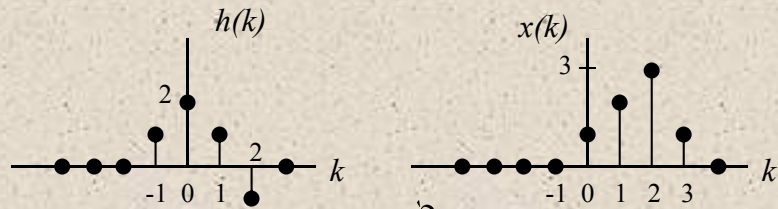
Convolució
 $y(n) = x(k) * n(k)$

Càlcul de la convolució

- La sortida $y(n)$ en l'instant $n=n_0$ té l'expressió:
$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n_0 - k)$$
- Això equival a realitzar **quatre** operacions:
 - 1. **Reflexió** de $h(k)$ respecte a $k=0$ per obtenir $h(-k)$
 - 2. **Desplaçament** de $h(-k)$ n_0 posicions a la dreta/esquerra en cas de que n_0 sigui positiu/negatiu per obtenir $h(n_0-k)$
 - 3. **Multiplicació** punt per punt per a tot k per obtenir
$$v_{n_0}(k) \equiv x(k) \cdot h(n_0 - k)$$
 - 4. **Suma** de la seqüència $v_{n_0}(k)$ per obtenir el resultat en n_0 , ($y(n_0)$)
$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_{n_0}(k)$$
- El procés anterior s'ha de repetir per tots els instants de n ($-\infty < n < \infty$)

La convolució (Exemple)

- Calcularem la resposta pel sistema $h(n) = \{1, 2, 1, -1\}$, amb entrada: $x(n) = \{1, 2, 3, 1\}$

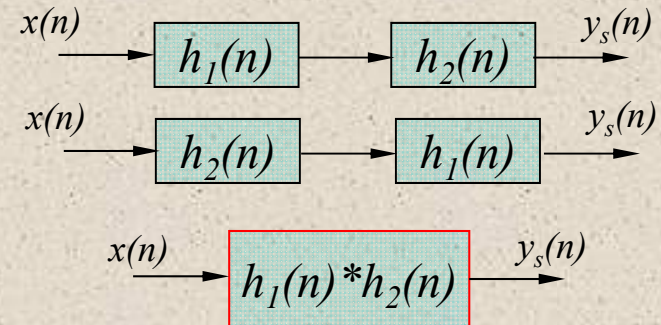


$$y(n) = \{ \dots, 0, 0, 1, 4, 8, 8, 3, -2, -1, 0, 0, \dots \}$$

Propietats de la convolució

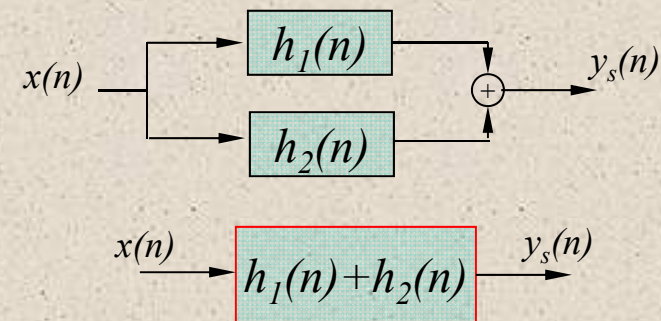
- Commutativa:

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k)$$



- Distributiva

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$
$$h(n) = \sum_{j=1}^L h_j(n)$$



- Associativa

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$
$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) * \dots * h_j(n)$$

Propietats dels sistemes LTI

- **Causalitat**

- Un sistema LTI es també *causal* si, i només si, la resposta impulsional és **nul·la** per tots els valors negatius de n

$$h(n) = 0, \text{ per } n < 0$$

- **Estabilitat**

- Un sistema LTI és *estable* si la resposta impulsional és **absolutament sumable** (convergeix a un valor finit)

$$S_h \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

- **Duració (o llargaria) de la resposta impulsional**

- **FIR (*Finite Impulse Response*).**- Finita $\rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) \cdot x(n-k)$
 $h(n) = 0, \text{ per } n < 0 \text{ i } n \geq M$
- **IIR (*Infinite Impuls Response*).**- Infinita $\rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k)$

Sistemes IIR

- Els sistemes FIR es poden implementar *directament* en base a la convolució amb un nombre finit de recursos computacionals (**sumadors, multiplicadors i posicions de memòria**), però **no** els sistemes IIR (**nombre infinit**)
- Aplicacions d'interès, com **filtres digitals** o el modelat de sistemes, s'implementen *eficientment* amb sistemes IIR
- Existeix algun mètode **pràctic i eficient** per implementar sistemes IIR? ... Afortunadament, *Sí*

Per mitjà de les *equacions en diferències !!!!*



Sistemes LTI expressats per les equacions en diferències

- Notació general:

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) \quad \longrightarrow \quad y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k)$$

- **N.- *Ordre*** del sistema
- y_{zs} .- **Resposta forzada** (ó estat zero).- Part de la sortida deguda al senyal d'entrada $x(n)$

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k)$$

- y_{zi} **Resposta natural** (ó entrada zero).- Part de la sortida deguda a condicions inicials, no nul·les, del sistema

$$y_{zi}(n) = -\sum_{k=0}^N a_k \cdot y(n-k)$$

Sistemes LTI expressats per les equacions en diferències (cont.)

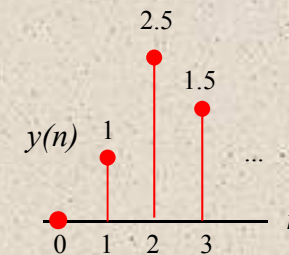
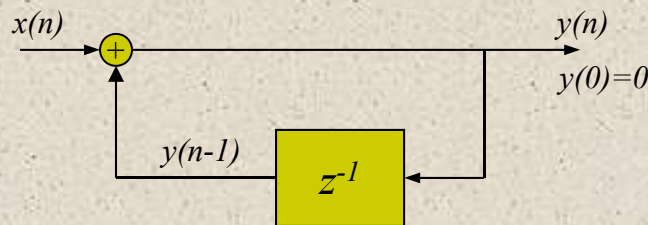
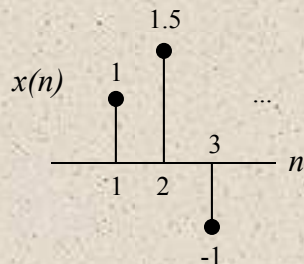
- Exemple

$$y(n] = x(n] + a \cdot y(n-1) \longrightarrow \begin{cases} n = 0 & y(0) = a \cdot y(-1) + x(0) \\ n = 1 & y(1) = a \cdot y(0) + x(1) = a^2 \cdot y(-1) + a \cdot x(0) + x(1) \\ n = 2 & y(2) = a \cdot y(1) + x(2) = a^3 \cdot y(-1) + a^2 \cdot x(0) + a \cdot x(1) + x(2) \\ \dots & \dots \\ y(n) & = a \cdot y(n-1) + x(n) = a^{n+1} \cdot y(-1) + a^n \cdot x(0) + a^{n-1} \cdot x(1) + \dots + a \cdot x(n-1) + x(n) \end{cases}$$

$$y(n) = \underbrace{a^{n+1} \cdot y(-1)}_{y_{zi}(n)} + \sum_{k=0}^n \underbrace{a^k x(n-k)}_{y_{zs}(n)}, \quad n \geq 0$$

- Com calcular la sortida?

- Per $a = 1$



$$\begin{aligned} n = 1 &\longrightarrow y(1) = x(1) + y(0) = \mathbf{1} \\ n = 2 &\longrightarrow y(2) = x(2) + y(1) = \mathbf{2.5} \\ n = 3 &\longrightarrow y(3) = x(3) + y(2) = \mathbf{1.5} \\ n = 4 &\dots \end{aligned}$$

La solució de les equacions en diferències

- Consisteix en resoldre l'**equació diferencial** (trobar $y(n) = f(n)$)
 - **Mètode directe:** Per equacions diferencials
 - **Mètode indirecte:** Mitjançant la 'transformada z'
- Mètode directe.- $y(n)$ es calcula mitjançant les seves dues components (resposta **natural** i **forçada**)

- Solució **homogènia:** $y_h(n)$, quan $x(n) = 0 \longrightarrow \sum_{k=0}^N a_k \cdot y(n-k) = 0$
- Solució **particular:** $y_p(n)$, per a l'entrada $x(n)$:

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y(n-k) = \sum_{k=0}^N b_k \cdot x(n-k), \quad a_0 = 1$$

- Solució total: $y(n) = y_h(n) + y_p(n)$

La solució homogènia $y_h(n)$

- Procediment:

- Es considera que la solució és de tipus **exponencial** ($y_h(n) = \lambda^n$) i s'obté les solucions de l'equació característica:

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y(n-k) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot \lambda^{n-k} = \lambda^{n-N} (\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + a_2 \lambda^{N-2} + \dots + a_{N-1} \lambda + a_N) = 0$$

- **N arrels:** $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$
- Solució segons la naturalesa dels coeficients a_1, a_2, \dots, a_N :
 - **Enters i reals:** $y_h(n) = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n + \dots + C_N \cdot \lambda_N^n$
 - **Ordre múltiple:** $y_h(n) = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 n \lambda_1^n + C_3 n^2 \lambda_1^n + \dots + C_m n^{m-1} \lambda_1^n + C_{m+1} \lambda_{m+1}^n + \dots + C_N \lambda_N^n$
 - **Complexes:** ...
- C_1, C_2, \dots, C_N són **coeficients de ponderació**

La solució particular $y_p(n)$

- Procediment:
 - Es la solució per a una entrada específica $x(n)$ per ($n \geq 0$) de l'equació en diferències:

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y_p(n-k) = \sum_{k=0}^N b_k \cdot x(n-k), \quad a_0 = 1$$

- Forma de $y_p(n)$ depèn de la forma de l'entrada $x(n)$

Entrada $x(n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \text{ (cnt.)} \\ A \cdot M^n \\ A \cdot n^M \\ A^n \cdot n^M \\ A \cdot \cos(\omega_0 \cdot n) \\ A \cdot \sin(\omega_0 \cdot n) \end{array} \right\}$$

Solució particular $y_p(n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} K \\ K \cdot M^n \\ K_0 \cdot n^M + K_1 \cdot n^{M-1} + \dots + K_M \\ A^n (K_0 \cdot n^M + K_1 \cdot n^{M-1} + \dots + K_M) \\ K_1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot n) + K_2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot n) \end{array} \right\}$$

Solució i resposta 'h(n)' de sistemes LTI recursius

- La solució total ($y(n) = y_h(n) + y_p(n)$) serveix per determinar els seus paràmetres constants (C_i)
- Si $x(n) = \delta(n)$, la resposta impulsional d'un sistema recursiu coincideix amb la solució de l'equació homogènia $y_h(n)$

- Demostració:

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^n b_k \cdot x(n-k) = \sum_{k=0}^n b_k \cdot \delta(n-k) = b_k \cdot u(n) = h(n)$$

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^n h(k) \cdot x(n-k) \quad , \quad n \geq 0$$

$$h(n) = y_{zs}(n)$$

Revisió de propietats dels sistemes LTI

- **Linealitat:**

- El principi de superposició s'aplica tant a la resposta forçada (y_{zs}) com natural (y_{zi})

- **Invariança temporal**

- Si els coeficients $\{a_k, b_k\}$ són **constants** o **no** depenen del temps, el sistema és invariant en el temps

- **Estabilitat**

- Totes les arrels del polinomi característic en la solució homogènia ($y_h(n)$) ha de ser **inferior a la unitat**

$$y_h(n) = h(n) = \sum_{k=1}^N C_k \cdot \lambda_k^n \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^n < \infty$$

Equacions en diferències vs. $H(z)$

- Equivalència amb en el domini z

$$x(n-a) = x(z) \cdot z^{-a}$$

- Exemple: L'acumulador

$$y(n) = x(n) + y(n-1)$$



$$y(z) \cdot z^0 = x(z) \cdot z^0 + y(z) \cdot z^{-1}$$



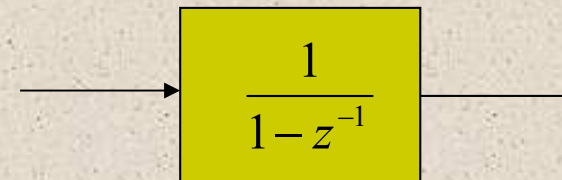
$$y(z) = x(z) + y(z) \cdot z^{-1}$$



$$H(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

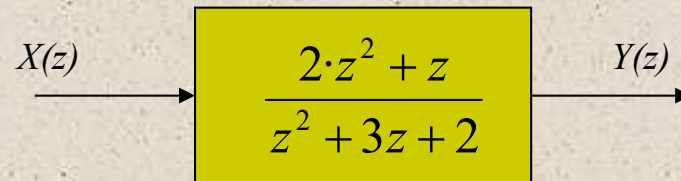


$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k}}$$



H(z) vs. Equacions en diferències

- H(z) és útil en l'anàlisi de sistemes discrets però per implementar-lo en **DSP** s'utilitzen les *equacions en diferències*.
- Exemple:



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2z^2 + z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{2 + z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

$$Y(z) \cdot (1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}) = X(z) \cdot (2 + z^{-1}) \rightarrow Y(z) + 3Y(z) \cdot z^{-1} + 2Y(z) \cdot z^{-2} = 2X(z) + X(z) \cdot z^{-1}$$

$$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = 2x(n) + x(n-1)$$

$$\boxed{y(n) = 2x(n) + x(n-1) - 3y(n-1) - 2y(n-2)} \rightarrow \text{Algorisme de càlcul}$$

Implementació software

- Exemple estructura *directa I*:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 + z^{-1}}{1 + 3 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2}}$$

$$y(n) = -3 \cdot y(n-1) - 2 \cdot y(n-2) + x(n-1) + 2 \cdot x(n)$$

- Posicions de memòria:

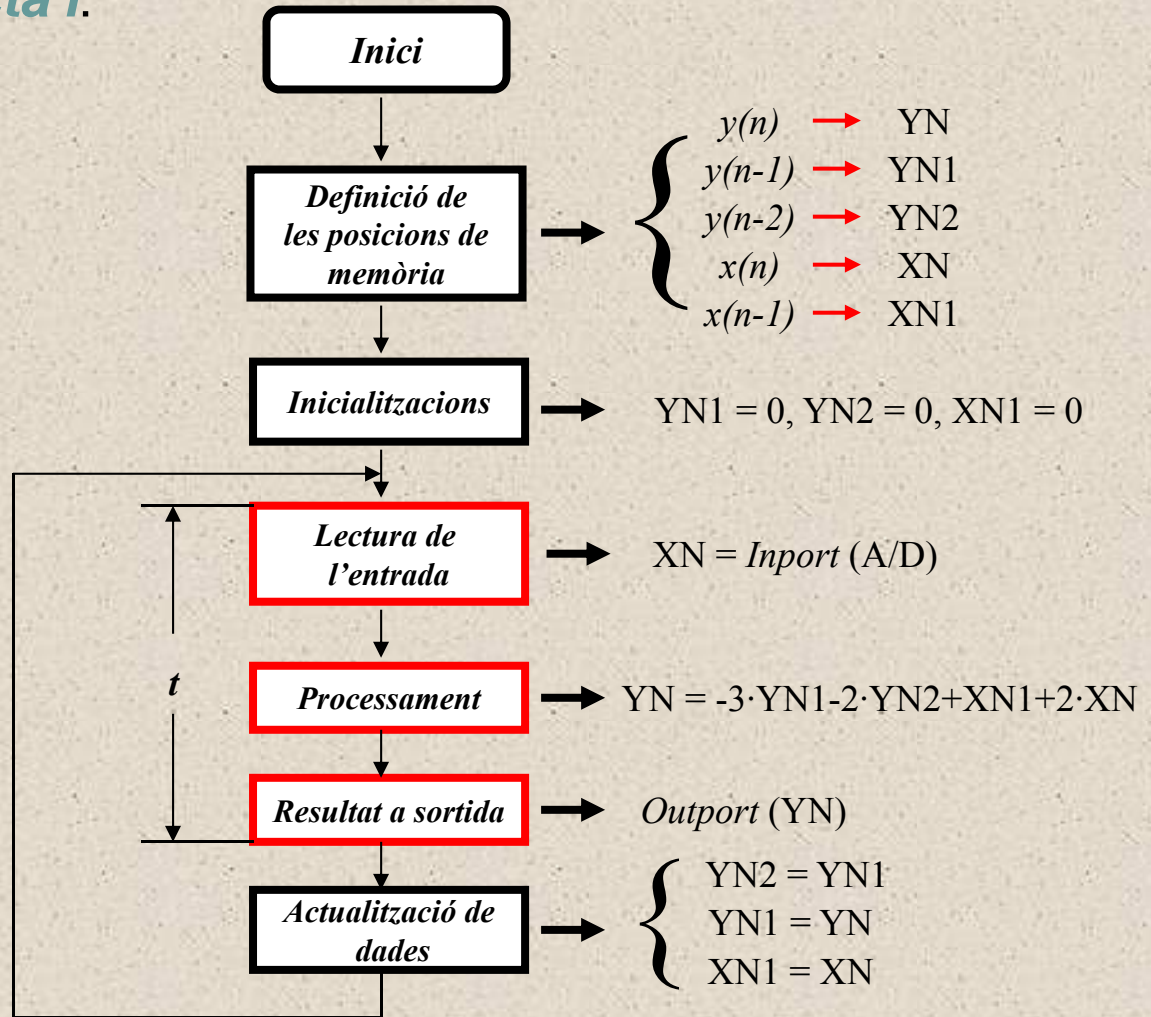
- Retards

- $y(n-1)$
- $y(n-2)$
- $x(n-1)$

- Auxiliars

- $y(n)$
- $x(n)$

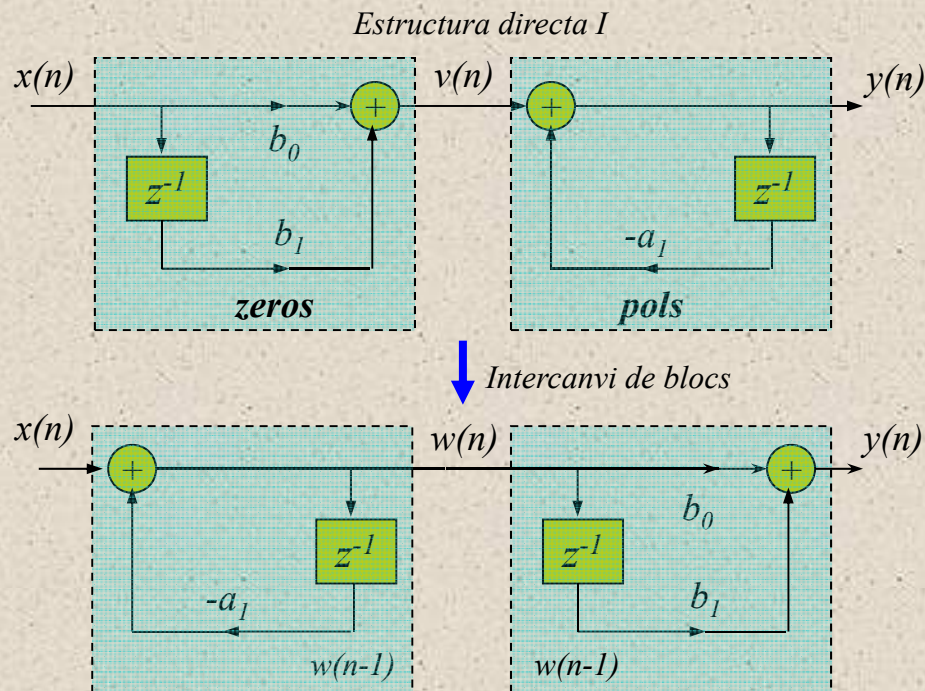
$t_{min} !!!!!$



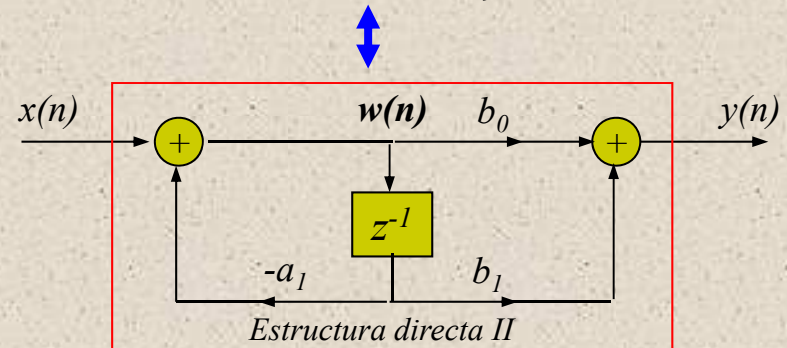
De 'Directa I' a 'Directa II'

- Sistema de primer ordre:

$$y(n) = -a_1 \cdot y(n-1) + b_0 \cdot x(n) + b_1 \cdot x(n-1)$$



$$\left. \begin{aligned} v(n) &= b_0 \cdot x(n) + b_1 \cdot x(n-1) \\ y(n) &= -a_1 \cdot y(n-1) + v(n) \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} y(n) &= b_0 \cdot w(n) + b_1 \cdot w(n-1) \\ w(n) &= -a_1 \cdot w(n-1) + x(n) \end{aligned} \right\}$$

- Segons l'estructura adoptada es poden estalviar recursos en determinades aplicacions

Directa II

- Una de les més adoptades, ja que minimitza posicions de memòria

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) = \frac{Y(z) \cdot W(z)}{W(z) \cdot X(z)}$$

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k} \quad H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^M a_k \cdot z^{-k}}$$

$$\omega(n) = -\sum_{k=1}^N a_k \cdot \omega(n-k) + x(n) = x(n) - a_1 \cdot \omega(n-1) -$$

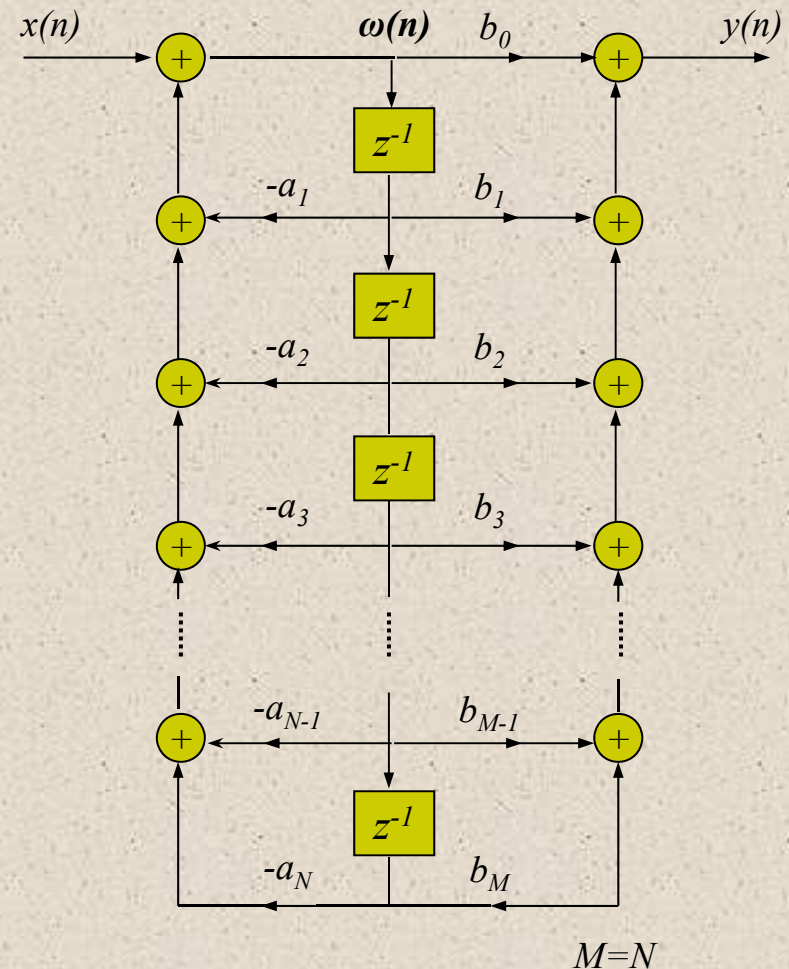
$$- a_2 \cdot \omega(n-2) - \dots - a_N \cdot \omega(n-N)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot \omega(n-k) = b_0 \cdot \omega(n) + b_1 \cdot \omega(n-1) + \dots$$

$$\dots + b_M \cdot \omega(n-M)$$

- Recursos necessaris:

- Posicions de memòria: $\max\{M, N\}$
- Sumadors: $M+N$
- Multiplicadors: $M+N+1$
- Equacions a calcular: 2



Correlació encreuada i auto-correlació

- S'utilitza per extreure informació en funció del grau de *similitud* entre dues seqüències $x(n)$ i $y(n)$ (Semblant a la convolució):

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot y(n-l) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l) \cdot y(n) = r_{yx}(-l)$$

- Autocorrelació:

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot x(n-l)$$

- Exemple:

$$x(n) = \{ \dots, 0, 0, 2, -1, 3, 7, 1, 2, -3, 0, 0, \dots \}$$

$$y(n) = \{ \dots, 0, 0, 1, -1, 2, -2, 4, 1, -2, 5, 0, 0, \dots \}$$

Per seqüències de duració finita

Correlació encreuada: $r_{xy}(l) = \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x(n) \cdot y(n-l)$

Auto-correlació: $r_{xx}(l) = \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x(n) \cdot x(n-l)$

on: $i=l, k=0$ per $l \geq 0$
 $i=0, k=l$ per $l < 0$

Solució:

$$r_{xy}(l) = \{ 10, -9, 19, 36, -14, 33, 0, 7, 13, -18, 16, -7, 5, 3 \}$$

Propietats de la correlació i auto-correlació

- Si dues seqüències $x(n)$ i $y(n)$ presenten energia finita E_x i E_y respectivament, la correlació encreuada verifica que:

$$|r_{xy}(l)| \leq \sqrt{r_{xx}(0) \cdot r_{yy}(0)} = \sqrt{E_x \cdot E_y}$$

- En el cas de que $x(n) = y(n)$, $|r_{xx}(l)| \leq r_{xx}(0) = E_x$
- Normalitzant la correlació, s'eviten problemes d'escalat a les seqüències d'entrada, doncs manté la integritat de les formes d'ona.
- Correlació encreuada i auto-correlació normalitzada

$$\rho_{xx}(l) = \frac{r_{xx}(l)}{r_{xx}(0)} \quad \rho_{xy}(l) = \frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{r_{xx}(0) \cdot r_{yy}(0)}}$$

- Exemple - Determineu la següent auto-correlació: $\begin{cases} x(n) = a^n \cdot u(n) \\ 0 < a < 1 \end{cases}$

$$r_{xx}(l) = \frac{1}{1-a^2} \cdot a^{|l|}, \quad -\infty < l < \infty$$

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{1-a^2}$$

$$\rho_{xx}(l) = a^{|l|}$$

Correlació en senyals periòdics

- Donat $y(n)=x(n)+\omega(n)$, on $x(n)$ és una seqüència N -periòdica i $\omega(n)$ representa una interferència aditiva.
- Es consideren M mostres de $y(n)$: $y(n) = 0$ per $n < 0$ i per $n \geq M$, i es normalitza per un factor $1/M$.

$$r_{yy}(l) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} y(n) \cdot y(n-l) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} [x(n) + \omega(n)] \cdot [x(n-l) + \omega(n-l)] =$$

$$= r_{xx}(l) + r_{x\omega}(l) + r_{\omega x}(l) + r_{\omega\omega}(l)$$

- Pic en $l = 0$ que s'esvaeix molt ràpidament

- Correlacions creuades pràcticament nul·les tenint en compte que no hi ha relació entre senyal i soroll

- Presenta pics periòdics en $l = 0, 2N, 4N, \dots$; que decreixen a mesura que $l \approx M$.

Selecció de l : $l < M/2$

- La correlació permet detectar senyals periòdics $x(n)$ immersos en soroll $\omega(n)$ i identificar el període

Correlació i sistemes LTI

- Hem vist que amb la resposta impulsional, la sortida d'un sistema LTI es determina mitjançant la convolució:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)$$

- De la mateixa manera, es pot determinar la correlació entrada-sortida mitjançant l'autocorrelació d'entrada:

$$r_{yx}(l) = h(l) * r_{xx}(l)$$
$$r_{xy}(l) = h(-l) * r_{xx}(l)$$

- Si el sistema de la resposta impulsional $h(n)$ és estable, llavors existeix $r_{hh}(l)$ i, per tant, es pot determinar l'autocorrelació de sortida

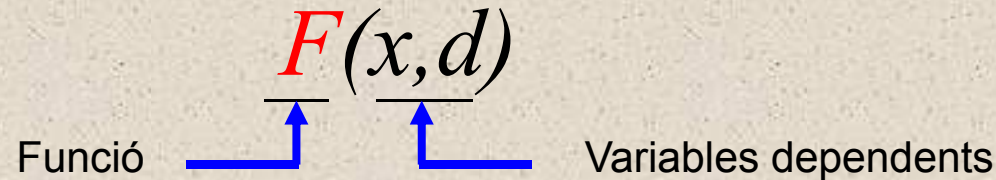
$$r_{yy}(l) = r_{hh}(l) * r_{xx}(l)$$
$$r_{yy}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{hh}(k) * r_{xx}(k)$$

Filtres analògics i digitals (FEAD)

***Anàlisi Freqüencial dels
senyals i sistemes digitals***

Convencions utilitzades

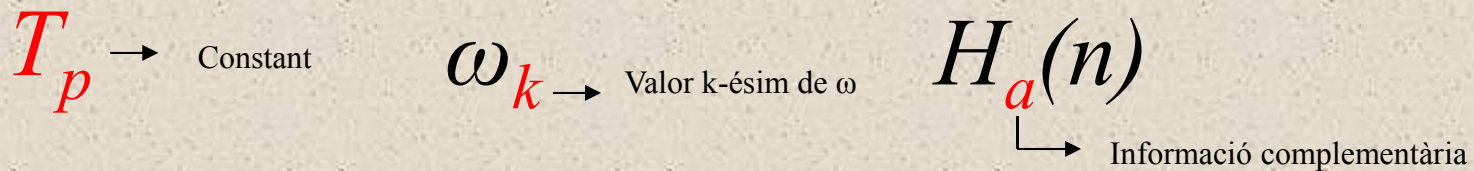
- **Minúscules:** Funcions dels dominis analògic i/o digital.
- **Majúscules:** Funcions transformades



- **Variables i expressions:**

	<u>Analògic</u>	<u>Digital</u>		<u>Temps</u>	<u>Freqüències</u>
Temps	t	n	Funció de transferència	$h(n), h(t)$ <i>Resp. impulsional</i>	$H(s), H(z)$ <i>Resp. Freqüencial</i>
Freqüència	F	f			
Freqüència angular	Ω	ω	Senyals	$x_c(t), x_d(n)$ <i>Representació temporal</i>	$H(s), H(z)$ <i>Representació Freqüencial</i>

- **Constants i Paràmetres:**



Principi bàsic del anàlisi freqüencial

- **Senyals periòdiques:** Sèrie de Fourier

- Síntesi

Analògic (Continu)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi \cdot F_0 \cdot t}$$

Digital (Discret)

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j2\pi \cdot k \cdot n/N}$$

- Anàlisi

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot k \cdot F_0 \cdot t} dt$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot k \cdot n/N}$$

- **Senyals aperiòdiques:** Transformada de Fourier

- T. Inversa

Síntesi de senyals

Analògic (Continu)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot F \cdot t} dF$$

Digital (Discret)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot n} d\omega$$

- T. Directa

Anàlisi de senyals

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot F \cdot t} dt$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot n}$$



Consideracions sobre Fourier

- **Analògic:**

- F_0 correspon a la freqüència d'oscil·lació ($1/T_0$), i $k \in I[-\infty, \infty]$
- Existeixen altres formes de representació per senyals reals:

- **1)**
$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot F_0 \cdot t) - b_k \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot F_0 \cdot t))$$

$$a_0 = c_0$$
$$a_k = 2 \cdot |c_k| \cdot \cos \theta_k$$
$$b_k = 2 \cdot |c_k| \cdot \sin \theta_k$$
$$|c_k| = \sqrt{(\operatorname{Re}(c_k))^2 + (\operatorname{Im}(c_k))^2}$$
$$\theta_k = \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{Im}(c_k)}{\operatorname{Re}(c_k)} \right)$$

- **2)**
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot t) + b_n \sin(n \cdot t))$$

$$a_n = \frac{2}{T_P} \int_{T_P} x(t) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot n \cdot \pi \cdot t}{T_P}\right) \quad b_n = \frac{2}{T_P} \int_{T_P} x(t) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot n \cdot \pi \cdot t}{T_P}\right)$$

$$n \in I[0, \infty]$$

Consideracions sobre Fourier (Cont)

- **Digital:**

- $n \in I[1, N]$. N és el nombre d'elements de $x(n)$
- L'equivalent a F al domini digital és $k/N = f$
- Existeix un altra representació de la transformada de Fourier discreta mitjançant la freqüència angular: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

- **T. Inversa**
Reconstrucció de senyals

$$x(n) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{j \cdot \omega \cdot n} d\omega$$

- **T. Directa**
Dexcomposició de senyals

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot n}$$

- **Comuns als dos dominis:**

- Les condicions de *Dirichlet* garanteixen l'existència de la transformada i la convergència de la sèrie de Fourier a $x(t)$
 - *Discontinuitat, màxims/mínims, integrabilitat*



Relació de Parseval. Densitat Espectral

- **Senyals periòdics** són senyals de **potència**

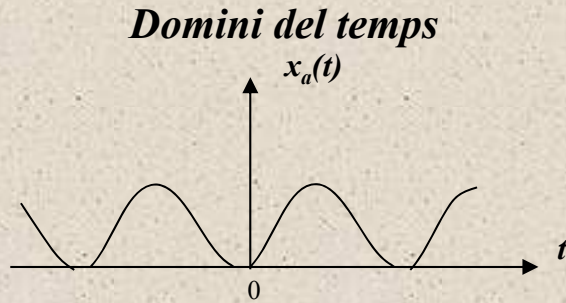
	Analògic (Continu)	Digital (Discret)
<i>Relació de Parseval</i>	$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k ^2$	$P_x = \sum_{k=0}^{N-1} c_k ^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) ^2$
<i>Densitat espectral de potència</i>	$ c_k ^2 = \frac{ x(t) ^2}{T_0}$	$ c_k ^2 = \frac{ x(n) ^2}{N}$

- **Senyals aperiòdics** són senyals d'**energia**

	Analògic (Continu)	Digital (Discret)
<i>Relació de Parseval</i>	$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) ^2 dF$	$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) ^2 dF$
<i>Densitat espectral d'energia</i>	$ X(F) ^2$	$ X(\omega) ^2$

Espectre de senyals en temps continu

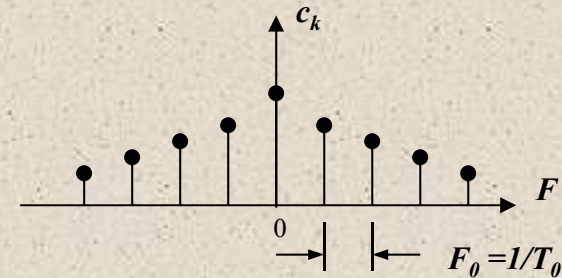
Senyals periòdics
Sèries de Fourier



$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot F_0 \cdot t} dt$$

Continues i periòdiques

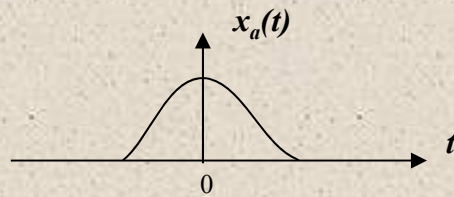
Domini de la freqüència



$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot F_0 \cdot t}$$

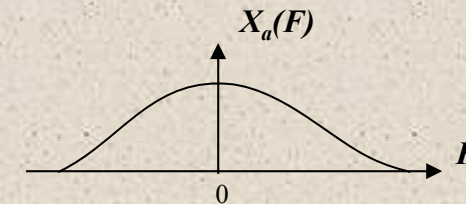
Discretes i aperiòdiques

Senyals aperiòdics
Transformades de Fourier



$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot F \cdot t} dt$$

Continues i aperiòdiques



$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot F \cdot t} dF$$

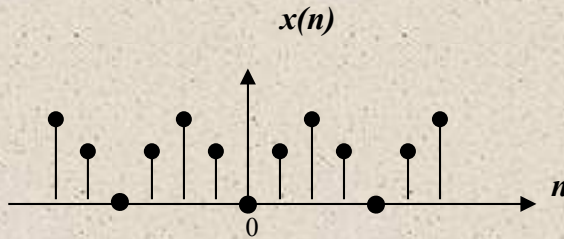
Continues i aperiòdiques



Espectre de senyals en temps discret

Senyals periòdics
Sèries de Fourier

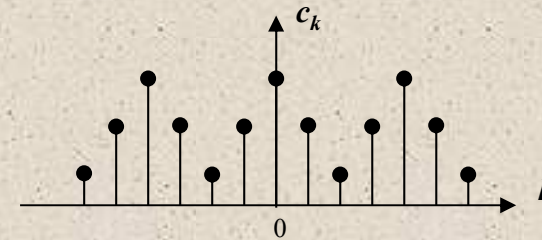
Domini del temps



$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot n / N}$$

Discretas i periòdiques

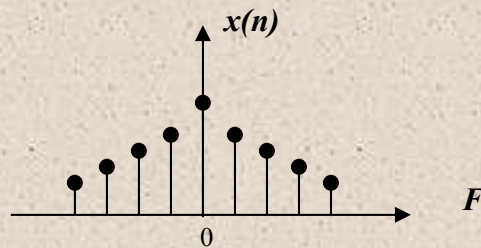
Domini de la freqüència



$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j 2 \cdot \pi \cdot k \cdot n / N}$$

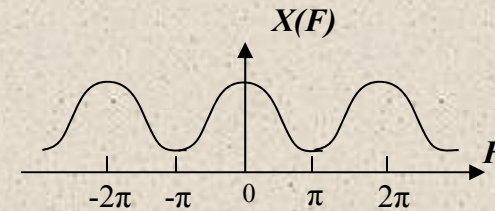
Discretas i periòdiques

Senyals aperiòdics
Transformades de Fourier



$$X(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j \omega \cdot n}$$

Discretas i aperiòdiques



$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(F) \cdot e^{j 2 \pi \cdot F \cdot n} \cdot dF$$

Continues i periòdiques



Dualitats sobre l'espectre

- Senyals en temps **continu** presenten un espectre en freqüència **aperiòdic** (Mai es donarà aquest cas. Tot senyal analògic s'ha de convertir a digital per ser processat amb un ordinador)
- Senyals **discretes*** presenten un espectre en freqüència **periòdic** (L'espectre sempre serà periòdic)
- Senyals **periòdiques** presenten espectres freqüencials **discrets** (Mai es pot donar aquest cas. Això requeriria tenir memòria infinita per l'adquisició ja que $n \rightarrow \infty$)
- Senyals **aperiòdiques*** d'energia finita presenten espectres freqüencials **continus** (L'espectre només es pot determinar en temps discret → Pèrdua de resolució freqüencial en el càlcul !!)

