Fonaments Matemàtics: Àlgebra i Càlcul

Mercè Claverol Aguas

Universitat Politècnica de Catalunya
Dept. Matemàtiques

ÍNDEX

Índex

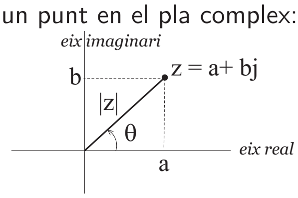
Complexos $\mathbb{C}$

Forma binòmica

$\boxed{z = a + bj}$ on $a, b \in \mathbb{R}$ i $j = \sqrt{-1}$ és la unitat imaginària.

Cada $z \in \mathbb{C}$, es pot representar com a un punt en el pla complex:

Re(z)=a és la part real,
Im(z)=b és la part imaginària.



Binòmica⟶Exponencial:

Mòdul: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument θ principal: $\tan\theta = \frac{b}{a}, \quad -\pi < \theta \leq \pi$

Exponencial⟶Binòmica $\boxed{a = |z|\cos\theta, \quad b = |z|\sin\theta}$

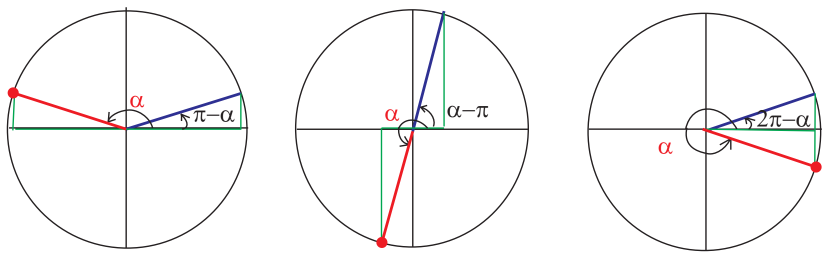
Forma exponencial

$\boxed{z = |z|e^{\theta j}}$ on $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan\theta = \frac{b}{a}$.

Complexos. Operacions

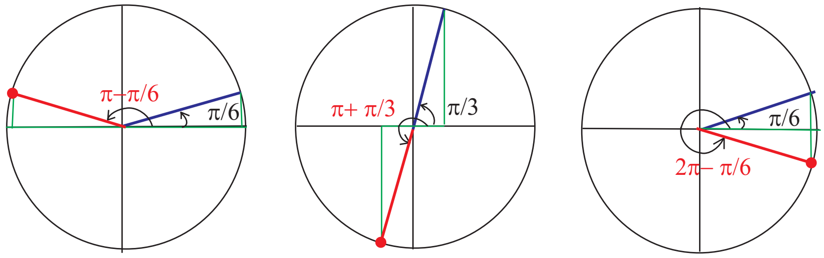
	Binòmica $z=a+bj$	Exponencial $z=\lvert z\rvert e^{\theta j}$
	$z_1=a_1+b_1j \quad z_2=a_2+b_2j$	$z_1=\lvert z_1\rvert e^{\theta_1 j}$ $z_2=\lvert z_2\rvert e^{\theta_2 j}$
z_1+z_2	$a_1+a_2+(b_1+b_2)j$	–
$z_1\cdot z_2$	$a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+b_1a_2)j$	$\lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert e^{(\theta_1+\theta_2)}j$
$\dfrac{z_1}{z_2}$	$\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$ $\overline{z_2}=a_2-b_2j \quad z_2\overline{z_2}=a_2^2+b_2^2$	$\frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}e^{(\theta_1-\theta_2)}j$
z^n	$(a+bj)^n$	$\lvert z\rvert^n e^{n\theta j}$
$\sqrt[n]{z}$	–	$\{\sqrt[n]{\lvert z\rvert}e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}j}$ $k=0,1,\cdots,n-1\}$

Reducció al primer quadrant



$\alpha\in$ 2on. quadrant	$\alpha\in$ 3er. quadrant	$\alpha\in$ 4art. quadrant
$\cos(\alpha)=-\cos(\pi-\alpha)$	$\cos(\alpha)=-\cos(\alpha-\pi)$	$\cos(\alpha)=\cos(2\pi-\alpha)$
$\sin(\alpha)=\sin(\pi-\alpha)$	$\sin(\alpha)=-\sin(\alpha-\pi)$	$\sin(\alpha)=-\sin(2\pi-\alpha)$

Reducció al primer quadrant

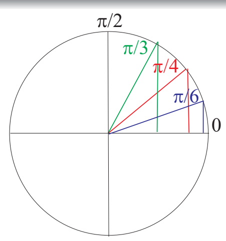


$\alpha \in$ 2on. quadrant	$\alpha \in$ 3er. quadrant	$\alpha \in$ 4art. quadrant
$\cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6})$	$\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3})$	$\cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6})$
$\sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6})$	$\sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3})$	$\sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6})$

Raons trigonomètriques

Raons trigonomètriques dels angles principals al $1^{\underline{er}}$ quadrant:

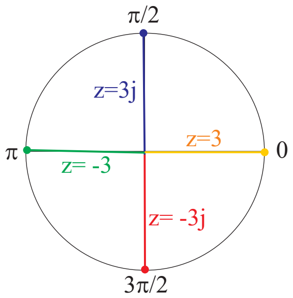
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞



Exemples. Complexos als eixos

Alguns exemples senzills:

$$
\begin{aligned}
z &= \ \ 3 \ \ = 3e^{0j}\\
z &= 3j \ \ = 3e^{\frac{\pi}{2}j}\\
z &= -3 \ \ = 3e^{\pi j}\\
z &= -3j = 3e^{\frac{3\pi}{2}j} = 3e^{\frac{-\pi}{2}j}
\end{aligned}
$$



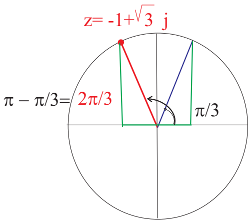
Exemples. Pas de binòmica a exponencial

- Pas de forma binòmica a exponencial $\boxed{\begin{array}{l}\text{Mòdul: } |z| = \sqrt{a^2+b^2}\\ \text{Argument } \theta\text{: } \tan\theta = \frac{b}{a}\end{array}}$

$$z = -1+\sqrt{3}j \Longrightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1}$$

$$\theta \in Q2$$



$$\Longleftrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\Longleftrightarrow z = 2e^{(\pi-\frac{\pi}{3})j}$$

En aquest cas, l'argument és el principal $(-\pi < \theta \leq \pi)$,

$$z = 2e^{(\pi-\frac{\pi}{3})j} = 2e^{\frac{2\pi}{3}j}$$

Exemples. Pas de binòmica a exponencial

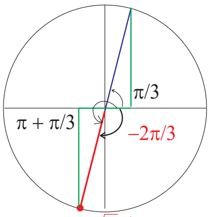
Pas de forma binòmica a exponencial

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Mòdul: } |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \text{Argument } \theta\text{: } \tan\theta = \frac{b}{a}\end{array}}$$

$$z = -1 - \sqrt{3}j \Longrightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1}$

$\theta \in Q3$



$$\Longleftrightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\Longleftrightarrow z = 2e^{(\pi+\frac{\pi}{3})j}$$

Si ho volem expressar amb l'argument principal $(-\pi < \theta \leq \pi)$,

$$z = 2e^{(\pi+\frac{\pi}{3})j} = 2e^{(\pi+\frac{\pi}{3}-2\pi)j} = 2e^{-\frac{2\pi}{3}j}$$

Exemples. Pas de binòmica a exponencial

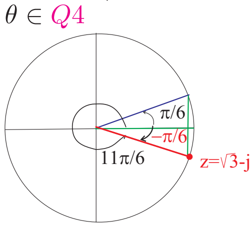
Pas de forma binòmica a exponencial

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Mòdul: } |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \text{Argument } \theta\text{: } \tan\theta = \frac{b}{a}\end{array}}$$

$$z = \sqrt{3} - j \Longrightarrow |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$\tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

$\theta \in Q4$



$$\Longleftrightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\Longleftrightarrow z = 2e^{(2\pi-\frac{\pi}{6})j} = 2e^{\frac{11\pi}{6}j}$$

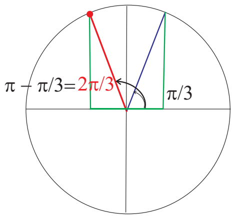
Si ho volem expressar amb l'argument principal $(-\pi < \theta \leq \pi)$,

$$z = 2e^{\frac{11\pi}{6}j} = 2e^{(\frac{11\pi}{6}-2\pi)j} = 2e^{-\frac{\pi}{6}j}$$

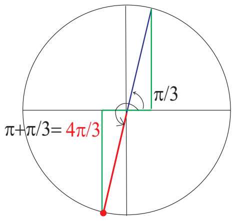
Exemples. Pas d'exponencial a binòmica

- Pas de forma d'exponencial a binòmica

$$\boxed{a = |z|\cos\theta, \quad b = |z|\sin\theta}$$



$$z = 2e^{\frac{2\pi}{3}j} = 2\cos(\frac{2\pi}{3}) + 2\sin(\frac{2\pi}{3})j =$$
$$= -2\cos(\frac{\pi}{3}) + 2\sin(\frac{\pi}{3})j = -1+\sqrt{3}j$$

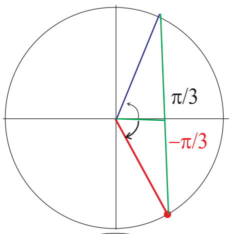


$$z = 2e^{\frac{4\pi}{3}j} = 2\cos(\frac{4\pi}{3}) + 2\sin(\frac{4\pi}{3})j =$$
$$= -2\cos(\frac{\pi}{3}) - 2\sin(\frac{\pi}{3})j = -1-\sqrt{3}j$$

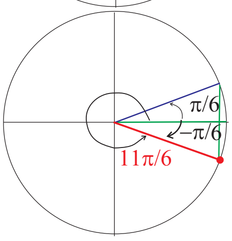
Exemples. Pas d'exponencial a binòmica

Pas de forma d'exponencial a binòmica

$$\boxed{a = |z|\cos\theta, \quad b = |z|\sin\theta}$$



$$z = 2e^{\frac{-\pi}{3}j} = 2\cos(\frac{-\pi}{3}) + 2\sin(\frac{-\pi}{3})j =$$
$$= 2\cos(\frac{\pi}{3}) - 2\sin(\frac{\pi}{3})j = 1-\sqrt{3}j$$



$$z = 2e^{\frac{11\pi}{6}j} = 2\cos(\frac{11\pi}{6}) + 2\sin(\frac{11\pi}{6})j =$$
$$= 2\cos(\frac{\pi}{6}) - 2\sin(\frac{\pi}{6})j = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j$$

Exemples. Pas d'exponencial a binòmica

Pas de forma d'exponencial a binòmica

$$\boxed{a = |z|\cos\theta, \quad b = |z|\sin\theta}$$

Si l'angle és més gran que 2π aleshores el reduïm a la primera volta.

$$z = e^{59\frac{\pi}{6}j} = e^{8\pi j}e^{\frac{11}{6}\pi j} = e^{\frac{11}{6}\pi j} = e^{(\frac{11}{6}\pi - 2\pi)j} = e^{-\frac{\pi}{6}j} =$$

$$\Uparrow$$

$$59\frac{\pi}{6} = \frac{59}{6\cdot 2}2\pi = \frac{12\cdot 4 + 11}{12}2\pi = \frac{\cancel{12}\cdot 4}{\cancel{12}}2\pi + \frac{11}{12}2\pi = 8\pi + \frac{11}{6}\pi$$

$$= \cos(\frac{-\pi}{6}) + \sin(\frac{-\pi}{6})j = \cos(\frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j$$

Exemples. Arrels

- Arrels $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|e^{\theta j}} = \{\sqrt[n]{|z|}\,e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}j}\} =$

$$= \boxed{\{\sqrt[n]{|z|}\,e^{(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})j},\ k = 0,\cdots,n-1\}}$$

Observa que:

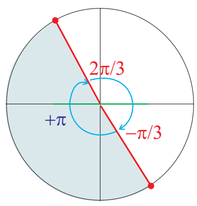
* Tot nombre complex té n arrels n-èssimes
* La diferència d'angles entre dues arrels consecutives és de $\frac{2\pi}{n}$

- Arrels quadrades $n = 2$

$$\sqrt{-1-\sqrt{3}j} = \sqrt{2e^{-\frac{2\pi}{3}j}} =$$

$$= \{\sqrt{2}\,e^{(\frac{-\cancel{2}\pi}{3\cancel{2}}+\frac{\cancel{2}k\pi}{\cancel{2}})j},\ k = 0,1\} =$$

$$= \{\sqrt{2}\,e^{\frac{-\pi}{3}j},\ \sqrt{2}\,e^{(\frac{-\pi}{3}+\pi)j}\}$$



* En forma binòmica, les dues arrels quadrades d'un complex, $\{z_1, z_2\}$ són complexos oposats $z_2 = -z_1$.

Exemples. Arrels

- Arrels $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|e^{\theta j}} = \{ \sqrt[n]{|z|}\, e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}j} \} =$

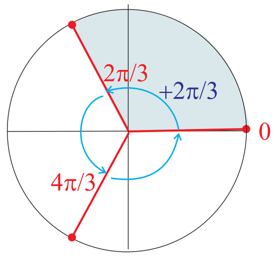
$$= \boxed{\{ \sqrt[n]{|z|}\, e^{(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})j},\ k=0,\cdots,n-1\}}$$

  - Arrels cúbiques $n=3$

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{27e^{0j}} =$$

$$= \{ \sqrt[3]{27}\, e^{(\frac{0}{3}+\frac{2k\pi}{3})j},\ k=0,1,2\} =$$

$$= \{3e^{0j},\ 3e^{\frac{2\pi}{3}j},\ 3e^{\frac{4\pi}{3}j}\}$$



Teorema fonamental de l'Àlgebra

- $z_0 \in \mathbb{C}$ és arrel del polinomi $p(x) \Leftrightarrow p(z_0)=0 \Leftrightarrow p(x)$ és divisible pel factor $x-z_0$
- La multiplicitat de z_0 com arrel de $p(x)$ és igual al nombre de vegades que el polinomi és divisible pel factor $x-z_0$

Teorema fonamental de l'Àlgebra

Tot polinomi $p(x)\in\mathbb{C}[x]$ de grau n té n arrels complexes comptades amb la seva multiplicitat.
És a dir, si

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = a_n(x-z_1)\cdots(x-z_n)$$

$z_1,\cdots,z_n$ són les n arrels complexes de $p(x)$

Exemples:

- $x^2 - jx + 2 = (x-2j)(x+j)$
- $x^3 - 1 = (x-1)(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j)(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j)$

Teorema fonamental de l'Àlgebra

Cas particular

Si els coeficients $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ direm que $p \in \mathbb{R}[x]$. En aquest cas, si z és arrel complexa de p llavors $\bar{z}$ és també arrel amb la mateixa multiplicitat:

$$p(z) = 0 \Leftrightarrow p(\bar{z}) = 0$$

Conseqüència: Si p té coeficients reals i és de grau senar té almenys una arrel real.

