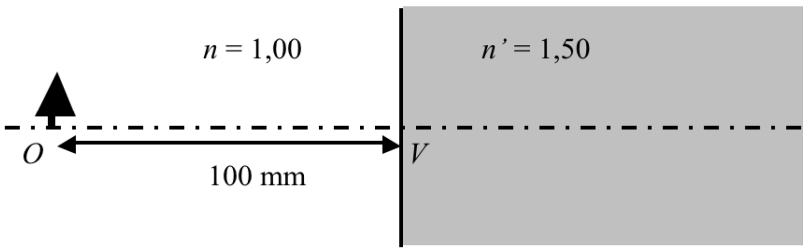
PROBLEMAS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA E INSTRUMENTAL

Unidad 6:
6.2 Dioptrio plano

Jaume Escofet

UNIDAD 6. PROBLEMAS DE DIOPTRIO PLANO

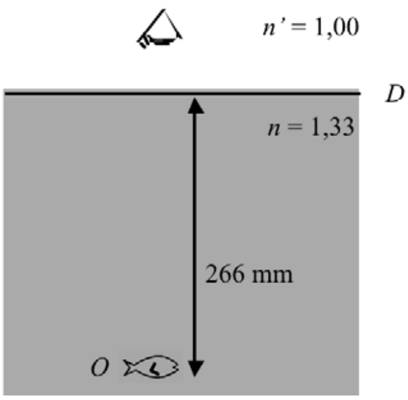
1. Sea un objeto real O situado delante del dioptrio plano que se muestra en la figura. Determina:
a) El radio de curvatura del dioptrio.
b) Las focales del dioptrio.
c) Las potencias del dioptrio.
d) La posición de la imagen.
e) La vergencia del objeto y de la imagen.
f) La distancia reducida del objeto y de la imagen.
g) El carácter de la imagen (real/virtual).
h) El aumento de la imagen.
i) La orientación de la imagen (derecha/invertida).
j) Si el tamaño de la imagen será mayor/menor/igual que el del objeto.



R/ a) $R = \infty$; b) $f = \infty$, $f' = \infty$; c) $P = -P' = 0$; d) $VO' = -150$ mm; e) $S = -10{,}0$ D, $S' = -10{,}0$ D; f) $\bar{s} = -100$ mm , $\bar{s}' = -100$ mm ; g) Virtual; h) $m = 1$; i) Derecha; j) Igual.

---

2. Un observador situado en aire (n = 1,00) observa, a través de la superficie plana del agua (n = 1,33), un pez situado 266 mm por debajo de dicha superficie según se muestra en la figura.



Determina:
a) La posición donde verá la imagen el observador (profundidad aparente del pez).
b) El aumento de la imagen.

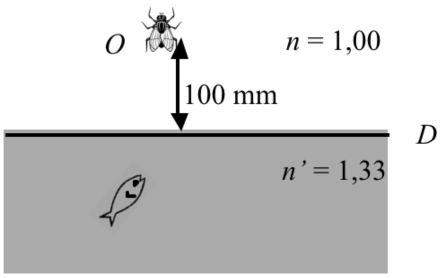
R/ a) $s' = DO' = -200$ mm; $m = +1$.

3. Determina la profundidad aparente de una piscina de 5,00 metros de profundidad cuando se llena de agua (n = 1,33).

R/ h = 3,76 m.

---

4. Un pez sumergido en agua (n = 1,33) observa, a través de la superficie plana que separa el agua del aire (n = 1,00), una mosca situada a una altura de 100 mm de dicha superficie según se muestra en la figura. Determina la posición en donde el pez verá la mosca (altura aparente de la mosca).



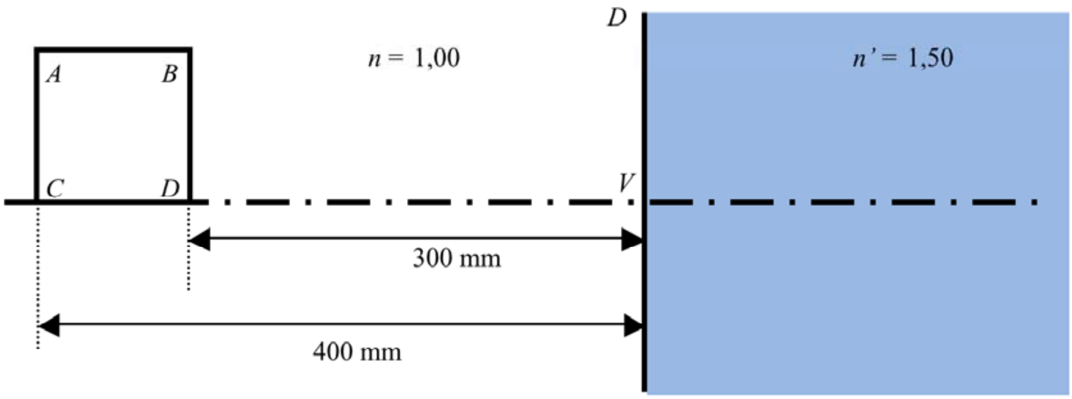
R/ h = 133 mm.

---

5. Demuestra que el aumento axial, α, en un dioptrio plano que separa dos medios de índices n y n' es $\alpha = \frac{n}{n'}$.