*Casos que es donen a la pràctica



Fourier vs. Transformada 'z'

- Transformada z de $x(n)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n} \quad \text{ROC: } r_2 < |z| < r_1$$

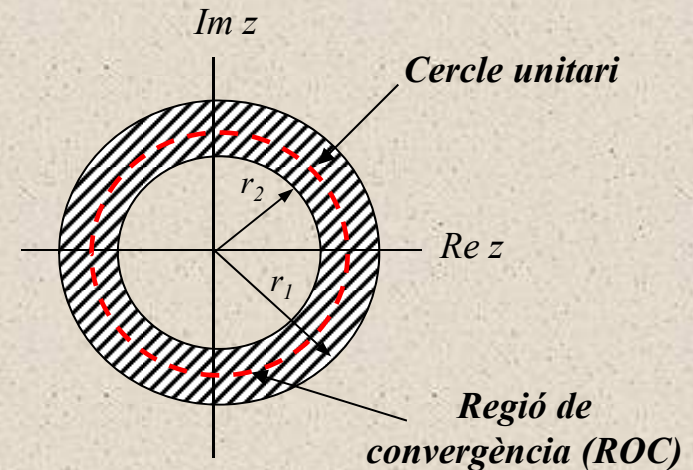
- Com que, $z = r \cdot e^{j\omega}$ ($|z|=r$, $\omega \cong z$)

$$X(z) \Big|_{z=r \cdot e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n) \cdot r^{-n}] e^{-j\omega \cdot n}$$

- Si $|z|=1$, $X(z)$ també és la Transformada de Fourier

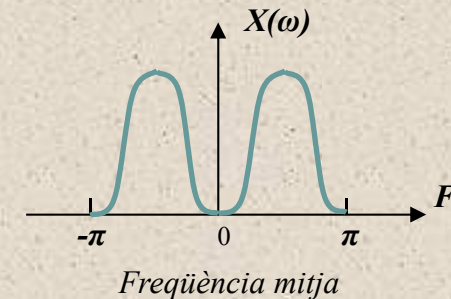
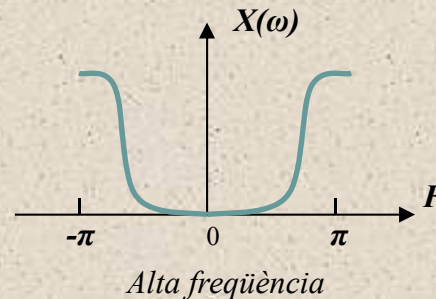
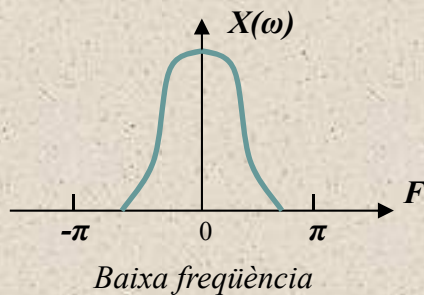
$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \equiv X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega \cdot n}$$

- Si la regió de convergència de la transformada 'z' conté el cercle unitari, existeix la transformada de Fourier



Els senyals en el domini de la freqüència

- Es classifiquen segons tinguin **concentrat** la seva densitat espectral de potència (o energia):



- Altres conceptes qualitius sobre la freqüència:
 - Ample de banda:** Rang de l'espectre on es concentra el 95% de la potència (energia) del senyal ($F_1 < F < F_2$). $B = F_2 - F_1$
 - Banda estreta:** Quan l'ample de banda es molt petit. $B \approx 10\% F_c$.
 $F_c = (F_2 + F_1)/2$
 - Banda limitada:** Quan l'espectre és nul fora del rang de freqüències.
 $|F| \geq B$.

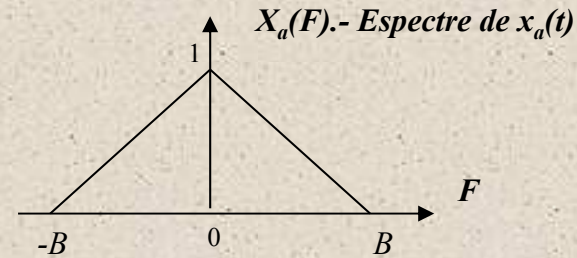
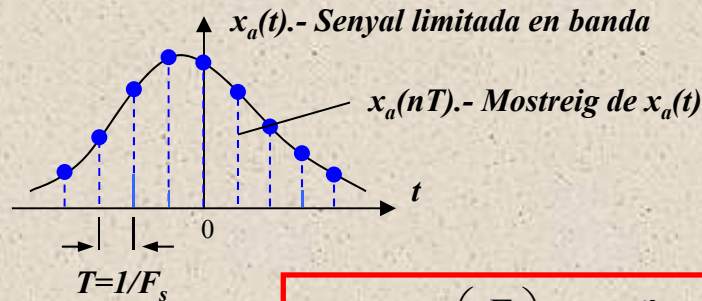
Els rangs d'alguns senyals d'interès

- A la pràctica, aquestes tècniques s'utilitzen per *extreure i processar informació* segons l'àmbit d'aplicació

Tipus de senyal	Rang de Freq. (Hz)	Longitud d'ona (λ)
Senyals biològics		
- Electroretinograma	0-20	
- Electronistagmograma	0-20	
- Neumograma	0-40	
- Electrocardiograma (ECG)	0-100	
- Electroencefalograma (EEG)	10-200	
- Veu	100-4000	
Senyals Electromagnètics		
- Radiodifusió	$3 \cdot 10^4$ - $3 \cdot 10^6$	10^4 - 10^2
- Longitud d'ona curta	$3 \cdot 10^6$ - $3 \cdot 10^{10}$	10^2 - $3 \cdot 10^{-2}$
- Radar, comunicacions per satèl·lit o especcials		
Enllaços microones	$3 \cdot 10^8$ - $3 \cdot 10^{10}$	1 - 10^{-2}
- Infraroig	$3 \cdot 10^{11}$ - $3 \cdot 10^{14}$	10^{-3} - $3 \cdot 10^{-6}$
- Llum visible	$3.7 \cdot 10^{14}$ - $7.7 \cdot 10^{14}$	$3.9 \cdot 10^{-7}$ - $8.1 \cdot 10^{-7}$
- Ultravioleta	$3 \cdot 10^{15}$ - $3 \cdot 10^{16}$	10^{-7} - 10^{-8}
- Rajos Gamma i rajos X	$3 \cdot 10^{17}$ - $3 \cdot 10^{18}$	10^{-9} - 10^{-10}
Senyals sísmiques		
Vent	100-1000	
Exploració sísmica	10-100	
Terratrèmols i explosions nuclears	0.01-10	
Soroll sísmic	0.1-1	



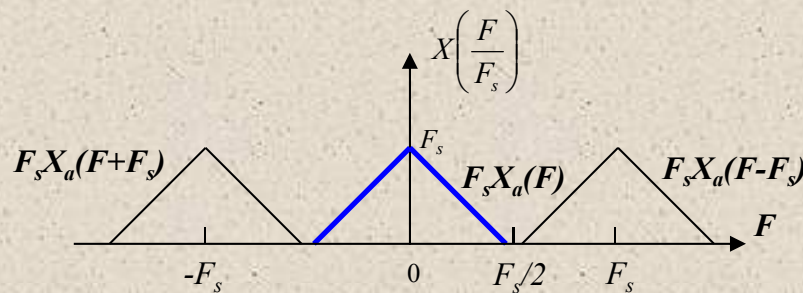
Revisió del teorema de mostreig



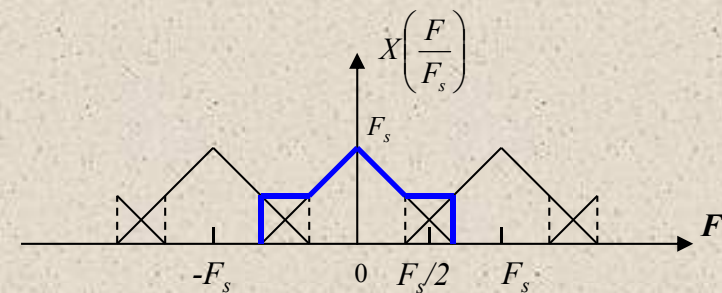
• Si $F_s \geq 2 \cdot B$

$$X(f) = X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - k \cdot F_s)$$

• Si $F_s < 2 \cdot B$



Reproducció del senyal original és **POSSIBLE**



Soroll provocat per l' 'aliasing'

IMPOSSIBLE recuperar el senyal original de manera exacta

Revisió del teorema de mostreig (cont)

- **Teorema**

- *Un senyal analògic de banda limitada B es pot recuperar a partir de la seva versió digital sempre que $F_s \geq 2B$*

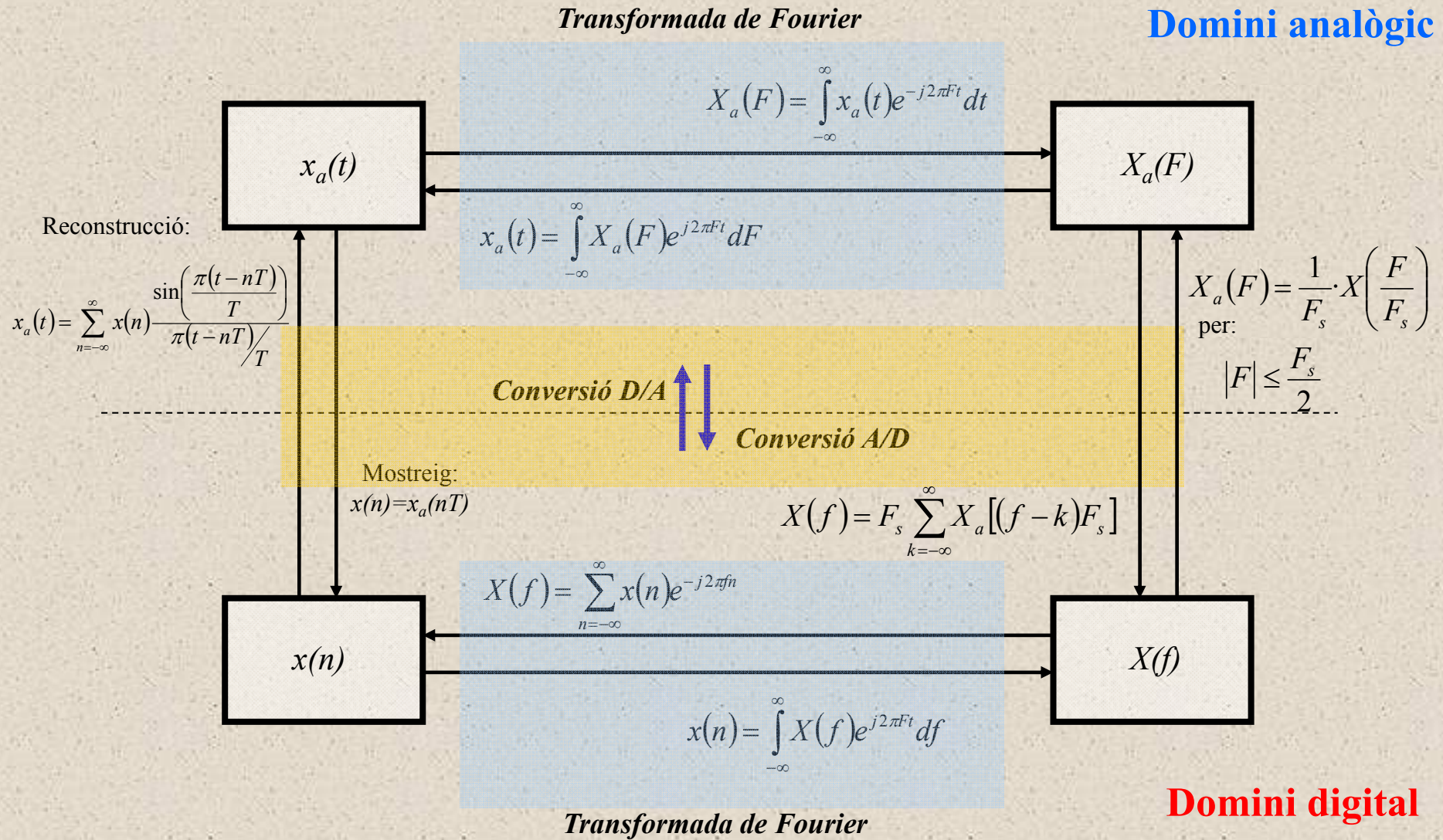
- **Procediment de recuperació**

$$X_a(F) = \begin{cases} \frac{1}{F_s} X\left(\frac{F}{F_s}\right), & |F| \leq F_s/2 \\ 0, & |F| > F_s/2 \end{cases} \quad \text{on:} \quad X\left(\frac{F}{F_s}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot F \cdot n / F_s}$$
$$\text{Llavors: } x_a(t) = \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot F \cdot t} dF = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right)}{(\pi/T)(t - nT)}$$

- **Consideracions addicionals**

- En la pràctica, es sol **filtrar** el senyal analògic prèviament a la conversió A/D per prevenir l'**aliasing**
- Teòricament, el mètode de reconstrucció requereix processar infinites mostres ($n=\infty$). No obstant, la majoria de senyals pràctics tenen duració finita.

Resum general



Transformada de Fourier. Propietats

- **Aplicat als senyals digitals:** Propietats de simetria
 - Senyals reals, parell, imparell i complexes
- **Aplicat als sistemes digitals**
 - Linealitat
 - Reflexió i desplaçament temporal
 - Desplaçament i diferenciació freqüencial
 - Convolució
 - Correlació
 - Wiener-Khintchine
 - Modulació
 - Parseval
 - Enfinestrat



Simetria

Secuencia ↔ *Transf. Fourier*

En general

$x(n)$	$X(\omega)$
$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
$x_R(n)$	$X_e(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega) + X^*(\omega)]$
$j \cdot x_I(n)$	$X_o(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega) - X^*(\omega)]$
$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$	$X_R(\omega)$
$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$	$j \cdot X_I(\omega)$

Nomès senyals reals

Qualsevol senyal real

$x(n)$

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= X^*(-\omega) \\
 X_R(\omega) &= X_R(-\omega) \\
 X_I(\omega) &= -X_I(-\omega) \\
 |X(\omega)| &= |X(-\omega)| \\
 \angle X(\omega) &= -\angle X(-\omega)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_e(n) &= \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] \\
 &\text{(real i parell)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_R(\omega) & \\
 &\text{(Real i parell)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_o(n) &= \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)] \\
 &\text{(real i imparell)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j \cdot X_I(\omega) & \\
 &\text{(Imaginari i imparell)}
 \end{aligned}$$

Notació:

$$x(n) = x_R(n) + j \cdot x_I(n)$$

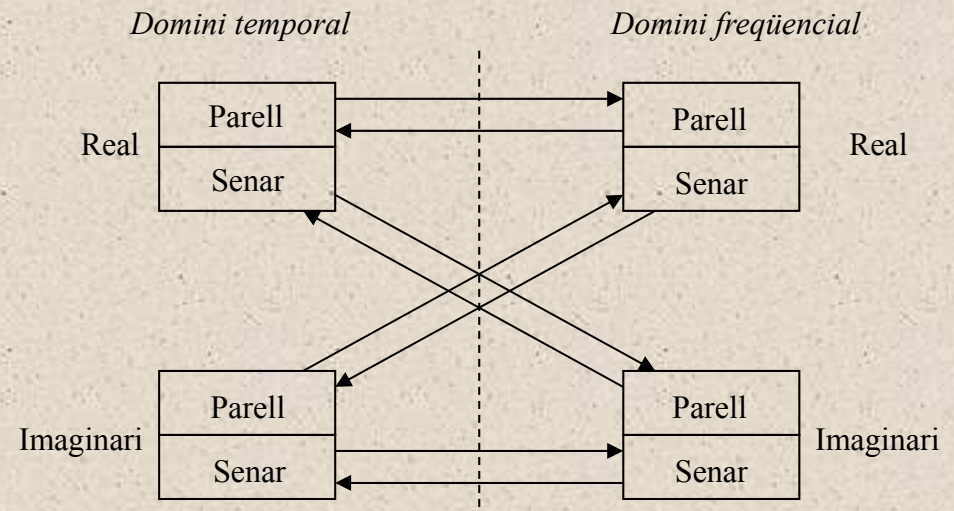
$$x^*(n) = x_R(n) - j \cdot x_I(n)$$

$$X(\omega) = X_R(\omega) + j \cdot X_I(\omega)$$

$$X^*(\omega) = X_R(\omega) - j \cdot X_I(\omega)$$

$$|X(\omega)| = \sqrt{X_R^2(\omega) + X_I^2(\omega)}$$

$$\angle X(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{X_I(\omega)}{X_R(\omega)} \right)$$



Teoremes importants

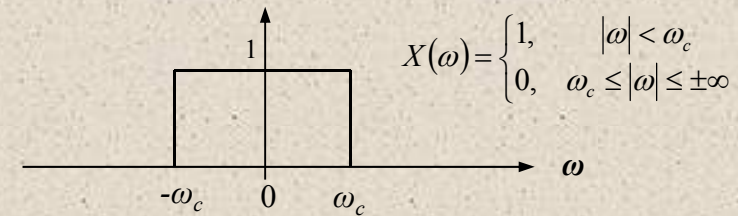
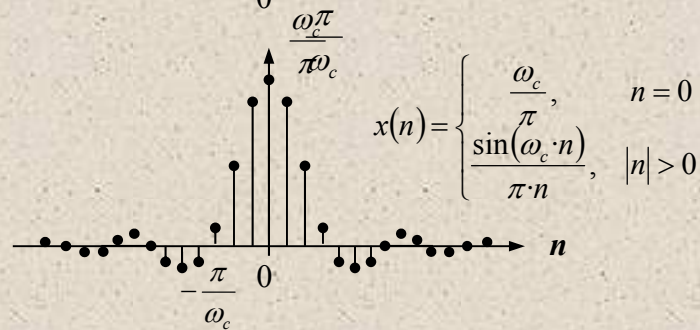
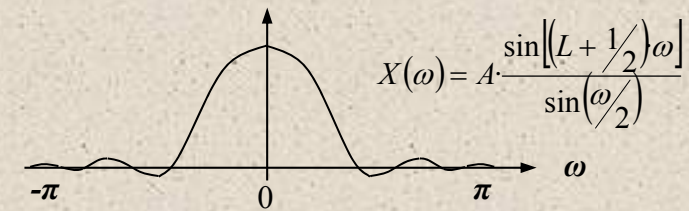
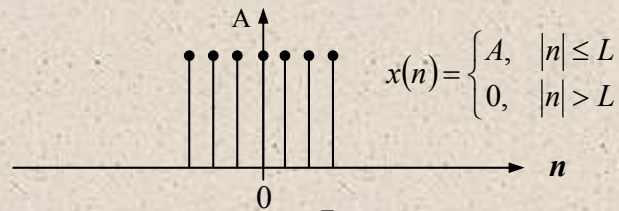
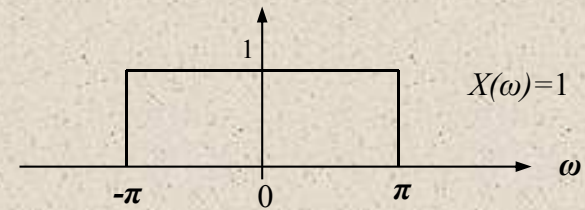
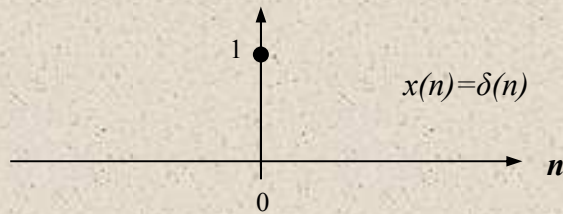
<i>Propietat/Teorema</i>	<i>Domini temporal</i>	<i>Domini freqüencial</i>
<i>Notació</i>	$x(n)$	$X(\omega)$
	$x_1(n)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(n)$	$X_2(\omega)$
<i>Linealitat</i>	$a_1 \cdot x_1(n) + a_2 \cdot x_2(n)$	$a_1 \cdot X_1(\omega) + a_2 \cdot X_2(\omega)$
<i>Desplaçament temporal</i>	$x(n-k)$	$e^{-j \cdot \omega \cdot k} \cdot X(\omega)$
<i>Reflexió temporal</i>	$x(-n)$	$X(-\omega)$
<i>Convolució</i>	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$
<i>Correlació</i>	$r_{x_1 x_2}(l) = x_1(l) \cdot x_2(-l)$	$S_{x_1 x_2}(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_2(-\omega) =$ $= X_1(\omega) \cdot X_2^*(\omega)$ si $x_2(n)$ es real
<i>Wiener-Khintchine</i>	$r_{xx}(l)$	$S_{xx}(\omega)$
<i>Desplaçament freqüencial</i>	$e^{j \cdot \omega_0 \cdot n} \cdot x(n)$	$X(\omega - \omega_0)$
<i>Modulació</i>	$x(n) \cdot \cos(\omega_0 \cdot n)$	$\frac{1}{2} \cdot X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} \cdot X(\omega - \omega_0)$
<i>Multiplicació</i>	$x_1(n) \cdot x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda) \cdot X_2(\omega - \lambda) d\lambda$
<i>Dif. Domini freqüencial</i>	$n \cdot x(n)$	$j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$
<i>Conjugació</i>	$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
<i>Parseval</i>	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \cdot x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega) \cdot X_2^*(\omega) d\omega$	



Transformades aperiòdiques útils

Senyal $x(n)$

Espectre $X(\omega)$



$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$$

El terme $e^{j\omega n}$ i la resposta en freqüència

- $e^{j\omega n}$ es la **autofunció** (*eigenfunction*) de molts sistemes LTI i senyals que s'utilitzen a la pràctica:

- Si $x(n) = A \cdot e^{j\omega n}$ per $\forall n \in I[-\infty, \infty]$, la resposta impulsional s'expressa:

$$\left. \begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot A \cdot e^{j\omega(n-k)} \\ H(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot e^{-j\omega k} \end{aligned} \right\} \longrightarrow y(n) = \underbrace{A \cdot H(\omega)}_{\text{Valor propi}} \cdot \underbrace{e^{j\omega n}}_{\text{Autofunció}}$$

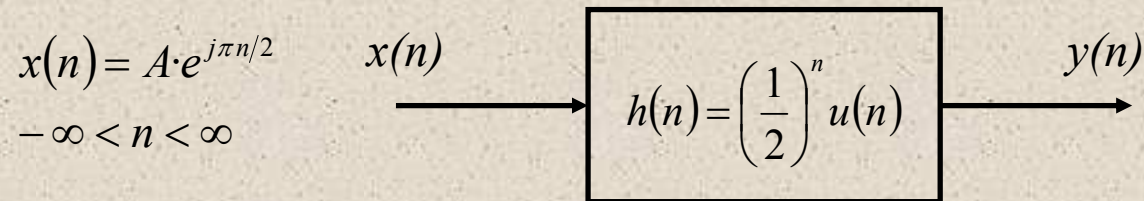
- L'**autofunció** $e^{j\omega n}$ provoca una sortida igual a l'entrada que difereix en un **factor multiplicatiu** (H) "avaluat" en el domini de la freqüència ω
- Cada component freqüencial de $x(n)$ és avaluada pel seu valor propi

$$x(n) = \sum_k \alpha_k \cdot e^{j\omega_k n} \qquad y(n) = \sum_k \alpha_k \cdot H(\omega_k) \cdot e^{j\omega_k n}$$

$H(\omega)$ → **Resposta en freqüència**

Exemple I. Bàsic

- Determinar la seqüència de sortida $y(n)$ del següent sistema:



- Solució

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

- Per $\omega = \pi/2$

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 - j\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j26.6^\circ}$$

$$y(n) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot A \cdot e^{j(\pi n/2 - 26.6^\circ)}$$

Escalat d'entrada: **$2/5^{1/2}$**
Desplaçament de fase: **-26.6°**

- Per $\omega = \pi$

$$H(\pi) = \frac{1}{1 - e^{-j\pi}} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

$$y(n) = \frac{2}{3} \cdot A \cdot e^{j(\pi n/2)}$$

Escalat d'entrada: **$2/3$**
Desplaçament de fase: **0°**

Resposta a una $x(n)$ de vàries components

- Exemple: Determineu la resposta $y(n)$ del sistema anterior a la següent entrada

$$x(n) = 10 - 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 20 \cdot \cos(\pi \cdot n) \quad -\infty < n < \infty$$

- Solució:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

- Per $\omega = 0$ $\rightarrow H(0) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

- Per $\omega = \pi/2$ $\rightarrow H(\pi/2) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot e^{-j26.6^\circ}$

- Per $\omega = \pi$ $\rightarrow H(\pi) = \frac{2}{3}$

$$y(n) = 10 \cdot H(0) - 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cdot H\left(\frac{\pi}{2}\right) + 20 \cdot \cos(\pi \cdot n) \cdot H(\pi) = 20 - \frac{10}{\sqrt{5}} \sin\left(\frac{\pi}{2}n - 26.6^\circ\right) + \frac{40}{3} \cos(\pi \cdot n)$$

Relacions pràctiques importants

- $H(\omega)$ correspon a la transformada de Fourier de la resposta impulsional $h(n)$

$$T. Directa \rightarrow H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad T. Inversa \rightarrow h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega k} d\omega$$

- En termes de freqüència, sovint, resulta més còmode parlar d'**amplificació - atenuació** ($|H(\omega)| > 1$, $|H(\omega)| < 1$) i **fase**

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n} = H_R(\omega) + j \cdot H_I(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{j\Theta(\omega)}$$

Representació *cartesiana*

$$H_R(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot \cos(\omega k) \rightarrow \text{Part real de } H(\omega)$$

$$H_I(\omega) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot \sin(\omega k) \rightarrow \text{Part imaginària de } H(\omega)$$

Representació *polar*

$$|H(\omega)| = \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)} \rightarrow \text{Mòdul}$$

$$\Theta(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)} \right) \rightarrow \text{Fase}$$



Relacions pràctiques importants (cont.)

- Si $x(n)$ està formada per una combinació arbitrària i lineal de **sinusoides**:

$$x(n) = \sum_{i=1}^L A_i \cdot \cos(\omega_i \cdot n + \phi_i) \quad -\infty < n < \infty$$

on $\{A_i\}$ i $\{\phi_i\}$ corresponen a la magnitud i fase, respectivament, de la component i -èsima de les sinusoides d'entrada, llavors, tenim que la sortida és:

$$y(n) = \sum_{i=1}^L A_i \cdot |H_i(\omega_i)| \cos[\omega_i \cdot n + \phi_i + \Theta(\omega_i)]$$

on $H(\omega_i)$ i $\{\Theta_i\}$ pertanyen a la resposta en magnitud i fase de cada component i -èsima sinusoidal d'entrada

- La relació estableix el principi bàsic de funcionament dels **filtres**, on certes components sinusoidals s'anul·len ($H(\omega_i) = 0$), mentre que d'altres es deixen passar (o s'amplifiquen) a la sortida ($H(\omega_i) \geq 1$).
- Aquest problema de disseny consisteix en trobar els paràmetres) de **l'equació en diferències** ($a_0, \dots, a_N; b_0, \dots, b_M$) que, precisament, estableixen aquestes característiques de $H(\omega_i)$

Disseny de sistemes LTI

- Donat el següent sistema LTI:

$$y(n) = a \cdot y(n-1) + b \cdot x(n) \quad 0 < a < 1$$

- Determineu:
 - 1.- El Mòdul i la fase del sistema $H(\omega)$.
 - 2.- El paràmetre b per tal de que el valor màxim de $H(\omega)$ sigui la unitat. Dibuixeu $|H(\omega)|$ i $\Theta(\omega)$ per $a = 0.9$
 - 3.- La sortida del sistema per la següent entrada

$$x(n) = 5 + 12 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) - 20 \cdot \cos\left(\pi \cdot n + \frac{\pi}{4}\right)$$

Disseny de sistemes LTI (cont.)

- Solució:
 - 1.- Mòdul i fase:

$$h(n) = b \cdot a^n \cdot u(n) \quad \rightarrow \quad H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega \cdot n} = \frac{b}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$$

donat que: $1 - a \cdot e^{-j\omega} = (1 - a \cdot \cos(\omega)) + j \cdot a \cdot \sin(\omega)$,

$$|1 - a \cdot e^{-j\omega}| = \sqrt{[1 - a \cdot \cos(\omega)]^2 + [a \cdot \sin(\omega)]^2} = \sqrt{1 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \cos(\omega)}$$

$$\angle(1 - a \cdot e^{-j\omega}) = \tan^{-1}\left(\frac{a \cdot \sin(\omega)}{1 - a \cdot \cos(\omega)}\right)$$

Per tant:

$$|H(\omega)| = \frac{|b|}{\sqrt{1 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \cos(\omega)}}$$

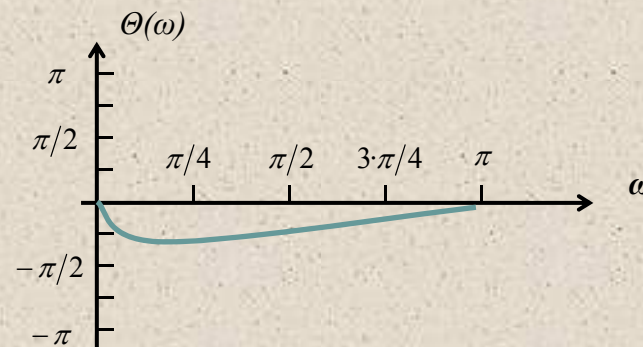
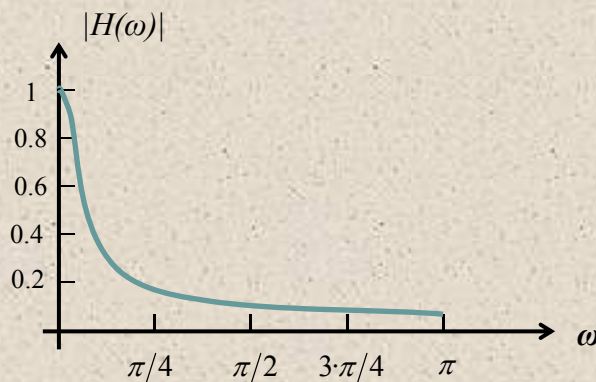
$$\angle H(\omega) = \Theta(\omega) = \angle \left[b - \tan^{-1}\left(\frac{a \cdot \sin(\omega)}{1 - a \cdot \cos(\omega)}\right) \right]$$

Disseny de sistemes LTI (cont II)

- Solució (cont.):
 - 2.- Resposta de $|H(\omega)|$ i $\Theta(\omega)$

Com que a és positiu, $|H(\omega)|$ és màxim quan $\omega = 0$. Això implica que:

$$|H(0)| = \frac{|b|}{1-a} = 1 \quad \rightarrow \quad b = \pm(1-a) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} |H(\omega)| = \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2-2a\cos(\omega)}} \\ \Theta(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{a\sin(\omega)}{(1-a)\cos(\omega)}\right) \end{cases}$$



Disseny de sistemes LTI (cont III)

- Solució (cont.II):

- 3.- Sortida del sistema $y(n)$

- Per $\omega = 0$, $\rightarrow |H(0)| = 1 \quad \Theta(0) = 0$

- Per $\omega = \pi/2$, $\rightarrow \left|H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2}} = 0.074 \quad \Theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\tan^{-1} a = -42^\circ$

- Per $\omega = \pi$, $\rightarrow |H(\pi)| = \frac{1-a}{1+a} = 0.053 \quad \Theta(\pi) = 0$

$$\begin{aligned} y(n) &= 5 \cdot |H(0)| + 12 \cdot \left|H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2}n + \Theta\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - 20 \cdot |H(\pi)| \cos\left[\pi \cdot n + \frac{\pi}{4} + \Theta(\pi)\right] = \\ &= 5 + 0.888 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}n - 42^\circ\right) - 1.06 \cos\left(\pi \cdot n + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Resposta transitòria

- La resposta freqüencial $H(\omega)$ determina la sortida d'un sistema estable per entrades exponencials (sinusoïdals) en el rang: $-\infty < n < \infty$.
(Teòricament, la sortida **no conté component transitòria**)
- A la pràctica, a més existeix un **transitori que s'esvaeix amb el temps**, ja que $x(n)$ s'aplica al sistema a un temps determinat ($n = n_0$)

- Si:
$$\begin{cases} y(n) = a \cdot y(n-1) + x(n) = a^{n+1} y(-1) + \sum_{k=0}^n a^k x(n-k), & |a| < 1, n \geq 0 \\ x(n) = A \cdot e^{j\omega n} & n \geq 0 \end{cases}$$

$$y_{tr}(n) = a^{n+1} y(-1) - \frac{A \cdot a^{n+1} e^{-j\omega(n+1)}}{1 - a \cdot e^{-j\omega}} \cdot e^{-j\omega n} \quad \longrightarrow \quad \text{Resposta transitòria}$$

$$y_{ss}(n) = \frac{A}{1 - a \cdot e^{-j\omega}} \cdot e^{-j\omega n} = A \cdot H(\omega) \cdot e^{j\omega n} \quad \longrightarrow \quad \text{Regim permanent}$$

- Els transitoris només es consideren quan la *integritat* d'algun component del sistema pot quedar afectada

Resposta a entrades N-periòdiques

- Si la descomposició en sèrie de Fourier de senyals periòdics es representa com:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot n / N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ -\infty < n < \infty$$

- La sortida és:

$$\left. \begin{aligned} y(n) &= H(\omega) \cdot x(n) \\ \omega &= \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N} \end{aligned} \right\} \boxed{y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot H\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N}\right) e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot n / N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1}$$

- La sortida canvia respecte a **la forma** del senyal d'entrada però **manté la seva periodicitat**

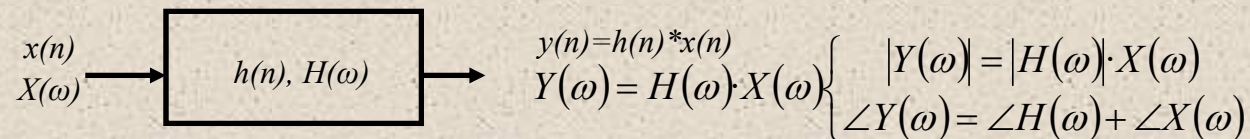
$$d_k \equiv c_k \cdot H\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N}\right) \longrightarrow \text{Escalat d'amplitud i desplaçament de fase en els coeficients}$$

d_k - Coeficients de Fourier de $y(n)$



Resposta a entrades aperiòdiques

- Senyals d'entrada aperiòdiques d'energia finita presenten **espectres freqüencials continus**, on el mòdul i la fase de $H(\omega)$ determina com canvien les seves components:
 - *Amplificació/atenuació*
 - *Desplaçament en el temps*



- A la sortida no existeixen components freqüencials **addicionals** respecte de l'entrada. En cas contrari, el sistema és no lineal o variant en el temps
- **Distorsió**.- Quan el canvi provocat pel sistema a la sortida de les components freqüencials d'entrada és **no desitjat**

$H(z)$ vs $H(\omega)$. Algunes relacions útils

- Les igualtats són vàlides només si la circumferència de **radi unitat** està dintre de la zona de convergència de $H(z)$

Domini 'z'

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k}} =$$

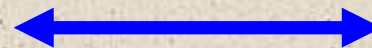
$$= b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k \cdot z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k \cdot z^{-1})}$$

$$H(z^{-1}) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k^* \cdot z)}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k^* \cdot z)}$$

$$H(z) \cdot H(z^{-1})$$

Relació

$$z = e^{j\omega}$$



$\{a_k\}, \{b_k\}$.- Reals
 $\{z_k\}, \{p_k\}$.- Complexes

$$|H(\omega)|^2$$

Domini 'ω'

$$H(\omega) = \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot e^{-j\omega \cdot k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot e^{-j\omega \cdot k}} =$$

$$= b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k \cdot e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k \cdot e^{-j\omega})}$$

$$H^*(\omega) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k^* \cdot e^{j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k^* \cdot e^{j\omega})}$$

$$H(\omega) \cdot H^*(\omega)$$

* Si $H(\omega) = H_R(\omega) + j \cdot H_I(\omega) \longrightarrow H^*(\omega) = H_R(\omega) - j \cdot H_I(\omega)$

Càlcul freqüencial amb els 'pols' i 'zeros' de $H(\omega)$

- Funcions normalitzades:

$$H(\omega) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k \cdot e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k \cdot e^{-j\omega})} = b_0 \cdot e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^M (e^{j\omega} - z_k)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - p_k)} = b_0 \cdot z^{(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^M (z - z_k)}{\prod_{k=1}^N (z - p_k)} \begin{matrix} \longrightarrow \text{zeros} \\ \longrightarrow \text{pols} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} e^{j\omega} - z_k &= V_k(\omega) \cdot e^{j\Theta_k(\omega)} \longrightarrow V_k(\omega) \equiv |e^{j\omega} - z_k|, & \Theta_k(\omega) &\equiv \angle(e^{j\omega} - z_k) \\ e^{j\omega} - p_k &= U_k(\omega) \cdot e^{j\Phi_k(\omega)} \longrightarrow U_k(\omega) \equiv |e^{j\omega} - p_k|, & \Phi_k(\omega) &\equiv \angle(e^{j\omega} - p_k) \end{aligned}$$

- Càlcul del mòdul i la fase

$$\begin{aligned} |H(\omega)| &= |b_0| \frac{V_1(\omega) \cdots V_M(\omega)}{U_1(\omega) \cdots U_N(\omega)} \\ \angle H(\omega) &= \angle b_0 + \omega(N-M) + \Theta_1(\omega) + \cdots + \Theta_M(\omega) - [\Phi_1(\omega) + \Phi_2(\omega) + \cdots + \Phi_N(\omega)] \end{aligned}$$

- Normalització en dB's

$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log_{10} |b_0| + 20 \cdot \sum_{k=1}^M \log_{10} V_k(\omega) - 20 \cdot \sum_{k=1}^N \log_{10} U_k(\omega)$$