Un polinomi mònic de $\mathbb{R}[x]$ es diu irreductible (no pot descompondre's en més factors polinómics) si :

- O bé és de la forma $x - a$.
- O bé del tipus $x^2 + mx + n$ sense arrels reals i, en aquest cas, es pot escriure com $(x-a)^2 + b^2$ on $a \pm bj$ són les arrels a $\mathbb{C}$.

Teorema fonamental de l'Àlgebra

Exemples

- Si $p(x) = x^4 - 1$, les 4 arrels de $p(x)$ es corresponen amb les arrels quartes de 1:
  $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = \overline{z_1} = j$, $z_4 = \overline{z_3} = -j$.
  Per tant,
  $$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)(x+1)(x-j)(x+j) \text{ descomposició a } \mathbb{C}[x] \\ &= (x-1)(x+1)(x^2+1) \text{ descomposició a } \mathbb{R}[x] \end{aligned}$$
- Si $p(x) = x^4 + 1$, les 4 arrels de $p(x)$ es corresponen amb les arrels quartes de -1:
  $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j$,
  $z_3 = \overline{z_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j$, $z_4 = \overline{z_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j$.
  Per tant,
  $$\begin{aligned} p(x) &= (x-z_1)(x-z_4)(x-z_2)(x-z_3) \text{ descomposició a } \mathbb{C}[x] \\ &= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \text{ descomposició a } \mathbb{R}[x] \end{aligned}$$

Fraccions simples

El quocient $\frac{p(x)}{q(x)}$, amb $p(x)$ i $q(x)$ de $\mathbb{R}[x]$, és una fracció simple si:

- $p(x)$ és una constant i
  $q(x) = (x-a)^k$ on $k \geq 1$.
  $$\frac{A}{(x-a)^k}$$
- $p(x)$ és un polinomi de grau ≤ 1 i
  $q(x) = ((x-a)^2 + b^2)^k$, on $k \geq 1$.
  $$\frac{Ax+B}{((x-a)^2+b^2)^k}$$

Qualsevol fracció $\frac{p(x)}{q(x)}$, amb grau de $p(x)$ < grau de $q(x)$, és una fracció simple o es pot expressar, de manera única, com a suma de fraccions simples.

Fraccions simples

Si $\frac{p(x)}{q(x)}$ és suma de fraccions simples, les identificarem descomponent el denominador $q(x)$. L'exponent de cada factor irreductible a $\mathbb{R}[x]$, de $q(x)$, ens dóna el nombre de fraccions simples associades.

Descomposició de $\frac{p(x)}{q(x)}$ en fraccions simples

Factor de $q(x)$ $\rightsquigarrow$	Suma de fraccions simples
$x-a$	$\frac{A}{x-a}$
$(x-a)^k$	$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$
$(x-a)^2+b^2$	$\frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}$

Fraccions simples

Exemples:

1. $$\frac{1}{x^4+3x^2} = \frac{1}{(x^2+3)x^2} =$$
$$= \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+3} \qquad A, B, C, D?$$

2. $$\frac{x^2+3x+4}{x^3+x^2+3x-5} = \frac{x^2+3x+4}{(x-1)(x^2+2x+5)} =$$
$$= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5} \qquad A, B, C?$$

Fraccions simples

Com trobar les constants de les fraccions simples:

Exemple 1.

$$\frac{\boxed{1}}{(x^2+3)x^2} = = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+3} = \frac{\boxed{A(x^2+3)+Bx(x^2+3)+(Cx+D)x^2}}{(x^2+3)x^2}$$

Igualant numeradors: $1 = A(x^2+3) + Bx(x^2+3) + (Cx+D)x^2$

→ Donem valor a les x's (és convenient utilitzar les arrels reals de $q(x)$),

→ i/o igualem coeficient a coeficient

$$\left.\begin{array}{ll} & x=0 \Longrightarrow 1 = 3A \\ \text{coeficient de } x^3: & 0 = B + C \\ \text{coeficient de } x^2: & 0 = A + D \\ \text{coeficient de } x: & 0 = 3B \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1/3,\ B = 0,\ C = 0,\ D = -1/3$$

$$\frac{1}{(x^2+3)x^2} = \frac{1/3}{x^2} + \frac{0}{x} + \frac{0\,x - 1/3}{x^2+3} = \frac{1/3}{x^2} + \frac{-1/3}{x^2+3}$$

Fraccions simples

Exemple 2.

$$\frac{\boxed{x^2+3x+4}}{x^3+x^2+3x-5} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5} = \frac{\boxed{A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-1)}}{x^3+x^2+3x-5}$$

Igualant numeradors: $x^2+3x+4 = A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-1)$

Si fem $x=1$ (arrel real de $q(x)$) i dos valors més, per exemple $x=0$ i $x=-1$, trobem el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4 = 5A - C \\ 8 = 8A \\ 2 = 4A + 2B - 2C \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1, B = 0, C = 1$$

$$\frac{x^2+3x+4}{x^3+x^2+3x-5} = \frac{1}{x-1} + \frac{0\,x+1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+2x+5}$$

Índex

Matrius

Operacions $A=(a_{ij})_{m,n}$ $B=(b_{ij})_{s,r}$

	ordre $A=\boxed{\text{m}}\times\boxed{\text{n}}$ files columnes
$A+B$	$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m,n}$ ordre A=ordre B
$k\cdot A$, $k\in\mathbb{R}$	$k\cdot A=k(a_{ij})_{m,n}=(ka_{ij})_{m,n}$
$A\cdot B$	$A\cdot B=(c_{ij})_{m,r}$ ordre $A=\boxed{\text{m}}\times n$, ordre $B=n\times\boxed{\text{r}}$ on $c_{ij}=(a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in})\begin{pmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$ $A\cdot B\neq B\cdot A$ ordre $(A\cdot B)=m\times r$
A^T	$A^T=(a_{ji})_{n,m}$ *matriu transposada*

Matrius

* Una matriu quadrada és una matriu $n\times n$
* Una matriu és triangular superior quan tots els elements per sota de la diagonal són zero
* Els elements de la diagonal són els a_{ii}

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & -8 & -1\\ 0 & \boxed{5} & 0\\ 0 & 0 & \boxed{1}\end{pmatrix}$$

matriu quadrada 3×3, triangular superior, elements diagonal: 2, 5, 1.

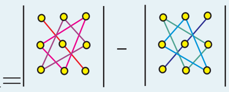
Exemple de producte de matrius:
(ordre $A=\underset{4\times 2}{\boxed{\text{m}}\times n}$, ordre $B=\underset{2\times 3}{n\times\boxed{\text{r}}}$)$\Longrightarrow$ ordre $AB=\underset{4\times 3}{\boxed{\text{m}}\times\boxed{\text{r}}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2\\ 2 & 1\\ 0 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 7+(-2)\cdot 0 & 1\cdot 1+(-2)\cdot 3 & 1\cdot 0+(-2)\cdot 5\\ 2\cdot 7+1\cdot 0 & 2\cdot 1+1\cdot 3 & 2\cdot 0+1\cdot 5\\ 0\cdot 7+3\cdot 0 & 0\cdot 1+3\cdot 3 & 0\cdot 0+3\cdot 5\\ (-1)\cdot 7+4\cdot 0 & (-1)\cdot 1+4\cdot 3 & (-1)\cdot 0+4\cdot 5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 7 & -5 & -10\\ 14 & 5 & 5\\ 0 & 9 & 15\\ -7 & 11 & 20\end{pmatrix}$$

Càlcul de determinants

- Ordre 2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- Ordre 3: Regla de Sarrus det A=  (Ex. pàg. 4)

Adjunt d'a_{ij}: A_{ij}=$\boxed{(-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}}$

on α_{ij} és el Menor complementari d'a_{ij}: determinant que s'obté d'eliminar d'A, la fila i la columna d'a_{ij}

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Ex. $a_{21} = 3, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$

Desenvolupament per una fila o columna

- $det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad i \in \{1, \cdots n\}$
  $= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad j \in \{1, \cdots n\}$

Determinants-Propietats

Transformacions elementals en determinants

T1 *Intercanviar dues files*$\Longrightarrow$ canvia de signe el determinant

T2 *Sumar a una fila un múltiple d'una altra*$\Longrightarrow$ no canvia el determinant

T3 *Multiplicar una fila per un escalar no nul, λ*$\Longrightarrow$ es multiplica per λ el determinant

- En determinants les transformacions elementals funcionen igual per columnes
- Hi ha una línea (fila o columna) que és combinació lineal d'altres $\Longleftrightarrow$ det A=0
- det A=det A^T
- det $(A \cdot B)$=det A·det B

Determinants

Exemple. Calculem el determinant $\begin{vmatrix} 4 & 12 & 10 \\ 5 & 3 & -2 \\ 7 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

1. Aplicant la regla de Sarrus:
   $= 4{\cdot}3{\cdot}(-3)+5{\cdot}4{\cdot}10+12{\cdot}(-2){\cdot}7-[10{\cdot}3{\cdot}7+(-2){\cdot}4{\cdot}4+12{\cdot}5{\cdot}(-3)] = -2$
2. Desenvolupant per la primera fila:
   $= +4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 12\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} =$
   $4(-9+8) - 12(-15+14) + 10(20-21) = -2$
3. Aplicant transformacions elementals:
   $\begin{vmatrix} 4 & 12 & 10 \\ 5 & 3 & -2 \\ 7 & 4 & -3 \end{vmatrix} \overset{F1 \leftrightarrow \frac{1}{2}F1}{=} 2\begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \\ 7 & 4 & -3 \end{vmatrix} \overset{F1 \leftrightarrow F1-2F2}{=}$
   $= 2\begin{vmatrix} -8 & 0 & 9 \\ 5 & 3 & -2 \\ 7 & 4 & -3 \end{vmatrix} \overset{C1 \leftrightarrow C1-C2+C3}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$
   $\overset{*}{=} 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -2$ * desenvolupem per $C1$ (1^{a} columna).

Sistemes d'equacions lineals

Matricialment: $\boxed{Ax = b}$
A matriu associada al sistema , $m \times n$
x vectors d'incògnites, $n \times 1$
b vector dels termes independents, $m \times 1$

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & -y & +z & = & 0 \\ 2x & -y & -z & = & 5 \\ x & +2y & +z & = & 3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b}$$

Matriu ampliada: $(A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Sistemes d'equacions lineals

Sistemes d'equacions equivalents $\longleftrightarrow$ Mateix conjunt de solucions

Transformacions elementals amb la matriu ampliada $(A|b)$

Transformen un sistema d'equacions en un altre d'equivalent.

T1 *Intercanviar dues files*

T2 *Sumar a una fila un múltiple d'una altra*

T3 *Multiplicar una fila per un escalar no nul*

Sistemes d'equacions lineals

Teorema Rouché-Frobenius

$n = n^{\underline{o}}$ d'incògnites

- Sistema compatible-determinat $\Longleftrightarrow$ rang(A)=rang$(A|b)$ $=$ n
- Sistema compatible-indeterminat $\Longleftrightarrow$ rang(A)=rang$(A|b)$ $<$ n
- Sistema incompatible $\Longleftrightarrow$ rang$(A)\neq$rang$(A|b)$

Sistemes d'equacions lineals

Resolució de sistemes pel mètode de Gauss:

Sistema d'equacions lineals $\underset{elementals}{\overset{transformacions}{---\rightsquigarrow}}$ Sistema triangular superior
$\uparrow$
Les solucions s'obtenen aïllant i substituint les corresponents variables des de l'última fila, fins la 1^a.

Resolució de sistemes pel mètode de Cramer:

S'aplica quan $det(A) \neq 0$, on A és la matriu associada al sistema.

Cada incògnita $\boxed{x_i = \dfrac{detA_i}{detA}}$, on A_i és la matriu resultant de substituir la columna i d'A per la columna dels termes independents.

$*$És molt útil si només es vol calcular alguna de les incògnites.

$*$També s'utilitza en sistemes amb paràmetres.

Sistemes d'equacions lineals

Exemple. Resolem el sistema següent pel mètode de Cramer

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & -y & +z & = & 0 \\ 2x & -y & -z & = & 5 \\ x & +2y & +z & = & -3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow (A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$detA = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$ Per tant, podem aplicar Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{detA} = \frac{9}{9} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{detA} = \frac{-9}{9} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{detA} = \frac{-18}{9} = -2$$

Rang d'una matriu

El rang d'una matriu és el $n^{\underline{o}}$ màxim de files (considerades com a vectors) linealment indep., LI, que coincideix amb el $n^{\underline{o}}$ màxim de columnes LI.

1. Rang d'una matriu $= n^{\underline{o}}$ de files no nul·les, després d'aplicar Gauss i sense equacions equivalents.

Exemple. Calculem rang(A) aplicant el mètode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F2 \longleftrightarrow F2-F1 \\ F3 \longleftrightarrow F3-3F1 \\ F4 \longleftrightarrow F4-F1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} F3 \longleftrightarrow F3-2F2 \\ F4 \longleftrightarrow F4-2F2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F3 \longleftrightarrow F4 \\ F4 \longleftrightarrow F3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, rang(A)=3.

Rang d'una matriu

2. Rang d'una matriu = màxim ordre dels menors (determinants de submatrius quadrades) no nuls de la matriu.

Exemple. Calculem rang(A) aplicant determinants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Busquem un menor d'ordre dos, no nul (l'hem senyalat en blau). Orlant amb la $3^{\underline{a}}$ fila obtenim:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, la $3^{\underline{a}}$ fila és combinació lineal de les dues primeres i la podem eliminar (sense canviar el rang).

Orlant amb la $4^{\underline{a}}$ fila, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ Per tant, rang(A)=3.