---

6. Sea un dioptrio de índices n = 1,00 y n' = 1,50. Un objeto de forma cuadrada *ABCD*, de 100 mm de lado, se situa delante del dioptrio según se muestra en la figura.
Determina:
a) La posición de los 4 puntos *A'B'C'D'*.
b) Dibuja la forma de la imagen.



R/ a) $s'_{C'}$ = –600 mm, $s'_{D'}$ = –450 mm, $C'A'$ = 100 mm, $D'B'$ = 100 mm.

---

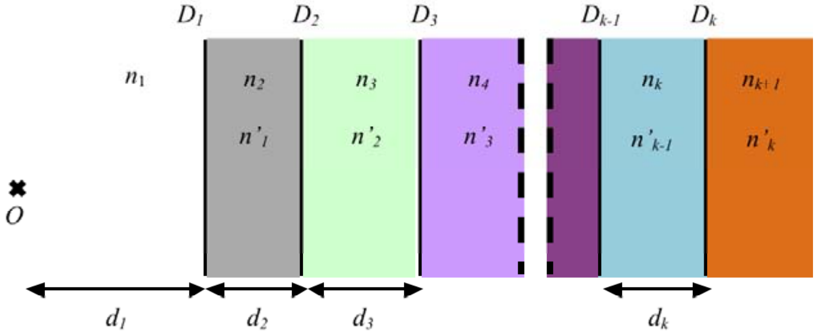
7. Sea el sistema formado por la asociación de *k* dioptrios planos según se muestra en la figura. Determina:

a) La posición de la imagen formada por D_1.

b) La posición de la imagen formada por la acción de D_1 y D_2.

c) La posición de la imagen formada por la acción de D_1, D_2 y D_3.

d) La posición de la imagen formada por la acción de *k* dioptrios.

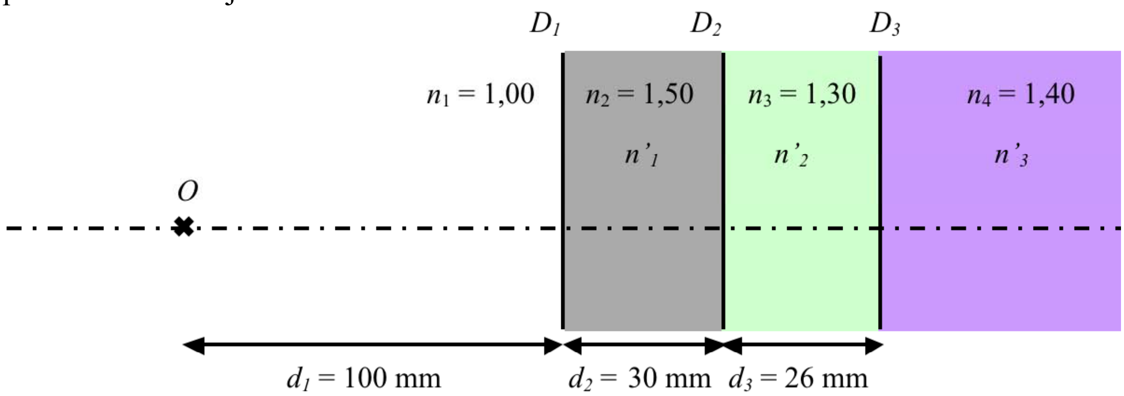


R/ a) $D_1O'_1 = s'_1 = -n_2\overline{d_1} = -n_2\dfrac{d_1}{n_1}$; b) $D_2O'_2 = s'_2 = -n_3\left(\overline{d_2}+\overline{d_1}\right) = -n_3\left(\dfrac{d_2}{n_2}+\dfrac{d_1}{n_1}\right)$;

c) $D_3O'_3 = s'_3 = -n_4\left(\overline{d_3}+\overline{d_2}+\overline{d_1}\right) = -n_4\left(\dfrac{d_3}{n_3}+\dfrac{d_2}{n_2}+\dfrac{d_1}{n_1}\right)$; d) $D_kO'_k = s'_k = -n_{k+1}\sum_{i=1}^{i=k}\overline{d_i} = -n_{k+1}\sum_{i=1}^{i=k}\dfrac{d_i}{n_i}$.

---

8. Sea la asociación de dioptrios planos de la figura. Determina la posición de la imagen que forman del objeto *O*.



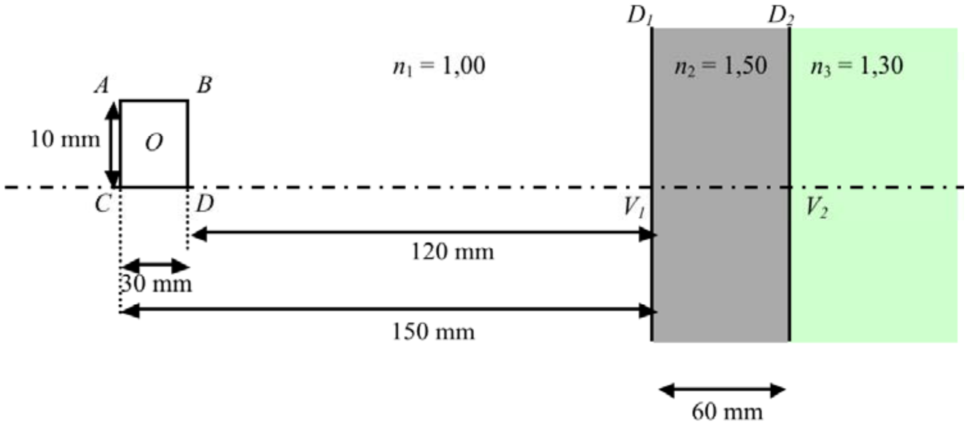
R/ $D_3O' = s'_3 = -196$ mm.