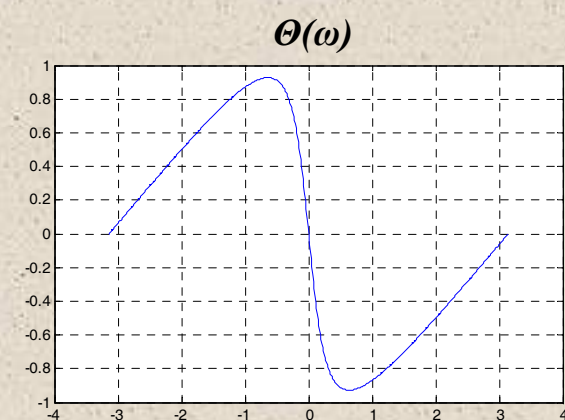
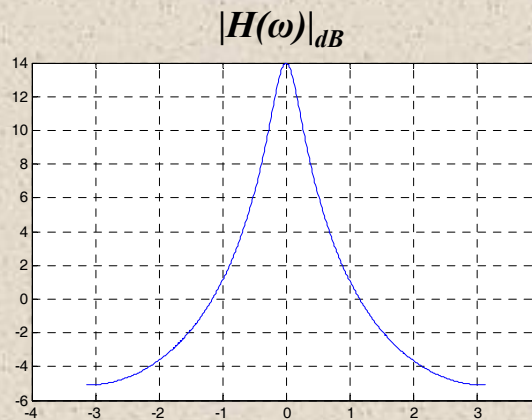
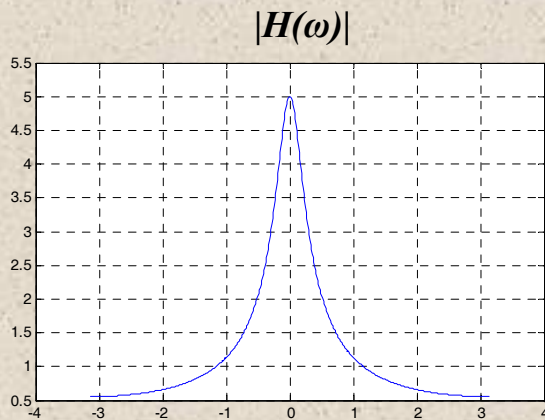
Càlcul de $|H(\omega)|$ i $\angle H(\omega)$

- Determineu la resposta freqüencial descrita per la funció de transferència següent:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8 \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - 0.8}$$

- Solució:

$$H(\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 0.8} \rightarrow \begin{cases} |H(\omega)| = \frac{|e^{j\omega}|}{|e^{j\omega} - 0.8|} = \frac{1}{\sqrt{1.64 - 1.6 \cdot \cos(\omega)}} \\ \Theta(\omega) = \omega - \tan^{-1} \left(\frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega) - 0.8} \right) \end{cases}$$



Estimació i determinació de sistemes LTI

- Correlacions entrada-sortida:
 - Si excitem un sistema LTI amb un senyal $x(n)$ d'espectre d'energia constant (espectre pla: $S_{xx}(\omega) = E_x$ i constant, $-\pi \leq \omega \leq \pi$), es possible **determinar** la seva resposta impulsional amb la correlació d'entrada-sortida:

$$H(\omega) = \frac{1}{E_x} = S_{yx}(\omega) \qquad h(n) = \frac{1}{E_x} = r_{yx}(m)$$

- Correlació amb entrades aleatòries:
 - També és possible **identificar** la resposta freqüencial $H(\omega)$ amb una entrada de soroll blanc (Espectre de potència: $(\sigma_x)^2$) determinant la transformada de Fourier de la correlació entrada-sortida $\gamma_{yx}(m)$. El resultat és proporcional a $H(\omega)$

$$\Gamma_{yx}(\omega) = \sigma_x^2 \cdot H(\omega)$$

- La correlació és molt útil en la **identificació de sistemes desconeguts**

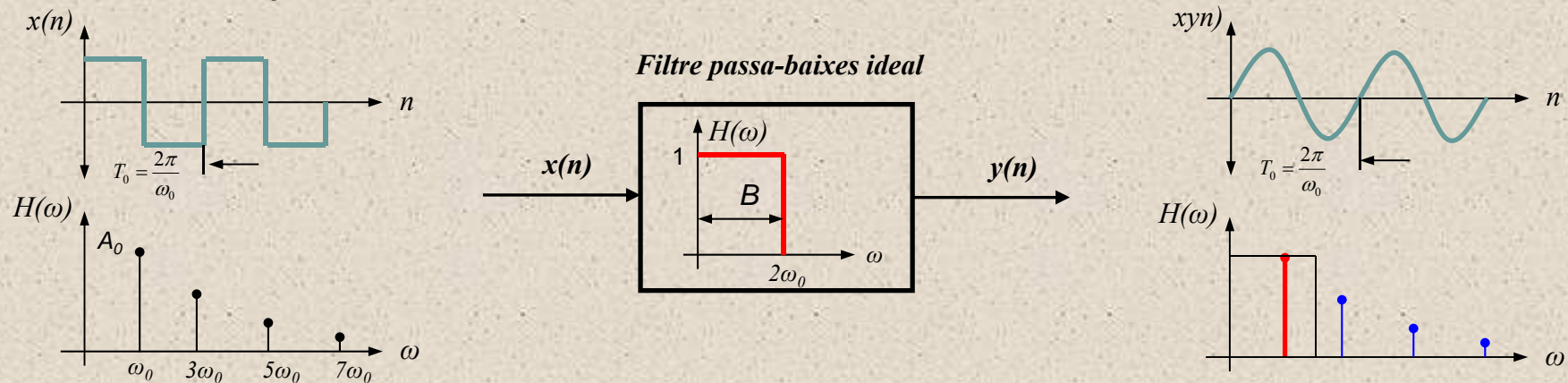
Aplicacions de l'anàlisi freqüencial

- **Filtres digitals selectius en freqüència**
 - *Passa-baixes, Passa-alt, Passa-banda, Banda-eliminada, Passa-Tot, ranura, ...*
 - Sistemes resonants digitals
- **Oscil·ladors digitals sinusoidals**
- **Identificació de sistemes** (Convolució inversa o deconvolució)
 - Sistemes de fase mínima, fase màxima i mixta
 - Deconvolució homomòrfica

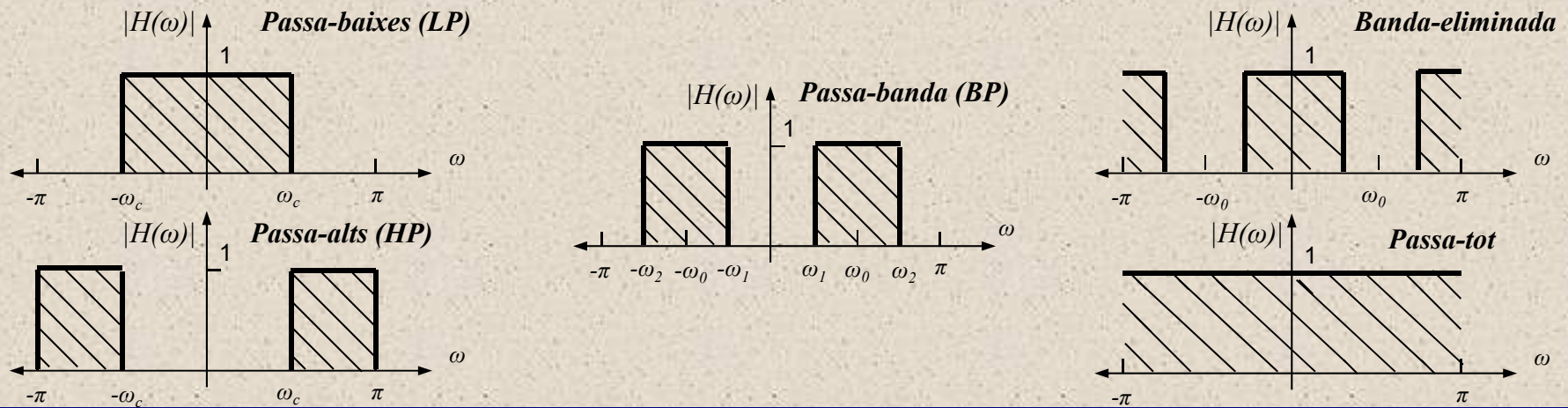


Filtres digitals. Introducció

- Principi de funcionament



- Característiques dels filtres ideals



Idealitat vs. Realitat

- El filtre digital 'ideal' presenta *un guany constant* en la banda de pas ($|H(\omega_0)|=1$, $|\omega_1| < |\omega_0| < |\omega_2|$) i **fase lineal**, però són **impossibles** d'implementar a la pràctica.

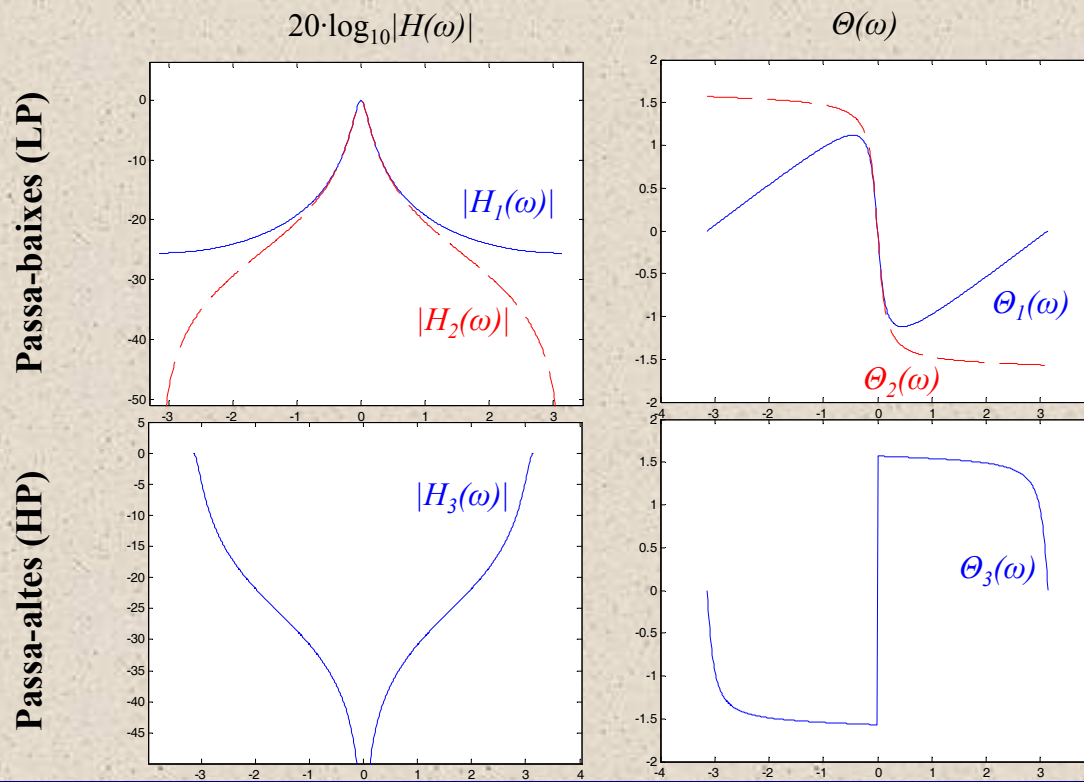
- P.e.: Filtre ideal passa-baixes és **inestable**

$$h_{lp}(n) = \frac{\sin(\omega_c \pi \cdot n)}{\pi \cdot n}, \quad -\infty < n < \infty \quad \rightarrow \quad \text{Resposta impulsional } \mathbf{no\ causal} \text{ ni } \mathbf{sumable}$$

- En la realitat, és possible implementar d'altres que s'hi aproximem bastant
- **Principi de disseny:**
 - **1.- Pols dintre** de la circumferència unitària i **a prop** de la frontera ($r=1$) per als valors de ω que es desitgen 'accentuar'. **Zeros** en **punts del pla** per als valors de ω que es desitgen 'amortir'.
 - **2.-** Pols i zeros 'conjugats' han de tenir coeficients **reals**.
- **Eines informàtiques** comercials de disseny de filtres s'utilitzen per *eliminar sorolls, detectar senyals, igualar canals o realitzar anàlisis espectrals* en aplicacions de comunicacions, sonar o radar, entre d'altres.

'Passa-baixes' i 'Passa-alts'

- **Passa-baixes (LP.- Low-Pass)** : Els 'pols' han d'estar a prop de la circumferència unitària per freqüències baixes ($\omega \rightarrow 0$) i els zeros ho han d'estar per freqüències elevades ($\omega \rightarrow \pi$)
- **Passa-altes (HP.- High-Pass)**: És el cas anàleg dels filtres passa-baixes



$$H_1(z) = \frac{1-a}{1-a \cdot z^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{1-a}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-a \cdot z^{-1}}$$

La col·locació d'un zero ($z=-1$) atenua encara més la resposta del filtre per freqüències elevades

$$H_3(z) = \frac{1-a}{2} \frac{1-z^{-1}}{1+a \cdot z^{-1}}$$

Disseny de filtres senzills

- Determineu els valors de p i b_0 tal que el següent filtre 'passa-baixes' verifiqui la següent resposta freqüencial $H(z)$:

$$|H(z)| = \frac{b_0}{(1 - p \cdot z^{-1})^2} \quad \begin{cases} H(0) = 1 \\ \left| H\left(\frac{\pi}{4}\right) \right|^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Solució:

- Per: $H(0) = 1 \rightarrow H(0) = \frac{b_0}{(1-p)^2} = 1 \rightarrow b_0 = (1-p)^2$

- Per $|H(\pi/4)| \rightarrow H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(1-p)^2}{(1 - p \cdot e^{-j\pi/4})^2} = \frac{(1-p)^2}{\left(1 - \frac{p(1-j)}{\sqrt{2}}\right)^2} \rightarrow \left| H\left(\frac{\pi}{4}\right) \right|^2 = \frac{(1-p)^4}{\left(\left(1 - \frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{p^2}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

$$\left| H\left(\frac{\pi}{4}\right) \right|^2 = \frac{(1-p)^4}{\left(\left(1 - \frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{p^2}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{aligned} \sqrt{2}(1-p)^2 &= 1 + p^2 - \sqrt{2} \cdot p \\ p &= 0.323 \\ b_0 &= 0.46 \end{aligned} \rightarrow H(z) = \frac{0.46}{(1 - 0.323 \cdot z^{-1})^2}$$

'Passa-banda' (BP.- Band-Pass)

- Com a mínim, els filtres 'passa-banda' han de tenir un **parell de pols complexes conjugats** bastant a prop del cercle unitari per freqüències **al voltant** de la banda de pas ($\omega_1 < \omega < \omega_2$) i dos zeros a freqüències inferiors i posteriors.

- Exemple:

- Dissenyeu un filtre passa-banda amb centre de la banda de pas ($\omega_0 = \pi/2$), resposta freqüencial nul·la per ($\omega = \pi$ i $\omega = 0$) i magnitud $1/\sqrt{2}$ a ($\omega_0 = 4\pi/9$)

- **Solució:**

- Com que $\omega_0 = \pi/2$ els pols s'han de situar a: $p_{1,2} = r \cdot e^{\pm j\pi/2}$ i els zeros a: $z = -1$ i $z = 1$. Així, la funció de transferència ha de quedar de la següent manera:

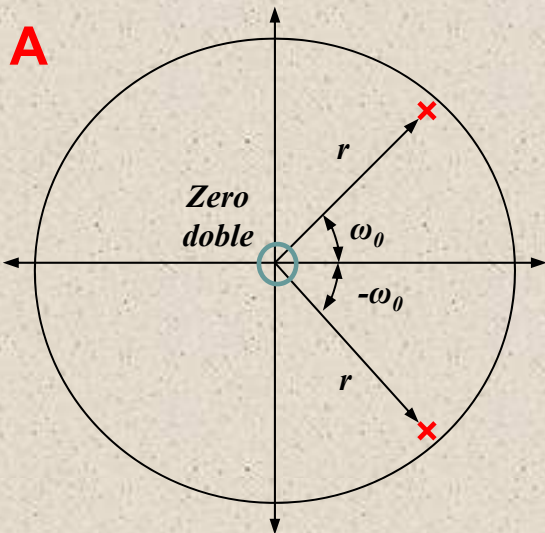
$$H(z) = G \frac{(z-1)(z+1)}{(z-jr)(z+jr)} = \frac{z^2-1}{z^2+r^2}, \quad H\left(\frac{\pi}{2}\right) = G \frac{z^2-1}{z^2+r^2} = G \frac{2}{1-r^2} \rightarrow G = \frac{1-r^2}{2}$$

$$\left| H\left(\frac{4\pi}{9}\right) \right|^2 = \frac{(1-r^2)^2}{4} \frac{2-2\cos(8\pi/9)}{1+r^4+2r^2\cos(8\pi/9)} = \frac{1}{2} \rightarrow 1.94(1-r^2)^2 = 1-1.88r^2+r^4 \rightarrow \begin{cases} r^2 = 0.7 \\ G = 0.15 \end{cases}$$

$$H(z) = 0.15 \frac{1-z^{-2}}{1+0.7z^{-2}}$$

Sistemes ressonants digitals

- Pertanyen a una classe especial de 'passa-banda' **molt selectiva** en freqüència bastant utilitzada en nombroses aplicacions: *generació de veu, filtres senzills*, etc.
- **Dues configuracions** bàsiques amb els pols conjugats molt a prop del cercle unitari:



$$H_A(z) = b_{0A} \frac{1}{(1 - r \cdot e^{j\omega_0} \cdot z^{-1})(1 - r \cdot e^{-j\omega_0} \cdot z^{-1})}$$

$$|H_A(\omega)| = \frac{b_{0A}}{|U_1(\omega)||U_2(\omega)|}$$

Pols:

$$(1 - r \cdot e^{j\omega_0} \cdot z^{-1})(1 - r \cdot e^{-j\omega_0} \cdot z^{-1})$$

Magnituds del polinomi característic:

$$|U_1(\omega)| = \sqrt{1 + r^2 - 2 \cdot r \cos(\omega_0 - \omega)}$$

$$|U_2(\omega)| = \sqrt{1 + r^2 - 2 \cdot r \cos(\omega_0 + \omega)}$$

Freqüència de natural: ω_0

Normalització de guany: $|H(\omega_0)| = 1$

$$b_{0A} = (1 - r) \sqrt{1 + r^2 - 2 \cdot r \cos(2 \cdot \omega_0)}$$

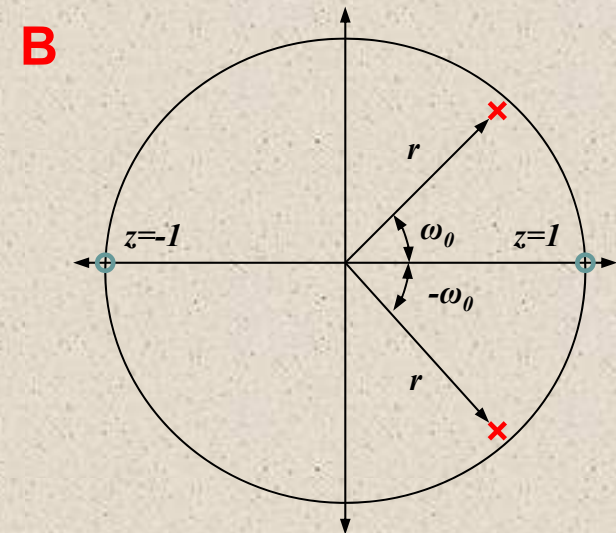
$$b_{0B} = b_{0A} / |N(\omega)|$$

Freqüència de resonància:

$$\omega_r = \cos^{-1} \left(\frac{1 + r^2}{2 \cdot r} \cdot \cos(\omega_0) \right)$$

quan $|U_1(\omega)| \cdot |U_2(\omega)|$ és mínim

$$\Delta\omega \approx 2 \cdot (1 - r)$$



$$H_B(z) = b_{0B} \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - r \cdot e^{j\omega_0} \cdot z^{-1})(1 - r \cdot e^{-j\omega_0} \cdot z^{-1})}$$

$$|H_B(\omega)| = b_{0B} \frac{|N(\omega)|}{|U_1(\omega)||U_2(\omega)|}$$

$$|N(\omega)| = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(2 \cdot \omega))}$$

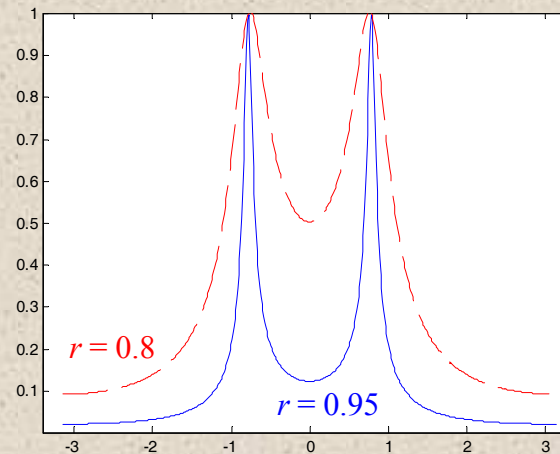
Sistemes ressonants digitals (Cont.)

- Exemples: $\omega_0 = \pi/4$

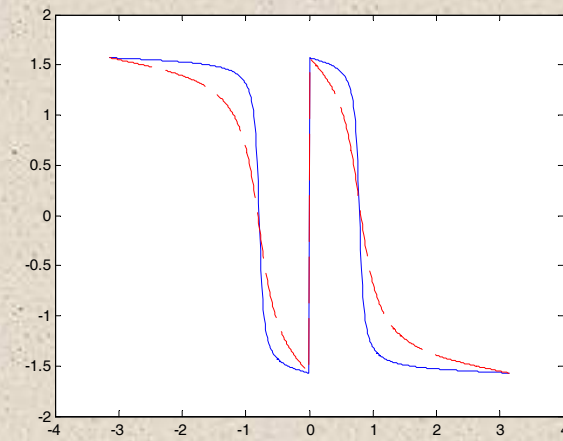
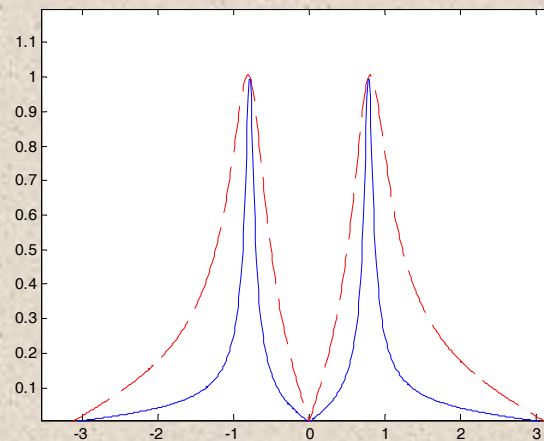
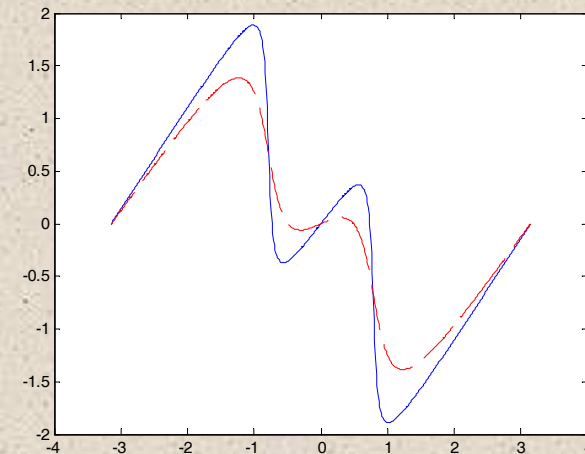
$$H(z) = b_0 \frac{1}{(1 - r \cdot e^{j\omega_0} \cdot z^{-1})(1 - r \cdot e^{-j\omega_0} \cdot z^{-1})}$$

$$H(z) = b_0 \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - r \cdot e^{j\omega_0} \cdot z^{-1})(1 - r \cdot e^{-j\omega_0} \cdot z^{-1})}$$

$|H(\omega)|$

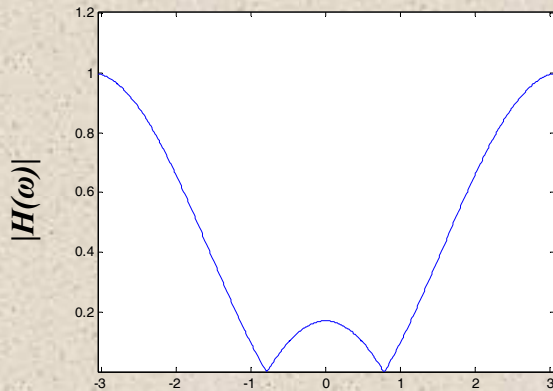


$|\Theta(\omega)|$



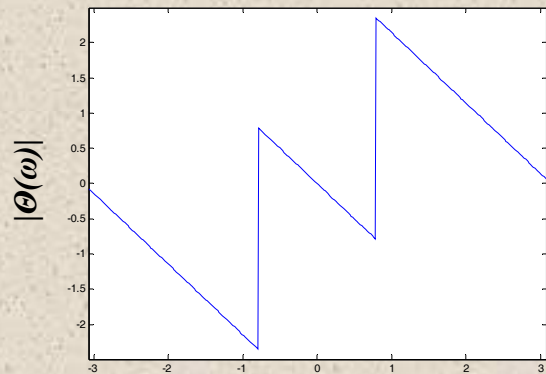
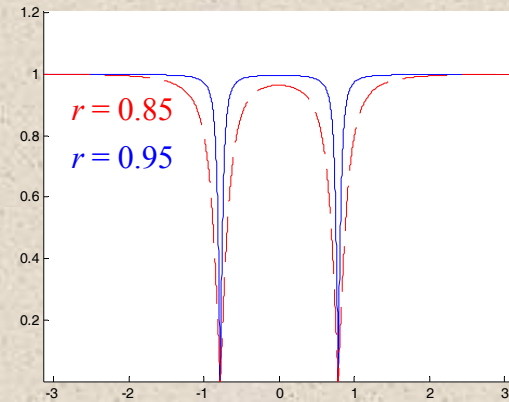
'Banda-eliminada' (Notch)

- Per *suprimir* components freqüencials de l'espectre. És el cas anàleg als 'passa-banda': *un parell de zeros conjugats* sobre el cercle unitari (que formen un angle ω_0) i dos pol a freqüències inferiors i posteriors, com a mínim



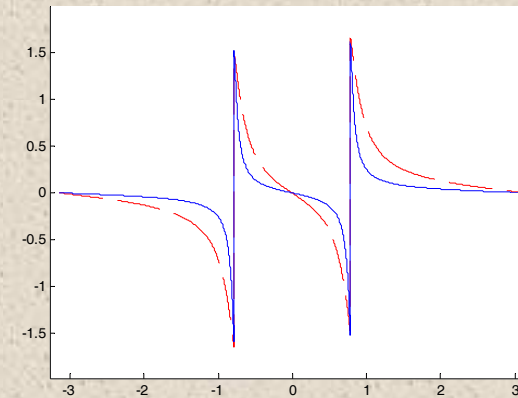
$$\leftarrow H(z) = b_0 (1 - e^{j\omega_0} \cdot z^{-1}) (1 - e^{-j\omega_0} \cdot z^{-1})$$

$$H(z) = b_0 \cdot \frac{(1 - e^{j\omega_0} \cdot z^{-1}) (1 - e^{-j\omega_0} \cdot z^{-1})}{(1 - r \cdot e^{j\omega_0} \cdot z^{-1}) (1 - r \cdot e^{-j\omega_0} \cdot z^{-1})} \rightarrow$$



- Les atenuacions en les bandes properes es poden evitar introduint **resonància** just al voltant de les bandes que es volen eliminar

Filtres 'ranura'



'Passa-tot' (AP.- All-Pass)

- **Magnitud constant** per totes les freqüències de l'espectre

$$|H(\omega)| = 1, \quad 0 \leq \omega \leq \pi \quad \rightarrow \quad H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k \cdot z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot z^{-k}}, \quad \text{amb coeficients } \{a_k\} \text{ reals}$$

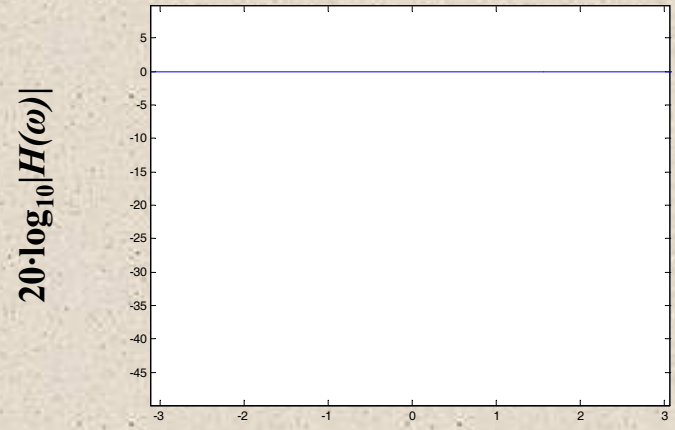
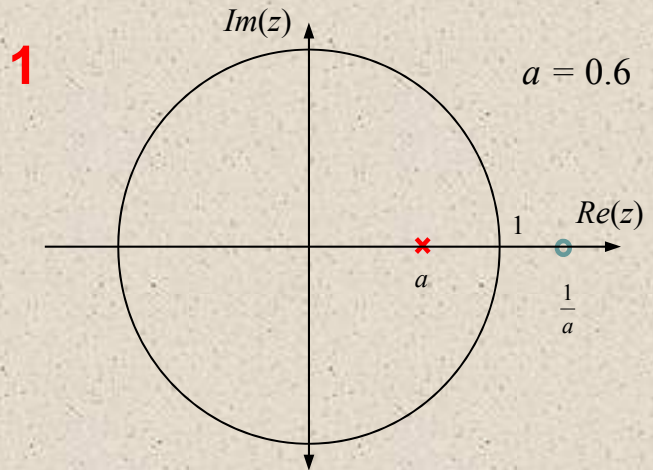
- **Expressió general:**
$$H_{ap}(z) = \prod_{k=1}^{N_R} \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k \cdot z^{-1}} \cdot \prod_{k=1}^{N_C} \frac{(z^{-1} - \beta_k)(z^{-1} - \beta_k^*)}{(1 - \beta_k \cdot z^{-1})(1 - \beta_k^* \cdot z^{-1})}$$
- N_R - Nombre de pols i zeros reals. N_C - Nombre de pols i zeros conjugats
- **Condició d'estabilitat:** $-1 < \alpha_k < 1, |\beta_k| < 1$
- **Fase no constant.** El paràmetre de 'retard d'envolvent' (o 'de grup') serveix per determinar el **desplaçament temporal** que experimenta cada component freqüencial:

$$\tau_z(\omega) = -\frac{d\Theta_{ap}(\omega)}{d\omega} \quad \text{1er. Ordre: } H_{ap}(\omega) = \frac{e^{-j\omega} - r \cdot e^{-j\theta}}{1 - r \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\omega}} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \Theta_{ap}(\omega) = -\omega - 2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{r \cdot \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cdot \cos(\omega - \theta)} \right) \\ \tau_z = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2 \cdot r \cdot \cos(\omega - \theta)} \end{cases}$$

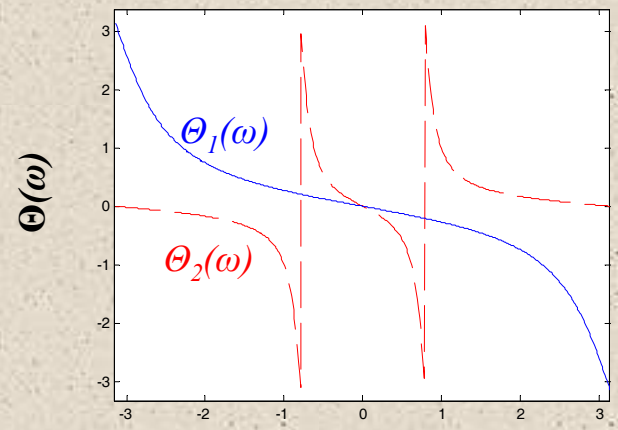
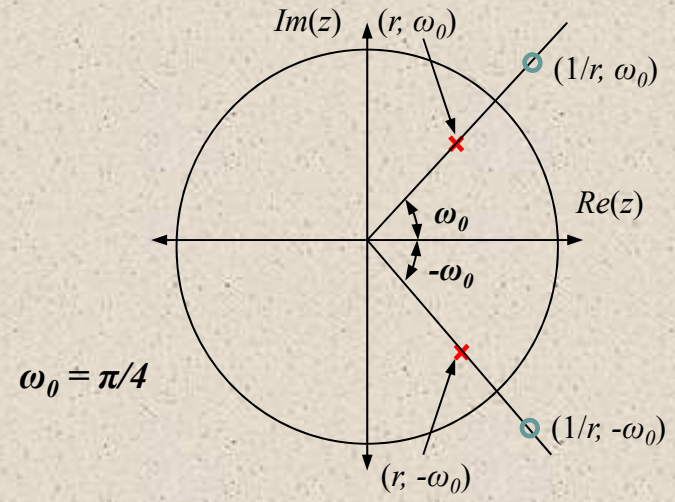
- Aplicació: **Igualadors de fase** (per canviar una fase no desitjada de $H(\omega)$)

'Passa-tot' (Cont.)

1er. Ordre: $H_{ap}(z) = \frac{a + z^{-1}}{1 + a \cdot z^{-1}}$



2on. Ordre: (pols i zeros conjugats) $H_{ap}(z) = \frac{(r - e^{j\omega_0} z^{-1})(r - e^{-j\omega_0} z^{-1})}{(1 - r \cdot e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - r \cdot e^{-j\omega_0} z^{-1})}$



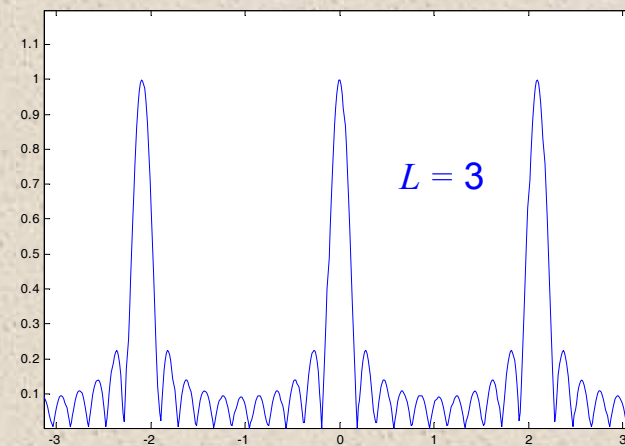
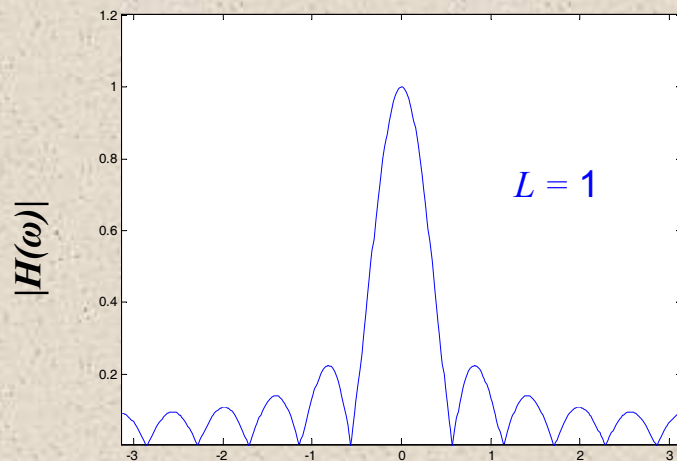
Filtres 'Comb'

- S'obtenen *repetint* L vegades una determinada forma d'espectre (filtres **FIR**) dintre del rang $(0 < \omega < 2\pi)$:

$$H_L(\omega) = H(L \cdot \omega)$$

- Exemple: *Mitja mòbil*

- Si: $H(z) = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M z^{-k} = \frac{1}{M+1} \cdot \frac{(1-z^{-(M+1)})}{(1-z^{-1})}$ $\rightarrow H(\omega) = \frac{e^{-j\omega \cdot M/2}}{M+1} \cdot \frac{\sin\left(\omega \cdot \frac{M+1}{2}\right)}{\sin\left(\omega/2\right)}$
- amb repetició L : $H(z) = \frac{1}{M+1} \cdot \frac{(1-z^{-L \cdot (M+1)})}{(1-z^{-L})}$ $\rightarrow H_L(\omega) = \frac{e^{-j\omega \cdot M/2}}{M+1} \cdot \frac{\sin\left(\omega \cdot L \cdot \frac{M+1}{2}\right)}{\sin\left(\omega \cdot L/2\right)}$



$M = 10$

Filtres 'Comb' (Cont)

- El nom es deu a la forma peculiar de l'espectre ('pinta amb pues' = comb, en anglès)

- Expressió general: $H(z) = \sum_{k=0}^M h(k) \cdot z^{-k}$

- Només contenen zeros **sobre** el cercle unitari espaiats periòdicament:

- Zeros: $z = e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{M+1}}$, $k = 1, 2, 3, \dots, M$ Periodicitat: $\omega_k = \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{M+1}$

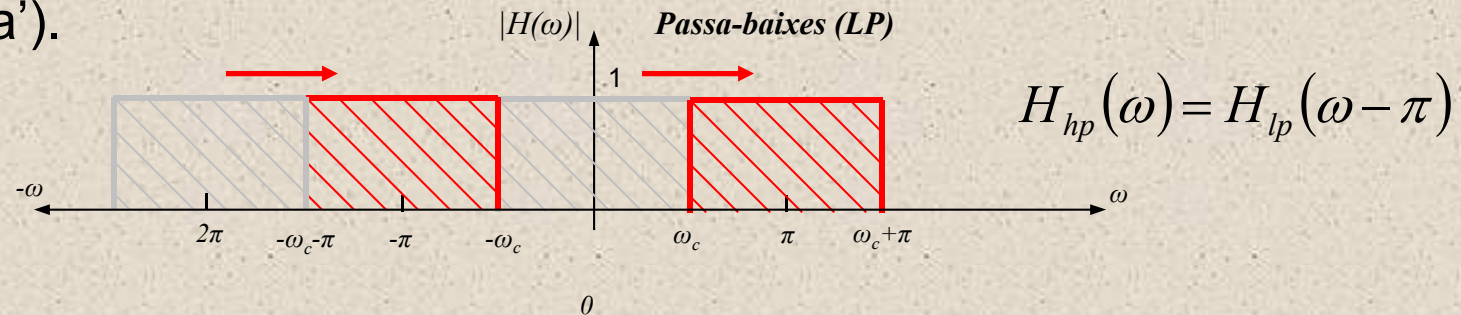
- Utilitzats àmpliament en diverses aplicacions:

- **Supressió d'harmònics** en sistemes de potència
- **Separació espectral** de components solars i lunars
- En aplicacions de **radar** per eliminar 'clutter' provocat pels objectes fixes i detectar els objectes en moviment



Conversió de filtres

- La propietat de la *translació en freqüència*, permet convertir un filtre 'passa-baixes' en d'altres ('passa-alts', 'passa-banda', o 'banda-eliminada').