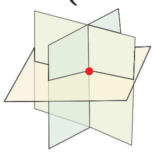
Sistemes d'equacions lineals

Exemple. Resolem sistemes lineals (no homogenis) aplicant Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} F2 \longleftrightarrow F2-2F1 \\ F3 \longleftrightarrow F3-F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$F3 \longleftrightarrow F3-3F2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -18 \end{array}\right) \quad \text{rang}(A)\text{=rang}(A|b)\text{=3=}n$$

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & -y & +z & = & 0 \\ & y & -3z & = & 5 \\ & & 9z & = & -18 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{array}\right. \quad (1,-1,-2)$$



Sistema compatible-determinat. Solució: 1 punt

Sistemes d'equacions lineals

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 8 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} F2 \longleftrightarrow F2-2F1 \\ F3 \longleftrightarrow F3-5F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

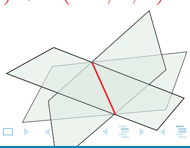
$$F3 \longleftrightarrow F3-2F2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{rang}(A)\text{=rang}(A|b)\text{=2}< n=3$$

$$\boxed{n^{\underline{o}} \text{ de paràmetres (graus de llibertat)} = n \text{ - rang}(A)}$$

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & -y & +2z & = & 2 \\ & 3y & -z & = & -2 \\ & & z & = & \lambda \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{4-5\lambda}{3} \\ y=\frac{-2+\lambda}{3} \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

La solució és la recta: $(x,y,z) = (\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, 0) + \lambda(-5,1,3)$

Sistema compatible-indeterminat.
Infinites solucions

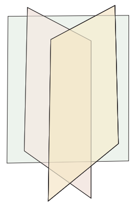


Sistemes d'equacions lineals

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} F1 \longleftrightarrow F2 \\ F2 \longleftrightarrow F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 11 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F2 \longleftrightarrow F2-2F1 \\ F3 \longleftrightarrow F3-3F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 21 \\ 0 & -1 & -1 & 18 \end{array}\right) \quad F3 \longleftrightarrow F3-F2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \quad \text{rang}(A)=2 \neq \text{rang}(A|b)=3$$



Sistema incompatible. No té solució.

Sistemes d'equacions lineals

Homogenis

Un sistema d'equacions lineals s'anomena homogeni si tots els termes independents són nuls.

$$b=\vec{0} \Longrightarrow \boxed{\text{rang}(A)=\text{rang}(A|b)} \Longleftrightarrow \boxed{\text{sistema compatible}}$$

Pot ser compatible determinat o indeterminat però, com a mínim, admet la solució trivial $x_1=0,\cdots,x_n=0$.

Ex. Homogeni compatible-determinat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F2 \longleftrightarrow F2-2F1 \\ F3 \longleftrightarrow F3-3F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -14 & 0 \end{array}\right)$$

$$F3 \longleftrightarrow F3-\tfrac{5}{3}F2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) \quad \text{rang}(A)=\text{rang}(A|b)=3=n$$

$$\left.\begin{array}{rrrcl} x & +y & +4z & = & 0 \\ & -3y & -8z & = & 0 \\ & & -\frac{2}{3}z & = & 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right. \quad (0,0,0)$$

Sistemes d'equacions lineals

Homogenis

Un sistema d'equacions lineals s'anomena homogeni si tots els termes independents són nuls.

$$b=\vec{0} \Longrightarrow \boxed{\text{rang}(A)=\text{rang}(A|b)} \Longleftrightarrow \boxed{\text{sistema compatible}}$$

Pot ser compatible determinat o indeterminat però, com a mínim, admet la solució trivial $x_1 = 0, \cdots, x_n = 0$.

Ex. Homogeni compatible-indeterminat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F2 \longleftrightarrow F2-2F1 \\ F3 \longleftrightarrow F3-3F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

$$F3 \longleftrightarrow F3-F2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{rang}(A)=\text{rang}(A|b)=2< n=3$$

$$\left.\begin{array}{rrrcl} x & +y & +4z & = & 0 \\ & -3y & -8z & = & 0 \\ & & z & = & \lambda \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{4}{3}\lambda \\ y=-\frac{8}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \quad (x,y,z)=\lambda(-\tfrac{4}{3},-\tfrac{8}{3},1)$$

recta pel $(0,0,0)$

Índex

Definicio

Espai vectorial

Estructura algebraica formada per:

1. $(\mathbb{V}, +)$ Conj. de vectors amb l'operació $+$ (grup commutatiu)
2. $(\mathbb{K}, +, .)$ Conj. d'escalars amb les operacions $+, \cdot$ (cos commutatiu)
3. Un producte extern que opera un escalar amb un vector donant un vector $k \cdot v \in \mathbb{V}$. Compleix les propietats: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u, v \in \mathbb{V}$
   1. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
   2. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
   3. $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
   4. $1 \cdot v = v$

Exemple: $\mathbb{R}^n$ (vectors d'n coordenades).

Subespai vectorial

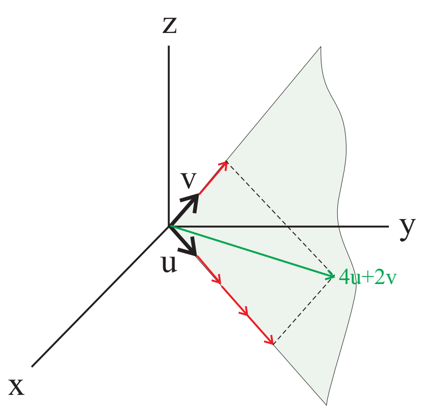
Un subespai vectorial S d'un espai vectorial $\mathbb{V}$ és un subconjunt de $\mathbb{V}$ que té estructura d'espai vectorial amb les mateixes operacions que $\mathbb{V}$.

Caracterització: $\boxed{\forall u, v \in S, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in S}$

Espais vectorials

Espais vectorials $\longleftrightarrow$ Sistemes lineals homogenis

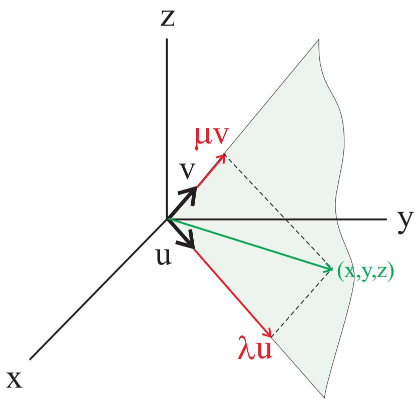
Combinació lineal d'u i v: $4u + 2v = 4(1, 1, 0) + 2(0, 1, 1) = (4, 6, 2)$



Espais vectorials

Espais vectorials $\longleftrightarrow$ Sistemes lineals homogenis

Combinació lineal d'u i v: $\lambda u + \mu v = \lambda(1,1,0) + \mu(0,1,1) = (x,y,z)$



Espais vectorials

Espais vectorials $\longleftrightarrow$ Sistemes lineals homogenis

Espai vectorial (pla)
generat per dos vectors $\longrightarrow$ $\boxed{\lambda(1,1,0) + \mu(0,1,1) = (x,y,z)}$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = x \\ \lambda + \mu = y \\ \mu = z \end{array}\right\} \Longleftrightarrow (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \quad F2 \leftrightarrow F2 - F1$$

$$\left(\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \quad F3 \leftrightarrow F3 - F2 \quad \left(\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & z-y+x \end{array}\right)$$

rang(A)=rang$(A|b)$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{z-y+x=0}$ $\longleftarrow$ Sistema lineal homogeni amb 2 graus de llibertat .

Solució: el pla z-y+x=0

Espais vectorials

Espais vectorials $\longleftrightarrow$ Sistemes lineals homogenis

	Espai vectorial: E	dim E
En $\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	2
	Recta per l'origen $ax + by = 0$	1
	$(0, 0)$	0
En $\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	3
	Pla per l'origen $ax + by + cz = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$, no tots nuls	2
	Recta per l'origen $\left.\begin{array}{rrrcl} ax & +by & +cz & = & 0 \\ dx & +ey & +fz & = & 0 \end{array}\right\}$ rang(A)=2, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ n-rang(A)=3-2=1 grau de llibertat	1
	$(0, 0, 0)$	0

Dependència i independència lineal de vectors

Dependència i independència lineal de vectors

Un conjunt de vectors $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}$

- són linealment dependents, LD, si algun d'aquests es pot posar com a combinació lineal dels altres.
  Hi ha $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, no tots nuls, tals que: $\lambda_1\vec{v_1} + \cdots + \lambda_n\vec{v_n} = \vec{0}$
- són linealment independents, LI, si cap d'aquests es pot posar com a combinació lineal dels altres

$$\boxed{\lambda_1\vec{v_1} + \cdots + \lambda_n\vec{v_n} = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0}$$

En una matriu les files i les columnes poden ser considerades vectors.
Nombre de files LI = Nombre de columnes LI
Rang d'una matriu = Nombre màxim de files o de columnes LI.

Sigui A la matriu dels vectors $v_1, \cdots, v_n$ posats per columnes.

$$\boxed{v_1, \cdots, v_n \text{ LI} \Longleftrightarrow \text{rang}(A)=n}$$

Dependència i independència lineal de vectors

Ex. $\{v_1 = (1,2,3), v_2 = (1,-1,-2), v_3 = (4,0,-2)\}$ són LD o LI?

Posem els vectors per columnes i calculem el rang (amb determinants o amb Gaus): $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} F2 \leftrightarrow F2-2F1 \\ F3 \leftrightarrow F3-3F1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & -5 & -14 \end{pmatrix}$

$F3 \leftrightarrow F3 - \frac{5}{3}F2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ rang(A)=3=$n^{\underline{o}}$ de vectors $\Downarrow$ són vectors LI

Observació: resolent el sist. homogeni, $(A|\vec{0}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{rrrcl} \lambda_1 & +\lambda_2 & +4\lambda_3 & = & 0 \\ & -3\lambda_2 & -8\lambda_3 & = & 0 \\ & & -\frac{2}{3}\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}\right. \quad (0,0,0) \text{ comp. determinat}$$

$$\boxed{\lambda_1(1,2,3)+\lambda_2(1,-1,-2)+\lambda_3(4,0,-2) = (0,0,0) \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0}$$

Dependència i independència lineal de vectors

Ex. $\{v_1 = (1,2,3), v_2 = (1,-1,0), v_3 = (4,0,4)\}$ són LD o LI?

Posem els vectors per columnes (matriu A) i calculem el rang:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} F2 \leftrightarrow F2-2F1 \\ F3 \leftrightarrow F3-3F1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix}$

$F3 \leftrightarrow F3 - F2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rang(A)=2$<n^{\underline{o}}$ de vectors $\Downarrow$ són vectors LD

* Si volem totes les combinacions lineals d'un conjunt de vectors, hem de resoldre el sistema lineal homogeni.

Dependència i independència lineal de vectors

Volem trobar totes les combinacions lineals de l'anterior conjunt:
$\{v_1 = (1,2,3), v_2 = (1,-1,0), v_3 = (4,0,4)\}$.

$$(A|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{càlculs pàg.9}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ comp. indet.}$$

$$\left.\begin{array}{rrrcl} \lambda_1 & +\lambda_2 & +4\lambda_3 & = & 0 \\ & -3\lambda_2 & -8\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_3 & = & \lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = -\frac{4}{3}\lambda \\ \lambda_2 = -\frac{8}{3}\lambda \\ \lambda_3 = \lambda \end{array}\right. \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda(-\tfrac{4}{3}, -\tfrac{8}{3}, 1)$$

Infinites combinacions: $\boxed{\frac{-4}{3}\lambda(1,2,3) - \frac{8}{3}\lambda\ (1,-1,0) + \lambda(4,0,4) = (0,0,0)}$

Cada valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ ens dóna una combinació lineal.
Per exemple, $\lambda = 3 \longrightarrow -4(1,2,3) - 8(1,-1,0) + 3(4,0,4) = (0,0,0)$

També podem expressar un dels vectors com a comb. dels altres:
$-4v_1 - 8v_2 + 3v_3 = \vec{0} \Longrightarrow v_1 = -\frac{8}{4}v_2 + \frac{3}{4}v_3$

Dependència i independència lineal de vectors

* Podem saber si un vector v és combinació lineal d'un conjunt donat, $\{v_1, \cdots, v_n\}$, resolent el sistema associat a: $\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n = v$.

- És $v = (1,1)$ combinació lineal de $v_1 = (5,7)$ i $v_2 = (2,3)$?

  $(1,1) = \lambda(5,7) + \mu(2,3)$

  $$\left.\begin{array}{l} 5\lambda + 2\mu = 1 \\ 7\lambda + 3\mu = 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad F2 \leftrightarrow 5F2 - 7F1$$

  $$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \lambda = 1, \mu = -2 \text{ Per tant, } \boxed{v = 1v_1 - 2v_2}$$

- És $v = (1,0,4)$ combinació lineal de $v_1 = (1,2,3)$ i $v_2 = (1,-1,0)$?

  $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} F2 \leftrightarrow F2 - 2F1 \\ F3 \leftrightarrow F3 - 3F1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad F3 \leftrightarrow F3 - F2$$

  $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \text{ rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A|b) = 3 \text{ Sist. incompatible}$$

  $\Longrightarrow v$ no és comb. lineal de v_1, v_2

EV generat per un conjunt de vectors

EV generat per un conjunt de vectors $\{v_1, \cdots, v_n\}$:

$< v_1, \cdots, v_n >$=conjunt de totes les combinacions lineals de $v_1, \cdots, v_n$.
dim($< v_1, \cdots, v_n >$)=n° màxim de vectors LI

* Qualsevol conjunt d'n vectors LI de $\mathbb{R}^n$, generen $\mathbb{R}^n$.

Exemples:

- $E =< (1,0), (0,1) >= \mathbb{R}^2$ Qualsevol vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ es pot posar com a combinació de $(1,0)$ i $(0,1)$: $(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$.
- $E =< (1,1), (0,2) >= \mathbb{R}^2$ Qualsevol vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ es pot posar com a combinació de $(1,1)$ i $(0,2)$:
  $\lambda_1(1,1) + \lambda_2(0,2) = (a,b)$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & b \end{array}\right) \quad \xrightarrow{F2 \leftrightarrow F2 - F1} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b-a \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{rl} \lambda_1 & = a \\ 2\lambda_2 & = b-a \end{array}\right\} \Longrightarrow (a,b) = a(1,1) + \frac{b-a}{2}(0,2)$$

EV generat per un conjunt de vectors

* Si en un conjunt de vectors eliminem aquells que es poden posar com a combinació lineal dels altres, l'espai generat és el mateix.
* Al conjunt de vectors d'E generadors i LI, en direm base d'E.