---

9. Sea un objeto plano de forma rectangular *ABCD* situado delante de la asociación de dos dioptrios planos según se muestra en la figura. Determina:

a) La posición de la imagen.

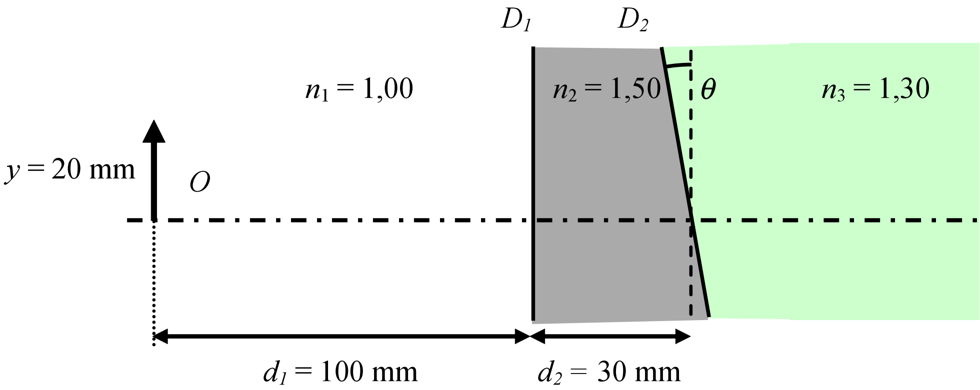
b) El tamaño de la imagen.



R/ a) $D_2D' = -208$ mm; b) $A'C' = B'D' = 10$ mm, $A'C' = C'D' = 39$ mm.

---

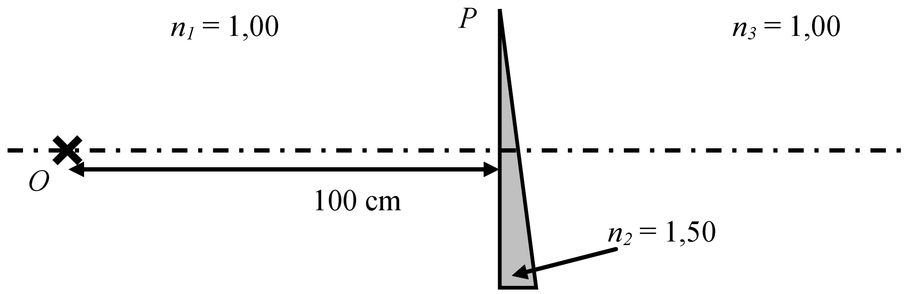
10. Sea la asociación de dos dioptrios planos de la figura en donde el último de ellos está rotado una ángulo $\theta = 10º$ en dirección contraria a las agujas del reloj según se muestra en la figura. Determina:
a) La posición de la imagen.
b) El tamaño de la imagen.



R/ a) $s'_{2p} = -154{,}28$ mm; b) $y'_t = 19{,}70$ mm, $y'_a = 3{,}11$ mm.

---

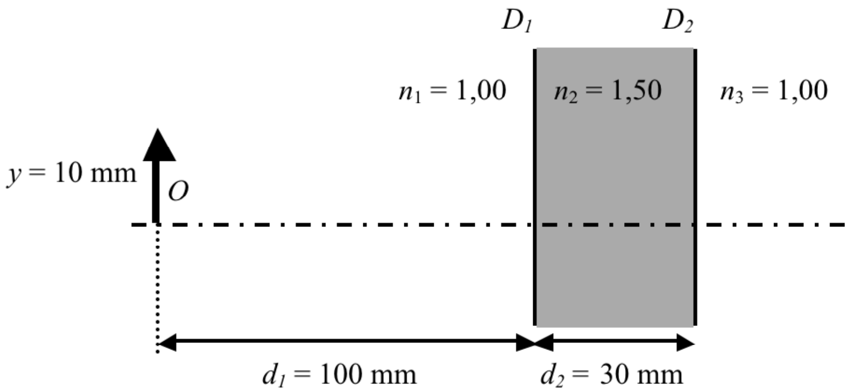
11. Sea un prisma delgado P de índice $n = 1{,}50$, potencia $Z = 8^{\Delta}$ sumergido en aire. Un objeto está situado delante del prisma a la distancia de 100 cm según se muestra en la figura. Determina:
a) La posición de la imagen formada por el prisma.
b) El desplazamiento vertical de la imagen.
c) Compara el resultado anterior con el que se obtendría aplicando la fórmula de la desviación en un prisma delgado.



R/ a) $PO' = -100$ cm; b) $y' = 8$ cm.