- P.e:** Canviant **el signe** de les **mostres** (o **coeficients**) **imparells** de $h(n)$ (o $H(\omega)$) es pot canviar de 'passa-baixes(altes)' a 'passa-altes(baixes)'

- LP a HP: $h_{hp}(n) = (-1)^n h_{lp}(n)$

- Equació en diferències: $y(n) = -\sum_{k=1}^N (-1)^k \cdot a_k \cdot y(n-k) + \sum_{k=1}^M (-1)^k \cdot b_k \cdot x(n-k)$

- HP a LP: $h_{lp}(n) = (-1)^n h_{hp}(n)$

- Resposta freqüencial:
$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M (-1)^k \cdot b_k \cdot e^{-j\omega \cdot k}}{1 + \sum_{k=1}^N (-1)^k \cdot a_k \cdot e^{-j\omega \cdot k}}$$

$y_{lp}(n) = 0.9y(n-1) + 0.1x(n)$

$y_{hp}(n) = -0.9y(n-1) + 0.1x(n) \rightarrow H_{hp}(\omega) = \frac{0.1}{1 + 0.9 \cdot e^{-j \cdot \omega}}$

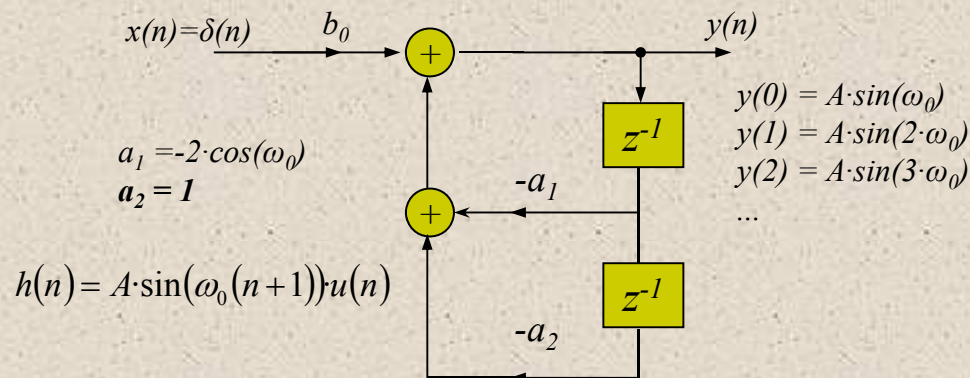
Oscil·ladors digitals

- És un sistema capaç de **generar senyals periòdiques** de sortida amb **absència** 'total' o 'parcial' de senyals d'entrada.
- Pols conjugats **sobre** el cercle unitari (Cas 'extrem' dels ressonadors digitals)

Oscil·lador sinusoidal

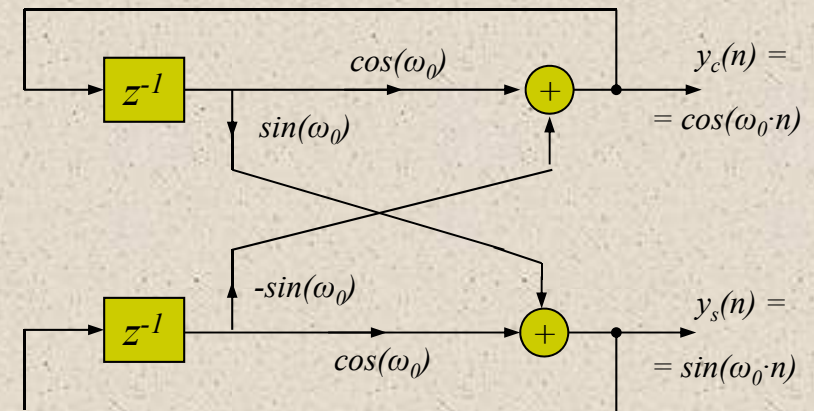
$$H_A(z) = \frac{b_0}{(1 - e^{j\omega_0} \cdot z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} \cdot z^{-1})}$$

$$b_0 = A \cdot \sin(\omega_0)$$



Oscil·lador acoblat

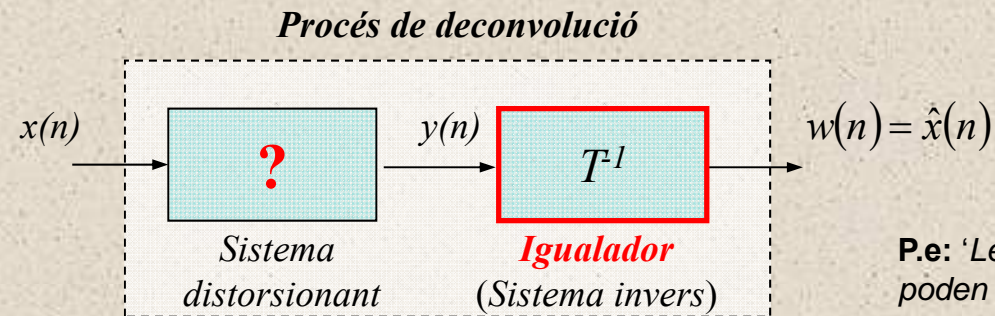
$$\begin{bmatrix} y_c(n) \\ y_s(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0) & -\sin(\omega_0) \\ \sin(\omega_0) & \cos(\omega_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_c(n-1) \\ y_s(n-1) \end{bmatrix}$$



- El senyal es genera amb un impuls a l'entrada ($\delta(n)$) o unes condicions inicials no nul·les. Aquest és el mecanisme bàsic d'un **sintetitzador**

Sistemes inversos i De-convolució

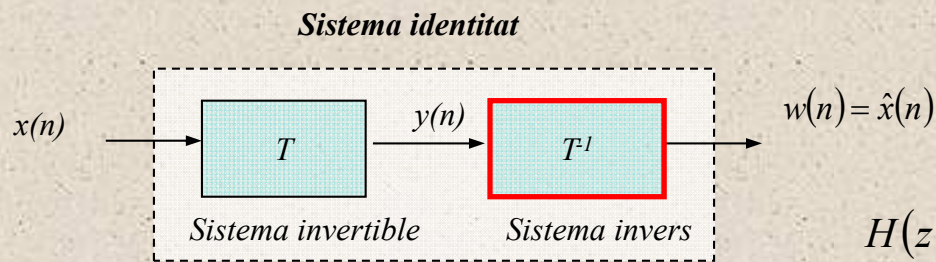
- En moltes situacions pràctiques, resulta útil **esbrinar l'entrada $x(n)$ d'un sistema desconegut**, coneixent a priori la seva sortida $y(n)$



- Interessa dissenyar un sistema que, connectat en sèrie amb el sistema distorsionant, produeixi una rèplica aproximada de l'entrada (**Sistema invers**)
- La **identificació de sistemes** és el procés que consisteix en determinar les característiques de sistemes desconeguts: $h(n)$, o bé $H(\omega)$:
 - Es mesura $y(n)$ amb una $x(n)$ coneguda per determinar les característiques que serviran per al disseny del sistema invers
- La **deconvolució** s'utilitza generalitzadament en senyals sísmiques i geofísiques per separar l'entrada de les característiques del sistema a identificar

Invertibilitat en sistemes LTI

- Un sistema és *invertible* si existeix **correspondència biunívoca** entre entrada i sortida:
 - És possible determinar unívocament $x(n)$ ($-\infty < n < \infty$) del sistema T si es coneix $y(n)$



$$w(n) = T^{-1}[y(n)] = T^{-1}\{T[x(n)]\} = x(n)$$

$$w(n) = h_I(n) * h(n) * x(n) = x(n)$$

$$h_I(n) * h(n) = \delta(n)$$

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad \rightarrow \quad H(z) \cdot H_I(z) = 1 \quad \rightarrow \quad H_I(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

- Càlcul del sistema invers (Exemple)

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) \quad \rightarrow \quad H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} H_I(z) = 1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1} \\ h_I(n) = \delta(n) - \frac{1}{2} \cdot \delta(n-1) \end{cases} \rightarrow \text{Sistema FIR}$$

ROC: $|z| > 1/2$

Problemes de la invertibilitat

- La solució **no és única**, si no s'especifica la regió de convergència

- Exemple:

$$h(n) = \delta(n) - \frac{1}{2} \cdot \delta(n-1) \rightarrow H(z) = 1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1} \rightarrow H_I(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}} \rightarrow \text{Dues regions de convergència}$$

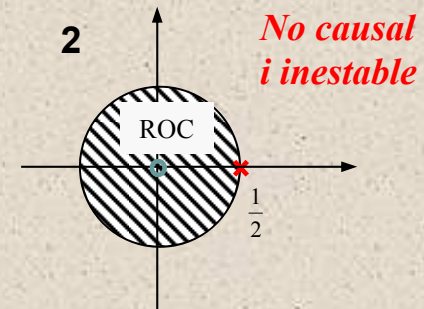
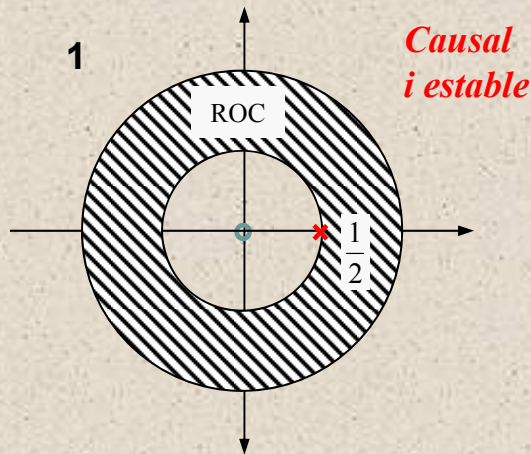
ROC: $|z| > 0$

- 1. Si $|z| > \frac{1}{2}$

$$h_I(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$$

- 2.- Si $|z| < \frac{1}{2}$

$$h_I(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(-n-1)$$



- $H(z)$ no té una expressió compacta en bastants casos

Com obtenir $h_I(n)$ mitjançant $h(n)$?

- Si $h(n)$ i $h_I(n)$ són **causals**, $h_I(n)$ es pot obtenir mitjançant un algorisme de programació:

$$h_I(n) = -\sum_{k=1}^n \frac{h(k) \cdot h_I(n-k)}{h(0)}, \quad n \geq 1, \quad h_I(0) = \frac{1}{h(0)}$$

- Inconvenients:

1. No funciona si $h(0) = 0$. Fàcil solució si s'adapta el sistema identitat convenientment amb retards ($h(n) * h_I(n) = \delta(n-L)$)
2. Genera errors de precisió degut a l'arrodoniment que són considerables si n és elevat

- Exemple: Trobeu el sistema invers de $h(n) = \delta(n) - \alpha \cdot (n-1)$

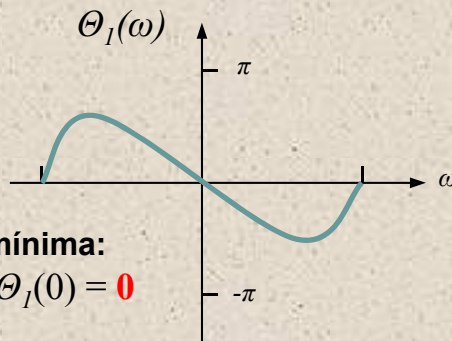
- $h(0) = 1, h(1) = -\alpha, h(n) = 0, \text{ per } n \geq 2$
- $h_I(0) = 1/h(0) = 1$
- $h_I(n) = \alpha \cdot h_I(n-1), n \geq 1$

$$h_I(1) = \alpha, \quad h_I(2) = \alpha^2, \quad \dots \quad h_I(n) = \alpha^n$$

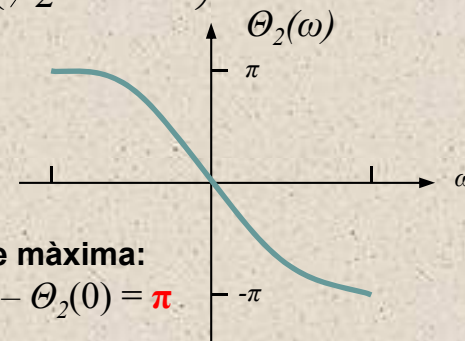
Fase mínima, màxima i mixta

- **Fase mínima.- Tots** els zeros (i pols) es troben **dintre** del cercle unitari.
- **Fase màxima.- Tots** els zeros es troben **fora** del cercle unitari
- **Fase mixta.-** Hi ha zeros **dintre i fora** del cercle unitari

$$\left. \begin{array}{l} H_1(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1}, \quad H_2(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} \\ z_1 = -\frac{1}{2}, \quad z_2 = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |H_1(\omega)| = |H_2(\omega)| = \sqrt{\frac{5}{4} + \cos(\omega)} \\ \Theta_1(\omega) = -\omega + \tan^{-1}\left(\frac{\sin(\omega)}{\frac{1}{2} + \cos(\omega)}\right), \quad \Theta_2(\omega) = -\omega + \tan^{-1}\left(\frac{\sin(\omega)}{2 + \cos(\omega)}\right) \end{array} \right.$$



Fase mínima:
 $\Theta_1(\pi) - \Theta_1(0) = \mathbf{0}$



Fase màxima:
 $\Theta_2(\pi) - \Theta_2(0) = \mathbf{\pi}$

- **Només els sistemes de fase mínima tenen sistemes inversos estables**

Fase no mínima. Consideracions

- Qualsevol sistema de *fase no mínima* pot expressar-se com la *unió d'un sistema de fase mínima* i un *filtre 'passa-tot'*

$$\boxed{H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = H_{\min}(z) \cdot H_{ap}(z)}, \quad H_{\min}(z) = \frac{B_1(z) \cdot B_2(z^{-1})}{A(z)}, \quad H_{ap}(z) = \frac{B_2(z)}{B_2(z^{-1})}$$

- Aquesta propietat implica que per obtenir un sistema invers estable es pot realitzar una *correcció* de la fase 'no mínima' del sistema
- **Retard de grup** del sistema de fase no mínima: $\tau_g(\omega) = \tau_g^{\min}(\omega) + \tau_g^{ap}(\omega)$

- Dels dos, el sistema de fase mínima te menys retard de grup

- **Energia parcial:** $E(n) = \sum_{k=0}^n |x(k)|^2$

- De tots els sistemes que tenen la mateixa magnitud i energia total ($E(\infty)$), els de fase mínima tenen major energia parcial ($E_{\min}(n) > E(n)$)

Identificació de sistemes. Mètodes

- Els següents mètodes es poden utilitzar per determinar $h(n)$ o bé $H(\omega)$ de sistemes **causals** on a priori $y(n)$ i $x(n)$ són conegudes

1. Divisió directa:

$$y(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 7/10, & n=1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases} \quad x(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ -7/10 & n=1 \\ 1/10 & n=2 \\ 0 & n \geq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + (7/10)z^{-1}}{1 - (7/10)z^{-1} + (1/10)z^{-2}} \\ y(n) = (7/10)y(n-1) - (1/10)y(n-2) + x(n) + (7/10)x(n-1) \\ h(n) = \left[4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n \right] \cdot u(n) \end{cases}$$

2. Algorisme recursiu:

$$h(n) = \frac{y(n) - \sum_{k=0}^{n-1} h(k)x(n-k)}{x(0)} \quad n \geq 1, \quad h(0) = \frac{y(0)}{x(0)}$$

3. Correlació encreuada

$$3.1 \quad h(n) = \frac{r_{yx}(n) - \sum_{k=0}^{n-1} h(k)r_{xx}(n-k)}{r_{xx}(0)} \quad n \geq 1, \quad h(0) = \frac{r_{yx}(0)}{r_{xx}(0)} \quad 3.2 \quad H(\omega) = \frac{S_{yx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} = \frac{S_{yx}(\omega)}{|X(\omega)|^2}$$

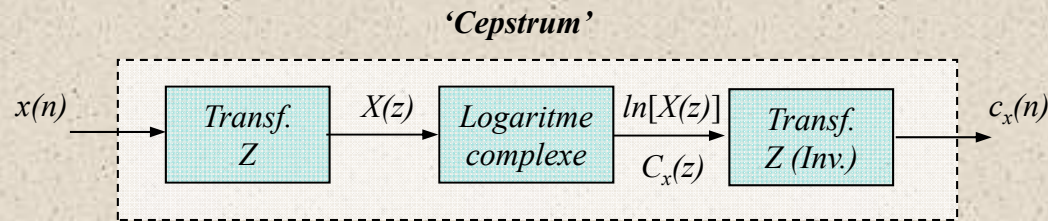


Mètodes d'identificació. Consideracions

- Com que $y(n)$ sols tenir longitud infinita, el mètode de la *divisió directa* (1) no és pràctic i, per tant, no s'utilitza.
- En el mètode de l'algorisme recursiu (2) existeix el mateix problema però, de vegades, és possible truncar $h(n)$.
- El mètode de la *correlació encreuada* (3) és més efectiu i permet diverses opcions per identificar els sistemes:
 - 3.1a.- Per mitjà de la correlació sortida-entrada $r_{yx}(m)$, i obtenint $h(n)$ recursivament
 - 3.1b.- Utilitzant un senyal d'entrada d'espectre pla i calculant la correlació $r_{yx}(m)$
 - 3.2.- Determinant la resposta en freqüència $H(\omega)$ per mitjà de la transformada de Fourier de la correlació $r_{yx}(m)$

El 'cepstrum' i la de-convolució homomòrfica

- Definició de 'cepstrum'

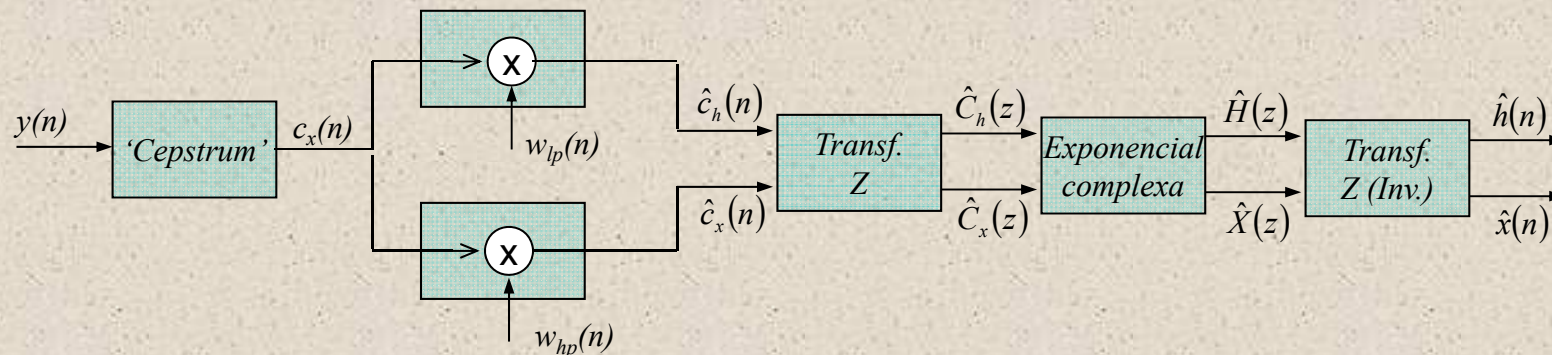


$$c_x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln[X(\omega)] e^{j\omega n} d\omega$$

$$\ln[X(\omega)] = \ln|X(\omega)| + j\theta(\omega)$$

- De-convolució homomòrfica

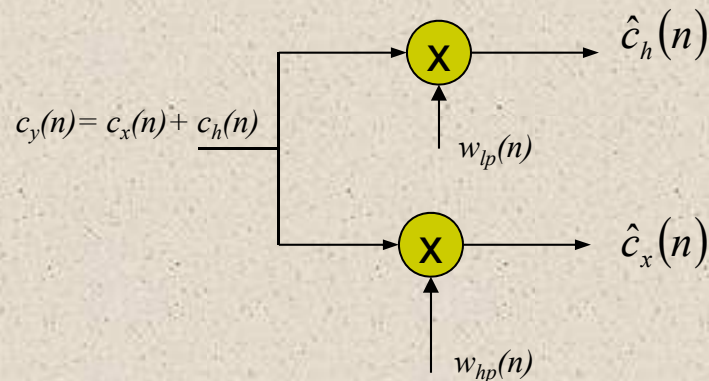
- Si $Y(z) = X(z) \cdot H(z)$, aleshores $c_y(n) = c_x(n) + c_h(n)$
- Procés de de-convolució homomòrfica



- Resposta impulsional $h(n)$ i entrada $x(n)$ són **estimades** fent servir **NOMÉS** el senyal de sortida $y(n)$

De-convolució homomòrfica. Consideracions

- La de-convolució homomòrfica no sempre funciona. Només es vàlida en aquelles aplicacions on els cepstrum $c_h(n)$ i $c_x(n)$ obtinguts són **considerablement diferents** com per poder realitzar el procés de separació ('passa-altes' i 'passa-baixes')



$$\hat{c}_h(n) = c_y(n) \cdot w_{lp}(n), \quad w_{lp}(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

$$\hat{c}_x(n) = c_y(n) \cdot w_{hp}(n), \quad w_{hp}(n) = \begin{cases} 0, & |n| \leq N_1 \\ 1, & |n| > N_1 \end{cases}$$

- El 'cepstrum' i la de-convolució homomòrfica s'utilitza per estimar contingut espectral de **veu**, i **processat de senyals sísmiques** i **geo-físiques**, entre d'altres

Filtres analògics i digitals (FEAD)

***Ampliació
del anàlisi freqüencial:
La 'DFT' i la 'IDFT'***

Introducció

- Per realitzar un anàlisi freqüencial digital s'aplica una *conversió* de $x(n)$ (en el domini del temps) a una forma equivalent en el domini de la freqüència $X(\omega)$ (Transformada de Fourier)



- Per situacions reals (senyals *discretas* i *aperiòdiques*) $X(\omega)$ hauria de ser contínua, però tècnicament és **impossible** ja que s'ha de 'discretitzar' l'espectre per al càlcul digital.
- En aquesta secció es considera la representació de senyals mitjançant mostres descrites de l'espectre: la *Transformada de Fourier Discreta* (ó DFT.- *Discrete Fourier Transform*)

Què succeeix al 'discretitzar' $X(\omega)$?

- Discretitzar l'espectre equival a obtenir un senyal $x_p(n)$ (amb la seva transformada inversa) que és una **extensió periòdica** del senyal original $x(n)$

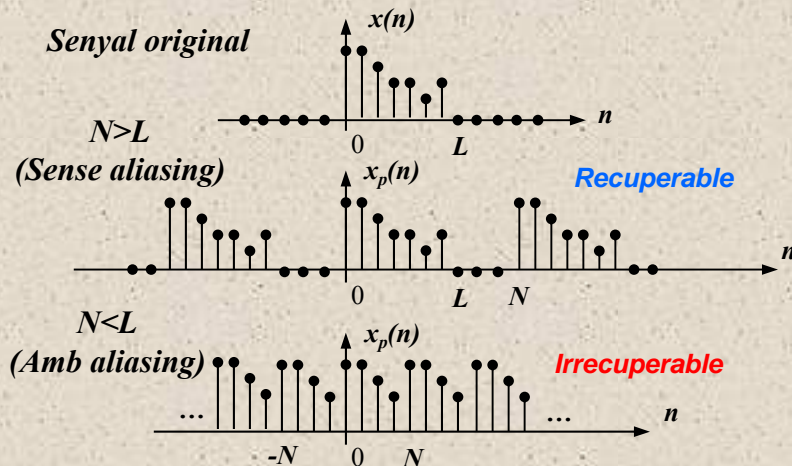
Discretització del Espectre

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot n} \quad \longrightarrow \quad X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N}k \cdot n} = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{x_p} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N}k \cdot n}$$

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{N}k \cdot n} \quad \longrightarrow \quad x(n) = \begin{cases} x_p(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \geq N \end{cases}$$

N.- Nombre de mostres del espectre

- En aquesta situació, $x(n)$ (senyal original aperiòdic i de longitud L) i $X(\omega)$ només es poden recuperar si no existeix '**aliasing**' en el domini del temps ($N \geq L$)



Expressions a utilitzar en la recuperació de $x(n)$ i $X(\omega)$:

Senyal: $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{N}k \cdot n}$

Espectre: $X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \cdot P\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$

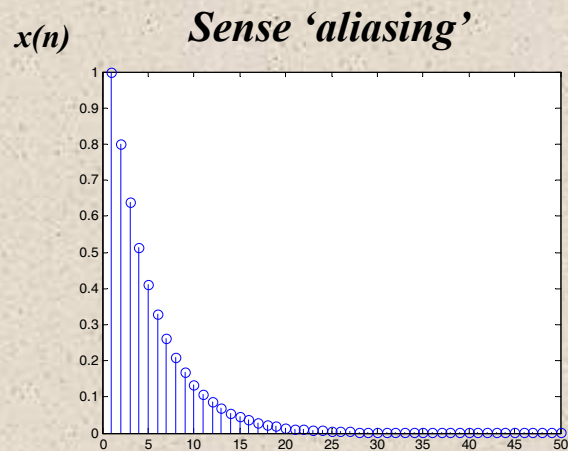
Polinomi d'interpolació

$$P(\omega) = \frac{\sin(\omega \cdot N / 2)}{N \cdot \sin(\omega / 2)} \cdot e^{-j \omega (N-1) / 2}$$

Exemple pràctic

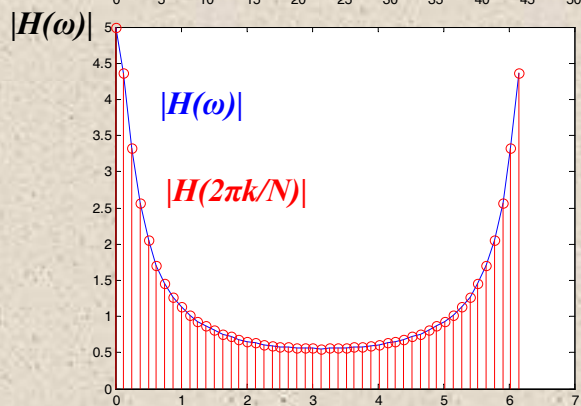
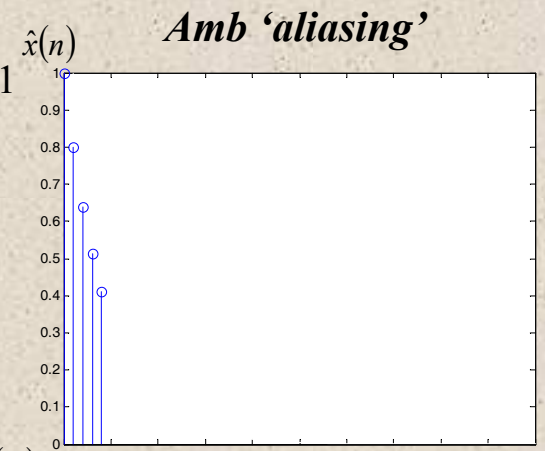
- **Determinació del espectre:** $x(n) = a^n \cdot u(n)$, $0 \leq a \leq 1$

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}} \quad \xrightarrow{\text{Mostreig espectral}} \quad X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j2\pi k/N}}, \quad k = 0, \dots, N-1$$



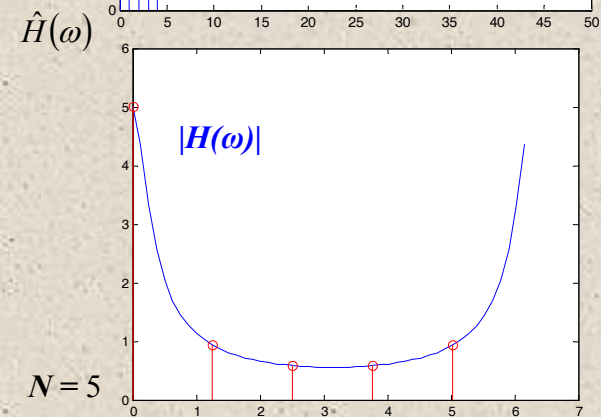
$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - l \cdot N) = \frac{a^n}{1 - a^N} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$\hat{x}(n) = \begin{cases} x_p(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \geq N \end{cases}$$



$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{1 - a^N} \cdot \frac{1 - a^N \cdot e^{-j\omega}}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$$

- Encara que $X(\omega) \neq \hat{X}(\omega)$ quan s'utilitza una versió incompleta del senyal original ($\hat{x}(n)$), els resultats en $\omega = 2\pi k/N$ són els mateixos



Transformada Discreta de Fourier

T. Directa: (*DFT*)

T. Inversa: (*IDFT*)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}}$$

$K = 0, 1, \dots, N-1$

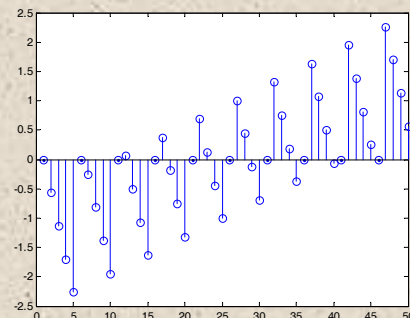
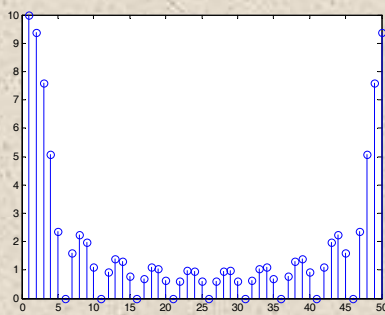
- Exemple:** $x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & n \geq N \end{cases}$ $N \geq L$ $\xrightarrow{\text{DFT}}$ $X(k) = \frac{\sin(\omega L / 2)}{\sin(\omega / 2)} \cdot e^{-j\pi \cdot k(L-1)/N}$

$$\left| X\left(\frac{2\pi \cdot k}{N}\right) \right|$$

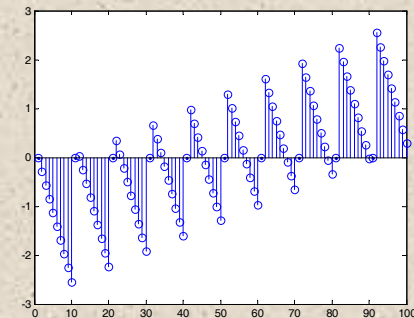
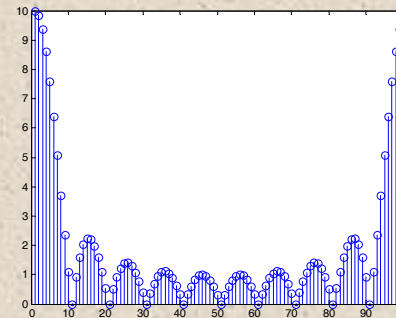
$$\theta\left(\frac{2\pi \cdot k}{N}\right)$$

$$\left| X\left(\frac{2\pi \cdot k}{N}\right) \right|$$

$$\theta\left(\frac{2\pi \cdot k}{N}\right)$$



$N = 50$



$N = 100$



Altres representacions de la DFT i la IDFT

- **Transformació lineal.-** Permet una representació de la DFT i IDFT **matricial**

DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{k \cdot n}$$

$$W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$$

IDFT:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-k \cdot n}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \quad W_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad X_N = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

Senyal original $x(n)$

Bases de Fourier (Matriu identitat **ortogonal**)

Espectre: $X(k)$

- **DFT:** $X_N = W_N \cdot x_N$

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^*$$

- **IDFT:** $x_N = W_N^{-1} \cdot X_N = \frac{1}{N} W_N^* \cdot X_N$

$$W_N \cdot W_N^{-1} = N \cdot I_N$$

I_N .- Matriu identitat



Relacions amb el domini freqüencial continu

- **Coeficients de Fourier de seqüències periòdiques**

- La DFT proporciona les línies del espectre

$$X(k) = N \cdot c_k \quad \rightarrow \quad c_k - \text{Coeficients de la seqüència periòdica}$$

- **Transformada de Fourier de seqüències aperiòdiques**

- La IDFT donarà com a resultat la seqüència original $x(n)$, només quan aquesta tingui una longitud finita $L \leq N$

- **Transformada 'z' (versió amb l'espectre discret)**

$$X(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - e^{j2\pi k/N} \cdot z^{-1}} \quad \rightarrow \quad X(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega \cdot N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - e^{j(\omega - 2\pi k/N)} \cdot z^{-1}}$$

- **Propietats de periodicitat i linealitat**

$$x(n + N) = x(n) \quad \leftrightarrow \quad X(k + N) = X(k)$$

$$a_1 \cdot x_1(n) + a_2 \cdot x_2(n) \quad \leftrightarrow \quad a_1 \cdot X_1(k) + a_2 \cdot X_2(k)$$

Simetria de la DFT

Secuencia \longleftrightarrow DFT

En general

$x(n)$	$X(k)$
$x^*(n)$	$X^*(N-k)$
$x^*(N-n)$	$X^*(k)$
$x_R(n)$	$X_{ce}(k) = 1/2[X(k) + X^*(N-k)]$
$j \cdot x_I(n)$	$X_{ce}(k) = 1/2[X(k) - X^*(N-k)]$
$x_{ce}(n) = 1/2[x(n) + x^*(N-n)]$	$X_R(k)$
$x_{co}(n) = 1/2[x(n) - x^*(N-n)]$	$j \cdot X_I(k)$

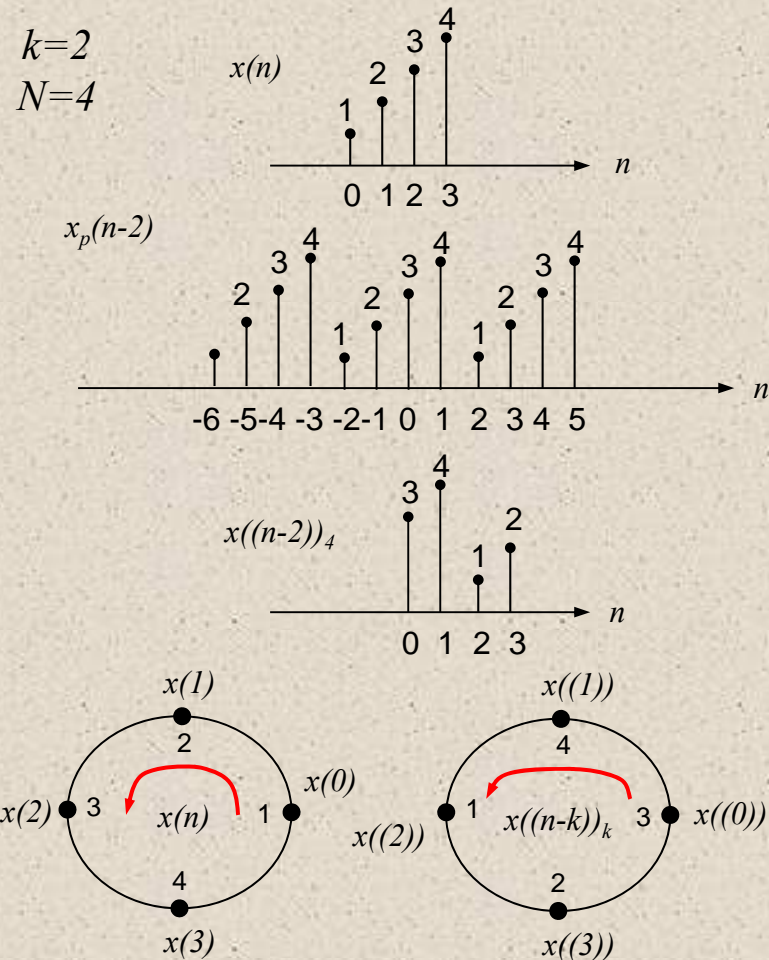
Nomès senyals reals

Qualsevol senyal real	$X(k) = X^*(N-k)$
$x(n)$	$X_R(k) = X_R(N-k)$
	$X_I(k) = -X_I(N-k)$
	$ X(k) = X(N-k) $
	$\angle X(k) = -\angle X(N-k)$
$x_e(n) = 1/2[x(n) + x(N-n)]$	$X_R(k)$
$x_o(n) = 1/2[x(n) - x(N-n)]$	$j \cdot X_I(k)$

$X_{ce(o)}$.- Seqüència circular parell o senar

Desplaçament circular

$$x((n-k))_N = x_p(n-k), \quad 0 \leq n \leq N-1$$



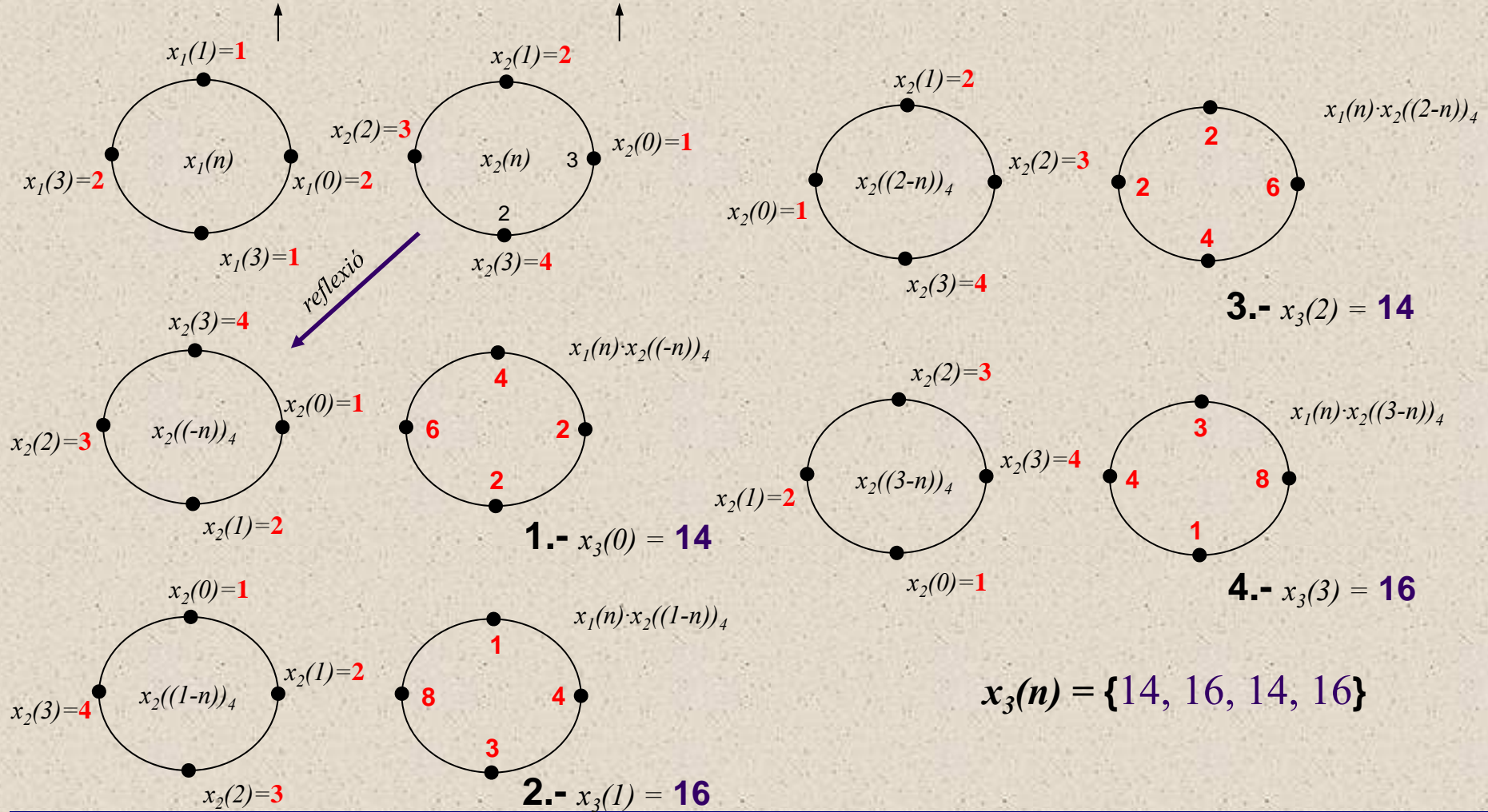
Propietats de la DFT

<i>Propietat/Teorema</i>	<i>Domini temporal</i>	<i>Domini freqüencial</i>
<i>Notació</i>	$x(n), x_1(n), x_2(n), y(n)$	$X(k), X_1(k), X_2(k), Y(k)$
<i>Periodicitat</i>	$x(n) = x(n+N)$	$X(k) = X(k+N)$
<i>Linealitat</i>	$a_1 \cdot x_1(n) + a_2 \cdot x_2(n)$	$a_1 \cdot X_1(k) + a_2 \cdot X_2(k)$
<i>Reflexió temporal</i>	$x(n-N)$	$X(N-k)$
<i>Desplaçament circular en el temps</i>	$x((n-l))_N$	$X(k) \cdot e^{-j \cdot 2\pi k l / N}$
<i>Desplaçament circular en freqüència</i>	$x(n) \cdot e^{j \cdot 2\pi l n / N}$	$X((k-l))_N$
<i>Connjugació complexa</i>	$x^*(n)$	$X^*(N-k)$
<i>Convolució circular</i>	$x_1(n) \circledast x_2(n)$	$X_1(k) \cdot X_2(k)$
<i>Correlació circular</i>	$x(n) \circledast y^*(-n)$	$X(k) \cdot Y^*(k)$
<i>Multiplicació de dues seqüències</i>	$x_1(n) \cdot x_2(n)$	$\frac{1}{N} X_1(k) \circledast X_2(k)$
<i>Teorema de Parseval</i>	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \cdot y^*(n)$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot Y^*(k)$
	$x_3(m) = x_1(n) \circledast x_2(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) x_2((m-n))_N, \quad m = 0, 1, \dots, N-1$	