- $E =< (1,2,3), (1,-1,0), (4,0,4) >=< (1,2,3), (1,-1,0) >$

v_1, v_2, v_3 són LD perquè rang$(A) < 3 = n^{\underline{o}}$ de vectors:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} F2 \leftrightarrow F2 - 2F1 \\ F3 \leftrightarrow F3 - 3F1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$F3 \leftrightarrow F3 - F2 \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{-3} & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{rang(A)=2=dim}(< v_1, v_2, v_3 >)}$$

Després de fer Gauss a A, només les columnes C_1 i C_2 tenen elements no nuls en la diagonal (C_1 i C_2 com a vectors són LI) $\Longrightarrow$ les columnes C_1 i C_2 d'A, que són v_1 i v_2, són LI. $\boxed{E =< v_1, v_2, v_3 >=< v_1, v_2 >}$

Bases

Les bases d'un espai vectorial E són col·leccions de vectors LI d'E que generen E , és a dir, ens permeten expressar de manera única qualsevol altre vector d'E, com a combinació lineal dels de la base.

$B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base d'un espai vectorial E

1. $v_1, \cdots, v_n$ són LI
2. $v_1, \cdots, v_n$ són generadors, és a dir, $< v_1, \cdots, v_n >= E$

- Les bases no són úniques
- Totes les bases d'un mateix espai vectorial tenen el mateix nombre de vectors.

$B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de $E \Longleftrightarrow$ dim$(< v_1, \cdots, v_n >) = n =$dim E

Bases. Coordenades d'un vector en una base

B base d'$E \Longrightarrow \forall v \in E, \exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \, / \quad v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$

$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ són les coordenades del vector v en la base B

i estan unívocament determinades per ser $v_1, \cdots, v_n$ LI.

- Dóna les coordenades del vector $v = (1,1)$ en la base $\{v_1 = (5,7), v_2 = (2,3)\}$.

$(1,1) = \lambda(5,7) + \mu(2,3)$

$$\left.\begin{array}{l} 5\lambda + 2\mu = 1 \\ 7\lambda + 3\mu = 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad F2 \leftrightarrow 5F2 - 7F1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \lambda = 1, \mu = -2$$

Per tant, $v = (1,-2)$ en la base $\{v_1, v_2\}$

* Observa que és el mateix procediment que per comprovar si un vector v és combinació lineal d'altres $v_1, \cdots, v_n$ (pàg. 11).

Bases d'un EV generat per un conjunt de vectors

* Recorda: un EV pot definir-se com l'espai generat per un conjunt de vectors o bé com l'espai definit per un sistema lineal homogeni.

Donats $\{v_1, \cdots, v_n\}$, volem trobar una base d' $E =< v_1, \cdots, v_n >$:
$A =$ matriu dels vectors per columnes

$\boxed{\text{rang}(A) = n \Longrightarrow \{v_1, \cdots, v_n\} \text{ són LI i formen una base d'}E}$

$\boxed{\text{rang}(A) = m < n \Longrightarrow \{v_1, \cdots, v_n\} \text{ són LD}}$, en aquest cas, per donar una base hem de trobar m vectors LI del conj. $\{v_1, \cdots, v_n\}$ (fent Gauss o amb determinants).

Bases d'un EV generat per un conjunt de vectors

- Aplicant determinants: són LI les columnes que contenen un dels menors més grans diferent de zero.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$det(A) = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \{v_1, v_3\} \text{ és una base d'}E =< v_1, v_2, v_3 >$$

- Aplicant Gauss:
Si rang$(A) = m$, són LI els m vectors del conj. $\{v_1, \cdots, v_n\}$ situats en A a les mateixes columnes que en la matriu resultant d'aplicar Gauss tenen elements no nuls a la diagonal, si els hi ha.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad F3 \leftrightarrow F3 + F1 \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

Les columnes C_1 i C_3 tenen un element no nul a la diagonal, per tant, una base d'$E =< v_1, v_2, v_3 >$ és $\{v_1, v_3\}$

Bases d'un EV generat per un conjunt de vectors

Observació: Si quan fem Gauss, el nombre d'elements no nuls a la diagonal no arriba a m=rang(A), es pot fer un intercanvi de columnes, tenint en compte que els m vectors inicials també s'intercanvien.

- Exemple. Troba una base de l'espai generat pels vectors: $v_1 = (1,0,0), v_2 = (2,0,0), v_3 = (0,1,0)$ i $v_4 = (0,3,0)$.

Observeu que el rang de la matriu dels vectors per columnes és 2 però a la diagonal només hi ha un element no nul.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C2 \leftrightarrow C3 \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ara ja tenim tants elements no nuls a la diagonal com el rang de la matriu. Les dues primeres columnes tenen element no nul a la diagonal. Però aquestes columnes inicialment eren la primera i la tercera, per tant, podem agafar com a base $\{v_1, v_3\}$.

Bases d'un EV definit per un sist. homogeni

* Recorda: un EV pot definir-se com l'espai generat per un conjunt de vectors o bé com l'espai definit per un sistema lineal homogeni.

Donat E espai vectorial definit per un sistema lineal homogeni,

$$E = \{X \in \mathbb{R}^n \,/\, AX = 0\},$$

resolem el sistema per trobar una base.

$$\boxed{\text{dim } E = n - \text{rang}(A)} = \text{graus de llibertat del sistema}$$

Exemples:

- $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z - y + x = 0\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{rang}(A) = 1 \Longrightarrow \text{dim } E = 3-1 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} z = \mu \\ y = \lambda \\ x = \lambda - \mu \end{array} \right\} \Longleftrightarrow (x,y,z) = (\lambda - \mu, \lambda, \mu)$$

$$(x,y,z) = \lambda(1,1,0) + \mu(-1,0,1)$$

Per tant, $E = < (1,1,0), (-1,0,1) >$

Bases d'un EV definit per un sist. homogeni

- $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+4z=0, 2x-y=0, 3x+4z=0\}$

$$(A|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{càlculs pàg.9}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

dim $E = n-$rang(A)
rang$(A)= 2 \Longrightarrow$dim $E= 3-2=1$ comp. indeterminat

$$\left.\begin{array}{rrrcl} x & +y & +4z & = & 0 \\ & -3y & -8z & = & 0 \\ & & z & = & \lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{4}{3}\lambda \\ y = -\frac{8}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \quad (x,y,z) = \lambda(-\tfrac{4}{3}, -\tfrac{8}{3}, 1)$$

Per tant, $E =< (-4,-8,3) >$

Bases d'un EV definit per un sist. homogeni

- $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+4z=0, 2x-y=0, 3x-2y-2z=0\}$

$$(A|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{càlculs pàg.8}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$$

dim $E = n-$rang(A)
rang$(A)= 3 \Longrightarrow$dim $E= 3-3=0$ comp. determinat

$$\left.\begin{array}{rrrcl} x & +y & +4z & = & 0 \\ & -3y & -8z & = & 0 \\ & & -\frac{2}{3}z & = & 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right. \quad (0,0,0)$$

Per tant, $E = \{(0,0,0)\}$ i no hi ha cap base d'E.

Índex

Aplicacions lineals

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és aplicació lineal $\Longleftrightarrow$

$$\boxed{f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}),\ \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

la imatge d'una combinació lineal és la combinació lineal de les imatges

Exemples:

1. Aplicació identitat. $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \overset{n}{\ldots}, x_n) &\longmapsto (x_1, \overset{n}{\ldots}, x_n) \end{aligned}$
2. Aplicació nul·la. $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \overset{n}{\ldots}, x_n) &\longmapsto (0, \overset{m}{\ldots}, 0) \end{aligned}$
3. Girs. Per exemple, $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \ (\text{gir de } \pi/2) \\ (x, y) &\longmapsto (-y, x) \end{aligned}$
4. Simetries. Per exemple, $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \ (\text{simetria respecte del pla } y = 0) \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, -y, z) \end{aligned}$
5. Homotècies. Per exemple, $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (\lambda x, \lambda y) \end{aligned}$
6. Projeccions. Per exemple, $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, 0, z) \end{aligned}$

Matriu associada a una aplicació lineal

Base canònica de $\mathbb{R}^n$:
$\{\vec{e_1} = (1,0,\cdots,0), \vec{e_2} = (0,1,\cdots,0), \cdots, \vec{e_n} = (0,\cdots,0,1)\}$

Aplicació lineal $f \longleftrightarrow A$ matriu associada

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$A = \left(f(\vec{e_1})\ f(\vec{e_2}) \cdots f(\vec{e_n}) \right)$ matriu associada a f
té per columnes les imatges de la base canònica de $\mathbb{R}^n$

- Ordre d'A: $m \times n$
- $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Exemple: Considereu l'aplicació lineal $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+2z, y+z) \end{array}$

que té per matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \end{array}$

Nucli-Imatge

- El Nucli d'f o Nuc$(f) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n \,/\, f(\vec{u}) = \vec{0} \in \mathbb{R}^m\} =$

  solucions del sistema homogeni: $\{X \in \mathbb{R}^n \,/\, AX = \vec{0}\}$.

  dim(Nuc(f))$=n-$rang(A)

- La Imatge d'f o Im$(f) = \{f(\vec{u}) \in \mathbb{R}^m \,/\, \vec{u} \in \mathbb{R}^n\}$=

  $< f(\vec{e_1}), \cdots, f(\vec{e_n}) >$ espai generat per les columnes d'A.

  dim(Im(f))=rang$(A) \leq n$

  $\boxed{\text{dim(Im}(f)) + \text{dim(Nuc}(f)) = n}$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplicació lineal $\Longrightarrow f(0, \overset{n}{\ldots}, 0) \underset{\substack{\uparrow \\ f(\vec{0}) = f(\vec{u}-\vec{u}) = f(\vec{u}) - f(\vec{u}) = \vec{0}}}{=} (0, \overset{m}{\ldots}, 0)$

$\boxed{f \text{ és injectiva} \iff \text{Nuc}(f) = \vec{0}} \iff n-\text{rang}(A)=0$

$\boxed{f \text{ és exhaustiva} \iff \text{Im}(f) = \mathbb{R}^m} \iff \text{rang}(A) = m$

Exemple

- Busca la matriu associada a $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \longmapsto (x + y + 4z, 2x - y)$$

Calculem: $f(\vec{e_i})$:

$$(1, 0, 0) \longmapsto (1, 2)$$
$$(0, 1, 0) \longmapsto (1, -1)$$
$$(0, 0, 1) \longmapsto (4, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Busca la imatge, Im(f), una base d'Im(f). És f exhaustiva?

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad F2 \leftrightarrow F2 - 2F1 \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{-3} & -8 \end{pmatrix}$$

Imf=$< f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}) >=< (1, 2), (1, -1) >$

Una base d'Im(f)=$\{(1, 2), (1, -1)\}$

rang(A)=2=dim$(\mathbb{R}^2)$$\Longrightarrow$ f és exhaustiva

Exemple

- Busca el nucli, Nuc(f) i una base de Nuc(f). És f injectiva?

Resolem el sistema homogeni: $AX = \vec{0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad F2 \leftrightarrow F2 - 2F1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

rang(A)=2, Graus de llibertat: $n-$rang$(A)= 1$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = -4\lambda \\ -3y = 8\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \Longleftrightarrow (x, y, z) = \left(-\tfrac{4}{3}\lambda, -\tfrac{8}{3}\lambda, \lambda\right)$$

Nuc$f$=$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x, y, z) = \lambda(-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, 1)\}$=$< (4, 8, -3) >$

Una base de Nuc(f)=$\{(4, 8, -3)\}$

Nuc$(f)$$\neq \{(0, 0, 0)\} \Longrightarrow$ f No és injectiva

Antiimatge d'un vector

$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ aplicació lineal amb A matriu associada a f,

$f^{-1}(\vec{v}) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n \,/\, f(\vec{u}) = \vec{v}\} = \{X \in \mathbb{R}^n \,/\, AX = \vec{v}\}$

$\vec{v} \notin \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow AX = \vec{v}$ sistema incompatible

$\vec{v} \in \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow AX = \vec{v}$ sistema compatible

Sol: $\boxed{f^{-1}(\vec{v}) = X = \vec{u} + Nuc(f)}$

$\uparrow$

$\vec{u}$ és una solució particular $f(\vec{u}) = \vec{v}$

Graus de llibertat $=\dim(\mathrm{Nuc}(f))$
$= n\text{-rang}(A) = n\text{-}\dim(\mathrm{Im} f)$

Exemple

- Calcula la imatge per f del vector $\vec{u} = (-5/3, -16/3, 0)$

$$f(\vec{u}) = A\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5/3 \\ -16/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{-21}{3}, \frac{6}{3}\right) = (-7, 2)$$

- Calcula la antiimatge per f del vector $\vec{v} = (-7, 2)$

$$AX = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad F2 \leftrightarrow F2 - 2F1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & -3 & -8 & 16 \end{array}\right) \text{ rang}(A) = \text{rang}(A|\vec{v}) = 2 < n = 3$$

Comp. indet. G. llibertat: n-rang(A)=1

$$\left.\begin{array}{l} x + y = -4\lambda - 7 \\ -3y = 8\lambda + 16 \\ z = \lambda \end{array}\right\} \Longleftrightarrow (x, y, z) = \left(-\tfrac{5}{3} - \tfrac{4}{3}\lambda, -\tfrac{16}{3} - \tfrac{8}{3}\lambda, \lambda\right)$$

$$f^{-1}(\vec{v}) = f^{-1}(-7, 2) = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{16}{3}, 0\right) + \lambda\left(-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, 1\right)$$

Observació : Coneixent Nuc(f) i una solució particular qualsevol $\vec{u}$, amb $f(\vec{u}) = \vec{v}$, no cal resoldre $AX = \vec{v}$ perquè $\boxed{f^{-1}(\vec{v}) = \vec{u} + \mathrm{Nuc}(f)}$

Aplicació inversa - Matriu inversa

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplicació lineal.
Si $n = m$, aleshores f se'n diu *endomorfisme*.