---

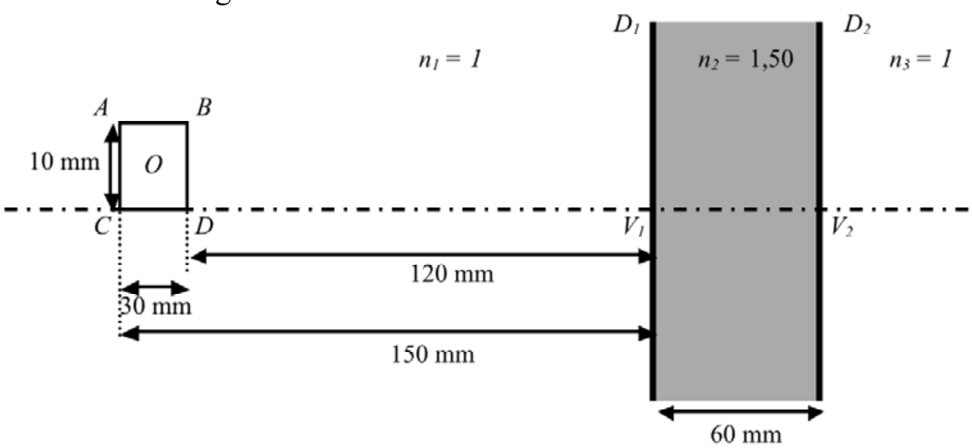
12. Sea la lámina plano-paralela de la figura. Determina
a) La posición de la imagen.
b) El tamaño de la imagen



R/ a) $D_2O' = -120$ mm; b) $y' = 10$ mm.

---

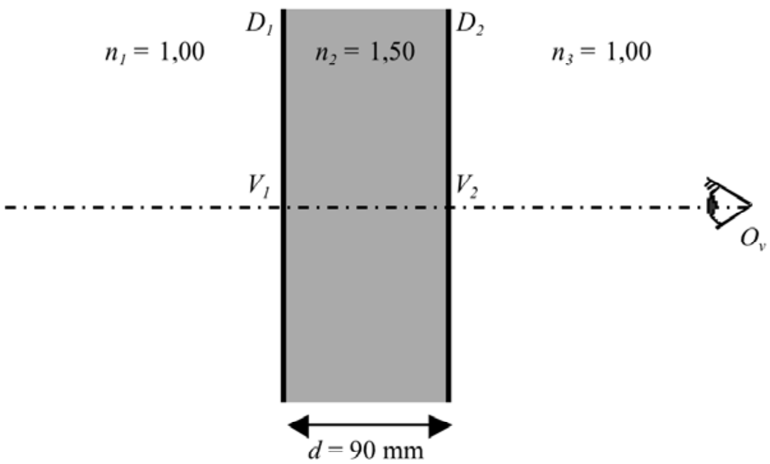
13. Sea el objeto plano de forma rectangular *ABCD* situado delante de una lámina plano-paralela según se muestra en la figura. Determina:
a) La posición de la imagen.
b) El tamaño de la imagen.



R/ a) $D_2D' = -160$ mm; $A'C' = 10$ mm, $A'B' = 30$ mm.

---

14. Sea una lámina plano-paralela de índice n = 1,50 y 90 mm de grosor sumergida en aire. Determina su grosor aparente.



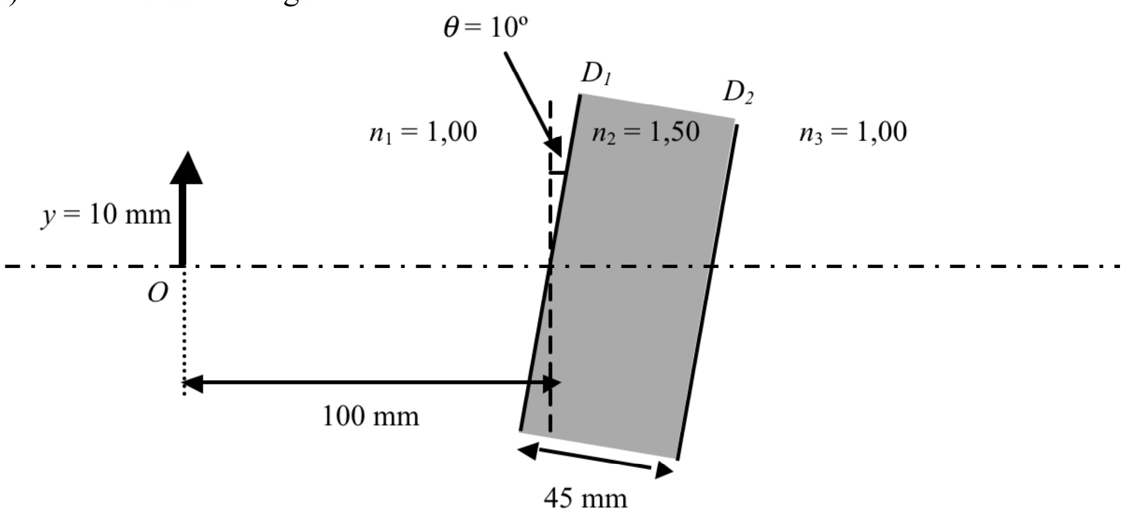
R/ d_{ap} = 60 mm.