Càlcul de la convolució circular

- $x_1(n) = \{2, 1, 2, 1\}$, $x_2(n) = \{1, 2, 3, 4\}$



Primeres conclusions sobre la DFT i IDFT

- Tot i la **pèrdua de precisió** vers al temps continu, la DFT és molt utilitzada en nombroses aplicacions de processat de senyal, anàlisi espectral o filtratge lineal, entre d'altres
- Estimacions més precises del temps continu ($X(\omega)$) es poden aconseguir augmentant el nombre de mostres (N) o bé usant tècniques d'interpolació
- Aquests processos (DFT i IDFT), només es poden practicar sobre senyals **aperiòdiques** amb un nombre de mostres no superior al de la característica freqüencial ($L \leq N$)
- L'operació $H(k) \cdot X(k)$ (*convolució circular*) **NO** serveix en aplicacions de *filtrat lineal* (**convolució lineal**) però com veurem hi ha solució
- Existeixen diversos algorismes de càlcul ràpid que es basen en la **transformació lineal**: FFT (*Fast Fourier Transform*), Goetzel, o 'z'-chirp



Filtrat lineal amb la DFT

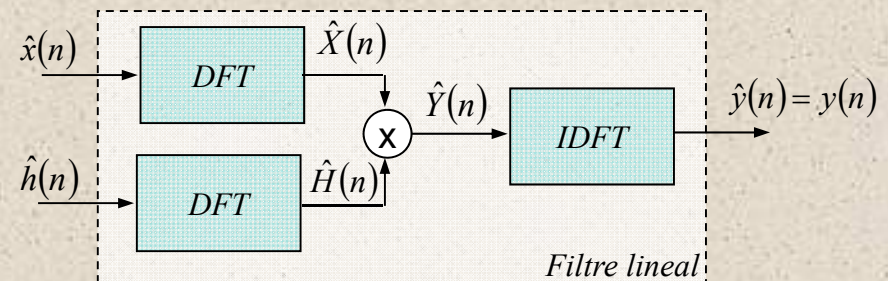
- Adherir **zeros** a les seqüències $h(n)$ i $x(n)$, és la solució al problema de discretització i fa possible l'ús de la DFT/IDFT en operacions de filtratge lineal
- Com posar els zeros?
 - Modificant $h(n)$ i $x(n)$ (de longitud M i L respectivament) de manera que les noves seqüències $\hat{h}(n)$ i $\hat{x}(n)$ siguin de longitud N , on:

$$N \geq L + M - 1, \text{ i } \begin{cases} \hat{x}(n) = 0, & L < n \leq N \\ \hat{h}(n) = 0, & M < n \leq N \end{cases}$$

$$y(n) = h(n) * x(n) \Leftrightarrow Y(k) = H(k) \cdot X(k)$$

Domini temporal

Domini freqüencial



- Aquest mètode de filtratge lineal s'utilitza a la pràctica ja que, tot i ser indirecte (2DFT's + 1 IDFT), amb la FFT (molt més eficient) és una operació més ràpida que la convolució lineal

Filtrat lineal: Exemple

- Determineu la resposta $y(n)$ del filtre $h(n) = \{1, 2, 3\}$ amb entrada $x(n) = \{1, 2, 2, 1\}$ utilitzant la DFT i la IDFT
- Longitud mínima de la DFT ha de ser de **6** zeros ($N=L+M-1$)
- Com que el càlcul de la DFT és més eficient amb un valor diàdic (potència de 2), agafen $N = 8$

$$X(k) = \sum_{n=0}^7 x(n) e^{-j \frac{2\pi \cdot k}{8} \cdot n} = 1 + 2 \cdot e^{-j\pi k/4} + 2 \cdot e^{-j\pi k/2} + 2 \cdot e^{-j3\pi k/4}$$

$$H(k) = \sum_{n=0}^7 H(n) e^{-j \frac{2\pi \cdot k}{8} \cdot n} = 1 + 2 \cdot e^{-j\pi k/4} + 3 \cdot e^{-j\pi k/2}$$

$$Y(k) = H(k)X(k), \quad k = 0, 1, \dots, 7$$

$$\left. \begin{array}{l} X(0) = 6 \\ X(1) = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} - j \left(\frac{4 + 3\sqrt{2}}{2} \right) \\ X(2) = -1 - j \\ X(3) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + j \left(\frac{4 - 3\sqrt{2}}{2} \right) \\ X(4) = 0 \\ X(5) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} - j \left(\frac{4 - 3\sqrt{2}}{2} \right) \\ X(6) = -1 + j \\ X(7) = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} + j \left(\frac{4 + 3\sqrt{2}}{2} \right) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} H(0) = 6 \\ H(1) = 1 + \sqrt{2} - j(3 + \sqrt{2}) \\ H(2) = -2 - j2 \\ H(3) = 1 - \sqrt{2} + j(3 - \sqrt{2}) \\ H(4) = 2 \\ H(5) = 1 - \sqrt{2} - j(3 - \sqrt{2}) \\ H(6) = -1 + j \\ H(7) = 1 + \sqrt{2} + j(3 + \sqrt{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} Y(0) = 36 \\ Y(1) = -14.07 - j17.48 \\ Y(2) = j4 \\ Y(3) = 0.07 + j0.515 \\ Y(4) = 0 \\ Y(5) = 0.07 - j0.515 \\ Y(6) = -j4 \\ Y(7) = -14.07 + j17.48 \end{array}$$

- IDFT de 8 punts: $y(n) = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) e^{j2\pi k \cdot n/8}$, $n = 0, 1, \dots, 7 \rightarrow y(n) = \{1, 4, 9, 11, 8, 3, 0, 0\}$
- El resultat és el mateix que amb la convolució lineal: $y(n) = h(n) * x(n)$

Filtrat lineal: Efecte del 'aliasing'

- Si en l'exemple anterior s'utilitza $N = L = 4$, la sortida $y(n)$ queda distorsionada en les seves primeres mostres

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi \cdot k}{4} \cdot n} = 1 + 2 \cdot e^{-j\pi k} + 2 \cdot e^{-j\pi k/2} + 2 \cdot e^{-j3\pi k/2} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$H(k) = \sum_{n=0}^4 H(n) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi \cdot k}{4} \cdot n} = 1 + 2 \cdot e^{-j\pi k/2} + 3 \cdot e^{-j\pi k}$$

$$\left. \begin{array}{l} X(0)=6 \quad X(1)=-1-j \\ X(2)=0 \quad X(3)=-1+j \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} X(0)=6 \quad X(1)=-1-j \\ X(2)=0 \quad X(3)=-1+j \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} H(0)=6 \quad H(1)=-2-j2 \\ H(2)=2 \quad H(3)=-2+j2 \end{array} \right\} \hat{Y}(0)=36 \quad \hat{Y}(1)=j4 \\ \hat{Y}(2)=0 \quad \hat{Y}(3)=-j4$$

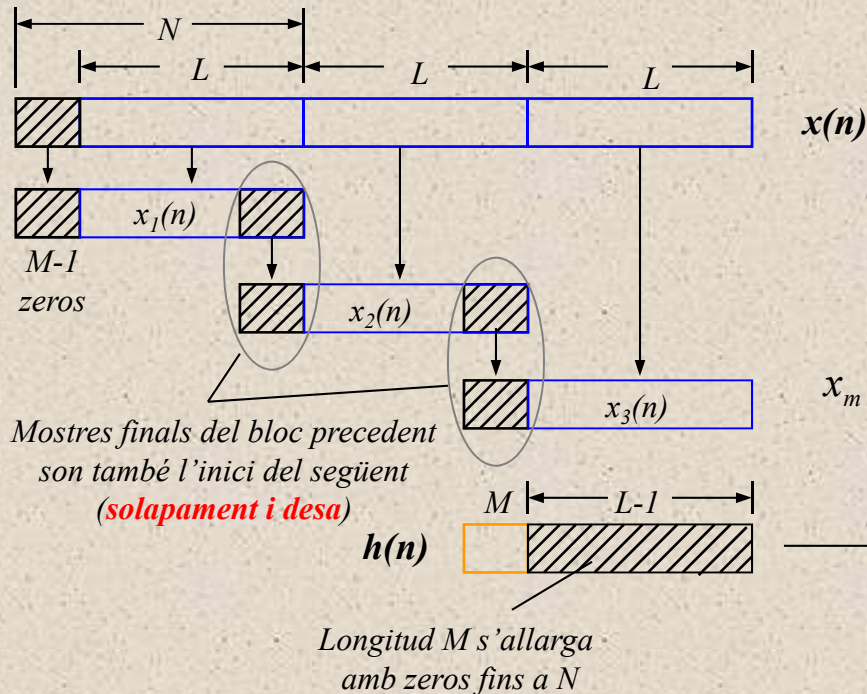
$$y(n) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 Y(k) \cdot e^{j2\pi k/4}, \quad n = 0, 1, \dots, 3 \quad \rightarrow \quad \hat{y}(n) = \{9, 7, 9, 11\}$$

Mostres afectades per l'efecte de 'aliasing'

- Aquest problema dificulta el càlcul de la DFT i IDFT de **seqüències llargues**

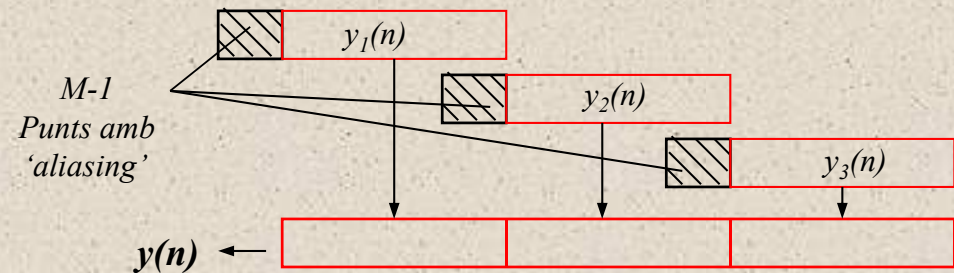
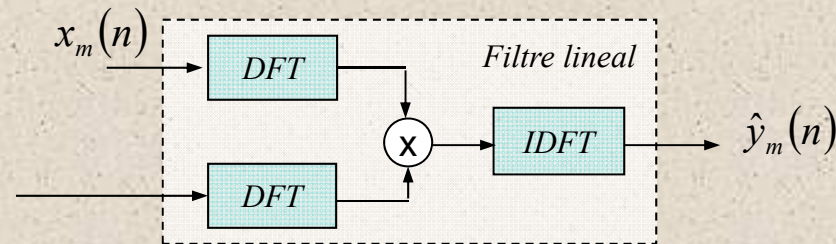
Filtrat de seqüències llargues (I)

- Mètode de **solapament i desa**



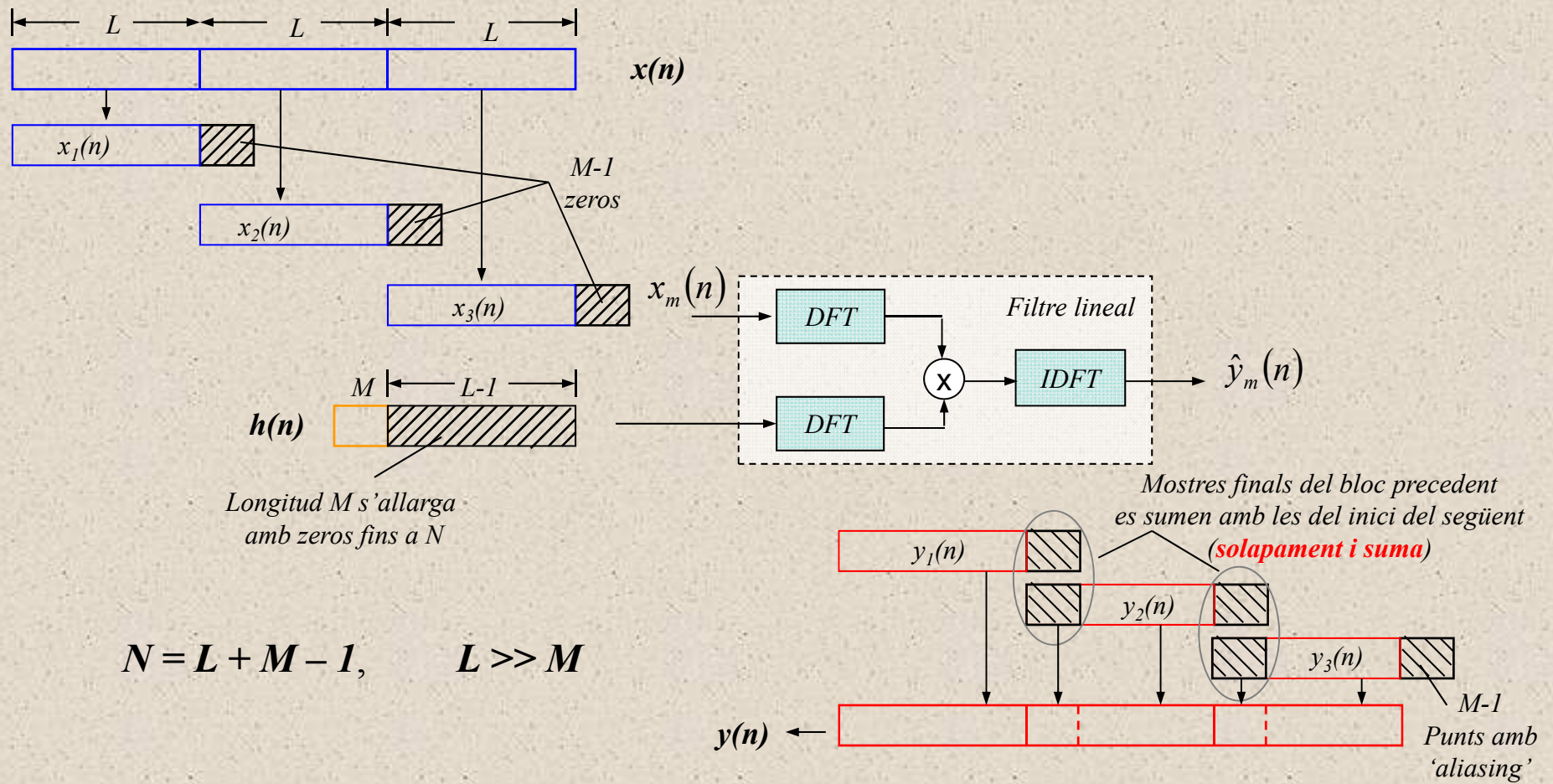
$$N = L + M - 1, \quad L \gg M$$

- Quan limitacions de memòria obliga a segmentar l'entrada i processar-les per separat
- Amb la unió dels els blocs es forma una seqüència **equivalent** a la seqüència única.



Filtrat de seqüències llargues (II)

- Mètode de *solapament i suma*



$$N = L + M - 1, \quad L \gg M$$

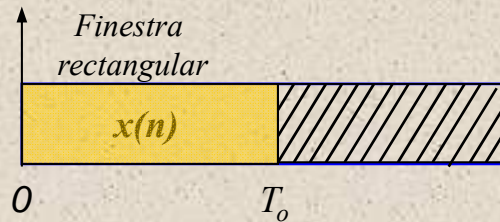
Anàlisi freqüencial amb la DFT

- Per calcular l'espectre d'un senyal, són necessaris els seus valors en **tots** els instants de temps.
- En un càlcul '**offline**', és possible utilitzar totes les mostres del senyal original ($k=N$), si el nombre no és excessiu i el temps de mostreig és coherent.
- En aplicacions de '**temps real**' resulta **inviàble** utilitzar tots els instants de temps del senyal original i, per tant, l'espectre es determina només amb una part de les mostres d'entrada (finestres)
- Conseqüències del enfinestrament de senyals:
 - **Pèrdua de resolució freqüencial**
 - '**Leakage**' (Pèrdues de l'espectre)



Augment de la resolució freqüencial

- Millora si s'amplia la finestra (w)

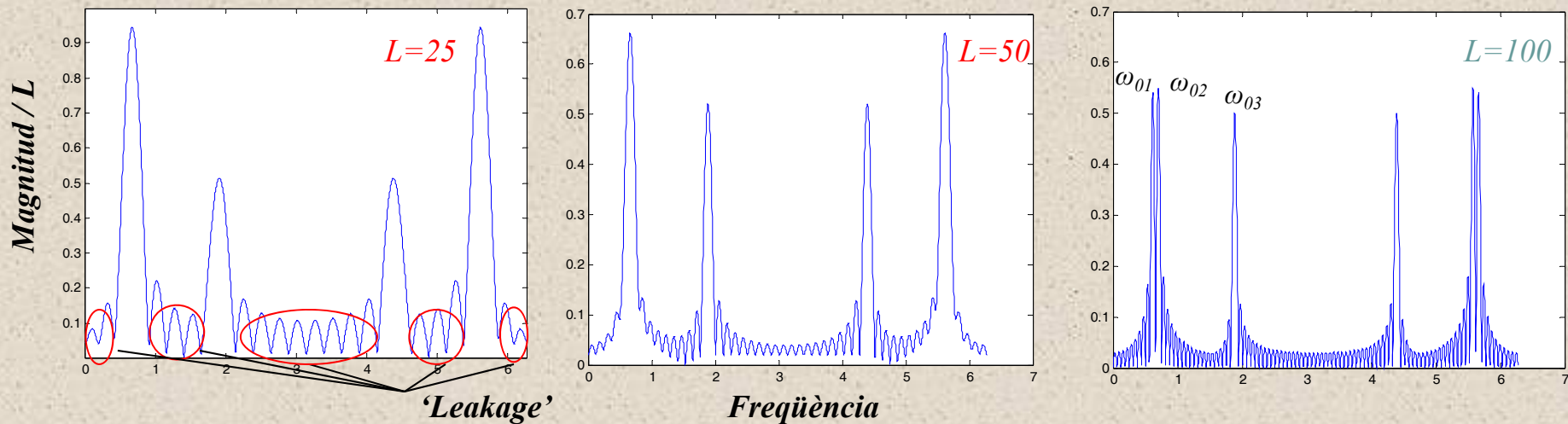


$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & L \leq n \leq N \end{cases}$$

$T_o = L \cdot T$.- Rang de $x(n)$
 L .- Nombre de mostres
 T .- Temps de mostreig

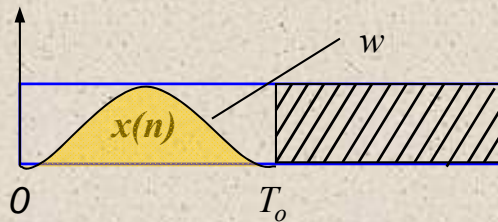
- Exemple: $x(n) = \cos(\omega_{01} \cdot n) + \cos(\omega_{02} \cdot n) + \cos(\omega_{03} \cdot n)$

- $\omega_{01} = 0.2 \cdot \pi$, $\omega_{02} = 0.22 \cdot \pi$, $\omega_{03} = 0.6 \cdot \pi$, $T=1$, $N = 2048$



Reducció del 'Leakage'

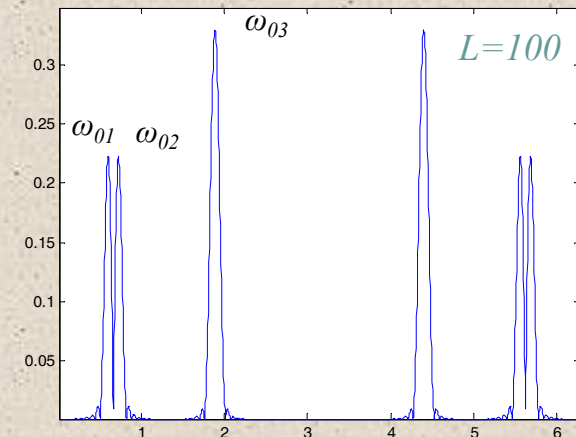
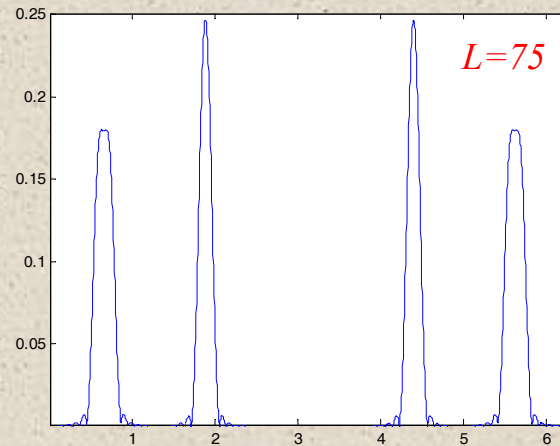
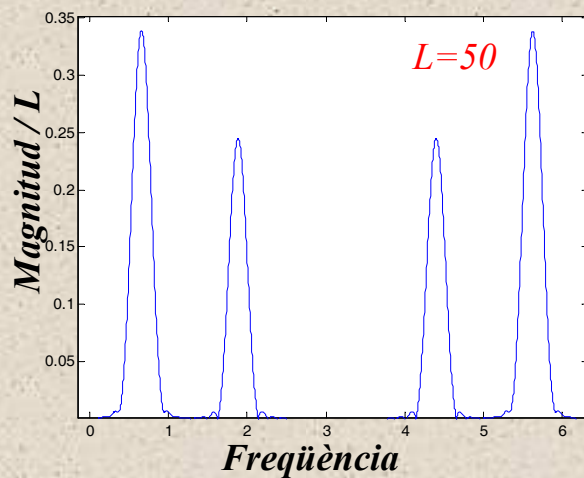
- Es pot reduir utilitzant finestres més suavitzades (p.e: *Finestra de Hanning*)



$$w(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L-1}n\right) \right), & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & L \leq n \leq N \end{cases}$$

- Exemple: $x(n) = \cos(\omega_{01} \cdot n) + \cos(\omega_{02} \cdot n) + \cos(\omega_{03} \cdot n)$

- $\omega_{01} = 0.2 \cdot \pi$, $\omega_{02} = 0.22 \cdot \pi$, $\omega_{03} = 0.6 \cdot \pi$, $T=1$, $N = 2048$



Filtres analògics i digitals (FEAD)

***Implementació de
Sistemes Discrets***

Introducció

- **Objectiu:**

- **Implementació** 'hardware/software', (per mitjà de PC, DSP o estructura $\mu P/\mu C$) de l'**equació en diferències** del sistema

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) \quad H(z) = \frac{\sum_{k=0}^n b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^m a_k \cdot z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_n \cdot z^{-n}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_m \cdot z^{-m}}$$

FIR
IIR

- **Organització de recursos segons complexitat computacional**

- Estructura FIR/IIR (Diagrama de blocs) a utilitzar?
- Nombre de **multiplicadors, sumadors, posicions de memòria necessàries?**
- Longitud de paraula (Nombre de bits necessari)?
- **Disseny dels coeficients (a_k, b_k) i nombre de valors (N, M) segons aplicació** (No es considera en aquest capítol)

Contingut

1. Configuracions i estructures bàsiques (Diagrama de blocs)

- FIR i IIR

2. Representació sistemàtica en l'espai d'estats

3. Representació numèrica de paraules digitals

- Avantatges i inconvenients de l'aritmètica de *punt fixe* i *punt flotant*
- Truncat i arrodoniment

4. Conseqüències en la **quantificació** dels coeficients en sistemes digitals



Estructures

- Formes **directes**:
 - **FIR**: Bàsica i Fase Lineal
 - **IIR**: Tipus I, II i formes transposades
- **Mostreig en freqüència (FIR)**
- **Connexió de blocs (2on. ordre)**
 - Cascada (o sèrie)
 - Paral·lel
- **Estructura 'Lattice'** (o en creu)
 - Configuració bàsica (FIR i IIR)
 - Amb graons (IIR)

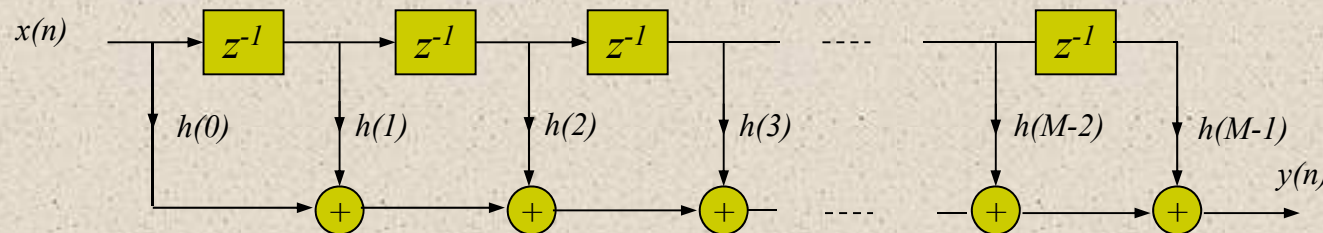


Estructures directes (FIR)

- Obtinguda directament de l'expressió general

$$h(n) = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & n \geq M \end{cases} \quad y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) \cdot x(n-k)$$

- Estructura bàsica (Filtre transversal):**



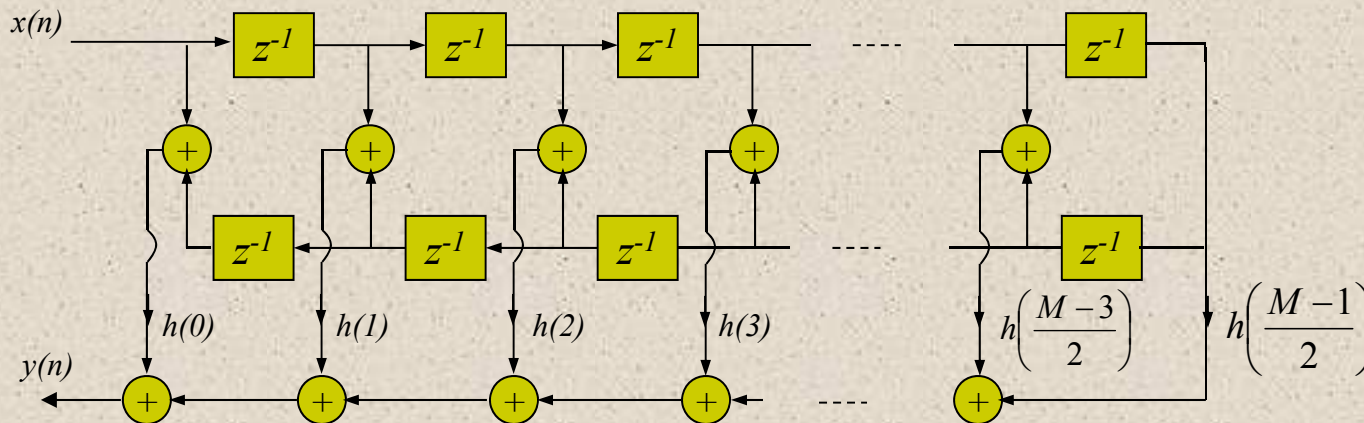
Recursos computacionals

Posicions de memòria: **M-1**

Multiplicacions: **M**

Sumes: **M-1**

- Fase lineal (Si $h(n)$ compleix condicions de simetria $h(n) = \pm h(M-1-n)$, amb M senar)**



Recursos computacionals

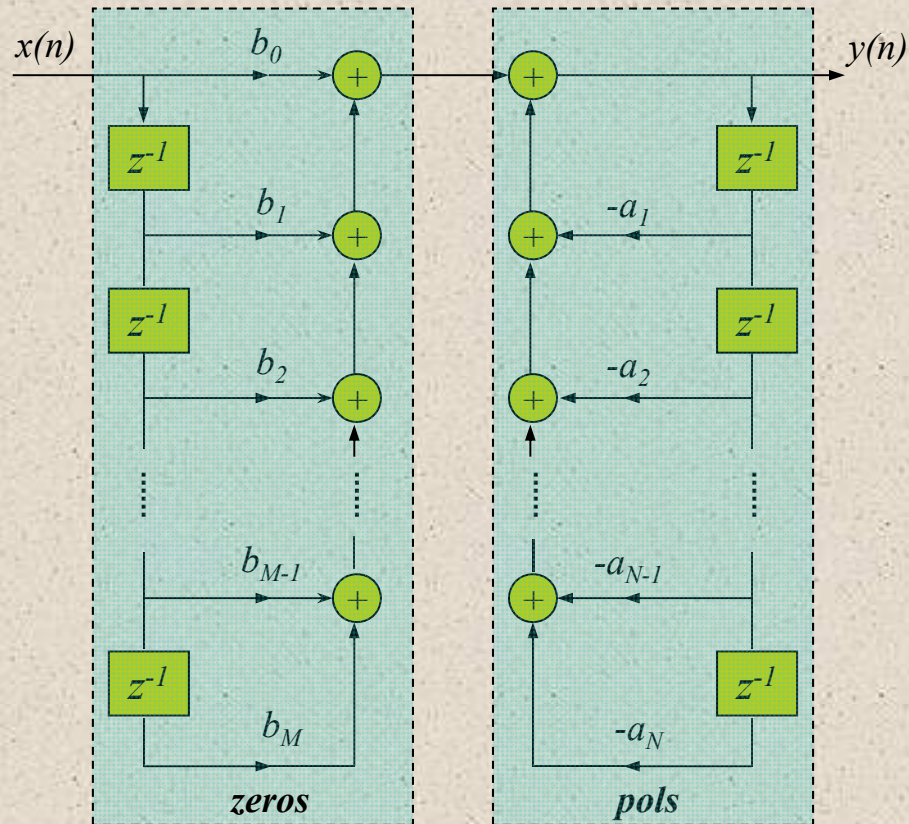
Posicions de memòria: **M-1**

Multiplicacions: (M-1)/2

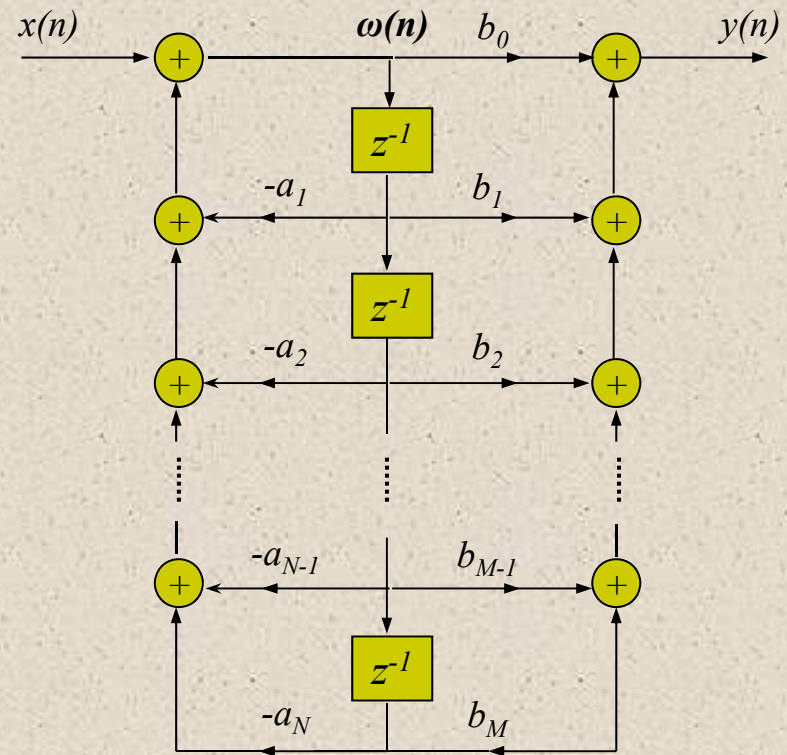
Sumes: **M-1**

Estructures directes (IIR)

Tipus I



Tipus II (Forma canònica)



Recursos computacionals

Posicions de memòria: $M+N+1$

Multiplicacions: $M+N+1$

Sumes: $M+N$

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k \cdot y(n-k)$$

Recursos computacionals

Posicions de memòria: $M+N+1$

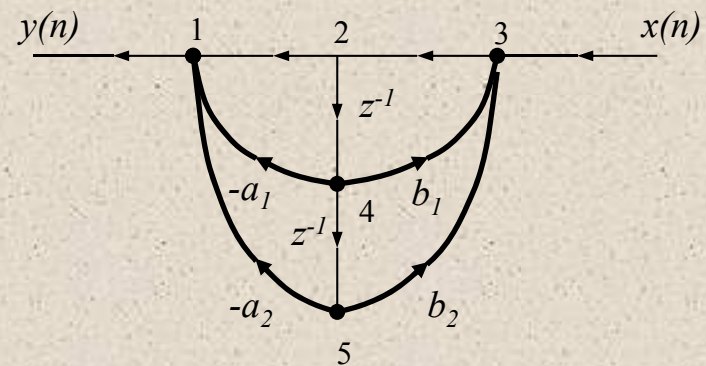
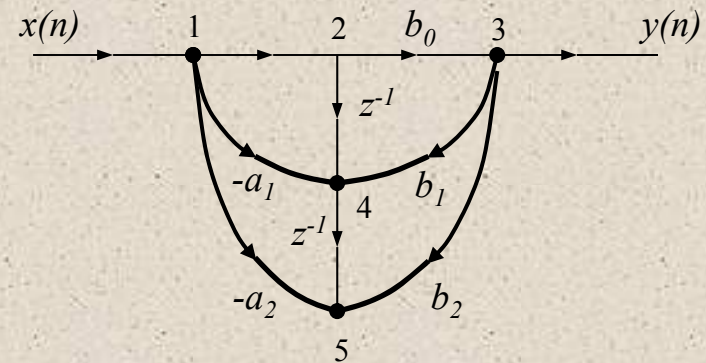
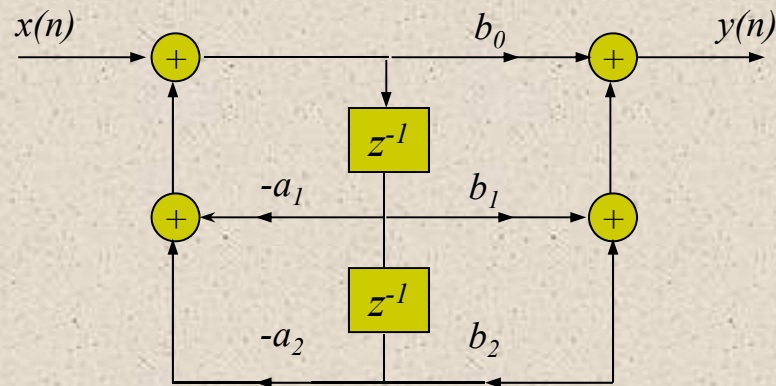
Multiplicacions: $\max\{M,N\}$

Sumes: $M+N$



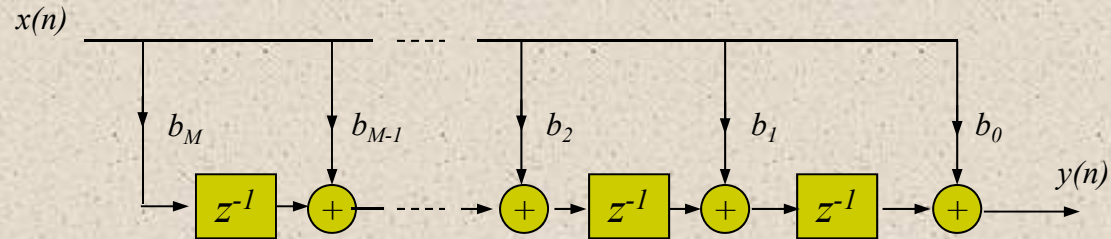
Grafs i estructures transposades

- Intercanviant sortida per entrada i invertint les direccions de totes les branques, la funció de transferència es manté **inalterada**. Així és possible aconseguir estructures transposades

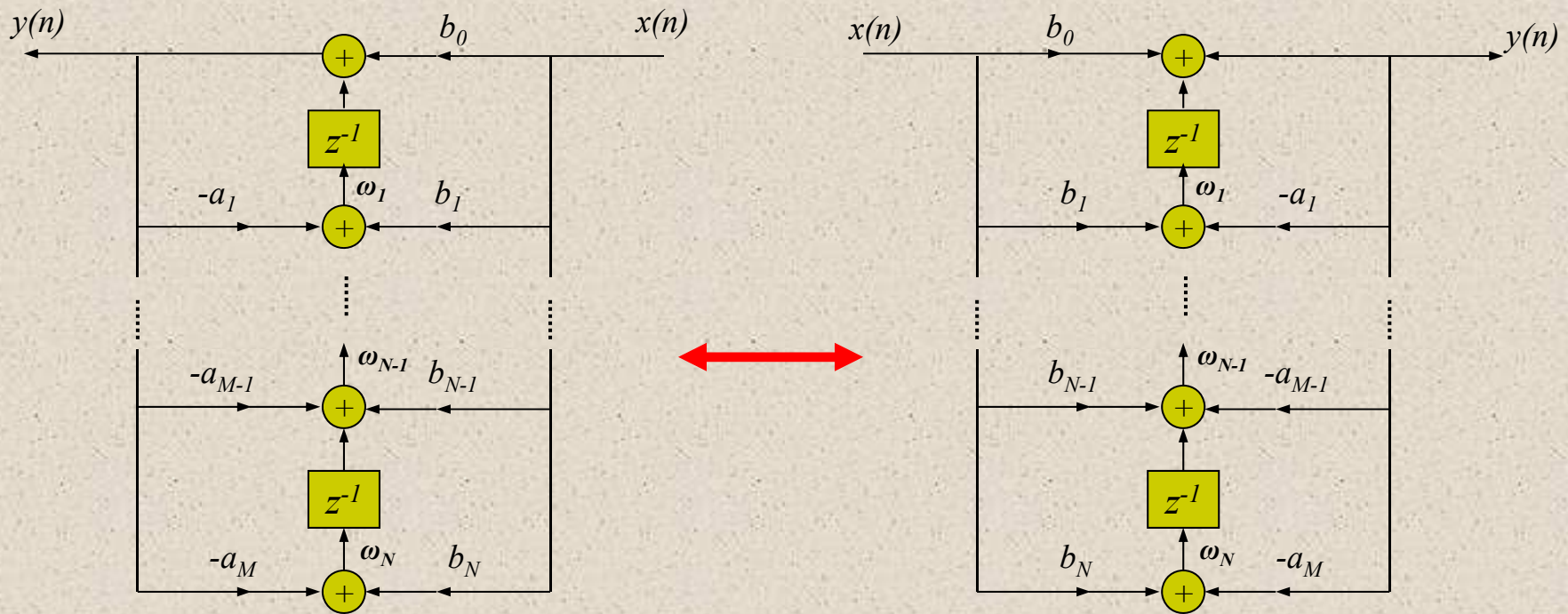


Estructures transposades (FIR i IIR)