Quan l'aplicació lineal f és bijectiva, existeix f^{-1}
i les matrius associades a f i f^{-1} són A i A^{-1}, respectivament.

Per a una matriu $A_{n\times n}$,
existeix inversa $A^{-1} \Longleftrightarrow$ det$(A) \neq 0 \Longleftrightarrow$ rang$(A) = n$

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = I_n} \quad \boxed{A^{-1} \cdot A = I_n} \text{ on } I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Alguna propietat amb A i B invertibles i $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

1. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
2. $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k} A^{-1}$
3. det$(A \cdot B)$=det$(A)\cdot$det(B) $\overset{A^{-1}\cdot A=I_n}{\Longrightarrow}$ det(A^{-1})=$\dfrac{1}{\det(A)}$

Càlcul de la matriu inversa pel mètode de Gauss

A partir d'A, com calculem A^{-1}?
Sabem que $A \cdot A^{-1} = I_n$. Volem doncs resoldre l'equació: $AX = I_n$.
A la dreta tenim una matriu, per tant, es tracta de resoldre n sistemes lineals, que es poden fer alhora amb el mètode de Gauss.
Com a matriu ampliada considerarem A a l'esquerra i la matriu identitat I_n, a la dreta, en el lloc dels termes independents.
Apliquem Gauss per transformar A en I_n i obtenir A^{-1}:

$$\boxed{\text{inici } \ (A|I_n) \longleftrightarrow (I_n|A^{-1}) \ \text{ final}}$$

Passos:

1. Fem zeros per sota de la diagonal d'A fins obtenir una matriu triangular superior. Si algun element de la diagonal és nul, la matriu A no té inversa i no cal seguir.
2. Fem zeros per sobre de la diagonal fins obtenir una matriu diagonal.
3. Dividim cada la fila per λ, si λ és l'element de la diagonal i $\lambda \neq 1$.

Exemple

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} -1 & 1 & 16 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} F2 \leftrightarrow F4 \\ F4 \leftrightarrow F2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} \mathbf{-1} & 1 & 16 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{4} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$F4 \leftrightarrow F4 - F3 \quad \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} \mathbf{-1} & 1 & 16 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-2} & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} F1 \leftrightarrow F1 + F4 \\ F2 \leftrightarrow 2F2 - 3F4 \\ F3 \leftrightarrow F3 + 3F4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} \mathbf{-1} & 1 & 16 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 2 & 0 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-2} & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} F1 \leftrightarrow F1 - 16F3 \\ F2 \leftrightarrow F2 - 2F3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} \mathbf{-1} & 1 & 0 & 0 & 1 & -47 & 31 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & -9 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-2} & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} \mathbf{-1} & 1 & 0 & 0 & 1 & -47 & 31 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & -9 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-2} & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$F1 \leftrightarrow F1 - \tfrac{1}{2}F2 \quad \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & -85/2 & 55/2 & -1 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & -9 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-2} & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} F1 \leftrightarrow -F1 \\ F2 \leftrightarrow \frac{1}{2}F2 \\ \\ F4 \leftrightarrow \frac{-1}{2}F4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 85/2 & -55/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9/2 & 7/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right) = (I_4|A^{-1})$$

Càlcul de la matriu inversa per adjunts

$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A^t)}$ $adj(A^t)$és la matriu dels adjunts dels elements d'A^t

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ $\det(A) = -1 \neq 0$ (per tant, existeix la matriu inversa).

$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \\ 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ $adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$

Calculem els adjunts dels elements d'A^t (el signe del determinant d'A_{ij} és $(-1)^{i+j}$):

$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -1$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 1$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -1$;

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 38$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -41$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 34$;

$A_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -27$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 29$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -24$;

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

Valors i vectors propis

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *endomorfisme* amb matriu associada A, $n \times n$

1. $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$, és un vector propi de valor propi $\lambda \in \mathbb{R} \iff$

   $\boxed{A\vec{v} = \lambda\, \vec{v}} \iff (A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0} \iff \boxed{\vec{v} \in \text{Nuc}(A - \lambda I_n)}$

2. $\text{Nuc}(A - \lambda I_n)$ és un espai vectorial
   $1 \leq$ dim (Nuc $(A - \lambda I_n)$)$= n-$rang$(A - \lambda I_3) \leq n$
   Per trobar-ne una base, cal resoldre el sistema homogeni:
   $$(A - \lambda I_n)X = \vec{0}$$

3. Polinomi característic d'A: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$
   Els valors propis, $\lambda \in \mathbb{R}$, són les arrels de $p(\lambda)$, és a dir, les solucions de l'equació: $\boxed{p(\lambda) = 0}$

Exemple

Donada la matriu quadrada $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Busca el polinomi característic, $p(\lambda)$.

  $p(\lambda) = det(A - \lambda I_3) =$

  $= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 8 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

  $=(-1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$

- Busca els valors propis.

  Els valors propis són les arrels de $p(\lambda)$

  $p(\lambda) = (-1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) \Longrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 1$

Exemple

- Busca els vectors propis. Dóna una base de vectors propis per cada valor propi.

  [1] Vectors propis de valor propi $\boxed{\lambda_1 = \text{-}1}$: $AX = (\text{-}1)X \Longleftrightarrow$

$(A-(\text{-}1)I_3)X = \vec{0} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1-(-1) & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2-(-1) & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1-(-1) & 0 \end{array}\right) =$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad F3 \leftrightarrow \tfrac{1}{2}F3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F1 \leftrightarrow F3 \\ F3 \leftrightarrow F1 \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad F2 \leftrightarrow F2 - 8F1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

rang$(A-(\text{-}1)I) = 2$ G. de llibertat: $n-$rang$(A-(\text{-}1)I) = 3 - 2 = 1$

$\left.\begin{array}{rl} x & = -\lambda \\ 3y & = 9\lambda \\ z & = \lambda \end{array}\right\} \Longleftrightarrow (x, y, z) = (-\lambda, 3\lambda, \lambda) = \lambda(-1, 3, 1)$

$\text{Nuc}(A - (-1)I_3) = <(-1, 3, 1)>$

Exemple

[2] Vectors propis de valor propi $\boxed{\lambda_2 = 2}$: $AX = 2X \iff$

$$(A-2I_3)X = \vec{0} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} -1-2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2-2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1-2 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F2 \leftrightarrow 3F2 + 8F1 \\ F3 \leftrightarrow 3F3 + 2F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$F3 \leftrightarrow F3 - F2 \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

rang($A-2I$)=2, Graus de llibertat: $n-$rang($A-2I$)$= 3-2=1$

$$\left.\begin{array}{rl} -3x & = 0 \\ y & = \lambda \\ -3z & = 0 \end{array}\right\} \iff (x,y,z) = (0,\lambda,0) = \lambda(0,1,0)$$

Nuc($A - 2I_3$)=$< (0,1,0) >$

Exemple

[3] Vectors propis de valor propi $\boxed{\lambda_3 = 1}$: $AX = 1X \iff$

$$(A-1I_3)X = \vec{0} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} -1-1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2-1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1-1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F2 \leftrightarrow F2 + 4F1 \\ F3 \leftrightarrow F3 + F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

rang($A-1I_3$)=2, Graus de llibertat: $n-$rang($A-1I_3$)$= 3-2=1$

$$\left.\begin{array}{rl} -2x & = 0 \\ y & = \lambda \\ z & = \lambda \end{array}\right\} \iff (x,y,z) = (0,\lambda,\lambda) = \lambda(0,1,1)$$

Nuc($A - 1I_3$)=$< (0,1,1) >$

Aplicació: Rotacions

Un exemple d'aplicació lineal són les rotacions o girs.

Com identificar que una aplic. lineal f, amb matriu associada R_θ, és un gir?

- Els girs són isometries:
  - conserven les distàncies: $R_\theta u = v, \Longrightarrow ||u|| = ||v||$
  - conserven els angles: $R_\theta u_1 = v_1,\ R_\theta u_2 = v_2 \Longrightarrow \widehat{u_1u_2} = \widehat{v_1v_2}$

  Una aplicació lineal f que compleixi aquestes propietats se'n diu isometria i si A és la matriu associada a f, es caracteritza per:

  $$\boxed{f \text{ isometria} \iff A^TA = \mathbb{I}}$$

- Els girs tenen determinant igual a 1.

  Observa que: $A^TA = \mathbb{I} \Longrightarrow det(A^TA) = 1 \iff det(A) = \pm 1$

$$\boxed{f \text{ és un gir} \iff R_\theta^T R_\theta = \mathbb{I}_n \text{ i } det(R_\theta) = 1}$$

Aplicació: Rotacions

*Ens serà útil recordar:

Donats dos vectors: $u = (u_1, u_2, u_3),\ v = (v_1, v_2, v_3),\ \widehat{uv} = \alpha$

1. Producte escalar de dos vectors:

   $$\boxed{u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \;=\; ||u||\,||v|| \cos\alpha}$$

2. Mòdul: $||u|| = \sqrt{u\cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

   $\dfrac{u}{||u||}$ és un vector unitari

3. Criteri de perpendicularitat per a $u \neq 0$ i $v \neq 0$:

   $u \perp v \iff u \cdot v = 0$

En el producte de matrius: $(AB)^T = B^TA^T$

Les isometries, i per tant els girs, conserven el producte escalar:
$v_1 \cdot v_2 = (v_1)^T v_2 = (R_\theta u_1)^T (R_\theta u_2) = (u_1)^T \underbrace{{R_\theta}^T R_\theta}_{\mathbb{I}} u_2 = (u_1)^T \mathbb{I} u_2 = (u_1)^T u_2 = u_1 \cdot u_2$

Aplicació: Rotacions

*Ens serà útil recordar:

Donats dos vectors: $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\widehat{uv} = \alpha$

1. Producte escalar de dos vectors:

   $$\boxed{u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \; = \; ||u||\, ||v|| \cos \alpha}$$

2. Mòdul: $||u|| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

   $\dfrac{u}{||u||}$ és un vector unitari

3. Criteri de perpendicularitat per a $u \neq 0$ i $v \neq 0$:

   $u \perp v \iff u \cdot v = 0$

En el producte de matrius: $(AB)^T = B^T A^T$

Les isometries, i per tant els girs, conserven el producte escalar:

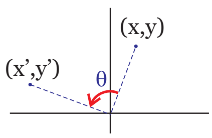
$v_1 \cdot v_2 = (v_1)^T v_2 = (R_\theta u_1)^T (R_\theta u_2) = (u_1)^T \underbrace{{R_\theta}^T R_\theta}_{\mathbb{I}} u_2 = (u_1)^T \mathbb{I} u_2 = (u_1)^T u_2 = u_1 \cdot u_2$

Aplicació: Rotacions a $\mathbb{R}^2$

Gir de $\mathbb{R}^2$ de centre l'origen i angle θ (sentit $+ \curvearrowleft$).

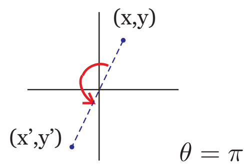
- $(x, y) \xrightarrow{f} (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



*Cas particular: $\boxed{\theta = \pi}$, $(x, y) \xrightarrow{f} (-x, -y)$

$$R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Aplicació: Rotacions a $\mathbb{R}^2$

Calculem els valor propis, VAP, i els vectors propis, VEP, de R_θ de $\mathbb{R}^2$:

Polinomi característic de R_θ de $\mathbb{R}^2$:

$$p(\lambda) = det(R_\theta - \lambda I) = = \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$$

$$p(\lambda) = 0 \Longrightarrow \text{VAP } \boxed{\lambda = \cos\theta \pm j\sin\theta}$$

* Observa que: els VAP són complexos llevat que $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.

Per tant, els girs en $\mathbb{R}^2$ no tenen vectors propis excepte quan:

- $\boxed{\theta = 0} \Longrightarrow \lambda = 1$: $R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow R_0 u = u$
  Tots els vectors són VEP de VAP 1.
- $\boxed{\theta = \pi} \Longrightarrow \lambda = -1$: $R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow R_0 u = -u$
  Tots els vectors són VEP de VAP -1.

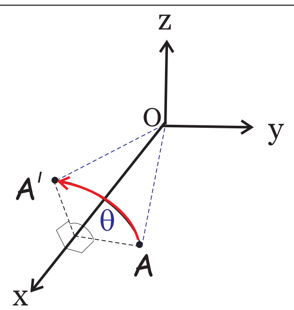
Aplicació: Rotacions a $\mathbb{R}^3$

Gir de $\mathbb{R}^3$ al voltant de l'eix r, d'angle θ :

- Posem com a exemple el cas en què l'eix del gir r és l'eix OX:

$$(x, y, z) \xrightarrow{f} (x,\ y\cos\theta - z\sin\theta,\ y\sin\theta + z\cos\theta)$$

$$R_\theta^{0X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



Aplicació: Rotacions a $\mathbb{R}^3$

Els valor propis, VAP, de R_θ de $\mathbb{R}^3$ són $\boxed{\lambda = 1,\ \cos\theta \pm j\sin\theta}$

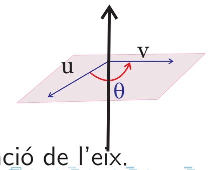
Com calcular l'eix?

* Observa que: un vector u al llarg de l'eix de rotació no varia després d'aplicar-li la rotació.

Si u dóna la direcció de l'eix, $R_\theta u = u \Longrightarrow \boxed{u \text{ és VEP de VAP } 1}$

Com calcular l'angle de rotació?

- L'obtenim de la part real dels VAP complexos que és: $\cos\theta$.
- O bé de calcular l'angle que formen els vectors
  u i v, on $v = R_\theta u$,
  sempre i quan u pertanyi a
  un pla perpendicular a l'eix.



* Observa que: el signe de l'angle depèn de l'orientació de l'eix.