---

15. Un objeto O de tamaño y está situado delante de una lámina plano-paralela de 45 mm de grosor la cual está girada un ángulo de 10º en dirección de las agujas del reloj según se muestra en la figura. Determina:

a) La posición de la imagen.

b) El tamaño de la imagen.



R/ a) s'_{2p} = 128,48 mm; b) y' = 10 mm.

Comentarios a los problemas del dioptrio plano

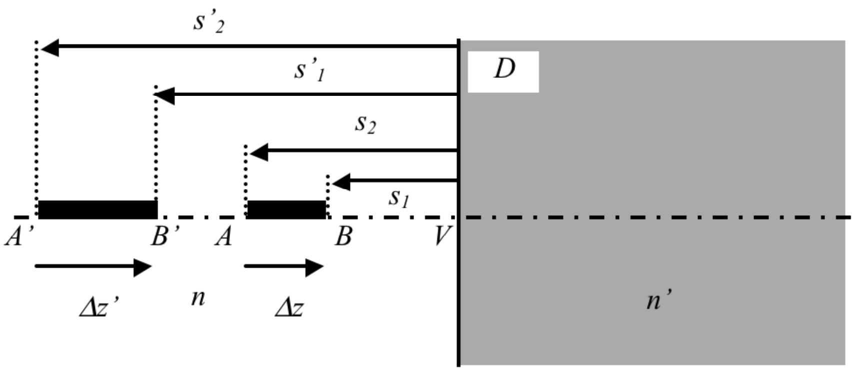
1. Ejercicio de solución inmediata aplicando directamente las fórmulas de formación de imagen del dioptrio plano.

2. Téngase en cuenta que en el criterio de signos adoptado en la ecuación de formación de imágenes la luz viaja de izquierda a derecha. Debe esquematizarse el ejercicio de manera que el objeto real, en este caso el pez, esté a la izquierda del dioptrio.

3. Igual que el ejercicio anterior.

4. Igual que el ejercicio anterior.

5. Debe hacerse un esquema del problema en donde se muestre el aumento axial de un segmento de extremos *AB* situado en la dirección perpendicular al eje óptico.



El aumento axial se calcula a partir de: $\alpha = \dfrac{\Delta z'}{\Delta z} = \dfrac{A'B'}{AB}$.

La longitud de los segmentos *A'B'* y *AB* debe establecerse a partir de las distancias s_1, s_2 y s'_1, s'_2 respectivamente.

6. De solución muy parecida al ejercicio anterior.

7. Se trata de una asociación de dioptrios planos. Debe recordarse que la imagen del dioptrio anterior es el objeto para el dioptrio siguiente. No se debe olvidar resituar la posición de este objeto.

8. De solución inmediata a partir de la fórmula obtenida en el ejercicio anterior.

9. Las posiciones axiales de los puntos conjugados de *C* y *D* deben obtenerse a partir de la ecuación de formación de imagen de una asociación de dioptrios planos. Recuérdese que el aumento lateral en este caso siempre es la unidad.

10. Se trata de una asociación de dioptrios planos que no son paralelos entre sí. Debe buscarse en primer lugar la imagen que forma el primer dioptrio. A continuación debe

buscarse la imagen que forma el segundo dioptrio. En este caso, para aplicar las fórmulas debe considerarse la distancia perpendicular del objeto al segundo dioptrio.

11. Se resuelve del mismo modo que el ejercicio anterior teniendo en cuenta que el grosor que separa los dos dioptrios es despreciable.

12. Ejercicio de solución inmediata igual que el ejercicio 6. Debido a que los índices extremos son iguales puede considerarse también el desplazamiento producido por una lámina plano-paralela.

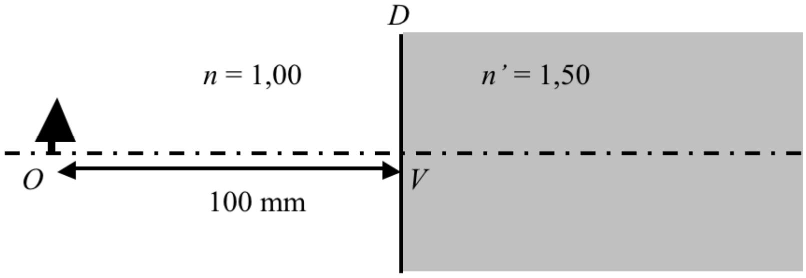
13. Igual que el ejercicio anterior.

14. El grosor aparente es el grosor percibido por un observador visual O_v cuando observa la superficie plana del dioptrio D_1 a través del dioptrio D_2.

15. Debe considerarse la posición del objeto desde la perpendicular a las caras de los dioptrios D_1 y D_2.

UNIDAD 6. PROBLEMAS DE DIOPTRIO PLANO. SOLUCIONES

1. Sea un objeto real *O* situado delante del dioptrio plano que se muestra en la figura. Determina:
a) El radio de curvatura del dioptrio.
b) Las focales del dioptrio.
c) Las potencias del dioptrio.
d) La posición de la imagen.
e) La vergencia del objeto y de la imagen.
f) La distancia reducida del objeto y de la imagen.
g) El carácter de la imagen (real/virtual).
h) El aumento de la imagen.
i) La orientación de la imagen (derecha/invertida).
j) Si el tamaño de la imagen será mayor/menor/igual que el del objeto.