- FIR

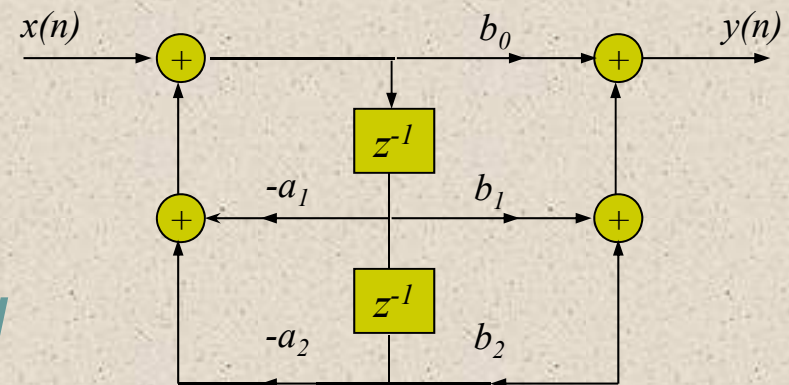


- Bidireccionalitat de les estructures IIR



Mòduls de 2on. ordre

- Les estructures presenten problemes de **sensibilitat** degut a limitacions en la quantificació dels coeficients (longitud de bits finit)
- (a_k) i (b_k) són valors petits i una petita variació provoquen un canvi considerable en els **pols** i **zeros** del sistema $H(z)$, sobre tot si és d'ordre elevat
- Per evitar aquests problemes s'utilitzen **mòduls d'ordre 2** (IIR, FIR) o **ordre 4** (només FIR)
- Implementacions FIR:
 - Estructures en **cascada** (sèrie)
- Implementacions IIR:
 - Estructures en **cascada** o **paral·lel**



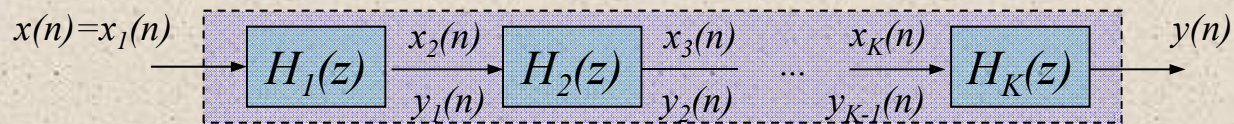
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}$$

Connexió en cascada FIR

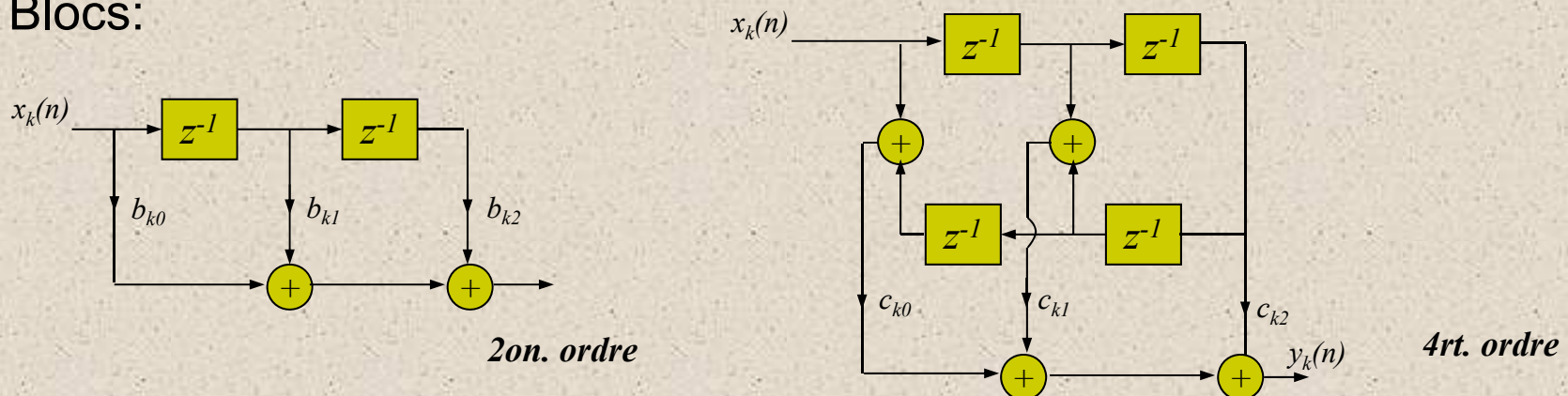
- Expressions generals 2on. i 4rt. ordre (fase lineal)

$$H(z) = \prod_{k=1}^K H_k(z) \quad \begin{array}{l} \text{2on. } H_k(z) = b_{k0} + b_{k1} \cdot z^{-1} + b_{k2} \cdot z^{-2}, \quad k = 1, 2, \dots, K \\ \text{4rt. } H_k(z) = c_{k0} + c_{k1} \cdot z^{-1} + c_{k2} \cdot z^{-2} + c_{k1} \cdot z^{-3} + c_{k0} \cdot z^{-4} = c_{k0} (1 - z_k \cdot z^{-1}) (1 - z_k^* \cdot z^{-1}) (1 - z^{-1}/z_k) (1 - z^{-1}/z_k^*) \end{array}$$

- Realització:

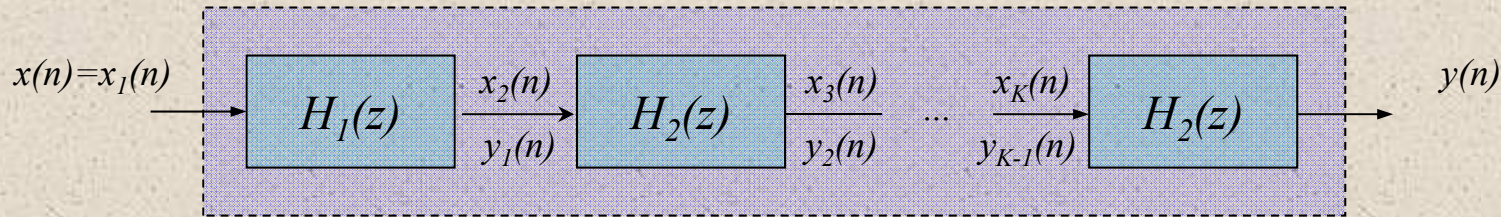


- Blocs:

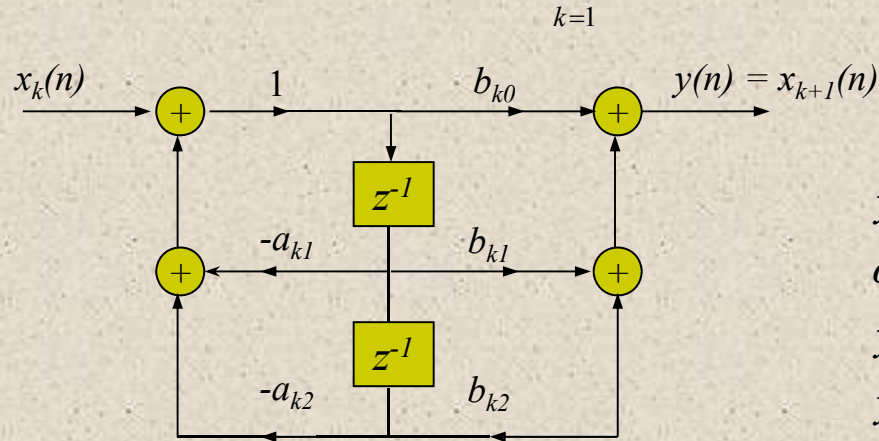


- K , enter més pròxim a $(M+1)/2$.
- $b_0 = b_{10} \cdot b_{20} \cdots b_{K0}$ o bé pot ser assignat a un dels blocs
- Sempre és millor utilitzar **parells de complexos conjugats** per a que b_{ki} siguin reals. (Agrupació arbitrària)

Connexió en cascada IIR



$$H(z) = \prod_{k=1}^K H_k(z) \quad , \quad K = I\{(N+1)/2\} \quad \text{i} \quad N \geq M$$



$$H(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1} \cdot z^{-1} + b_{k2} \cdot z^{-2}}{1 + a_{k1} \cdot z^{-1} + a_{k2} \cdot z^{-2}}$$

$$y_0(n) = x(n)$$

$$\omega_k(n) = -a_k \cdot \omega_k(n-1) - a_{k2} \cdot \omega_k(n-2) + y_{k-1}(n)$$

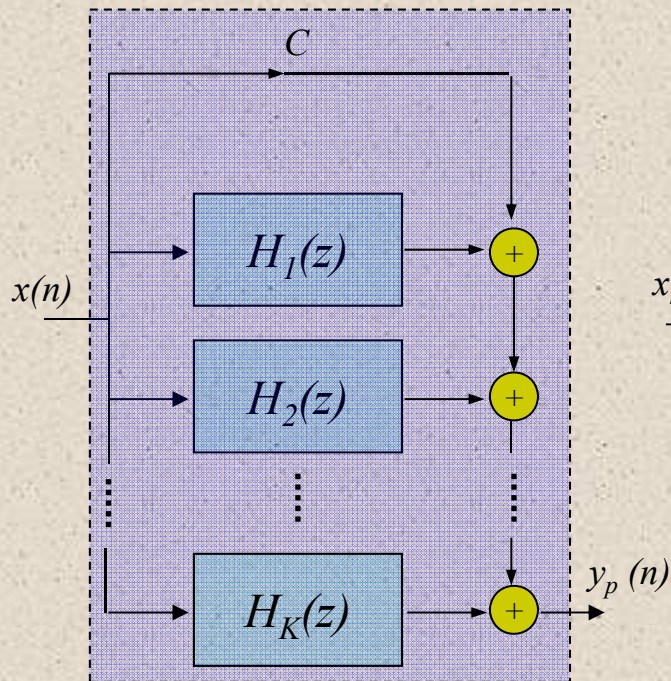
$$y_k(n) = b_{k0} \cdot \omega_k(n) + b_{k1} \cdot \omega_k(n-1) + b_{k2} \cdot \omega_k(n-2)$$

$$y_n = y_K(n)$$

- Existeixen moltes combinacions de realització equivalents en cascada dependent de com s'agrupin pols i zeros en cada bloc
- No obstant, a la pràctica no són equivalents perquè **limitacions en la precisió** dels coeficients (finita) altera els pols i zeros de cada bloc

Connexió en paral·lel

- Requereix expandir la funció de transferència en *fraccions simples*

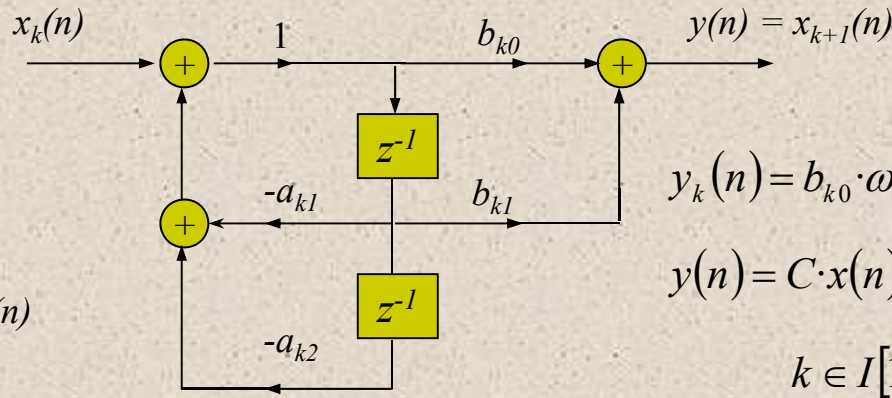


$$H(z) = C + \sum_{k=1}^N H_k(z) = C + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k \cdot z^{-1}}$$

C .- Constant ($C = b_N / a_N$)

A_k .- Coeficients (o residus) en l'expansió

p_k .- Pols del sistema



$$y_k(n) = b_{k0} \cdot \omega_k(n) + b_{k1} \cdot \omega_k(n-1)$$

$$y(n) = C \cdot x(n) + \sum_{k=1}^K H_k(z)$$

$k \in I[1, K]$

- Com que A_k pot ser complex, per evitar multiplicacions amb aquests es combinen parells de **pols conjugats**. D'aquí els dos pols de la funció de transferència

$$H_k(z) = \frac{A_k}{1 - p_k \cdot z^{-1}} = \frac{b_{k0} + b_{k1} \cdot z^{-1}}{1 + a_{k1} \cdot z^{-1} + a_{k2} \cdot z^{-2}}$$

Exemple

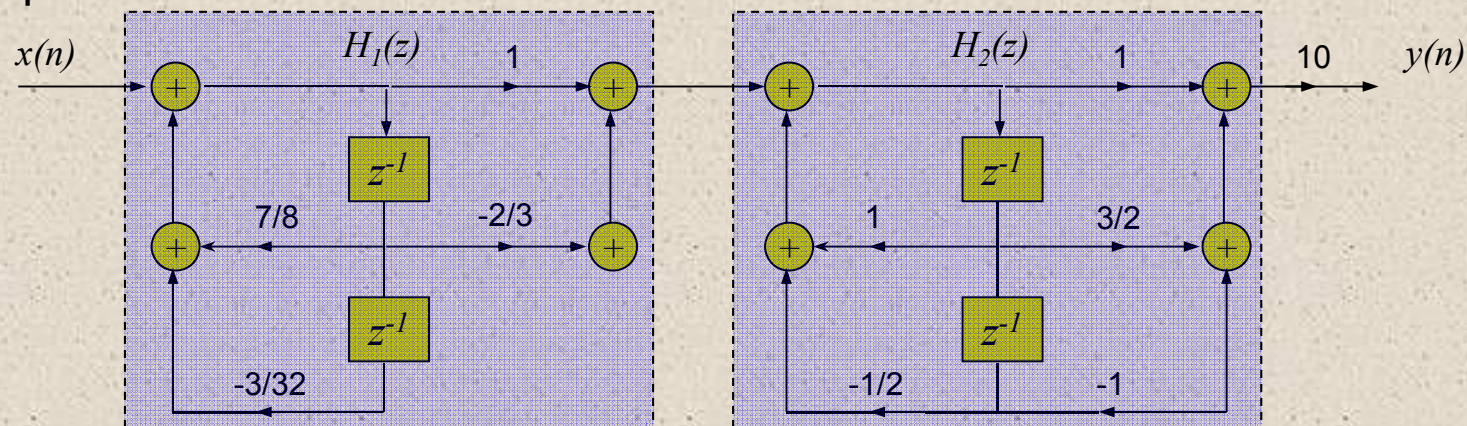
- Determineu la realització *cascada* i *paral·lel* del sistema caracteritzat per la següent expressió:

$$H(z) = \frac{10 \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right) (1 + 2z^{-1})}{\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{8}z^{-1}\right) \left[1 - \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)z^{-1}\right] \left[1 - \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)z^{-1}\right]}$$

- Cascada.* Una possible combinació de $H(z)$ és:

$$H(z) = 10 \cdot H_1(z) \cdot H_2(z), \quad H_1(z) = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - \frac{7}{8}z^{-1} + \frac{3}{32}z^{-2}}, \quad H_2(z) = \frac{1 + \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

- Implementació:



Exemple (Cont)

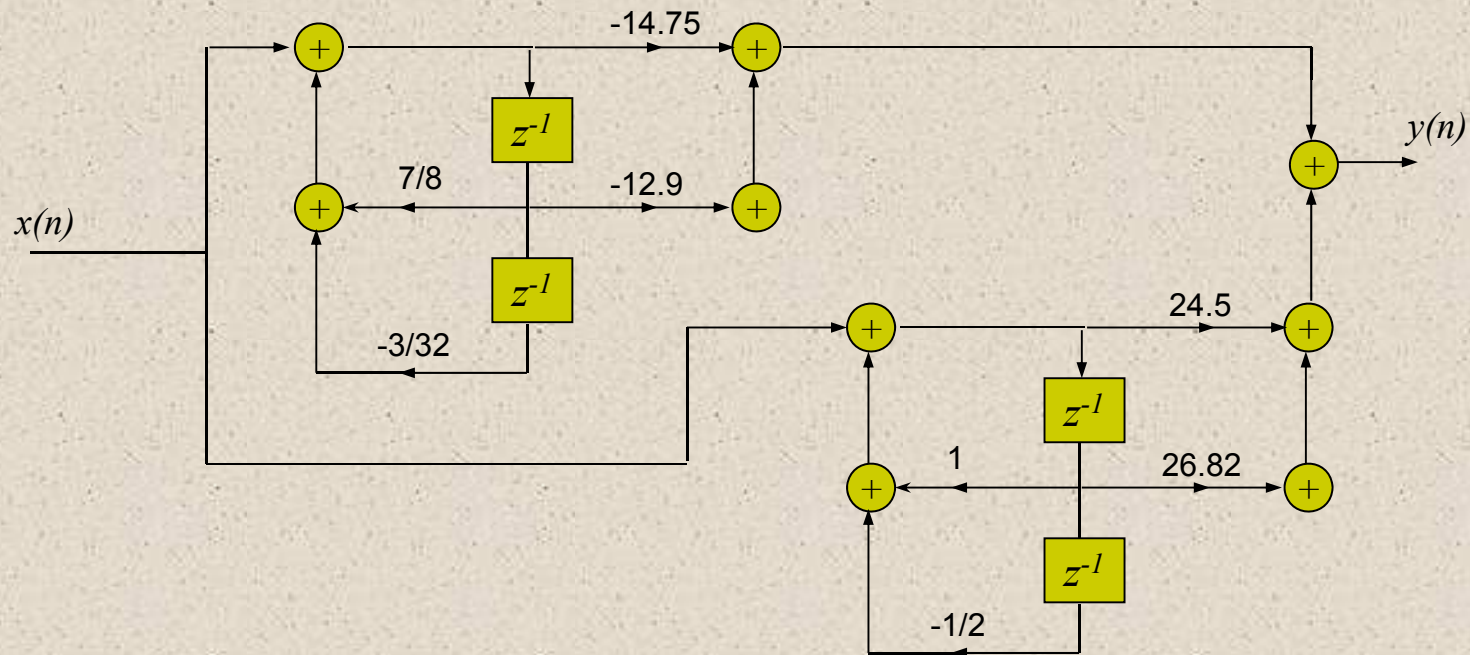
- En la realització *paral·lel*, s'ha d'expandir prèviament $H(z)$ en *fraccions simples*

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{8}z^{-1}} + \frac{A_3}{1 - \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)z^{-1}} + \frac{A_3^*}{1 - \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)z^{-1}}$$

$$\begin{cases} A_1 = 2.93 \\ A_2 = -17.68 \\ A_3 = 12.25 - j14.57 \\ A_3^* = 12.25 + j14.57 \end{cases}$$

$$H(z) = \frac{-14.75 - 12.9z^{-1}}{1 - \frac{7}{8}z^{-1} + \frac{3}{32}z^{-2}} + \frac{24.5 + 26.82z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

- Realització**



Mostreig en freqüència (FIR)

- Paràmetres determinats per la resposta en freqüència discreta. Simplifica el disseny de **filtres FIR** si $H(k)$ conté pocs valors

- Mostreig**

$$H(k + \alpha) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) \cdot e^{-j2\pi(k+\alpha)n/M} \quad k=0, 1, \dots, M-1$$

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k + \alpha) \cdot e^{j2\pi(k+\alpha)n/M}$$

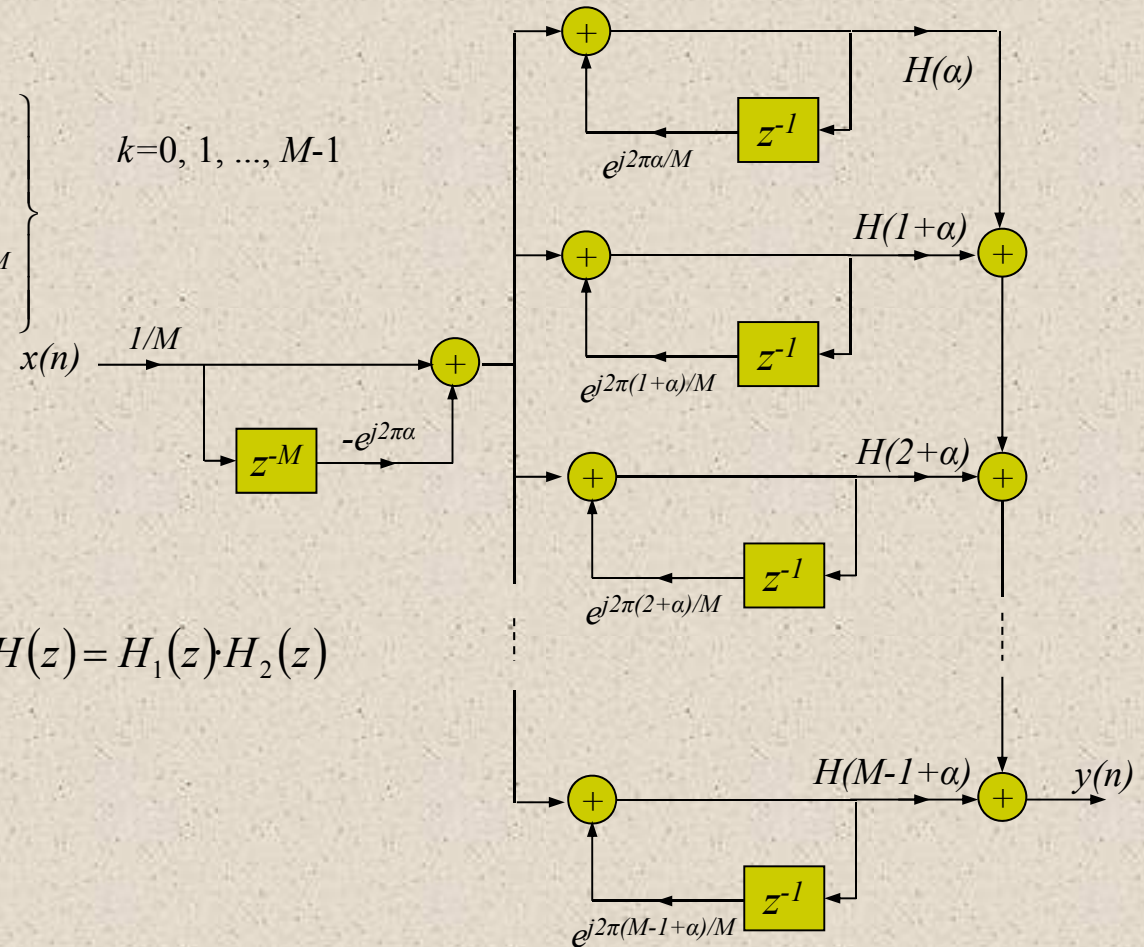
- Funció de transferència**

$$H_1(z) = \frac{1}{M} (1 - z^{-M} \cdot e^{j2\pi\alpha})$$

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k + \alpha)}{1 - e^{j2\pi(k+\alpha)/M} \cdot z^{-1}}$$

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

- $z_k = p_k = e^{j2\pi(k+\alpha)/M}$



Mostreig en freqüència (Cont)

- Amb les propietats de simetria dels filtres amb *fase lineal* és pot *simplificar* més l'estructura.

- **Propietat de simetria:** $H(k+\alpha) = H^*(M-k-\alpha)$

- Per $\alpha = 0$

$$H_2(z) = \frac{H(0)}{1-z^{-1}} + \sum_{k=1}^{(M-1)/2} \frac{A(k) + B(k) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot \cos(2\pi \cdot k/M) \cdot z^{-1} + z^{-2}} \quad \longrightarrow \quad M.- \text{ senar}$$

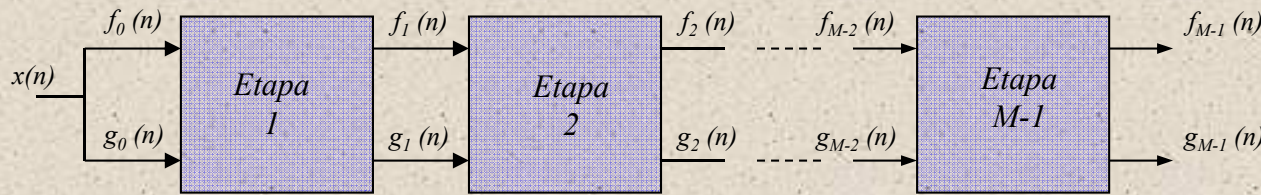
$$H_2(z) = \frac{H(0)}{1-z^{-1}} + \frac{H(M/2)}{1+z^{-1}} \sum_{k=1}^{(M/2)-1} \frac{A(k) + B(k) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot \cos(2\pi \cdot k/M) \cdot z^{-1} + z^{-2}} \quad \longrightarrow \quad M.- \text{ parell}$$

$$A(k) = H(k) + H(M - k)$$

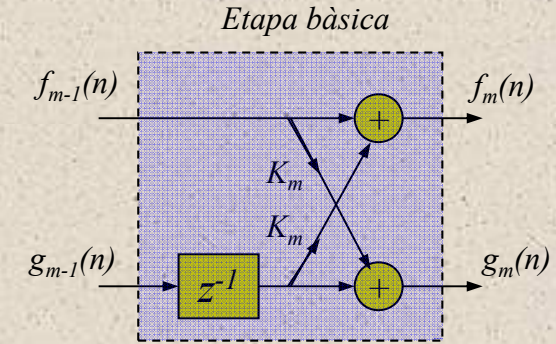
$$B(k) = H(k) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot k/M} + H(M - k) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot k/M}$$

- Normalment $\alpha = 0$, tot i que també existeixen expressions similars per $\alpha = 1/2$.

Estructures 'Lattice'. FIR



Estructura 'Lattice' FIR



- Domini temporal discret

$$f_m(n) = \sum_{k=0}^m \alpha_m(k) \cdot x(n-k), \quad \alpha_m(0) = 1$$

$$g_m(n) = \sum_{k=0}^m \beta_m(k) \cdot x(n-k), \quad \beta_m(m) = 1$$

$$\beta_m(k) = \alpha_m(m-k), \quad k = 0, 1, \dots, m \quad \rightarrow \text{Valors que depenen dels paràmetres } K_m$$

$$F_0(z) = G_0(z) = X(z)$$

$$\left. \begin{aligned} F_m(z) &= F_{m-1}(z) + K_m \cdot z^{-1} \cdot G_{m-1}(z) \\ G_m(z) &= K_m \cdot F_{m-1}(z) + z^{-1} \cdot G_{m-1}(z) \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$A_0(z) = B_0(z) = 1$$

$$\left. \begin{aligned} A_m(z) &= A_{m-1}(z) + K_m \cdot z^{-1} \cdot B_{m-1}(z) \\ B_m(z) &= K_m \cdot A_{m-1}(z) + z^{-1} \cdot B_{m-1}(z) \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} A_m(z) \\ B_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_m \\ K_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m-1}(z) \\ z^{-1} \cdot B_{m-1}(z) \end{bmatrix}$$

- Domini 'z'

$$F_m(z) = A_m(z) \cdot X(z) \quad A_m(z) = \sum_{k=0}^m \alpha_m(k) \cdot z^{-k}$$

$$G_m(z) = B_m(z) \cdot X(z) \quad B_m(z) = \sum_{k=0}^m \beta_m(k) \cdot z^{-k}$$

$$B_m(z) = \sum_{k=0}^m \alpha_m(m-k) \cdot z^{-k} = z^{-m} \cdot A_m(z^{-1})$$

- $f_{M-1}(n)$ és la sortida del sistema i $g_{M-1}(n)$ és l'estimació (o 'predicció') de l'entrada

Conversió 'Lattice' (K_m) – F. directa ($\alpha_m(k)$)

- Els coeficients $\alpha_m(k)$ s'obtenen amb un mètode *recursiu ascendent*:

$$\left. \begin{aligned} A_0(z) &= B_0(z) = 1 \\ A_m(z) &= A_{m-1}(z) + K_m \cdot z^{-1} \cdot B_{m-1}(z) \\ B_m(z) &= z^{-m} \cdot A_m(z^{-1}) \end{aligned} \right\}, \quad m = 1, 2, \dots, M-1$$

- **Exemple:** Estructura 'Lattice' de **3** etapes ($K_1 = 1/4$, $K_2 = 1/4$, $K_3 = 1/3$)

- $m = 1$

$$A_1(z) = A_0(z) + K_1 \cdot z^{-1} \cdot B_0(z) = 1 + \frac{1}{4} \cdot z^{-1}$$

$$\alpha_1(0) = 1, \quad \alpha_1(1) = \frac{1}{4} = K_1$$

- $m = 2$

- $m = 2$

$$A_2(z) = A_1(z) + K_2 \cdot z^{-1} \cdot B_1(z) = 1 + \frac{3}{8} \cdot z^{-1} + \frac{1}{2} \cdot z^{-2}$$

$$\alpha_2(0) = 1, \quad \alpha_2(1) = \frac{3}{8}, \quad \alpha_2(2) = \frac{1}{2}$$

- $m = 3$

$$A_3(z) = A_2(z) + K_3 \cdot z^{-1} \cdot B_2(z) = 1 + \frac{13}{24} \cdot z^{-1} + \frac{5}{8} \cdot z^{-2} + \frac{1}{3} \cdot z^{-3}$$

$$\alpha_3(0) = 1, \quad \alpha_3(1) = \frac{13}{24}, \quad \alpha_3(2) = \frac{5}{8}, \quad \alpha_3(3) = \frac{1}{3}$$

- Expressió per al mètode recursiu

$$\alpha_m(0) = 1, \quad \alpha_m(m) = K_m, \quad \alpha_m(k) = \alpha_{m-1}(k) + \alpha_m(m) \cdot \alpha_{m-1}(m-k) \quad 1 \leq k \leq m-1$$

Conversió F. directa ($\alpha_m(k)$) – ‘Lattice’ (K_m)

- Amb els coeficients $\alpha_m(k)$ (o equivalentment, $A_m(z)$) els paràmetres K_m es determinen amb la següent **recursió descendent**:

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m \cdot [B_m(z) - K_m \cdot A_{m-1}(z)] \quad \longrightarrow \quad A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) + K_m \cdot B_m(z)}{1 - K_m^2}, \quad m = M-1, M-2, \dots, 1$$

- **Exemple:** $H(z) = A_3(z) = 1 + \frac{13}{24} \cdot z^{-1} + \frac{5}{8} \cdot z^{-2} + \frac{1}{3} \cdot z^{-3}$

- $m = 3$

$$B_3(z) = \frac{1}{3} + \frac{5}{8} \cdot z^{-1} + \frac{13}{24} \cdot z^{-2} + z^{-3}$$

$$\underline{K_3 = \alpha_3(3) = \frac{1}{3}}$$

- $m = 2$

$$A_2(z) = \frac{A_3(z) - K_3 \cdot B_3(z)}{1 - K_3^2} = 1 + \frac{3}{8} \cdot z^{-1} + \frac{1}{2} \cdot z^{-2}$$

$$\underline{K_2 = \alpha_2(2) = \frac{1}{2}}$$

$$B_2(z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot z^{-1} + z^{-2}$$

- $m = 1$

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2 \cdot B_2(z)}{1 - K_2^2} = 1 + \frac{1}{4} \cdot z^{-1}$$

$$\underline{K_1 = \alpha_1(1) = \frac{1}{4}}$$

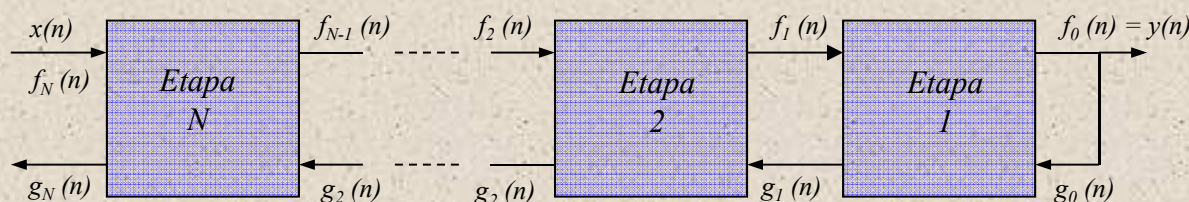
- Expressió per al mètode recursiu:

$$\alpha_m(0) = 1, \quad \alpha_m(m) = K_m, \quad \alpha_{m-1}(k) = \frac{\alpha_m(k) - \alpha_m(m) \cdot \alpha_{m-1}(m-k)}{1 - \alpha_m^2(m)} \quad 1 \leq k \leq m-1$$

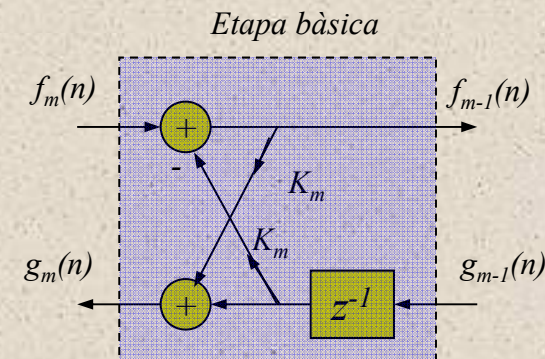


Estructures 'Lattice'. IIR

- Estructura **tot pols**: Els paràmetres es determinen amb el mateix mètode que l'estructura FIR (tot zeros)



Estructura 'Lattice' IIR (amb tot pols)



- Domini temporal discret

$$f_m(n) = \sum_{k=0}^m \alpha_m(k) \cdot y(n-k), \quad \alpha_m(0) = 1$$

$$g_m(n) = \sum_{k=0}^m \beta_m(k) \cdot y(n-k), \quad \beta_m(m) = 1$$

$$\beta_m(k) = \alpha_m(m-k), \quad k = 0, 1, \dots, m \quad \rightarrow \text{Valors que depenen dels paràmetres } K_m$$

- Domini 'z'

$$F_m(z) = A_m(z) \cdot Y(z) \quad A_m(z) = \sum_{k=0}^m \alpha_m(k) \cdot z^{-k}$$

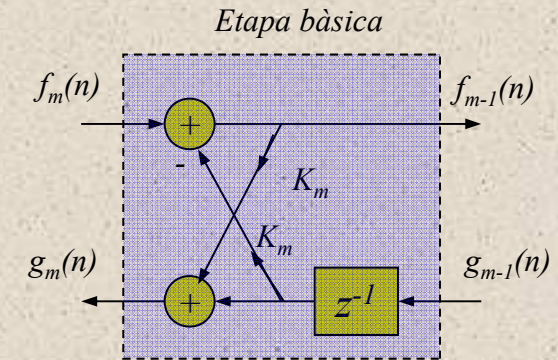
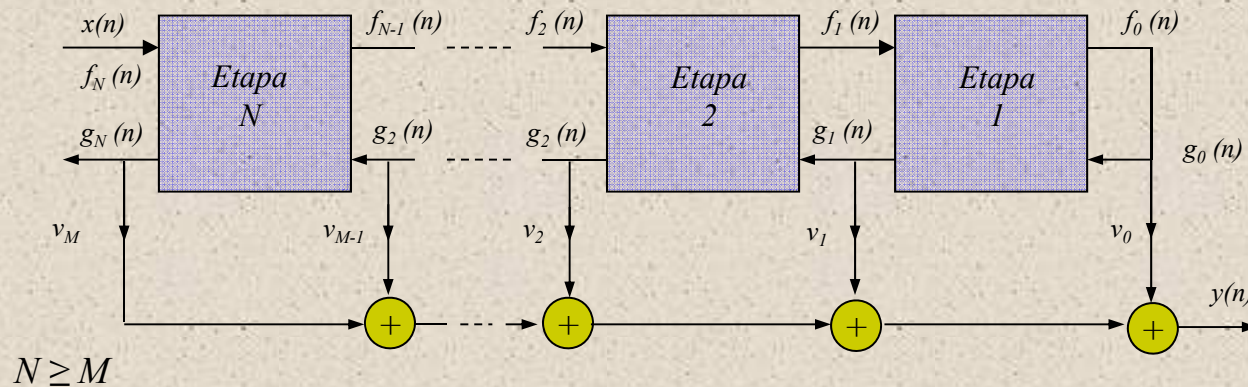
$$G_m(z) = B_m(z) \cdot Y(z) \quad B_m(z) = \sum_{k=0}^m \beta_m(k) \cdot z^{-k}$$

$$B_m(z) = \sum_{k=0}^m \alpha_m(m-k) \cdot z^{-k} = z^{-m} \cdot A_m(z^{-1})$$

$$\left. \begin{aligned} F_N(z) &= X(z) \\ F_0(z) &= G_0(z) = Y(z) \\ F_{m-1}(z) &= F_m(z) - K_m \cdot z^{-1} \cdot G_{m-1}(z) \\ G_m(z) &= K_m \cdot F_{m-1}(z) + z^{-1} \cdot G_{m-1}(z) \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} A_0(z) &= B_0(z) = 1 \\ A_{m-1}(z) &= A_m(z) - K_m \cdot z^{-1} \cdot B_{m-1}(z) \\ B_m(z) &= K_m \cdot A_{m-1}(z) + z^{-1} \cdot B_{m-1}(z) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} A_m(z) \\ B_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_m \\ K_m & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{m-1}(z) \\ z^{-1} \cdot B_{m-1}(z) \end{bmatrix}$$

Estructures 'Lattice'. IIR (Cont)

- Estructura amb *pols i zeros* (Estructura amb graons):



$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M c_M(k) \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^N a_N(k) \cdot z^{-k}} = \frac{C_M(z)}{A_N(z)}$$

$$C_M(z) = \sum_{m=0}^M v_m \cdot B_m(z)$$

- Els paràmetres K_m es determinen agafant $A_N(z)$ i utilitzant el mètode recursiu descendent (vist a les estructures 'Lattice' FIR)
- Els paràmetres v_m també es calculen recursivament amb $B_m(z)$ i $C_M(z)$:

$$C_{m-1}(z) = C_m(z) - v_m \cdot B_m(z) \quad \text{amb } v_m = c_m(m), \quad \text{per } m = 0, 1, \dots, M$$

Comparativa de recursos computacionals

- **Estructures FIR**, amb M la longitud de $h(n)$ o $H(k)$

<i>Estructura</i>	<i>Multiplicadors</i>	<i>Sumadors</i>	<i>Posicions de memòria</i>	<i>Comentaris</i>
Directa	M	$M-1$	$M-1$	Ús didàctic
Fase lineal	$M/2$ (M parell) $(M-1)/2$ (M senar)			Quan el sistema presenta fase lineal ($h(n)$ simètric)
Mostreig en freqüència	$2(K+1)$	$2 \cdot K$	$K+M$	Útil en respostes freqüencials de banda curta , quan només K valors de l'espectre $H(k)$ són rellevants (no nuls). Es pot reduir el nombre de multiplicacions en sistemes de fase lineal
Lattice	$2 \cdot (M-1)$	$2 \cdot (M-1)$	$M-1$	La característica principal és la modularitat