Aplicació: Rotacions a $\mathbb{R}^3$

Exemple. $R_\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- Comprovem que és un gir: ${R_\theta}^T R_\theta = \mathbb{I}_3,\ \ det(R_\theta) = 1$
- Calculem els VAP:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\left((\tfrac{1}{2}-\lambda)^2 - \tfrac{3}{4}\right) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

$$p(\lambda) = 0 \Longrightarrow \boxed{\lambda = 1,\ \frac{1+\sqrt{3}j}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}j}{2}}$$

Aplicació: Rotacions a $\mathbb{R}^3$

- Calculem l'eix:

Busquem els VEP de VAP 1

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1-1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{array}\right) \quad F3 \leftrightarrow \sqrt{3}F1 + F3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$v_1 = v_3 = 0$, $v_2 = \lambda$, és a dir, $(v_1, v_2, v_3) = \lambda(0,1,0)$ Per tant,

$\boxed{\text{l'eix de rotació és el subespai en la direcció del vector } e = (0,1,0)}$

Aplicació: Rotacions a $\mathbb{R}^3$

- Calculem l'angle:
  - Una manera: sabent que $\cos\theta$ és la part real dels VAP complexos

    Els VAP complexos són: $\frac{1\pm\sqrt{3}j}{2} \Longrightarrow$ la part real és $\frac{1}{2}$

    $$\cos\theta = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

  - Una altra manera: calculant $\widehat{uR_\theta u}$, on u sigui perpendicular a l'eix.

    Busquem un vector u tal que $u \cdot e = 0$, on e és la direcció de l'eix $(e = (0,1,0))$. Per exemple, $u = (1,0,0)$. Ara li apliquem el gir a u:

    $$R_\theta u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

    $$u \cdot R_\theta u = (1,0,0)(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2}$$

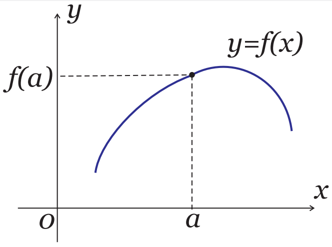
    $$\cos\widehat{uR_\theta u} = \frac{u \cdot R_\theta u}{||u||\,||R_\theta u||} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \widehat{uR_\theta u} = \frac{\pi}{3} \Longleftrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

Índex

Continuïtat

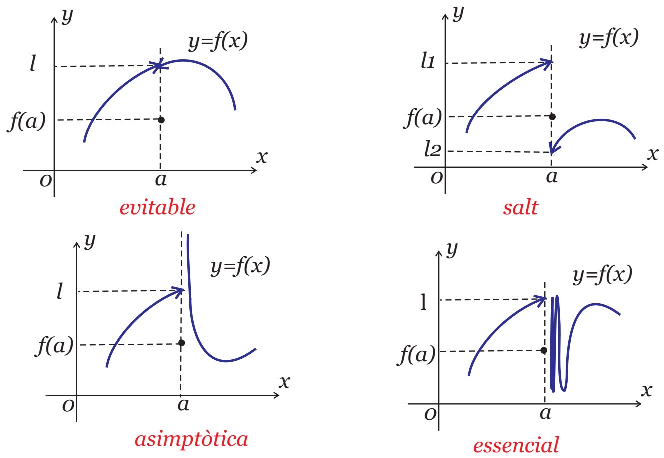
Una funció és contínua si i només si:

- $a \in \mathrm{Dom} f$ ($f(a)$ ben definit)
- $\exists \lim_{x\to a^+} f(x)$ i $\exists \lim_{x\to a^-} f(x)$
- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$



La gràfica es pot fer amb un sol traç.

Discontinuïtats



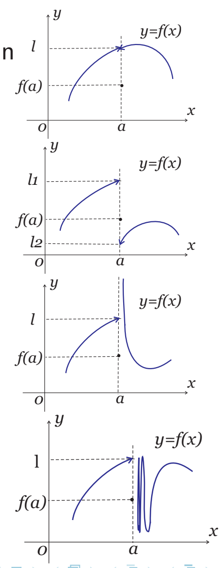
Discontinuïtats

Evitable: La gràfica no es pot fer d'un traç per un sol punt. Existeix el límit perquè existeixen els laterals i són iguals.
N'hi hauria prou que $f(a)$ coincidís amb el valor dels límit perquè fos contínua.

De salt: Els límits laterals són finits i diferents. Per fer la gràfica es necessita fer un salt finit.

Asimptòtica: Algun límit lateral (o tots dos) és infinit. Es produeix un salt infinit en la gràfica.

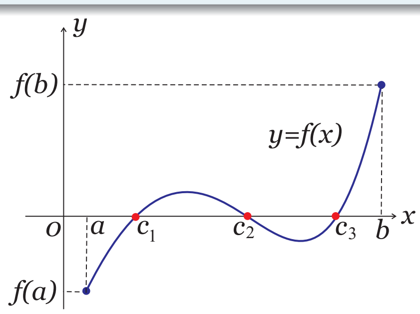
Essencial: Algun límit lateral (o tots dos) no existeix.



Bolzano-Bisecció

Teorema de Bolzano

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ contínua en } [a,b] \\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c \in (a,b) \,/\, f(c) = 0$$



Bolzano-Bisecció

Mètode de la bisecció

Serveix per trobar zeros de funcions contínues, numèricament.
Tenim una f contínua i partim d'una parella de punts tals que $f(a)\cdot f(b) < 0$ El mètode proporciona una successió d'intervals, $[x_e, x_d]$,cada cop més petits, que contenen almenys un zero.

1. Inicialment, $[x_e, x_d] = [a, b]$.
2. Calculem el punt mig de l'interval $[x_e, x_d]$ $x_m = \dfrac{x_e + x_d}{2}$.
   1. si $f(x_m)\cdot f(x_e) < 0 \Longrightarrow [x_e, x_d] = [x_e, x_m] \longleftarrow$ Nou interval
   2. altrament, $[x_e, x_d] = [x_m, x_d] \longleftarrow$ Nou interval
3. Repetim el pas anterior fins que els extrems de l'últim interval coincideixin en tants decimals com vulguem que tingui la solució.

Observació: La longitud de cada nou interval és la meitat de l'anterior.

Mètode de la bisecció

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-x^2-10 \text{ és contínua} \\ f(2)\cdot f(3)<0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c \in (2,3) \,/\, f(c)=0$$

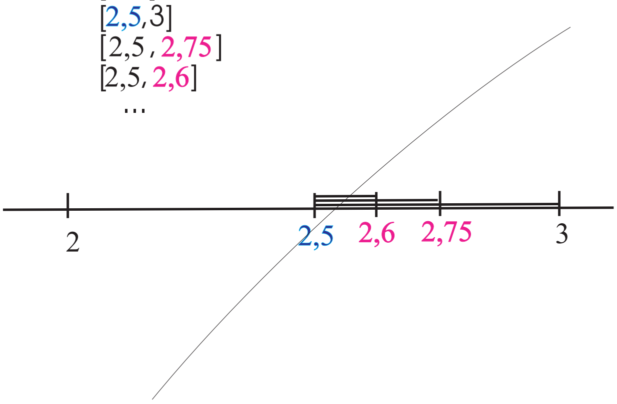
Cerquem c amb dos decimals exactes amb el mètode de bisecció:

x_e	x_d	$f(x_e)$	$f(x_d)$	x_m	$f(x_m)$
2	3	-	$+$	2,5	-
2,5	3	-	$+$	2,75	$+$
2,5	2,75	-	$+$	2,625	$+$
2,5	2,625	-	$+$	2,5625	$+$
2,5	2,5625	-	$+$	2,53125	-
2,53125	2,5625	-	$+$	2,546875	$+$
2,53125	2,546875	-	$+$	2,5390625	-
2,5390625	2,546875	-	$+$	2,54296875	-
2,54296875	2,546875	-	$+$		

La funció $f(x)=x^3-x^2-10$ té un zero a $\boxed{c=2,54}$.

Mètode de la bisecció

[2,3]
[2,5,3]
[2,5 , 2,75]
[2,5, 2,6]
...



Observa que quan als extrems de l'interval tenen decimals coincidents, per exemple $[2.542, 2.546]$, qualsevol número de l'interval (en particular la solució) també té aquests decimals $2.54\cdots$.

Mètode de la bisecció

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x - \cos(x) \text{ és contínua} \\ f(0)\cdot f(1) < 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Rightarrow} \exists c \in (0,1)\, /\, f(c) = 0$$

Cerquem c amb dos decimals exactes amb el mètode de bisecció:

x_e	x_d	$f(x_e)$	$f(x_d)$	x_m	$f(x_m)$
0	1	-	+	0,5	-
0,5	1	-	+	0,75	+
0,5	0,75	-	+	0,625	-
0,625	0,75	-	+	0,6875	-
0,6875	0,75	-	+	0,71875	-
0,71875	0,75	-	+	0,734375	-
0,734375	0,75	-	+	0,7421875	+
0,734375	0,7421875	-	+	0,73828125	-
0,73828125	0,7421875	-	+	0,740234375	+
0,73828125	0,74023438	-	+	0,739257815	+
0,73828125	0,73925782	-	+		

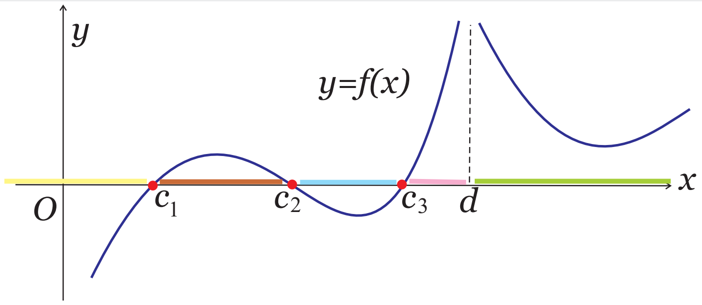
La funció $f(x) = x - \cos(x)$ té un cero a $\boxed{c = 0,73}$.

Bolzano-Inequacions

Conseqüències del Teorema de Bolzano

Una funció contínua

1. Sense zeros té signe constant
2. Entre zeros consecutius té signe constant



Observació: Si una funció té discontinuïtats i zeros , dividim la recta real en aquests valors i obtenim intervals oberts on la funció serà contínua i sense zeros. En cadascun d'aquests intervals el signe serà constant.

Bolzano-Inequacions

Ex. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ $\quad \mathrm{Dom} f(x) = \mathbb{R}$ *Estudiem el signe de f:*

Contínua (per ser quocient de contínues on el denominador no s'anul·la).

$f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ és l'unic zero de $f(x)$

Aplicant Bolzano, té signe constant a $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$:

f	$-$	0	$+$
	$f(-1) < 0$		$f(1) > 0$

$f'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$ *Estudiem el signe de f':* $\mathrm{Dom} f'(x) = \mathbb{R}$

Punts crítics: $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 1, -1$ candidats a extrems relatius

f'	$f' < 0$	$f'(-1) = 0$	$f' > 0$	$f'(1) = 0$	$f' < 0$
	$f \searrow$	-1	$f \nearrow$	1	$f \searrow$

Intervals de decreixement: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, creixement: $(-1, 1)$

Extrems relatius: $x = -1$ mínim, $x = 1$ màxim (canvi de signe en f')

Aplicació: estudi de funcions

$f''(x) = \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ *Estudiem el signe de f'':* $\mathrm{Dom} f''(x) = \mathbb{R}$

$f''(x) = 0 \Longrightarrow x = 0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$ candidats a punts d'inflexió

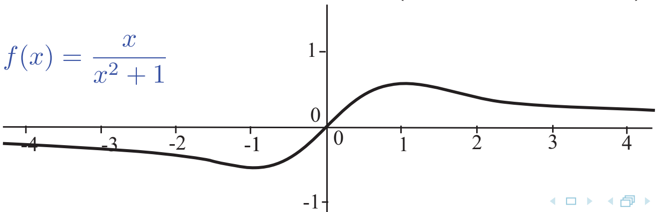
f''	$f'' < 0$	$f''(-\sqrt{3}) = 0$	$f'' > 0$	$f''(0) = 0$	$f'' < 0$	$f''(\sqrt{3}) = 0$	$f'' > 0$
	$f \frown$	$-\sqrt{3}$	$f \smile$	0	$f \frown$	$\sqrt{3}$	$f \smile$

Intervals de concavitat, $f''(x) < 0$: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

Intervals de convexitat, $f''(x) > 0$: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

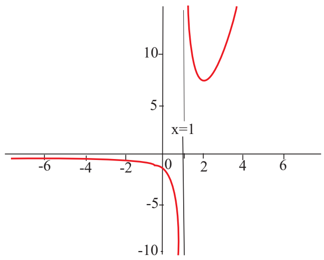
Punts d'inflexió: $x = -\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}$ (canvi de signe en f'').

$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$



Aplicació: estudi de funcions

$f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$ Dom$f(x) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ f és contínua a $x \neq 1$ (per ser quocient de contínues on el denominador no s'anul·la)



$x = 1 \notin$ Dom$f(x)$

$\Downarrow$

$f(x)$ no és contínua en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^x}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^x}{x-1} = -\infty \end{array}\right\} \text{la recta } x = 1 \text{ és AV}$$

discontinuïtat asimptòtica en $x = 1$.

Si considerem els zeros de f (en aquest cas no n'hi ha) i les discontinuïtats ($x = 1$), tenim els intervals on la funció és contínua i el signe és constant. *Estudiem el signe de f:*

f	$-$	1	$+$
	$f(0) < 0$		$f(2) > 0$

Aplicació: estudi de funcions

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Estudiem el signe de f': per donar el creixement, decreixement i extrems relatius. En aquesta funció, Dom$f'(x)$ =Dom$f(x) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Els punts crítics són candidats a extrems relatius, en aquest cas, $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 2$ punt crític.
Recordem que $x = 1 \notin$ Dom$f$ (f' tampoc està definida en $x = 1$), per tant, dividim la recta real en $x = 1, 2$ per estudiar el signe de f' :

f'	$-$		$-$		$+$
f	$\searrow$	$1 \notin$ Dom$f$	$\searrow$	2	$\nearrow$

$f'(x) < 0$ $\forall x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2) \Longrightarrow f(x)$ és estrictament decreixent a $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$

$f'(x) > 0$ $\forall x \in (2, +\infty) \Longrightarrow f(x)$ és estrictament creixent a $(2, +\infty)$

Extrems relatius: a $x = 2$ hi ha un canvi de signe a f', passa de decréixer a créixer, per tant, $x = 2$ és un mínim rel.