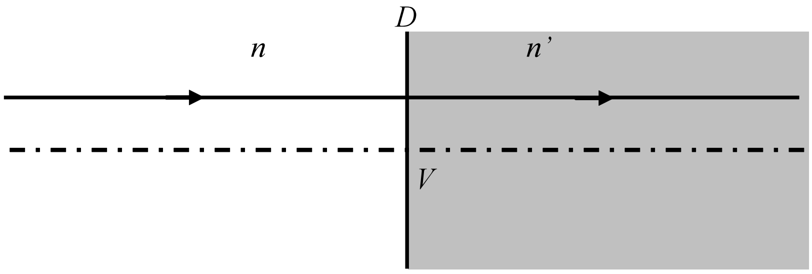
SOLUCIÓN:

a) Por ser el dioptrio plano $R = \infty$.

b) De las ecuaciones $f = -\dfrac{n\,R}{n'-n}$ y $f' = \dfrac{n'\,R}{n'-n}$ teniendo en cuenta que $R = \infty$ se deduce que $f = \infty$ y $f' = \infty$.

c) De las ecuaciones $P = \dfrac{n}{f} = -\dfrac{n'-n}{R}$ y $P' = \dfrac{n'}{f'} = \dfrac{n'-n}{R}$ teniendo en cuenta que $R = \infty$ se deduce que $P = 0$ y $P' = 0$.

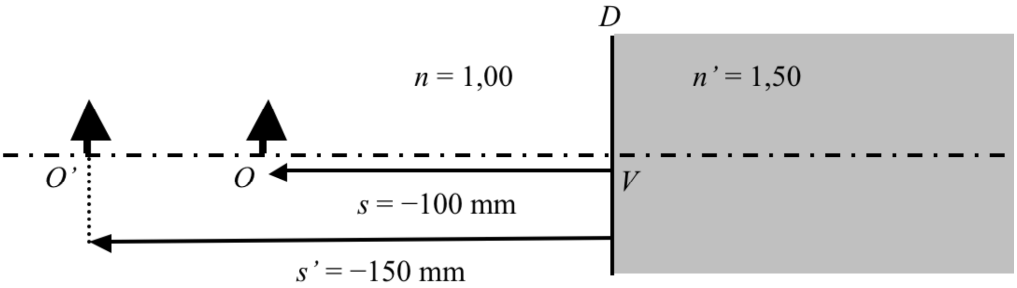
Gráficamente las expresiones deducidas en los apartados b) y c) significan que un rayo paralelo al eje al atravesar el dioptrio no se desvía.



d) De la ecuación del dioptrio plano:

$$\bar{s} = \bar{s}' \;;\quad \frac{s}{n} = \frac{s'}{n'};\qquad s = -100 \text{ mm},\ n = 1{,}00,\ n' = 1{,}50;$$

$$\frac{-100}{1{,}00} = \frac{s'}{1{,}50};\qquad s' = VO' = -150 \text{ mm.}$$



e) $s = -100$ mm $= -0{,}100$ m; $\qquad s' = -150$ mm $= -0{,}150$ m;

$$S = \frac{n}{s} = \frac{1}{-0{,}100} = -10{,}0 \text{ D.}\qquad S' = \frac{n'}{s'} = \frac{1{,}5}{-0{,}150} = -10{,}0 \text{ D.}$$

Las vergencias objeto e imagen son iguales ya que se cumple la ecuación del dioptrio plano $S = S'$.

f) $\bar{s} = \dfrac{s}{n} = \dfrac{-100}{1{,}00} = -100$ mm; $\qquad \bar{s}' = \dfrac{s'}{n'} = \dfrac{-150}{1{,}50} = -100$ mm;

Las distancias reducidas objeto e imagen son iguales ya que se cumple la ecuación del dioptrio plano $\bar{s} = \bar{s}'$.

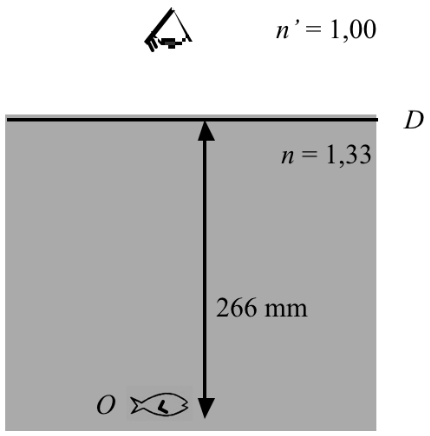
g) Por estar situada la imagen a la izquierda del dioptrio la imagen es virtual.

h) El aumento del dioptrio plano siempre es $m = +1$.

i) Por tener m signo positivo la imagen es derecha. En un dioptrio plano la imagen siempre es derecha.

j) Por ser 1 el valor absoluto de m la imagen es del mismo tamaño que el objeto. En un dioptrio plano el tamaño de la imagen es igual al tamaño del objeto.