- **Estructures IIR** (N .- ordre del sistema, M .- ordre de la part FIR)

Directa I	$M+N+1$	$M+N$	$M+N+1$	No s'utilitza
Directa II (i transposada)			$\max\{M,N\}$	La que menys recursos de memòria necessita. Amb la versió transposada es redueix el nombre de sumadors. Aquesta última és la que més s'utilitza
Lattice ($N \geq M$)	$2 \cdot N+M+1$	$2 \cdot N+M$	N	Bastant estesa a la pràctica (processat de veu i filtres adaptatius) tot i el nombre elevat de multiplicadors*. Robustes en aritmètica de punt fixe

Implementació Software. Un últim apunt

- En el disseny, interessa que el dispositiu programable realitzi el càlcul amb la màxima rapidesa possible (*temps real*) després d'haver adquirit el valor de l'entrada ($x(n)$)
- Per aquest motiu, la programació de les estructures es reorganitzen en un *pre-processat* i un *post-processat*

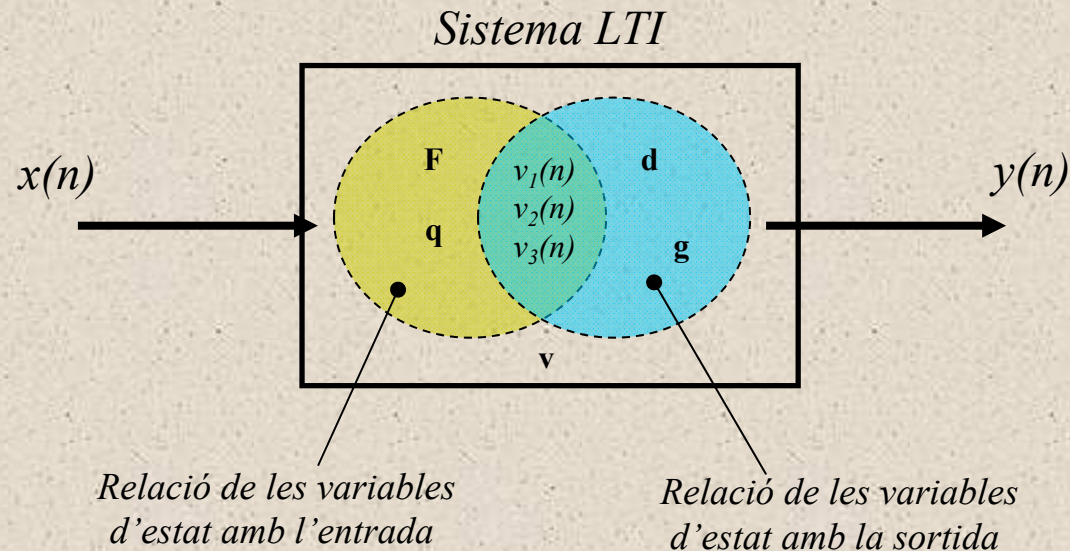
- Exemple en una estructura de 2on. ordre:
$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}{1 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}$$

<i>Processat:</i>	$y(n) = a_0 \cdot x(n) + D$	$\omega(n) = x(n) + D_1$ $y(n) = a_0 \cdot \omega(n) + D_2$	$y(n) = a_0 \cdot x(n) + \omega_1(n-1)$ $\omega_1(n) = a_1 \cdot x(n) - b_1 \cdot y(n) + \omega_2(n-1)$ $\omega_2(n) = a_2 \cdot x(n) - b_2 \cdot y(n)$
<i>Post-pro.:</i>	Cap	Cap	Cap
<i>Pre-pro.:</i>	$D = a_1 \cdot x(n-1) + a_2 \cdot x(n-2) - b_1 \cdot y(n-1) - b_2 \cdot y(n-2)$	$D_1 = -b_1 \cdot \omega(n-1) - b_2 \cdot \omega(n-2)$ $D_2 = a_1 \cdot \omega(n-1) + a_2 \cdot \omega(n-2)$	Cap
	<i>E. Directa Tipus 1</i>	<i>E. Directa Tipus 2</i>	<i>E. Directa Tipus 2 transposada</i>

- En el pre-processat es realitzen els càlculs que no requereixen $x(n)$
- El post-processat es realitza al inici del bucle

Anàlisi en l'espai d'estats

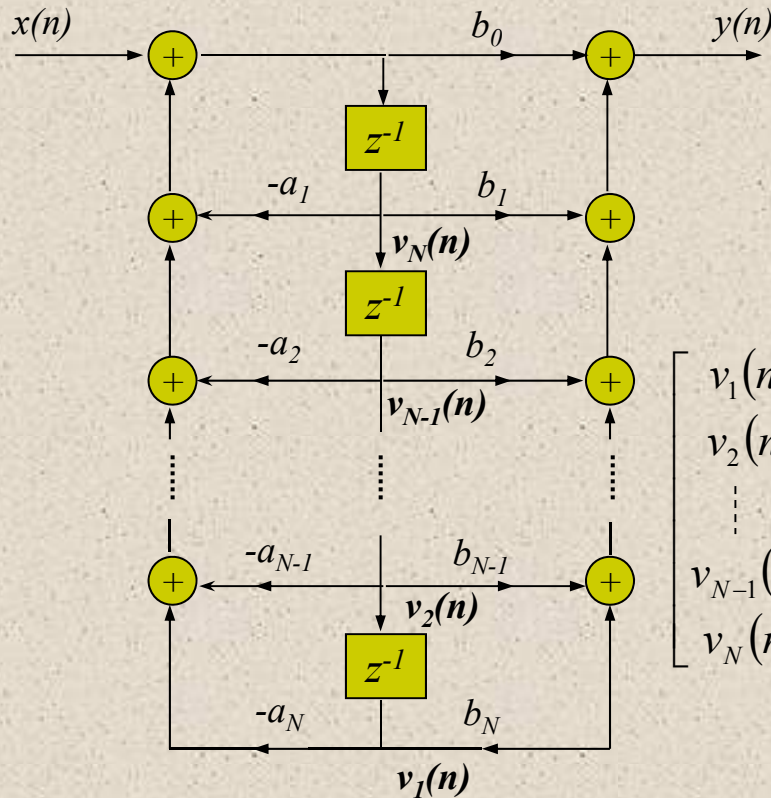
- Les *variables d'estat*:



- Proporcionen informació sobre els **senyals interns** del sistema
- Caracterització del sistema més detallada que no pas la descripció entrada-sortida
- Útil en l'anàlisi *multi-variable* (sistemes amb més d'una entrada i/o sortida)

Descripció de l'espai d'estats

Realització tipus I



$$\begin{aligned}
 v_1(n+1) &= v_2(n) \\
 v_2(n+1) &= v_3(n) \\
 &\dots \\
 v_N(n+1) &= -a_N \cdot v_1(n) - a_{N-1} \cdot v_2(n) - \dots - a_1 \cdot v_N + x(n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(n) &= b_0 \cdot v_N(n+1) + b_N \cdot v_1(n) + b_{N-1} \cdot v_2(n) + \dots + b_1 \cdot v_N(n) = \\
 &= (b_N - b_0 \cdot a_N) \cdot v_1(n) + (b_{N-1} - b_0 \cdot a_{N-1}) \cdot v_2(n) + \dots + (b_1 - b_0 \cdot a_1) \cdot v_N + b_0 \cdot x(n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} v_1(n+1) \\ v_2(n+1) \\ \vdots \\ v_{N-1}(n+1) \\ v_N(n+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ \vdots \\ v_{N-1}(n) \\ v_N(n) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} \cdot x(n)$$

$$y(n) = \underbrace{\begin{bmatrix} (b_N - b_0 \cdot a_N) & (b_{N-1} - b_0 \cdot a_{N-1}) & \dots & (b_2 - b_0 \cdot a_2) & (b_1 - b_0 \cdot a_1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}^t} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ \vdots \\ v_{N-1}(n) \\ v_N(n) \end{bmatrix} + \underbrace{b_0}_{\mathbf{d}} \cdot x(n)$$

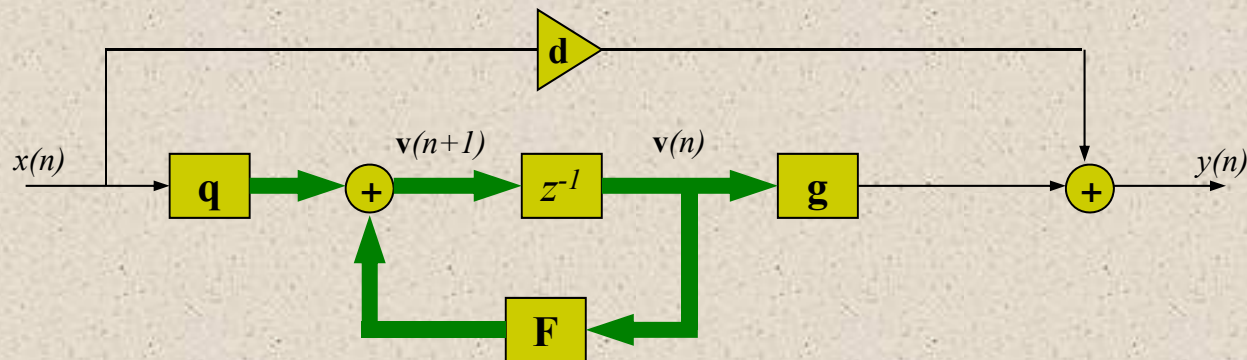
Equació d'estat: $\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(n) + \mathbf{q} \cdot x(n)$
 Equació de sortida: $y(n) = \mathbf{g}^t \cdot \mathbf{v}(n) + \mathbf{d} \cdot x(n)$

Descripció de l'espai d'estats (Cont)

- Realització *tipus II*

$$\begin{bmatrix} v_1(n+1) \\ v_2(n+1) \\ \vdots \\ v_{N-1}(n+1) \\ v_N(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -a_N \\ 1 & \dots & 0 & 0 & -a_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ \vdots \\ v_{N-1}(n) \\ v_N(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_N - b_0 \cdot a_N \\ b_{N-1} - b_0 \cdot a_{N-1} \\ \vdots \\ b_2 - b_0 \cdot a_2 \\ b_1 - b_0 \cdot a_1 \end{bmatrix} x(n) \quad y(n) = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ \vdots \\ v_{N-1}(n) \\ v_N(n) \end{bmatrix} + b_0 \cdot x(n)$$

- Descripció general de l'espai d'estats



- L'elecció de les variables d'estat **no és única**. Quines s'han d'agafar depèn de la informació i el problema a tractar en cada cas.

Solució de $y(n)$ en l'espai d'estats

- Dos mètodes: **Recursiu** o mitjançant **sistema diagonal**

- **Recursiu:** Donades les equacions i les condicions inicials de les variables d'estat:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n+1) &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(n) + \mathbf{q} \cdot x(n) \\ y(n) &= \mathbf{g}^t \cdot \mathbf{v}(n) + \mathbf{d} \cdot x(n) \end{aligned} \quad \text{Condicions inicials: } \mathbf{v}(n_0)$$

- Per $n > n_0$

$$\mathbf{v}(n_0+1) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(n_0) + \mathbf{q} \cdot x(n_0)$$

$$\mathbf{v}(n_0+2) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(n_0+1) + \mathbf{q} \cdot x(n_0+1) = \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{v}(n_0) + \mathbf{F} \mathbf{q} \cdot x(n_0) + \mathbf{q} \cdot x(n_0+1)$$

...

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{\Phi}(n-n_0) \cdot \mathbf{v}(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathbf{\Phi}(n-1-k) \cdot \mathbf{q} \cdot x(k), \quad \mathbf{\Phi}(i-j) = \mathbf{F}^{i-j}, \mathbf{F}^0 \rightarrow \text{Matriu identitat } N \times N$$

$$y(n) = \mathbf{g}^t \cdot \mathbf{\Phi}(n-n_0) \cdot \mathbf{v}(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathbf{g}^t \cdot \mathbf{\Phi}(n-1-k) \cdot \mathbf{q} \cdot x(k) + \mathbf{d} \cdot x(n)$$

$$\mathbf{\Phi}(n) = \mathbf{F}^n \longrightarrow \text{Matriu de transició d'estats}$$

- Resposta amb entrada nul·la:

$$y_{zi}(n) = \mathbf{g}^t \cdot \mathbf{\Phi}(n-n_0) \cdot \mathbf{v}(n_0)$$

- Resposta amb condicions inicials nul·les:

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathbf{g}^t \cdot \mathbf{\Phi}(n-1-k) \cdot \mathbf{q} \cdot x(k) + \mathbf{d} \cdot x(n)$$

- Resposta total: $y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$



Solució de $y(n)$ en l'espai d'estats (Cont)

- Al existir moltes possibilitats d'elegir les variables d'estat es poden obtenir infinitat d'estructures diferents mitjançant transformacions:
 - Si \mathbf{P} és una matriu $N \times N$ i existeix \mathbf{P}^{-1} , una nova realització s'obté de la manera següent:

$$\begin{array}{l}
 \hat{\mathbf{v}}(n) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}(n) \\
 \mathbf{v}(n) = \mathbf{P}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{v}}(n)
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{l}
 \hat{\mathbf{v}}(n+1) = \mathbf{PFP}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{v}}(n) + \mathbf{Pq} \cdot x(n) \\
 y(n) = \mathbf{g}^t \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{v}}(n) + \mathbf{d} \cdot x(n)
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{l}
 \hat{\mathbf{v}}(n+1) = \hat{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{v}}(n) + \hat{\mathbf{q}} \cdot x(n) \\
 y(n) = \hat{\mathbf{g}}^t \cdot \hat{\mathbf{v}}(n) + \mathbf{d} \cdot x(n)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{v}(n+1) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(n) + \mathbf{q} \cdot x(n) \\
 y(n) = \mathbf{g}^t \cdot \mathbf{v}(n) + \mathbf{d} \cdot x(n)
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \boxed{\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{PFP}^{-1}, \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{Pq}, \hat{\mathbf{g}}^t = \mathbf{g}^t}$$

- Resposta impulsional: $h(n) = \mathbf{g}^t \cdot \Phi(n-1) \cdot \mathbf{q} \cdot u(n-1) + \mathbf{d} \cdot \delta(n)$
- Sistema transpost

- Si:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2N} \\ f_{N1} & f_{N2} & f_{NN} \end{bmatrix}
 \quad \rightarrow \quad
 \mathbf{F}^t = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2N} \\ f_{N1} & f_{N2} & f_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{v}'(n+1) = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{v}'(n) + \mathbf{g} \cdot x(n) \\
 y'(n) = \mathbf{q}^t \cdot \mathbf{v}'(n) + \mathbf{d} \cdot x(n) \\
 h(n) = h'(n)
 \end{array}$$

Solució de $y(n)$ en l'espai d'estats (Cont II)

- La solució de $y(n)$ és més fàcil d'obtenir si F es pot transformar en una matriu **diagonal** (mètode del sistema diagonal):
 - Es necessita una matriu P per tal que $\hat{F} = P \cdot F \cdot P^{-1}$ sigui diagonal (**VAPS** i **VEPS**)
 - **VAPS** (*Valors propis*): S'obtenen calculant les **arrels** del polinomi característic
 $\det(F - \lambda \cdot I) = 0$, on I és la *matriu identitat* ($N \times N$). $N \rightarrow$ ordre del sistema F
 - **VEPS** (*Vectors propis*): vectors ortogonals que es determinen amb els VAPS calculats prèviament

$$F \cdot u_i = \lambda_i \cdot u_i, \text{ on } u_i^t \cdot u_j = 0, \text{ per } i \neq j$$

- P s'obté creant una matriu U on cada columna la formen els VEPS calculats prèviament

$$U = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow \\ u_1 & u_2 & \dots & u_N \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \end{bmatrix}$$

$$\hat{F} = U^{-1} \cdot F \cdot U, \quad P = U^{-1}$$

*Matriu inversa de U :

$$U^{-1} = \frac{(\text{Adj}(U))^t}{\det(U)}$$



Solució de $y(n)$ en l'espai d'estats (Cont III)

- Exemple:

- Determineu la resposta impulsional $h(n)$ de la seqüència de Fibonacci $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ que es genera mitjançant el sistema següent expressat en l'espai d'estats:

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x(n) \quad y(n) = [1 \quad 1] \cdot \mathbf{v}(n) + x(n)$$

- Solució:

- $\det(\mathbf{F} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$ **VAPS:** $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

- Càlcul dels **VEPS** associats: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}_i = \lambda_i \cdot \mathbf{u}_i.$ $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$

- Matriu **P**: $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}$

- Sistema diagonal: $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{P} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $\hat{\mathbf{g}}^t = \mathbf{g}^t \cdot \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$

- Resposta impulsional: $h(n) = \mathbf{g}^t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{q} \cdot u(n-1) + \mathbf{d} \cdot \delta(n)$

$$h(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right] \cdot u(n-1) + \delta(n)$$

L'espai d'estats en el domini 'z'

- Transformació:

$$\begin{aligned} z \cdot \mathbf{V}(z) &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}(z) + \mathbf{q} \cdot X(z) \\ Y(z) &= \mathbf{g}^t \cdot \mathbf{V}(z) + \mathbf{d} \cdot X(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n+1) &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(n) + \mathbf{q} \cdot x(n) \\ y(n) &= \mathbf{g}^t \cdot \mathbf{v}(n) + \mathbf{d} \cdot x(n) \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}(z) = \begin{bmatrix} V_1(z) \\ V_2(z) \\ \vdots \\ V_N(z) \end{bmatrix}$$

- Espai d'estats i matriu de transició:

$$\mathbf{V}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \cdot \mathbf{q} \cdot X(z)$$

Espai d'estats

$$\Phi(n) = \mathbf{F}^n = \mathbf{Z}^{-1} \{z \cdot (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\}$$

Matriu de transició

Senyals internes

- Funció de transferència:

$$\begin{aligned} Y(z) &= [\mathbf{g}^t \cdot (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{d}] \cdot X(z) \\ &\text{(condicions inicials nul·les)} \end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathbf{g}^t \cdot (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{d}$$

- Resposta total del sistema:

$$Y(z) = \underbrace{z\mathbf{g}^t \cdot (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \cdot \mathbf{v}(0)}_{Y_{zi}(z)} + \underbrace{[\mathbf{g}^t \cdot (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{d}] \cdot X(z)}_{Y_{zs}(z)}$$

Condicions inicials del sistema

L'espai d'estats en el domini 'z' (Cont)

- Exemple:

- Determineu $H(z)$ i resposta impulsional $h(n)$ del sistema que genera la seqüència de Fibonacci

- Solució:

- $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ -1 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z^2 - z - 1} \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix}$

- **Funció de transferència:** $H(z) = \mathbf{g}^t \cdot (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{q} + \mathbf{d} = \frac{1}{z^2 - z - 1} [1 \quad 1] \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 =$
 $= \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}}$

- **Resposta impulsional:** S'obté amb la anti-transformada 'z' de $H(z)$

$$h(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \cdot u(n)$$

Estructures basades en l'espai d'estats

- Connexió en paral·lel (*Forma normalitzada*):

F és diagonal

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^N \frac{B_k}{z - p_k}$$

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_N \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x(n)$$

$$y(n+1) = [B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_N] \cdot \mathbf{v}(n) + C \cdot x(n)$$

- Connexió cascada (*Forma acoblada*):

Secció de 2on. ordre

$$H(z) = b_0 + \frac{A}{z - p} + \frac{A^*}{z - p^*}$$

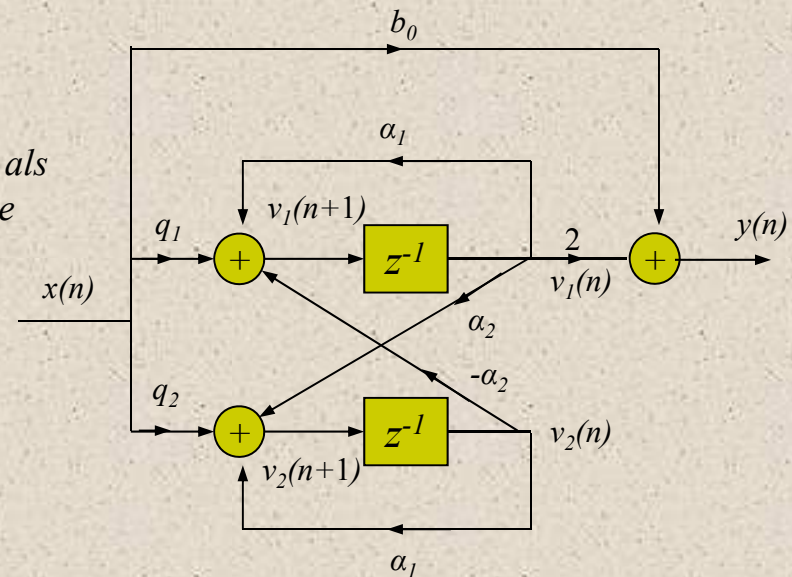
$$p = \alpha_1 + j \cdot \alpha_2$$

$$A = q_1 + j \cdot q_2$$

Molt baixa sensibilitat als Efectes de longitud de Paraula digital

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \cdot x(n)$$

$$y(n+1) = [2 \quad 0] \cdot \mathbf{v}(n) + b_0 \cdot x(n)$$



Representació numèrica en *punt fixe*

- Representació binària

- Nombres enters:

$$X = \underbrace{(b_{-A}, \dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_B)}_r = \sum_{i=-A}^B b_i \cdot r^{-i}, \quad 0 \leq b_i \leq r-1$$

MSB
LSB
(Most Significant Bit)
(Least Significant Bit)

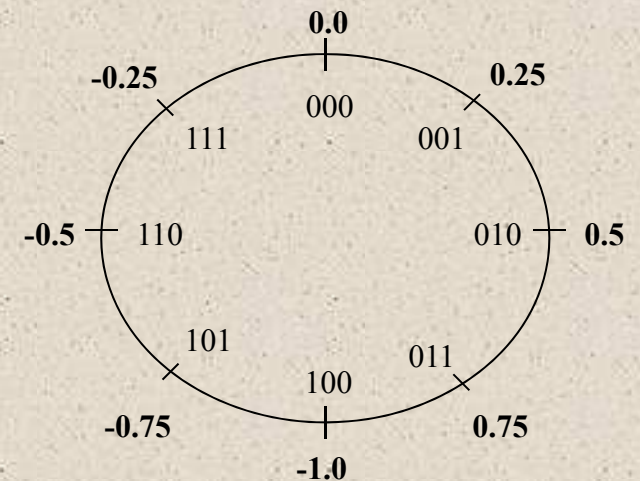
b_b .- Valor de dígit (0 o 1)
 r .- base o nombre de valors diferents que pot adquirir b_i (2)
 A .- Nombre de dígets enters ($n-1$)
 B .- Nombre de dígets fraccionaris (0)

- Nombres decimals (<1): $A = 0, B = n-1$

- Valors positius: $X = 0.b_1, b_2, \dots, b_B = \sum_{i=1}^B b_i \cdot 2^{-i}, \quad X \leq 0$
 - Valors negatius: $X = -0.b_1, b_2, \dots, b_B = -\sum_{i=1}^B b_i \cdot 2^{-i}$

1 $X_{SM} = 1.b_1, b_2, \dots, b_B, \quad X \leq 0$

Format de Signe i Magnitud



2 $X_{1C} = 1.\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_B$

$$\bar{b}_i = 1 - b_i$$

$$X_{1C} = 1 \cdot 2^0 + \sum_{i=1}^B (1 - b_i) \cdot 2^{-i} = 2 - 2^{-B} - |X|$$

Format de Complement a 1

3 $X_{2C} = 1.\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_B + 00 \dots 01$

$$X_{2C} = X_{1C} + 2^{-B} = 2 - |X|$$

Format de Complement a 2



Representació numèrica en *coma flotant*

- Format de dos nombres binaris: *mantisa* (M) i *exponent* (E)

$$\text{Format: } X = M \cdot 2^E$$

- M .- Fracció numèrica (rang: $\frac{1}{2} \leq M \leq 1$) amb bit de signe
- E .- Valor enter amb bit de signe que treballa com exponencial

- Exemples:

$$X_1 = 5 \longrightarrow \begin{cases} M_1 = 0.101000 \\ E_1 = 0.11 \end{cases} \quad X_2 = 3/8 \longrightarrow \begin{cases} M_2 = 0.110000 \\ E_2 = 1.01 \end{cases}$$

- Multiplicació:

$$X_1 \cdot X_2 = M_1 \cdot M_2 \cdot 2^{E_1 + E_2} = (0.011110) \cdot 2^{0.10} = (0.111100) \cdot 2^{0.01} \equiv \frac{15}{8}$$

- Suma:

- Els exponents han de ser iguals per poder sumar les mantises. Aquesta operació requereix *incrementar/decrementar* un dels exponents (per igualar a l'altre) i desplaçar la seva mantisa cap a la *dreta/esquerra*

$$X_2 = 3/8 \longrightarrow \begin{cases} M_2 = 0.110000 \\ E_2 = 1.01 \end{cases} = \begin{cases} M_2 = 0.000011 \\ E_2 = 0.11 \end{cases} \quad X_1 + X_2 = (0.101011) \cdot 2^{0.11} \equiv 43/8$$



Punt fixe i coma flotant (Comparativa 32 bits)

- Punt fixe:

- Rang: $2^b - 1$ valors:

Representació	Rang de X	Resolució
Valors enters	$2^{32} - 1 = 4,294,967,295$	1
Amb bit de signe	$-(2^{31} - 1) = -2,147,483,647$ $(2^{31} - 1) = 2,147,483,647$	1
Decimal (3 dígits) i bit de signe	$-(2^{31} - 1) \cdot 2^{-10} = -2,097,151.999$ $(2^{31} - 1) \cdot 2^{-10} = 2,097,151.999$	2^{-10}

- Coma flotant

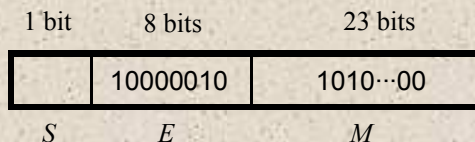
- M .- 24 bits (23 + bit de signe, rang: $\frac{1}{2} \leq M \leq 1$), E .- 8 bits (7 + bit de signe)

- Rang de X :

Notació	M		E		Valor aprox.
	s	23 bits	s	7 bits	
Valor mínim	0	100...0	1	1111111	$0.3 \cdot 10^{-38}$
Valor màxim	0	111...1	0	1111111	$1.7 \cdot 10^{38}$

Bastant complicat de representar el valor '0'

- Estàndar IEEE 754:



$$X = (-1)^S \cdot 2^{E-127} (M)$$

$$X = -1^0 \cdot 2^{130-127} \cdot (1.1010...0) = 2^3 \cdot (13/8) = 13$$

- Si $E = 255$ i $M \neq 0$, X no és considerat un nombre
- Si $E = 255$ i $M = 0$, $X = (-1)^S \cdot 2^{E-127} \cdot (1.M)$
- Si $0 < E < 255$, $X = (-1)^S \cdot 2^{E-126} \cdot (0.M)$
- Si $E = M = 0$, $X = (-1)^S \cdot 0$



Punt fixe vs. Coma flotant. Consideracions

- Coma flotant

- Desplaçaments en la mantisa resulta en **pèrdua de precisió** en cas de rebassar el nombre de bits
- **Reversament**: succeeix quan es supera el marge dinàmic de l'exponent al multiplicar dos valors
- Resolució (distància entre dos valors consecutius) variable en coma flotant: A major **rang dinàmic** (nombres elevats) pitjor **resolució**
- Millor resolució per **nombres petits** (però pitjor per **nombres elevats**) en comparació amb el format de 'punt fixe'

- Punt fixe

- **En 'punt fixe', el rang de X amb b bits:**

- Format de nombres enters: $\text{rang} = [0, 2^b - 1]$
- Fraccions: $\text{rang} = [0, 1 - 2^{-b}]$

Resolució màxima en coma fixa

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2^b - 1}$$

molt més petit en comparació amb el rang en 'punt flotant'

Punt fixe vs. Coma flotant. (Cont)

- **Generals**

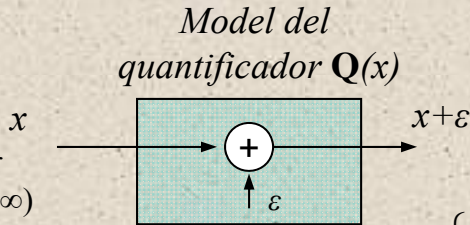
- **Tant les DSP's de 'punt fixe' com 'flotant' utilitzen el format numèric de *fraccions*** (Tècnicament valors mixtes són difícils de multiplicar i els valors enters no es poden reduir mitjançant tècniques d'arrodoniment. Per això no s'utilitza el format de valors enters)
- **Les DSP's de 'punt fixe' utilitzen aritmètica de *complement a dos* mentre que en 'punt flotant' aquesta és utilitzada en {*mantisa, exponent*}**
- **Els errors de quantificació (*arrodoniment* o *truncament*) en 'punt fixe' són molt més elevats, en comparació amb el 'coma flotant'.**
- **Aquests errors provoquen que el sistema tingui comportaments no lineals: *oscil·lacions, inestabilitat, revessament, etc...*** (Pols i zeros del sistema canvien de lloc)
- **A més de la disponibilitat de recursos, el fet d'utilitzar una representació numèrica determinada és un altre factor diferencial en el cost de les DSP's**

Errors de quantificació: Arrodoniment i truncament.

- Procés de quantificació:

$$x = \underline{0.1011\dots01}$$

b_u - bits necessaris per representar exactament el valor original (∞)

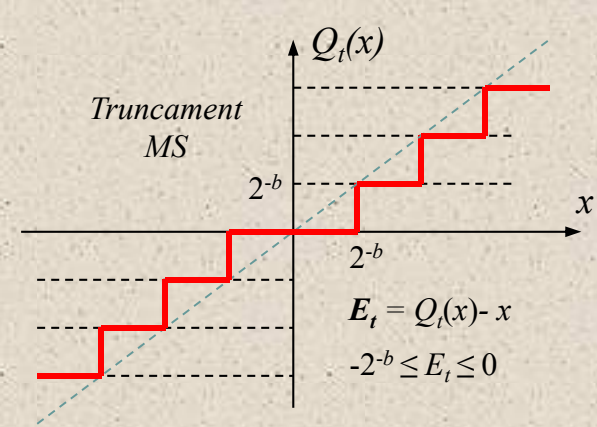
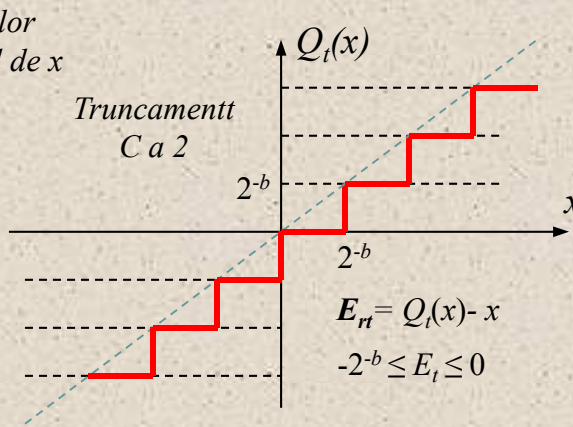
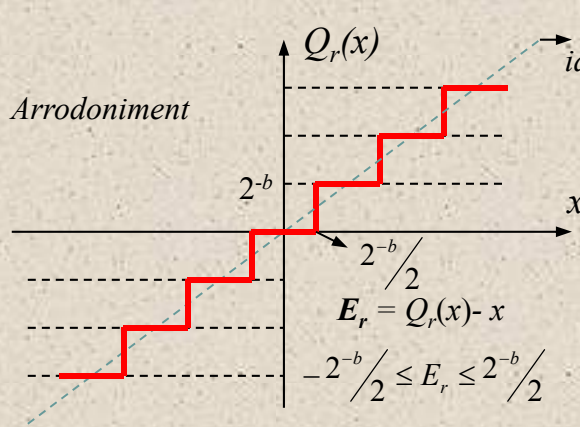


$$Q(x) = \underline{0.101\dots1}$$

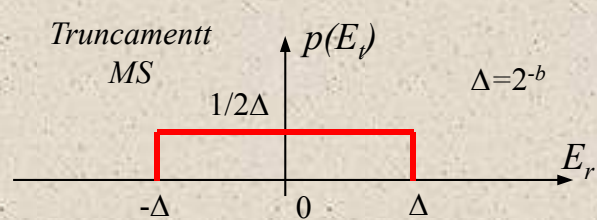
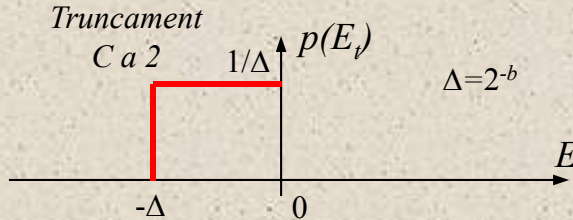
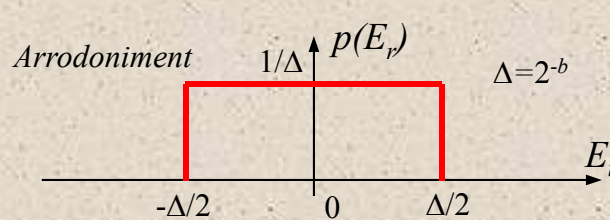
b - bits utilitzats durant la conversió A/D dels valors

$$Q(x) = x + \varepsilon, \quad \varepsilon = \begin{cases} E_t & \longrightarrow \text{Truncament} \\ E_r & \longrightarrow \text{Arrodoniment} \end{cases}$$

- Errors de quantificació



- Caracterització estadística



Sensibilitat als errors de quantificació

- Sistemes IIR**

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^M a_k \cdot z^{-k}} \quad \begin{matrix} \bar{a}_k = a_k + \Delta a_k \\ \bar{b}_k = b_k + \Delta b_k \\ \bar{z}_k = z_k + \Delta z_k \\ \bar{p}_k = p_k + \Delta p_k \end{matrix} \quad \xrightarrow{\text{Sensibilitat en el sistema}} \quad H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M \bar{b}_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^M \bar{a}_k \cdot z^{-k}} = \bar{b}_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - \bar{z}_k \cdot z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - \bar{p}_k \cdot z^{-1})}$$

$$\Delta p_i = - \sum_{k=1}^N \frac{p_i^{N-k}}{\prod_{l=1, l \neq i}^N (p_i - p_l)} \cdot \Delta a_k, \quad \Delta z_i = - \sum_{k=1}^N \frac{z_i^{N-k}}{\prod_{l=1, l \neq i}^N (z_i - z_l)} \cdot \Delta b_k$$

- Interessa que el denominador de Δp_i sigui elevat (a pols separats, mínima sensibilitat). Això s'aconsegueix combinant estructures de **2on. ordre** amb **polos conjugats**

- Cascada o paral·lel?