Aplicació: estudi de funcions

$$f''(x) = \frac{e^x(x-2+1)(x-1)^2 - 2e^x(x-1)(x-2)}{(x-1)^4} =$$
$$= \frac{e^x(x-1)^2 - 2e^x(x-2)}{(x-1)^3} = \frac{e^x(x^2-4x+5)}{(x-1)^3}$$

Estudiem el signe de f'': per trobar la convexitat, concavitat i punts d'inflexió. En aquesta funció, Dom$f''(x)$ =Dom$f(x) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$f''(x) \neq 0$ perquè $e^x > 0$ i el polinomi x^2-4x+5 no té arrels reals. A més, al no tenir arrels, el signe de x^2-4x+5 és constant (només cal provar amb un punt per veure que $x^2-4x+5>0$).

f''	$-$		$+$
f	$\frown$	$1 \notin$ Dom$f$	$\smile$

$f''(x) < 0$ $\forall x \in (-\infty, 1) \Longrightarrow f(x)$ és còncava a $(-\infty, 1)$
$f''(x) > 0$ $\forall x \in (1, +\infty) \Longrightarrow f(x)$ és convexa a $(1, +\infty)$

A $x=1$ es produeix un canvi de concavitat a convexitat però $x = 1 \notin$ Dom$f$, per tant, $x=1$ no és punt d'inflexió.

Índex

Integral indefinida

Canvi de variable

Sigui g una funció derivable, amb inversa derivable.
Si fem el canvi: $\boxed{x = g(t)} \Longrightarrow \boxed{dx = g'(t)\,dt}$, aleshores:

$$\int f(x)\,dx \underset{\downarrow}{=} \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = F(t) + C = F(g^{-1}(x)) + C$$

A vegades ens interessa el canvi invers on està aïllada la t:

Per ex.: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$

$$\boxed{t = g(x)} \Longrightarrow \boxed{dt = g'(x)\,dx}$$

* Observa que: en la integral indefinida, sempre desfem el canvi!

Integral indefinida

Exemples de canvi de variable:

- Fem la divisió $t/(1+t)$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{1+t}\,2t\,dt \overset{\downarrow}{=} 2\int \left(1 + \frac{-1}{1+t}\right) dt = 2t - \ln|1+t| + C =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array}} \qquad = 2\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x}) + C$$

- $$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln(1+e^x) + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x\,dx \end{array}}$$

- Descomp. en frac. simples

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{1+t}\,\frac{dt}{t} \overset{\downarrow}{=} \int \left(\frac{1}{t} + \frac{-1}{1+t}\right) = \ln|t| - \ln|1+t| + C =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x\,dx \end{array}} \Longrightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \qquad = \ln\frac{e^x}{1+e^x} + C$$

Integral Racional

Passos a seguir en $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$:

1. És immediata?
   Sí $\longrightarrow$ acabar,
   No $\longrightarrow$ seguir
2. Grau de $p(x) \geq$ Grau de $q(x)$?
   Sí$\longrightarrow$ dividir $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ i seguir
   No$\longrightarrow$ seguir
3. Descompondre $q(x)$. Tenim una fracció simple?
   Sí$\longrightarrow$ seguir
   No$\longrightarrow$ descompondre en suma de fraccions simples i seguir
4. Integrar les fraccions simples i acabar

Integral Racional

(2) Grau de $p(x) \geq$ Grau de $q(x)$?
Sí$\longrightarrow$ dividir $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ i seguir

$$\int \frac{x^3+x^2+3x-5}{x^2+3x+4}\,dx = \int \left(x-2+\frac{5x+3}{x^2+3x+4} \right) dx$$

$$\Uparrow$$

$$\begin{array}{rl|l} & x^3+x^2+3x-5 & x^2+3x+4 \\ \cline{3-3} & -x^3-3x^2-4x & x-2 \\ \hline / & -2x^2-x-5 & \\ & 2x^2+6x+8 & \\ \hline / & 5x+3 & \end{array}$$

Integral Racional

(3) Factor de $q(x)$ $\rightsquigarrow$	$\boxed{\text{Fracció simple}}$
$x-a$	$\dfrac{A}{x-a}$
$(x-a)^k$	$\dfrac{A_1}{x-a}+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\dfrac{A_k}{(x-a)^k}$
$(x-a)^2+b^2$	$\dfrac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}$
$((x-a)^2+b^2)^k$	$\dfrac{A_1x+B_1}{(x-a)^2+b^2}+\dfrac{A_2x+B_2}{((x-a)^2+b^2)^2}+\cdots+\dfrac{A_kx+B_k}{((x-a)^2+b^2)^k}$

Ex.: $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \frac{x^2+3x+4}{x^3+x^2+3x-5}\,dx \qquad q(x)=(x-1)(x^2+2x+5)$

$$\frac{x^2+3x+4}{x^3+x^2+3x-5} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5} \qquad A,B,C?$$

Integral Racional

(3) Trobar les constants de les fraccions simples

$$\frac{\boxed{1}}{(x^2+3)x^2} = = \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+3} = \frac{\boxed{A(x^2+3)+Bx(x^2+3)+(Cx+D)x^2}}{(x^2+3)x^2}$$

Igualant numeradors: $1 = A(x^2+3)+Bx(x^2+3)+(Cx+D)x^2$

$\rightarrow$ Donem valor a les x's (és convenient utilitzar les arrels reals de $q(x)$),

$\rightarrow$ i/o igualem coeficient a coeficient

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \Longrightarrow 1=3A \\ \text{coeficient de } x^3:\ 0=B+C \\ \text{coeficient de } x^2:\ 0=A+D \\ \text{coeficient de } x:\ 0=3B \end{array}\right\} \Rightarrow A=1/3,\ B=0,\ C=0,\ D=-1/3$$

$$\frac{1}{(x^2+3)x^2} = \frac{1/3}{x^2}+\frac{0}{x}+\frac{0\,x-1/3}{x^2+3} = \frac{1/3}{x^2}+\frac{-1/3}{x^2+3}$$

Integral Racional

(3) Trobar les constants de les fraccions simples

$$\frac{\boxed{x^2+3x+4}}{x^3+x^2+3x-5} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5} = \frac{\boxed{A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-1)}}{x^3+x^2+3x-5}$$

Igualant numeradors: $x^2+3x+4 = A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-1)$

Si fem $x=1$ (arrel real de $q(x)$) i dos valors més, per exemple $x=0$ i $x=-1$, trobem el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4 = 5A - C \\ 8 = 8A \\ 2 = 4A + 2B - 2C \end{array}\right\} \Rightarrow A=1, B=0, C=1$$

$$\frac{x^2+3x+4}{x^3+x^2+3x-5} = \frac{1}{x-1} + \frac{0\,x+1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+2x+5}$$

Integral Racional

(4) Integrar les fraccions simples

1. $\dfrac{A}{x-a}$ $\quad\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\log|x-a| + C$
2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $\quad\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$
3. $\dfrac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}$

Ex. $$\int \frac{2x}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+3}dx =$$
$$= \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx + \int \frac{-2}{x^2+2x+3}dx =$$
$$= \log(x^2+2x+3) - \int \frac{2}{(x+1)^2+2}\,dx =$$
$$\boxed{\log(x^2+2x+3) - \frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C}$$

Integral Racional

(4) Integrar les fraccions simples

1. $\dfrac{A}{x-a}$ $\quad \displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\log|x-a| + C$
2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $\quad \displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$
3. $\dfrac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}$

Ex. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+3}dx =$

$$= \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx + \int \frac{-2}{x^2+2x+3}dx =$$

$$= \log(x^2+2x+3) - \int \frac{2}{(x+1)^2+2}\,dx =$$

$$\boxed{\log(x^2+2x+3) - \frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C}$$

Canvi de variable
Integral racional
Passos a seguir
Divisió de polinomis
Fraccions simples
Integrar les fraccions simples

Integral Racional

(4) Integrar les fraccions simples

1. $\dfrac{A}{x-a}$ $\quad \displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\log|x-a| + C$
2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $\quad \displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$
3. $\dfrac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}$

Ex. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+3}dx =$

$$= \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx + \int \frac{-2}{x^2+2x+3}dx =$$

$$= \log(x^2+2x+3) - \int \frac{2}{(x+1)^2+2}\,dx =$$

$$\boxed{\log(x^2+2x+3) - \frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C}$$

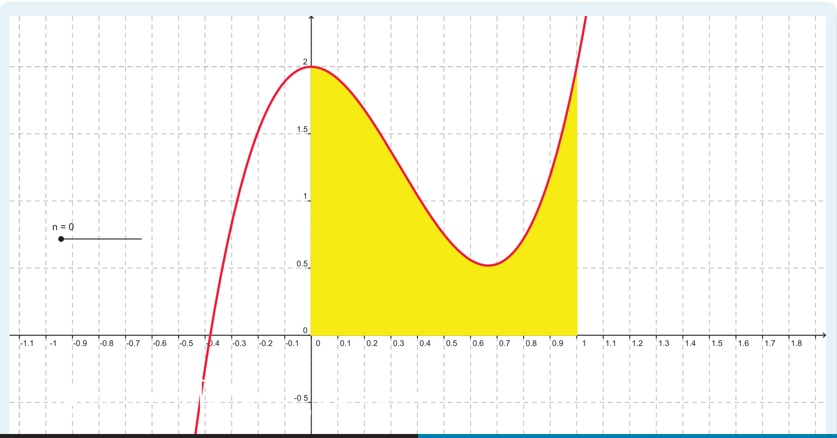
EPSEVG. Dept. MAIV, M. Claverol FOMA: Integral Indefinida 9 / 9

Índex

Definició

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\frac{b-a}{n}$$

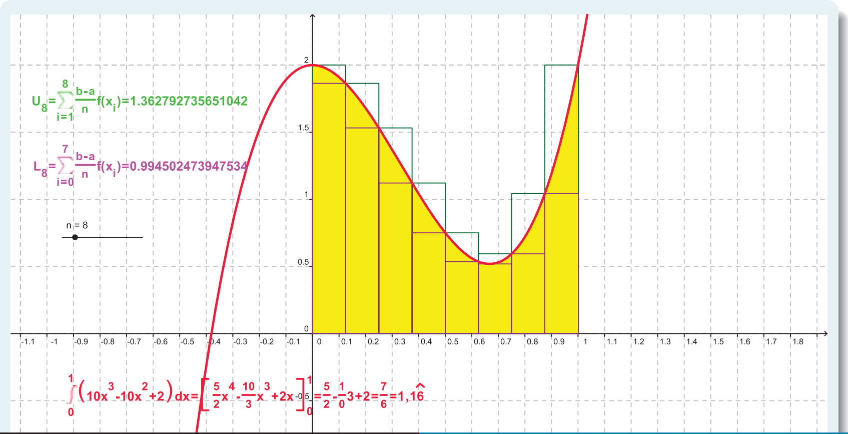
($[a,b]$ es divideix en subintervals i x_i^* és un punt de cada subinterval)



Definició

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\frac{b-a}{n}$$

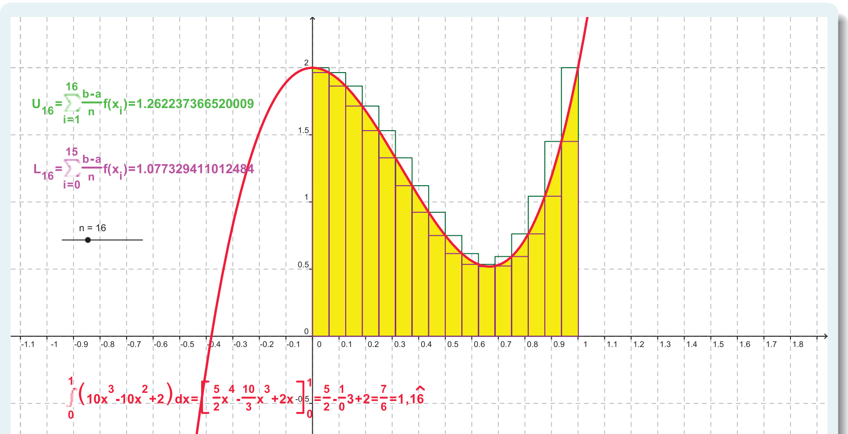
($[a,b]$ es divideix en subintervals i x_i^* és un punt de cada subinterval)



Definició

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\frac{b-a}{n}$$

($[a,b]$ es divideix en subintervals i x_i^* és un punt de cada subinterval)



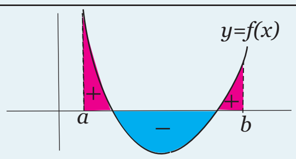
Integral definida

Propietats

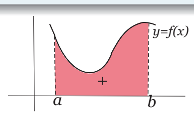
- $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ on $a < c < b$

Interpretació

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum$ àrea per sobre l'eix x - $\sum$ àrea per sota l'eix x

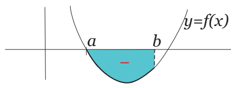


- $f(x)\geq 0$ en $[a,b] \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$



$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$ àrea delimitada per $y=0,\ x=a,\ x=b$ i $y=f(x)$

- $f(x)\leq 0$ en $[a,b] \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$



$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$ -àrea delimitada per $y=0,\ x=a,\ x=b$ i $y=f(x)$

Integral definida

Teorema Fonamental del Càlcul Integral

1. Tota funció contínua en un interval tancat té primitiva:
   $f(x)$ contínua en $[a,b] \Longrightarrow \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ és una primitiva de $f(x)$
2. Regla de Barrow $f(x)$ contínua en $[a,b]$ i $F(x)$ una primitiva, aleshores:
   $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Integral definida

Canvi de variable

Sigui g una funció derivable, amb inversa derivable.
Si fem el canvi: $\boxed{x = g(t)} \Longrightarrow \boxed{dx = g'(t)\,dt}$, aleshores:

$$\downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = F(g^{-1}(b)) - F(g^{-1}(a))$$

* Observa que:

- Una integral definida amb canvis, es pot calcular
  - Fent: indefinida + Barrow
  - O bé fent: canvi de variable en la integral definida
    En aquest cas, si fem el canvi $\boxed{x = g(t)}$ els extrems també canvian:
    $$x = a \Longrightarrow a = g(t) \Longrightarrow t = g^{-1}(a)$$
    $$x = b \Longrightarrow b = g(t) \Longrightarrow t = g^{-1}(b)$$

Integral definida. Exemples

1. Calcula la integral indefinida: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$
2. Calcula la integral definida: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$
   1. Fent: indefinida + Barrow
   2. Fent un canvi de variable en la integral definida

(1)

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos t \cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt =$$

canvi: $\boxed{x=\sin t} \Longrightarrow t = \arcsin x$

$dx = \cos t\,dt$

$$= \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{\sin(2t)}{4} \overset{\text{arreglem}}{=} \frac{1}{2}t + \frac{2\sin t\cos t}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}}{4} + C \overset{\text{desfem canvi}}{=} \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