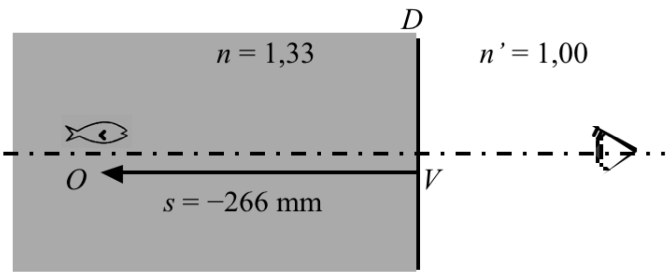
2. Un observador situado en aire (n = 1,00) observa, a través de la superficie plana del agua (n = 1,33), un pez situado 266 mm por debajo de dicha superficie según se muestra en la figura.



Determina:
a) La posición donde verá la imagen el observador (profundidad aparente del pez).
b) El aumento de la imagen.

SOLUCIÓN:

Esquematicemos el objeto (el pez), el dioptrio y el observador de acuerdo con el criterio de signos:

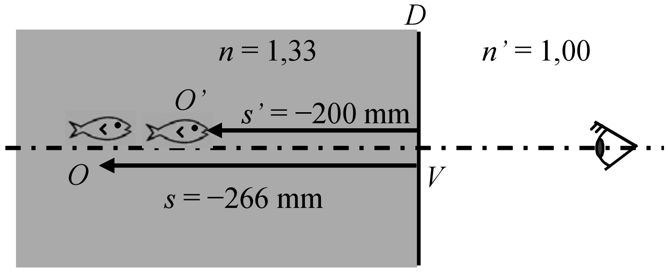


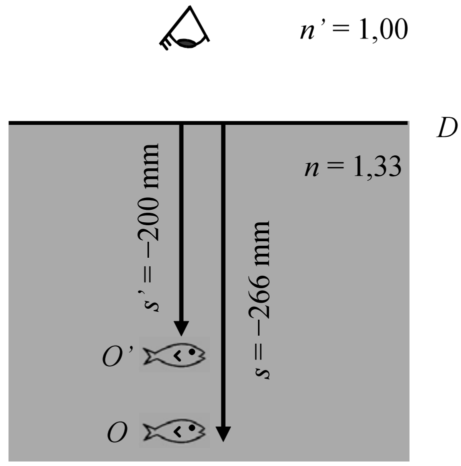
a) $\bar{s} = \bar{s}'$; $\dfrac{s}{n} = \dfrac{s'}{n'}$; s = –266 mm, n = 1,33, n' = 1,00;

$\dfrac{-266}{1,33} = \dfrac{s'}{1}$; $s' = DO'$ = –200 mm. La imagen es virtual.

La profundidad aparente del pez será de 200 mm. El observador tendrá la impresión de que el pez está más cercano a la superficie del agua.

b) m = +1. La imagen es derecha y del mismo tamaño.

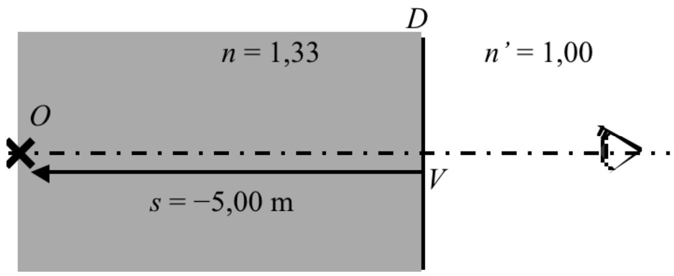




3. Determina la profundidad aparente de una piscina de 5,00 metros de profundidad cuando se llena de agua (n = 1,33).

SOLUCIÓN:

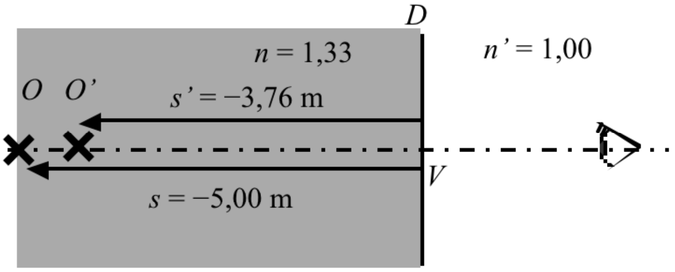
Esquematicemos el objeto (fondo de la piscina), el dioptrio y el observador de acuerdo con el criterio de signos:

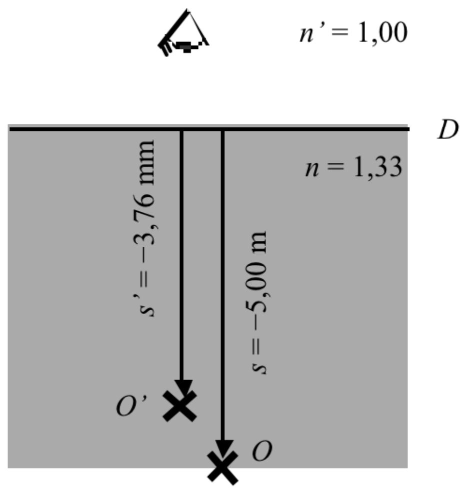


Procediendo como en el ejercicio anterior:

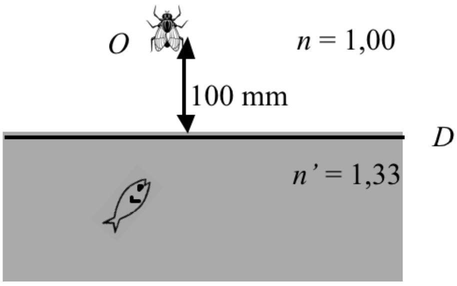
$\bar{s} = \bar{s}'$; $\frac{s}{n} = \frac{s'}{n'}$; $s = -5{,}00$ mm, $n = 1{,}33$, $n' = 1{,}00$; $\frac{-5{,}00}{1{,}33} = \frac{s'}{1}$; $s' = -3{,}76$ m.