Cascada:

$$H(z) = \prod_{k=1}^K \frac{b_{k0} + b_{k1} \cdot z^{-1} + b_{k2} \cdot z^{-2}}{1 + a_{k1} \cdot z^{-1} + a_{k2} \cdot z^{-2}}$$

Paral·lel:

$$H(z) = \prod_{k=1}^K \frac{c_{k0} + c_{k1} \cdot z^{-1}}{1 + a_{k1} \cdot z^{-1} + a_{k2} \cdot z^{-2}}$$

- Cascada:** Hi ha control directe sobre els pols i zeros del sistema (a_k i b_k es calculen directament).
- Paral·lel:** Només hi ha control directe sobre els pols del sistema (c_k no especifica la posició dels zeros).
- L'estructura en cascada és més indicada quan s'utilitza format numèric en 'punt fixe'.**
- En l'estructura paral·lel, els problemes de la quantificació de coeficients es solucionen utilitzant 'coma flotant'**



Sensibilitat als errors de quantificació (Cont)

- **Sistemes FIR**

- Els efectes no són tan acusats com en els sistemes IIR:
 - Només afecten a la **magnitud** de la característica freqüencial (no la **fase lineal**)
- No obstant, també és correcte utilitzar el criteri de mòduls de **2on. ordre** dels sistemes **IIR**
- La configuració en **cascada** és la més apta (a diferència de les IIR on es pot utilitzar tant la configuració cascada com paral·lel)
- Quan més gran és la longitud del filtre ($h(n)$) major tindrà que ser el nombre de bits necessari per representar els coeficients (10 bits per longituds $h(n)$ moderades)
- Per un increment de $4 \cdot M$ mostres de $h(n)$ s'ha d'incrementar 1 bit per mantenir la desviació de l'error:

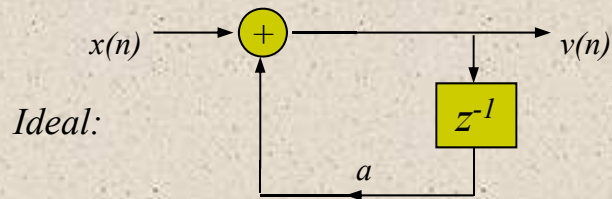
$$\begin{aligned} \bar{h}(n) &= h(n) + e_h(n) \\ -2^{-(b+1)} < e_h(n) < 2^{-(b+1)} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad E_M(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} e_h(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_E^2 &= \frac{2^{-2(b+1)}}{12} M = \frac{2^{-2(b+2)}}{3} M \\ \sigma_E &= \frac{2^{-(b+2)}}{\sqrt{3}} \sqrt{M} \end{aligned}$$

Efectes de la quantificació en filtres digitals

- Principalment en la quantificació de coeficients preocupen els **cicles límit**:
 - **Inestabilitats indesitjades a la sortida del sistema.** Presència de components contínues o oscil·latòries amb absència de senyal d'entrada
 - Només en els *sistemes recursius*
 - **No linealitats degudes al revessament**
 - Es produeix per nivells d'entrada elevats i en sumes de complement a 2
- En general, és bastant difícil analitzar i avaluar aquest fenòmens de manera determinista
 - La caracterització més adoptada en la pràctica es basa en l'ús de *mètodes estadístics*
- Els estudis d'aquests fenòmens només té sentit en realitzacions de '**punt fixe**' on aquests acostumen a ser importants

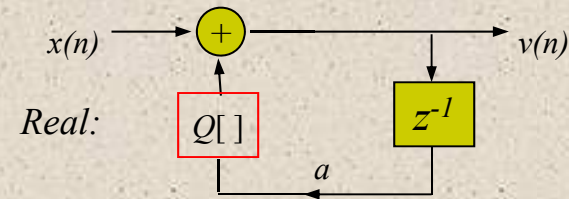
Cicles límit

- Exemple de components contínues i oscil·latòries: (Sistema 1er. ordre)
 - S'utilitza aritmètica de 'punt fixe' de 4 bits
 - La quantificació arrodoneix el resultat **a l'alça**



$$v(n) = a \cdot y(n-1) + x(n)$$

$$x(n) = 15/16 \cdot \delta(n)$$



$$v(n) = Q[a \cdot y(n-1)] + x(n)$$

n	$a=0.1000$ = $1/2$	Valor decimal	$a=1.1000$ = $-1/2$	Valor decimal	$a=0.1100$ = $3/4$	Valor decimal	$a=1.1100$ = $-3/4$	Valor decimal
0	0.1111	15/16	0.1111	15/16	0.1011	11/16	0.1011	11/16
1	0.1000	8/16	1.1000	-8/16	0.1000	8/16	1.1000	-8/16
2	0.0100	4/16	0.0100	4/16	0.0110	6/16	0.0110	6/16
3	0.0010	2/16	1.0010	-2/16	0.0101	5/16	1.0101	-5/16
4	0.0001	1/16	0.0001	1/16	0.0100	4/16	0.0100	4/16
5	0.0001	1/16	1.0001	-1/16	0.0011	3/16	1.0011	-3/16
6	0.0001	1/16	0.0001	1/16	0.0010	2/16	0.0010	2/16
7	0.0001	1/16	1.0001	-1/16	0.0010	2/16	1.0010	-2/16
8	0.0001	1/16	0.0001	1/16	0.0010	2/16	0.0010	2/16

Banda morta:

$$|v(n-1)| \leq \frac{1/2 \cdot 2^{-b}}{1-|a|}$$

} **Cicle límit**

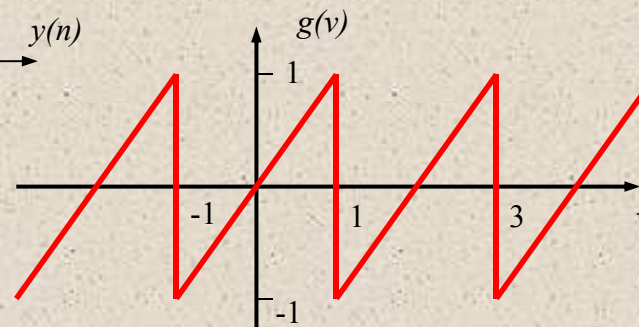
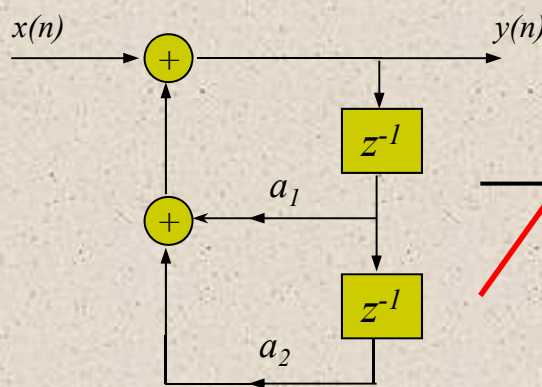
Cicles límit (Cont)

- L'estudi del cicle límit en sistemes d'ordre superior es més complexe:
 - **P.e:** en sistemes de 2on. ordre es pot demostrar que existeix una banda morta

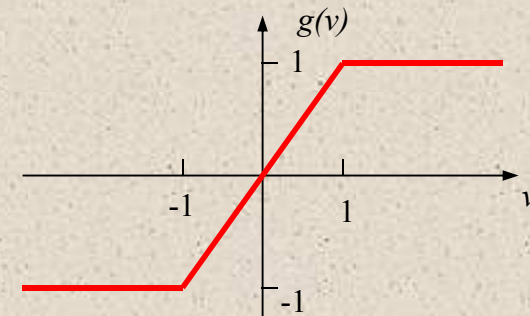
$$|v(n-2)| \leq \frac{1/2 \cdot 2^{-b}}{1-|a_2|} \text{ però existeixen més modes de cicle límit}$$

- Estructures IIR **paral·lel:** el cicle 'global' és la suma dels cicles individuals de cada secció.
- Estructures IIR **cascada:** cicles d'etapes precedents es **filtren** en etapes posteriors. S'ha d'evitar un cicle precedent en una possible ressonància posterior

- Cicles límits per revessament: $y(n) = g[a_1 \cdot y(n-1) + a_2 \cdot y(n-2) + x(n)]$



Comportament de la
addició en *complement a 2*



Prevençió del revessament amb
aritmètica de saturació per evitar cicles límits

Escalament

- Tot i eliminar els cicles límits del revessament, l'aritmètica de saturació genera **distorsió**. Aquesta distorsió s'evita escalant $x(n)$ dues maneres:

- Mitjançant l'elecció d'un valor màxim (A_x) per $x(n)$ $\longrightarrow \hat{x}(n) = x(n) \cdot \frac{A_x}{\max\{|x(n)|\}}$

$$1 \quad A_x < \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k(m)|}$$

$$2 \quad A_x < \frac{1}{\max_{0 \leq \omega \leq \pi} |H_k(\omega)|}$$

$$3 \quad A_x < \frac{1}{\sum_{m=0}^{M-1} |h_k(m)|}$$

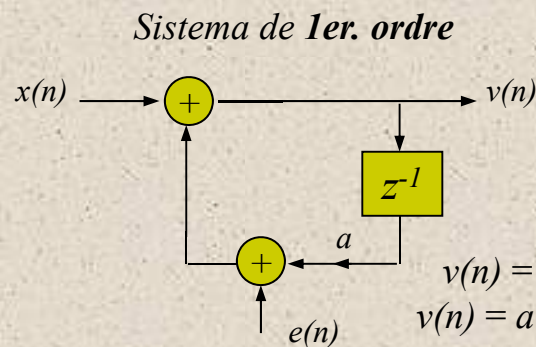
- La **opció 1** evita el revessament i és la més severa de les tres
- La **opció 2** és útil en senyals de banda estreta, mentre que **l'opció 3** és per sistemes FIR
- Escalat en base a l'energia de $x(n)$.**- És una opció encara més pessimista que les anteriors

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_k(n)|^2 \leq C^2 \cdot E_x$$

$$C^2 \leq \frac{1}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k(n)|^2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k(n)|^2 \right]^{1/2} \leq \max_{\omega} |H_k(\omega)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k(n)|$$

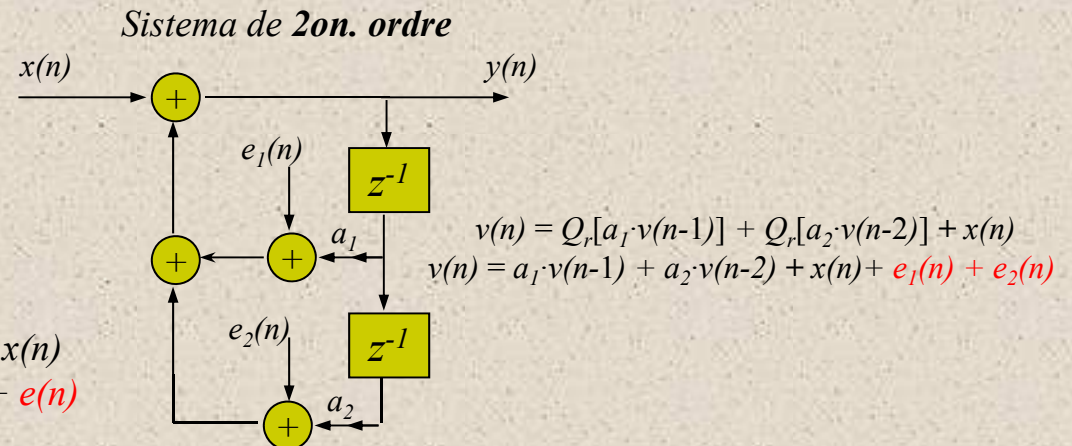
Anàlisi dels efectes de quantificació

- Com que és difícil modelar efectes de quantificació i/o escalat en sistemes grans, un altre opció consisteix en realitzar un **anàlisi general** amb **eines estadístiques**
- En aquest cas, els errors de quantificació es representen con un error o soroll $e(n)$



$$v(n) = Q_r[a \cdot v(n-1)] + x(n)$$

$$v(n) = a \cdot v(n-1) + x(n) + e(n)$$



$$v(n) = Q_r[a_1 \cdot v(n-1)] + Q_r[a_2 \cdot v(n-2)] + x(n)$$

$$v(n) = a_1 \cdot v(n-1) + a_2 \cdot v(n-2) + x(n) + e_1(n) + e_2(n)$$

- Dues components: senyal útil $y(n)$ i error $e(n)$

1er. ordre

$$v(n) = y(n) + q(n)$$

2on. ordre

$$\begin{cases} y(n) = a \cdot y(n-1) + x(n) & \text{Senyal útil} \\ q(n) = a \cdot q(n-1) + e(n) & \text{Soroll} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(n) = a_1 \cdot y(n-1) + a_1 \cdot y(n-2) + x(n) & \text{Senyal útil} \\ q(n) = a_1 \cdot q(n-1) + a_2 \cdot q(n-2) + e_1(n) + e_2(n) & \text{Soroll} \end{cases}$$



Anàlisi dels efectes de quantificació (Cont)

- Consideracions sobre l'error $e(n)$:

- Distribució uniforme en el rang $\{-1/2 \cdot 2^{-b}, 1/2 \cdot 2^{-b}\}$

$$\langle e(n) \rangle = 0 \quad (\text{Valor mig}) \quad \sigma_e^2 = \frac{2^{-2b}}{12} \quad (\text{Variància})$$

- $e(n)$ és un soroll blanc ($e(n)$ i $e(m)$ estan incorrelades per $n \neq m$)
- $e(n)$ està incorrelada amb l'entrada $x(n)$

- Estudi comparatiu:

	<i>1er. ordre</i>	<i>2on. ordre</i>
<i>Error de quantificació</i>	$\sigma_q^2 = \frac{\sigma_e^2}{1-a^2} = \sigma_e^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^2(k)$	$\sigma_q^2 = \sigma_e^2 \left(\frac{1+r^2}{1-r^2} \cdot \frac{1}{r^4 + 1 - 2r^2 \cdot \cos \theta} \right)$
<i>Efectes del Escalament ($A_x = 1-a$)</i>	$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2}{1-a^2} \quad \sigma_x^2 = \frac{(1- a)^2}{3}$	$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) \right) \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{3 \left[\sum_{n=0}^{\infty} h(n) \right]^2}$
<i>Relació senyal-soroll (SNR)</i>	$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_q^2} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = (1- a)^2 \cdot 2^{2(b+1)}$	$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_q^2} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = \frac{2^{2(b+1)}}{\left[\sum_{n=0}^{\infty} h(n) \right]^2}$

- σ^2 (variança) també denota la potència del senyal

$$\frac{1}{(1-r)\sin(\theta)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| \leq \frac{1}{(1-r)\sqrt{1+r^2-2r \cdot \cos(2\theta)}} \quad \rightarrow \quad 2^{2(b+1)}(1-r)^2 \leq \frac{\sigma_y^2}{\sigma_q^2} \leq 2^{2(b+1)}(1-r)^2(1+r)^2$$



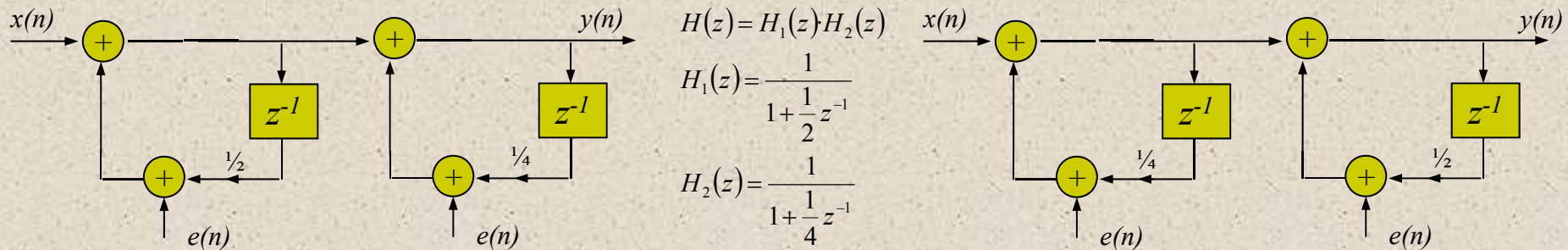
Conclusions en l'anàlisi dels efectes

- 1er. Ordre
 - El soroll s'**amplifica** a la sortida en relació amb l'entrada ($\sigma_q^2 > \sigma_e^2$) en un factor $1/(1-a)$. EL **SNR** es redueix
 - **Nombre de bits:**
 - És més important en sumes que en les multiplicacions
 - Depèn del pol (a): tindria que ser més elevat quan més a prop estigui el pol del cercle unitari
- 2on. Ordre
 - Els efectes de la quantificació encara són **més severes** respecte al 1er. Ordre
 - Estructures **paral·lel**: els efectes de soroll global correspon a la suma d'efectes de cadascuna de les seccions individuals
 - Estructures **cascada**: Soroll en etapes posteriors queden filtrats en etapes posteriors. Importa l'aparellament de pols (reals). Dues postures a adoptar
 - Pols propers al cercle unitari emparellats amb zeros propers
 - **Ordenar** les seccions **de més** (primera) **a menys guany** (última)



Exemple numèric sobre els efectes d'arrodoniment

- El següent exemple il·lustra la importància d'utilitzar una organització adequada en una realització cascada
 - Determineu la variança del soroll causat per l'arrodoniment que hi ha a la sortida de les dues realitzacions cascada següents



- Solució: $h_1(n) = (1/2)^n \cdot u(n)$, $h_2(n) = (1/4)^n \cdot u(n)$, $h(n) = 2 \cdot [(1/2)^n - (1/4)^n] \cdot u(n)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \quad \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2(n) = \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{16}{15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) = \frac{4}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{4}{1 - \frac{1}{8}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = 1.83$$

$$\sigma_{q1}^2 = \sigma_e^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) \right] = 2.9\sigma_e^2$$

$$\sigma_{q2}^2 = \sigma_e^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2(n) \right] = 3.16\sigma_e^2$$

La potència de soroll en la segona realització és 9% superior a la primera

Resum final

- Existeixen diverses realitzacions de sistemes en temps discret. Aquestes són equivalents amb precisió infinita, però no amb precisió finita
- Tres factors que determinen la seva elecció: **Complexitat de càlcul**, **memòria** i **longitud** (bits) de paraula
- Les expressions del sistema en '**espai d'estat**' proporcionen una **descripció alternativa** en funció dels senyals interns del mateix
- Efectes de quantificació són importants en sistemes d'ordre elevat (especialment IIR) i es minimitzen utilitzant **blocs d'ordre 2**.
- Addicionalment, filtres optimitzats de variable d'estat d'ordre 2 minimitzen els efectes de l'arrodoniment. Això permet obtenir filtres robustos de banda ample i estreta
- Les estructures 'Lattice' són les més indicades en aritmètica de 'punt fixe'.



Filtres analògics i digitals (FEAD)

Disseny de Filtres Digitals

Punt de partida

- **Objectiu del disseny de filtres digitals:**

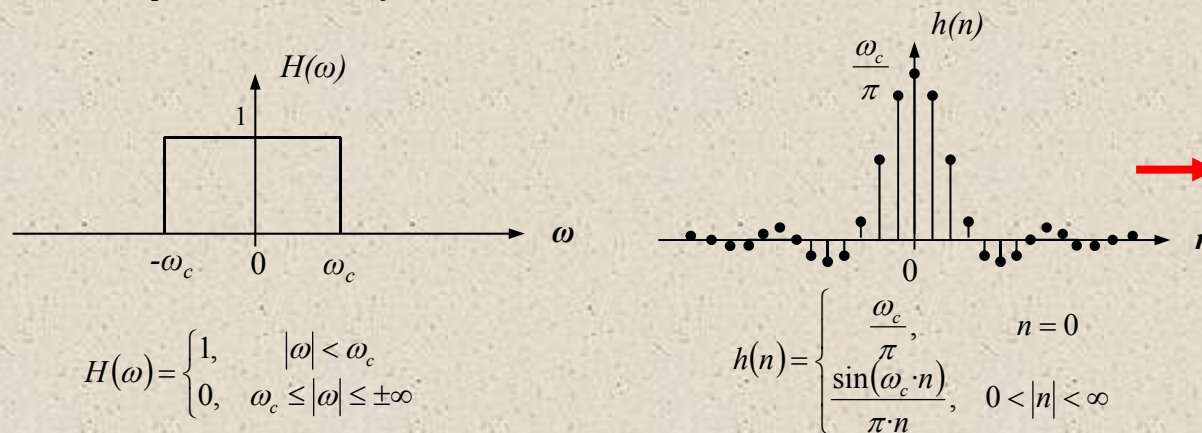
- **Implementació** (PC, DSP o estructura $\mu P/\mu C$) de l'**equació en diferències** del filtre, segons especificacions d'aplicació

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) \quad H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k}} = \frac{\boxed{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_n \cdot z^{-n} \text{ FIR}}}{\boxed{1 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_m \cdot z^{-m} \text{ IIR}}}$$

- Organització de recursos segons complexitat computacional (Vist)
- **Disseny dels coeficients** (a_k, b_k) i nombre de valors (N, M) segons (Obtenció de la **resposta impulsional**):
 - Especificacions freqüencials de **magnitud i fase**
 - Elecció del tipus de filtre: **IIR o FIR** ($N=0$)

Causalitat i les seves implicacions

- Els **filtres ideals** **no** son **causals** i, per tant, no es poden implementar físicament (en temps real)
- **Exemple:** Filtre 'passa-baixes' ideal



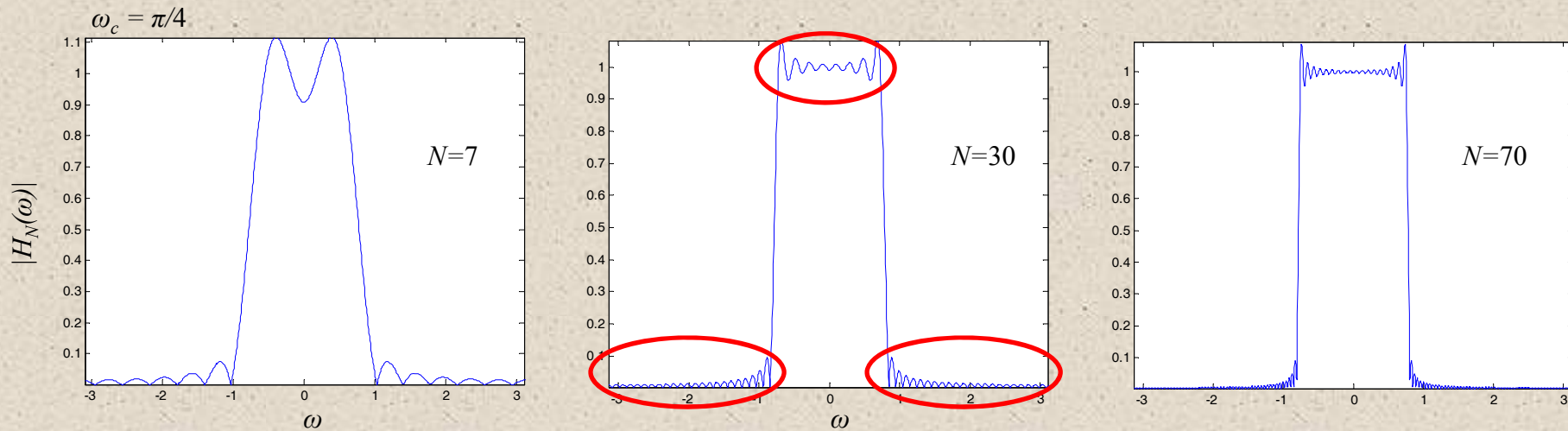
Són necessàries **infinites** monstres de $h(n)$ per a la implementació, **inclús** per $n < 0$

- **Conseqüències** de la no causalitat:
 - **Resposta freqüencial** $H(\omega)$ no pot ser nul·la, excepte en punts separats
 - **Compromís** entre característiques desitjables de **mòdul** ($|H(\omega)|$) **constant** i **transicions abruptes** a la banda d'atenuació.
 - **Mòdul i fase** ($\Theta(\omega)$) no es poden dissenyar **individualment**

Filtres aproximats

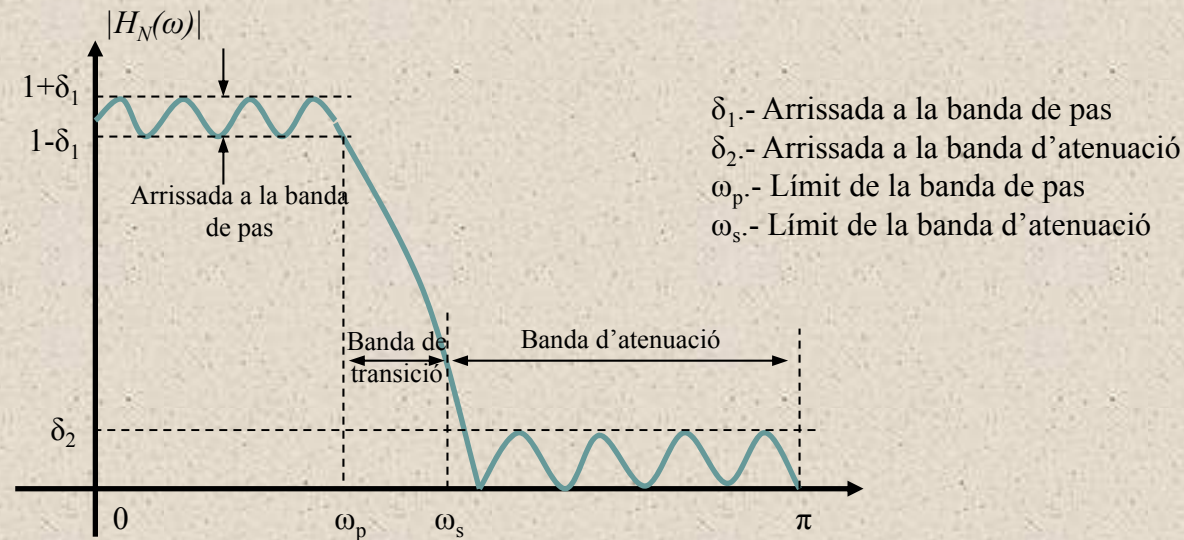
- Les aproximacions dels filtres ideals són *suficients* en molts casos
 - Exemple: Filtre 'passa-baixes' truncat N mostres:

$$h_N(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & n = 0 \\ \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi \cdot n}, & -N < n < N, (n \neq 0) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad H_N(\omega) = \sum_{n=-N}^N \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi \cdot n} \cdot e^{-j\omega \cdot n}$$



- L'arrissada en $|H(\omega)|$ es deguda al truncament (*fenomen de Gibbs*)
- La longitud de $h(n)$ ha de ser l'adequada segons especificacions

Especificacions dels filtres



- Ample de banda: $\omega_s - \omega_p$
- Les magnituds s'expressen en dB's: $\delta_{1(\text{dB})} = 20 \cdot \log_{10}(\delta_1)$
- Especificacions: $\delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s$
- Paràmetres de disseny: a_k, b_k, N, M

Contingut

1. Disseny FIR

- **Enfinestrament i mostreig freqüencial** (bàsics)
- *Aproximació de Chebyshev* (optimització de la resposta freqüencial)
- *Diferenciadors*
- *Transformada de Hilbert*

2. Disseny amb especificacions analògiques (IIR)

- **Invariància impulsional, transformació bilineal** i adaptació de la 'transformada z '
- Filtres *Butterworth, Chebyshev, El·líptics, Bessel, ...*

3. Transformacions en freqüència

- Domini **analògic** i **digital**

4. Disseny amb especificacions digitals (Mínims quadrats)

- **Padé** i **Wiener**



Disseny FIR: Aspectes generals

- **Sistema FIR:**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k \cdot x(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} h_k \cdot x(n-k) \quad H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h_k \cdot z^{-k} \quad \longrightarrow \quad \boxed{b_k = h(k)}$$

Simètrica: $h(n) = h(M-1-n)$ $H(\omega) = H_r(\omega) \cdot e^{-j\omega(M-1)/2}$ **Anti-simètrica:** $h(n) = -h(M-1-n)$ $H(\omega) = H_r(\omega) \cdot e^{-j[-\omega(M-1)/2 + \pi/2]}$

Amplitud:

$$H_r(\omega) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \cos\left[\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right]$$

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{M/2-1} h(n) \cos\left[\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right]$$

Fase:

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} -\omega\left(\frac{M-1}{2}\right), & H_r(\omega) > 0 \\ -\omega\left(\frac{M-1}{2}\right) + \pi, & H_r(\omega) < 0 \end{cases}$$

Amplitud:

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \sin\left[\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right]$$

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{M/2-1} h(n) \sin\left[\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right]$$

Fase:

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \omega\left(\frac{M-1}{2}\right), & H_r(\omega) > 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \omega\left(\frac{M-1}{2}\right), & H_r(\omega) < 0 \end{cases}$$

M.- senar

M.- parell

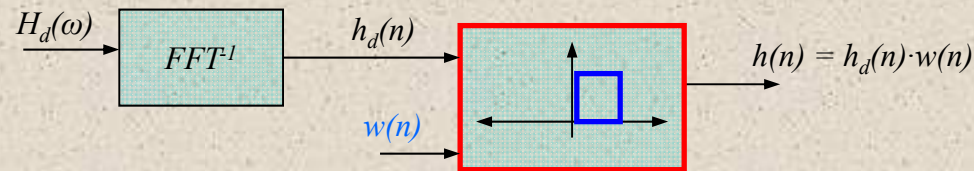
$$h\left(\frac{M-1}{2}\right) = 0$$

- L'objectiu consisteix en determinar $h(n)$ per $n=0, 1, \dots, M-1$ per mitjà d'especificacions del filtre ($\delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s$) i amb ajuda d'expressions basades en la resposta freqüencial ($H_r(\omega)$ i $\Theta(\omega)$)
- La condició d'anti-simetria no serveix en el disseny de filtres FIR passa-baixes



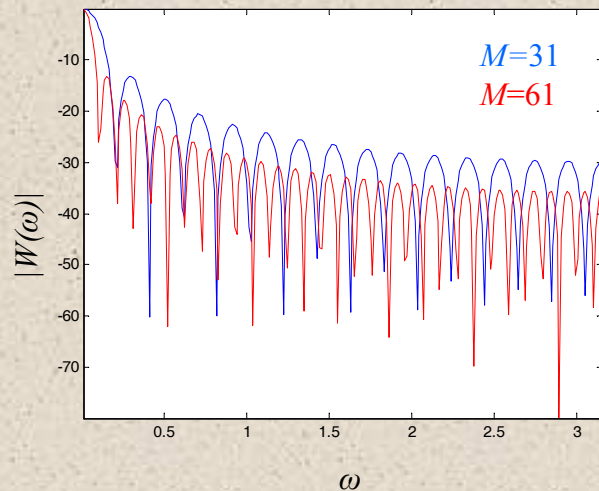
Disseny FIR mitjançant finestres

- Amb l'especificació en freqüència del filtre $H_d(\omega)$ desitjat, primer s'obté la resposta impulsional $h_d(n)$ per després truncar-la a un nombre de mostres finit



- El resultat també està condicionat per la finestra $w(n)$

- Finestra rectangular: $w(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0, & \text{altrament} \end{cases} \xrightarrow{FFT^{-1}} |W(\omega)| = \frac{|\sin(\omega \cdot M/2)|}{|\sin(\omega/2)|}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$



- Suavitza la característica $H_d(\omega)$ (Interessa M gran)
- Lòbuls laterals provoquen efectes indesitjables en la resposta freqüencial
- Els lòbuls laterals es redueixen amb finestres que no presentin grans **discontinuitats**

Tipus de finestres $w(n)$

Nom de la finestra	Seqüència del domini temporal $h(n), 0 \leq n \leq M-1$	Observacions
Barlett	$1 - \frac{2 \left n - \frac{M-1}{2} \right }{M-1}$	
Blackman	$0.42 - 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot n}{M-1}\right) + 0.08 \cdot \cos\left(\frac{4\pi \cdot n}{M-1}\right)$	
Hamming	$0.54 - 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot n}{M-1}\right)$	
Hanning	$\frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi \cdot n}{M-1}\right) \right)$	
Kaiser	$\frac{I_0 \left[\alpha \sqrt{\left(\frac{M-1}{2}\right)^2 - \left(n - \frac{M-1}{2}\right)^2} \right]}{I_0 \left[\alpha \left(\frac{M-1}{2}\right) \right]}$	I_0 .- Funció de <i>bessel</i> modificada, classe 1 $0 < \alpha < 1$
Lanczos	$\left\{ \frac{\sin \left[2\pi \left(\frac{M-1}{2}\right) / (M-1) \right]}{2\pi \left(\frac{M-1}{2}\right) / (M-1)} \right\}^L$	$L > 0$
Tukey	$\left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\pi \frac{n - (1+\alpha)(M-1)/2}{(1-\alpha)(M-1)/2} \right) \right] \right\},$	$\left n - \frac{M-1}{2} \right \leq \alpha \frac{M-1}{2}$ $\alpha \frac{M-1}{2} \leq \left n - \frac{M-1}{2} \right \leq \frac{M-1}{2}$ $0 \leq \alpha \leq 1$

Comparativa finestres

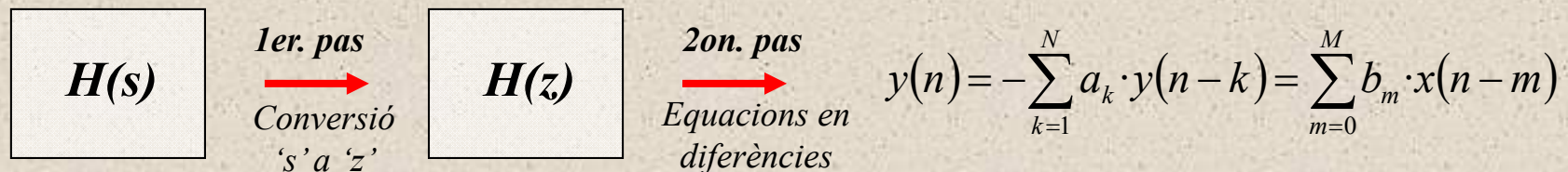


Comparativa finestres (i II)



Consideracions generals

- Respecte als dominis
 - L'anàlisi de sistemes en el domini *discret* del temps (n) planteja l'ús de *equacions en diferències* o bé elements de *retard* (Domini z), a diferència del domini *continu* que utilitza les derivades (Domini s)
- Respecte a les metodologies
 - A la pràctica, les tècniques de disseny es basen en l'anàlisi de prototips analògics per després realitzar una **conversió** a filtre digital IIR o FIR
 - Tres mètodes de conversió segons caracterització del filtre analògic: *Aproximació per derivades*, *invariància impulsional* i *transformació bilineal*



Pas 1.- Aproximació per derivades

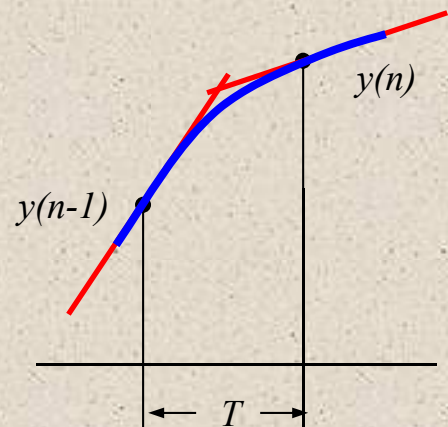
- És una aproximació de l'equació *diferencial* per mitjà d'una *equació en diferències*

$$H_a(s) = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k} \longrightarrow \sum_{k=0}^M \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=nT} &= \frac{y(nT) - y(nT - T)}{T} = \\ &= \frac{y(n) - y(n-1)}{T} \end{aligned}$$

\swarrow \searrow
 $s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$

$$y(n-a) = y(z) \cdot z^{-a}$$



*Transformació 's' - 'z'
a realitzar*

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

Pas 1.- Invariància Impulsional

- Es basa en l'obtenció d'un sistema que és la *versió mostrejada* de la resposta impulsional del filtre analògic ($h(n) \equiv h(nT)$ per $n = 0, 1, 2, \dots$)
- Per fer la transformació, s'expressa la funció de transferència del filtre analògic en *fraccions simples*

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s - p_k} \quad \xrightarrow{\text{Mostreig}} \quad H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} \cdot z^{-1}}$$

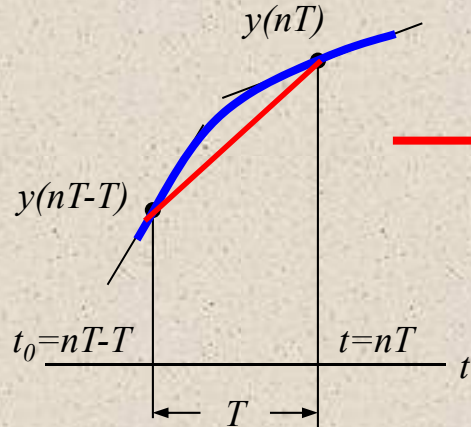
- $\{p_k\}$ representen els pols del filtre analògic, mentre que $\{c_k\}$ son els coeficients d'expansió en fraccions simples.
- Expressió a utilitzar en la transformació:

$$s - p_k = 1 - e^{p_k T} \cdot z^{-1}$$

Pas 1.- Transformació bilineal

- Descriu una correspondència entre el pla s i el pla z . L'eix $j\omega$ es transforma en el cercle unitat del pla z

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{s + a_k} \rightarrow \frac{dy(t)}{dt} + a_k \cdot y(t) = b_k \cdot x(t) \xrightarrow{t=nT} y'(nT) = -a \cdot y(nT) + b \cdot x(nT) \quad (1)$$



$$y(t) = \int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau + y(t_0)$$

$$y(nT) = \frac{T}{2} [y'(nT) + y'(nT - T)] + y(nT - T) \quad (2)$$

- La transformació ' s ' - ' z ' s'obté mitjançant l'equació en diferències que resulta de substituir (1) en (2)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{\frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + a_k}$$

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$

Exemple

- Feu la conversió del filtre analògic del pla s al pla z

$$H_a(s) = \frac{s + 0.1}{(s + 0.1)^2 + 0.9}$$

- Aproximació per derivades: $s = (1 - z^{-1})/T$

$$H(z) = \frac{T^2 / (1 + 0.2T + 9.01T^2)}{1 - \frac{2 \cdot (1 + 0.1T)}{1 + 0.2T + 9.01T^2} z^{-1} + \frac{1}{1 + 0.2T + 9.01T^2} z^{-2}} \xrightarrow{T=0.1} H(z) = \frac{0.009 \cdot z^{-2}}{1 - 1.8197 \cdot z^{-1} + 0.9008 \cdot z^{-2}}$$

- Variància impulsional: $s - p_k = 1 - e^{p_k T} \cdot z^{-1}$

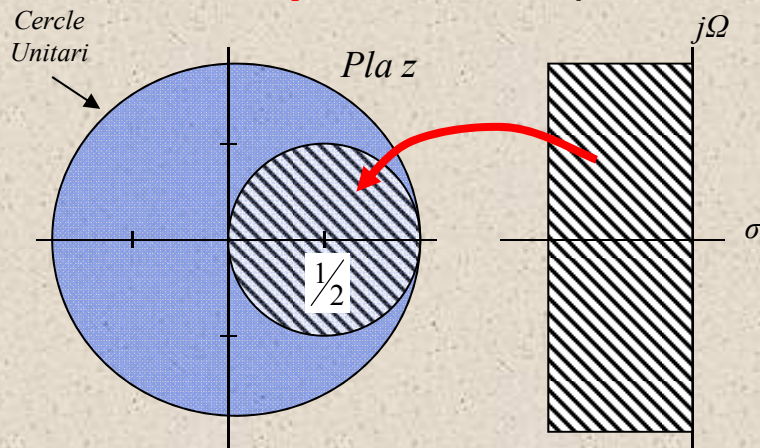
$$H_a(s) = \frac{1/2}{s + 0.1 - 3j} + \frac{1/2}{s + 0.1 + 3j} \xrightarrow{T=1} H(z) = \frac{1/2}{1 - e^{-0.1T} \cdot e^{3jT} z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - e^{-0.1T} \cdot e^{-3jT} z^{-1}} \xrightarrow{T=1} H(z) = \frac{1 - 0.9048 \cdot z^{-1}}{1 - 1.8096 \cdot z^{-1} + 0.8187 \cdot z^{-2}}$$

- Transformació bilineal (per $T=0.5$)

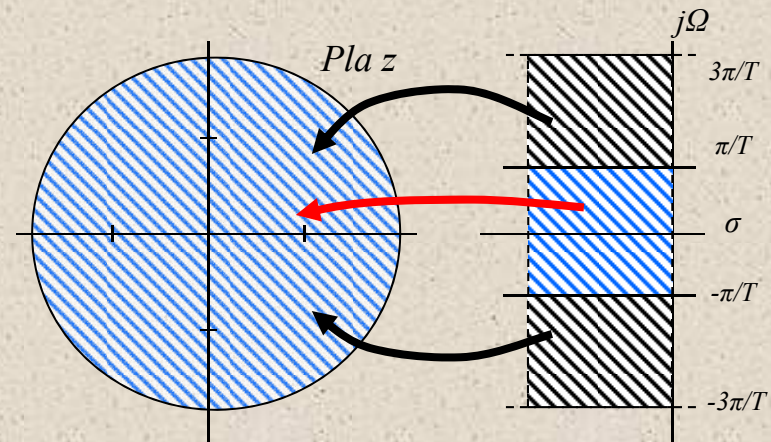
$$H(z) = \frac{0.2974 + 0.119 \cdot z^{-1} - 0.1785 \cdot z^{-2}}{1 - 1.9024 \cdot z^{-1} + 0.9048 \cdot z^{-2}}$$

Conversió 's'-'z'. Consideracions

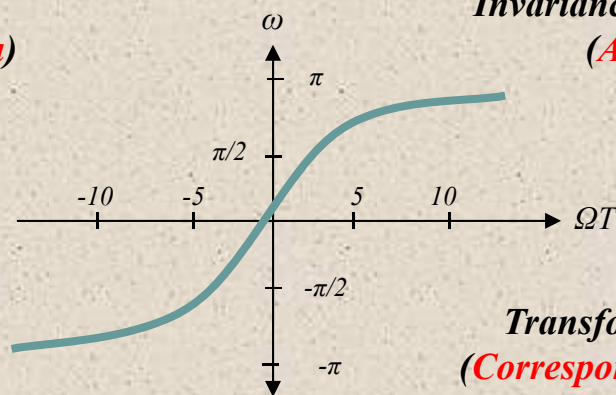
- Estabilitat:
 - És imprescindible que l'eix $j\Omega$ del pla s tingui una **correspondència completa** amb el pla z , **dintre** del cercle unitari en z



Aproximació per derivades
(Correspondència incompleta)



Invariància Impulsional
(Aliasing)



Transformada bilineal
(Correspondència no lineal)

Conversió 's'-'z'. Consideracions (Cont)

- Les tres metodologies garanteixen **estabilitat** del sistema discret després de la conversió, ...però amb **matisos**
 - **Aproximació per derivades**
 - Només es pràctic en sistemes **passa-baixes** i una classe limitada de sistemes **passa-banda**
 - Els mètodes basats en la *k*-èsima derivada ($s^k = [(1-z^{-1})/T^k]$) són molt complexes de realitzar
 - **Variància impulsional**
 - Mateixes limitacions que el mètode d'aproximació per derivades degut al problema de solapament del pla *s* amb el *z*
 - **Trasformació bilineal**
 - Tot i la correspondència no lineal de l'eix freqüencial amb el domini continu, és el mètode més utilitzat a la pràctica