Integral definida. Exemples

(2.1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ Fent: indefinida + Barrow

- Al càlcul de la integral indefinida hem obtingut:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = F(x) + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{4} + C$$

- Ara, aplicant la regla de Barrow :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = [F(x)]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{4}\right]_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

* Fem la indefinida (sense extrems d'integració)

* Desfem els canvis

Integral definida. Exemples

(2.2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ Fent un canvi de variable en la integral definida

Canvi d'extrems

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{\downarrow}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$\uparrow$

canvi: $\boxed{x=\sin t} \Longrightarrow t = \arcsin x$

$dx = \cos t\,dt$

$1 = \sin t \Longrightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$0 = \sin t \Longrightarrow t = 0$

NO desfem canvi

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \overset{\downarrow}{=} \frac{\pi}{4}$$

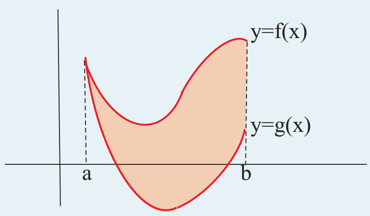
* Canvien els extrems d'integració
* No cal desfer el canvi

Aplicacions

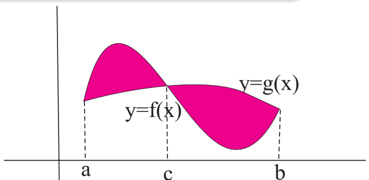
Càlcul d'àrees

L'àrea delimitada entre dues funcions f i g a l'interval $[a,b]$ tals que $f(x) \geq g(x)$ on $a \leq x \leq b$:

$$\boxed{\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx}$$



$$\int_a^c (f(x)-g(x))\,dx + \int_c^b (g(x)-f(x))\,dx$$



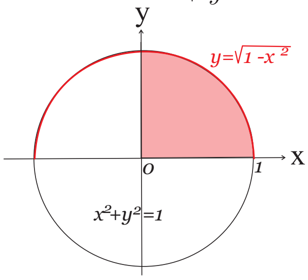
Aplicacions

- Calcula l'àrea del cercle de radi unitat.

L'equació de la circumferència de centre l'origen i radi 1 és: $x^2 + y^2 = 1$

$x^2 + y^2 = 1 \implies y = \pm\sqrt{1 - x^2}$
són les dues funcions que encerclen el disc (una per signe).

Amb una d'elles, per ex. $y = +\sqrt{1 - x^2}$, podem calcular l'àrea de mig cercle, o inclús només $1/4$ (el sector del $Q1$) i després multiplicar per 4:



$$A = 4\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx \overset{fet\,abans}{=} 4\frac{\pi}{4} = \pi$$

Recorda que, en general, l'àrea del disc de radi R és πR^2

Aplicacions

- Calcula l'àrea i dibuixa la regió del pla limitada per $y = 3 - x^2$ i $y = (x-3)(x-1)$.

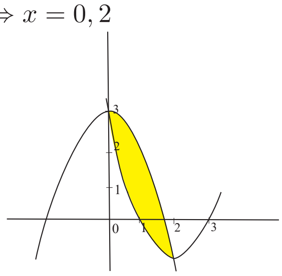
Busquem els punts de tall entre les funcions:

$$\left.\begin{array}{l} y = 3 - x^2 \\ y = (x-3)(x-1) \end{array}\right\} \iff 3 - x^2 = x^2 - 4x + 3 \iff$$

$$\iff 2x^2 - 4x = 0 \iff 2x(x-2) = 0 \iff x = 0, 2$$

$$\int_0^2 (3 - x^2) - (x^2 - 4x + 3)\,dx =$$

$$= [3x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 3x]_0^2 = \boxed{\frac{8}{3}}$$

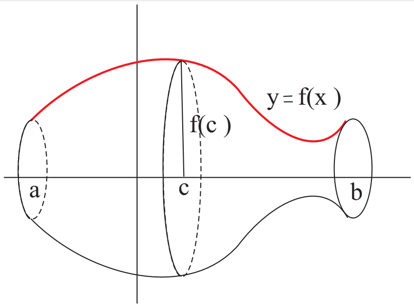


Aplicacions

Càlcul de volums de revolució

- Volum del cos de revolució que genera $y = f(x)$ al girar al voltant de l'eix x.

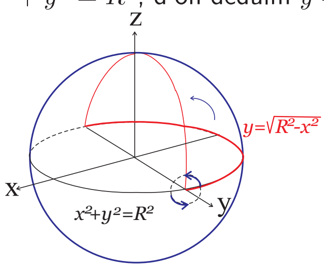
$$\boxed{\pi \int_a^b (f(x))^2\,dx}$$



Aplicacions

- Calcula el volum de l'esfera de radi R

L'equació de la circumferència de centre l'origen i radi R és: $x^2 + y^2 = R^2$, d'on deduïm $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$.



Si agafem la semicircumferència $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$ i la fem girar al voltant de l'eix x, generem tota l'esfera i el seu volum és:

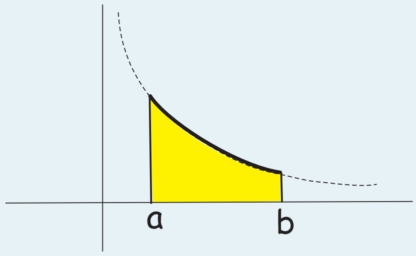
$$V = \pi \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2\,dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)\,dx =$$

$$2\pi[R^2x - \frac{x^3}{3}]_0^R = 2\pi(R^3 - \frac{R^3}{3}) = 2\pi\frac{2R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Tot acotat: Pròpia

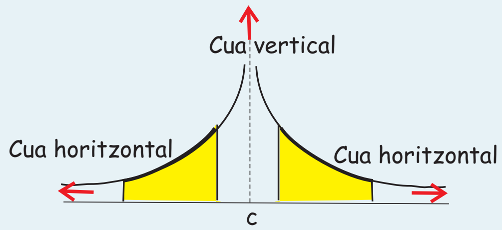
$\int_a^b f(x)\,dx$ Pròpia

1. Funció acotada en $[a, b]$ i
2. Interval acotat $[a, b]$



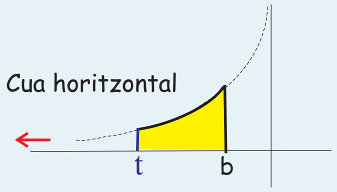
No tot acotat: Impròpia

1. Impròpia de *primera espècie*
   Interval NO acotat: $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$ o $(-\infty, +\infty)$
2. Impròpia de *segona espècie*
   Funció NO acotada en $[a, b]$: discont. essencial (asimptòtica) en algun punt $c \in [a, b]$.
3. Impròpia de *tercera espècie*: primera + segona.



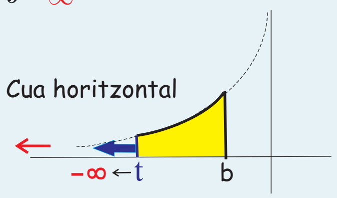
Impròpia de primera espècie: interval NO acotat

- $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$$



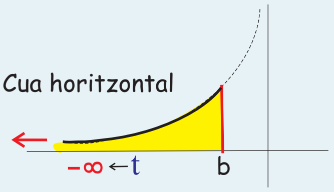
Impròpia de primera espècie: interval NO acotat

- $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$$



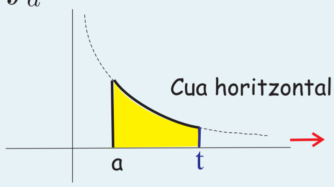
Impròpia de primera espècie: interval NO acotat

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$



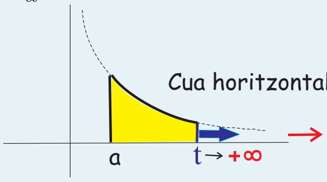
Impròpia de primera espècie: interval NO acotat

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{a}^{t} f(x)\,dx$



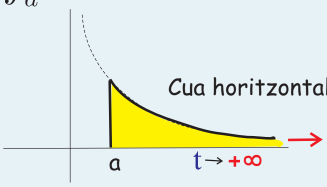
Impròpia de primera espècie: interval NO acotat

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{a}^{t} f(x)\,dx$



Impròpia de primera espècie: interval NO acotat

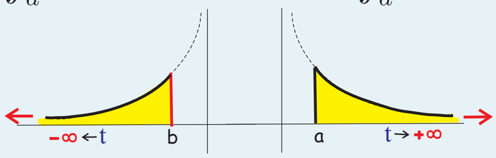
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{a}^{t} f(x)\,dx$



EPSEVG. Dept. MAIV, M. Claverol | Integrals Impròpies | 3/7

Impròpia de primera espècie: interval NO acotat

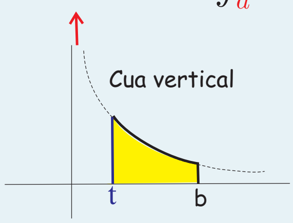
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{a}^{t} f(x)\,dx$



$\exists$ límit $\Longrightarrow$ $\exists$ Integral impròpia o és Convergent
Altrament, $\nexists$ Integral impròpia o és Divergent

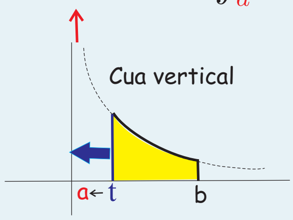
Impròpia de segona espècie: funció NO acotada

- (Si $x = a$ AV.) $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$



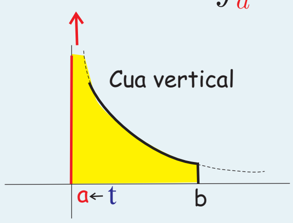
Impròpia de segona espècie: funció NO acotada

- (Si $x = a$ AV.) $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$



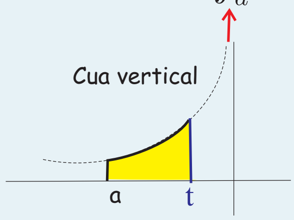
Impròpia de segona espècie: funció NO acotada

- (Si $x = a$ AV.) $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$



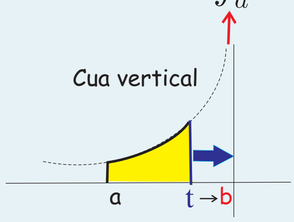
Impròpia de segona espècie: funció NO acotada

- (Si $x = a$ AV.) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$
- (Si $x = b$ AV.) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$



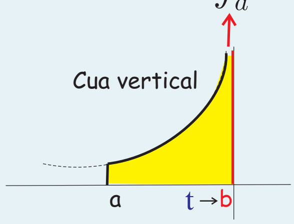
Impròpia de segona espècie: funció NO acotada

- (Si $x = a$ AV.) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$
- (Si $x = b$ AV.) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$



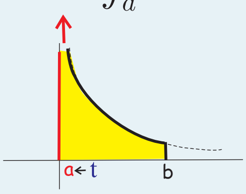
Impròpia de segona espècie: funció NO acotada

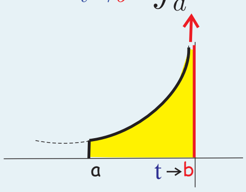
- (Si $x = a$ AV.) $$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$$
- (Si $x = b$ AV.) $$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_{a}^{t} f(x)\,dx$$



Impròpia de segona espècie: funció NO acotada

- (Si $x = a$ AV.) $$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$$
- (Si $x = b$ AV.) $$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_{a}^{t} f(x)\,dx$$





$\exists$ límit $\Longrightarrow$ $\exists$ Integral impròpia o és Convergent
Altrament, $\nexists$ Integral impròpia o és Divergent

Observacions

- En una mateixa integral no podem fer més d'un pas al límit, si és el cas, trossejarem la integral.
- Cal trossejar: les impròpies de *primera espècie* si l'interval és tot $\mathbb{R}$, les de *segona* quan el punt a tractar no és un extrem de l'interval i les de *tercera espècie* sempre.
- Direm que la integral és convergent, si ho són cadascuna de les integrals en què l'hem trossejat.

Ex. Impròpia de *primera espècie*. Subdividim en un punt intermig.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

Ex. Impròpia de *segona espècie*. La discontinuïtat essencial (asimptòtica) està en un punt interior a l'interval. Trossegem fent que el punt sigui extrem dels nous intervals.

- $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{1}{x-2}\,dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{x-2}\,dx + \int_{2}^{3} \frac{1}{x-2}\,dx$

Ex. Impròpia de *tercera espècie*. Subdividim en un punt intermig.

- $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x-2}\,dx = \int_{2}^{3} \frac{1}{x-2}\,dx + \int_{3}^{+\infty} \frac{1}{x-2}\,dx$

Acotació d'integrals impròpies

Acotació d'integrals impròpies

Si ens interessa saber si la integral impròpia I és convergent o no, sense importar el seu valor, intentarem acotar-la per una altra coneguda i convergent. Si ho aconseguim, podrem dir I també és convergent.

Apliquem: $\int_a^b f(x)\,dx \leq |\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$, ($a$ i b poden ser infinits)

Aleshores, si $\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

$\int_a^b g(x)\,dx$ convergent $\Longrightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ convergent.

Exemple. $\displaystyle I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{x^2+x+1}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)+\cos(x)}{x^2+x+1}\right| dx \leq$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{2}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{-2}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} (\frac{-2}{t}+2) = 2$

Per tant, I és convergent.

Exemples

Comprova:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x \, dx.$ Divergent
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x \, dx.$ Divergent
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \, dx,\ \lambda \in \mathbb{R}.$ Div.: $\boxed{\lambda \leq 0}$, Conv.: $\boxed{\lambda > 0}$ i si $\lambda > 0$, val $1/\lambda$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \, dx,\ p > 0.$ Divergent: $\boxed{p \leq 1}$, Convergent: $\boxed{p > 1}$ i val $1/(p-1)$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^p} \, dx,\ p > 0.$ Divergent: $\boxed{p \geq 1}$, Convergent: $\boxed{p < 1}$ i val $1/(1-p)$
6. $\displaystyle\int_a^{b} \frac{1}{(x-a)^p} \, dx,\ p > 0.$ Div.: $\boxed{p \geq 1}$, Conv.: $\boxed{p < 1}$ i val $\dfrac{(b-a)^{1-p}}{(1-p)}$