La profundidad aparente es $h = |s'| = 3{,}76$ m. El observador verá el fondo de la piscina más cercano de lo que realmente está.



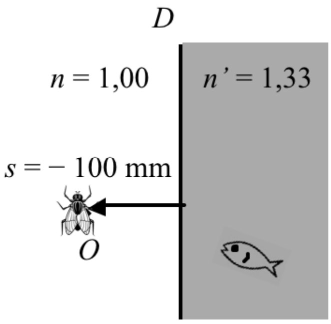


4. Un pez sumergido en agua (n = 1,33) observa, a través de la superficie plana que separa el agua del aire (n = 1,00), una mosca situada a una altura de 100 mm de dicha superficie según se muestra en la figura. Determina la posición en donde el pez verá la mosca (altura aparente de la mosca).



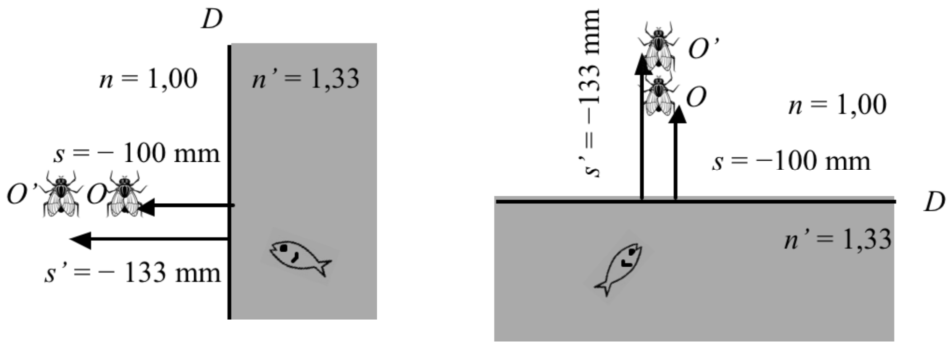
SOLUCIÓN:

Esquematicemos el objeto, el dioptrio y el observador (pez) de acuerdo con el criterio de signos:



$\bar{s} = \bar{s}'$; $\frac{s}{n} = \frac{s'}{n'}$ $\qquad \frac{-100}{1{,}00} = \frac{s'}{1{,}33}$; $s = -100$ mm, $n = 1{,}00$, $n' = 1{,}33$; $s' = -133$ mm.

La altura aparente es $h = |s'| = 133$ mm. El pez verá a la mosca en una posición más alejada de lo que realmente está.

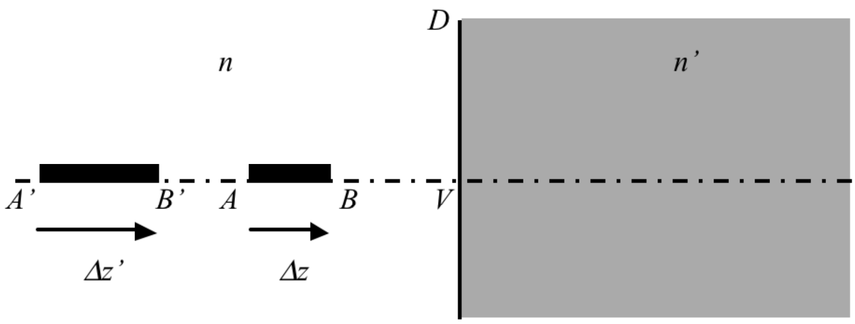


5. Demuestra que el aumento axial, α, en un dioptrio plano que separa dos medios de índices n y n' es $\alpha = \dfrac{n}{n'}$.

SOLUCIÓN:

Se define el aumento axial como: $\alpha = \dfrac{\Delta z'}{\Delta z}$.

Sea el segmento *AB* de la figura y sea *A'B'* la imagen formada por el dioptrio plano *D* del segmento anterior.



$$\alpha = \frac{\Delta z'}{\Delta z} = \frac{A'B'}{AB}.$$

$A'B' = A'V + VB' = VB' - VA'$.

$AB = AV + VB = VB - VA$.

Ahora bien, de la ecuación de formación de imágenes del dioptrio plano para los pares de puntos conjugados *A*, *A'* y *B*, *B'*:

$$\overline{s_A} = \overline{s_{A'}}; \qquad \frac{s_A}{n} = \frac{s_{A'}}{n'}; \qquad s_A = VA; \quad s_{A'} = VA'; \quad \frac{VA}{n} = \frac{VA'}{n'}; \qquad VA' = \frac{n'}{n}VA.$$

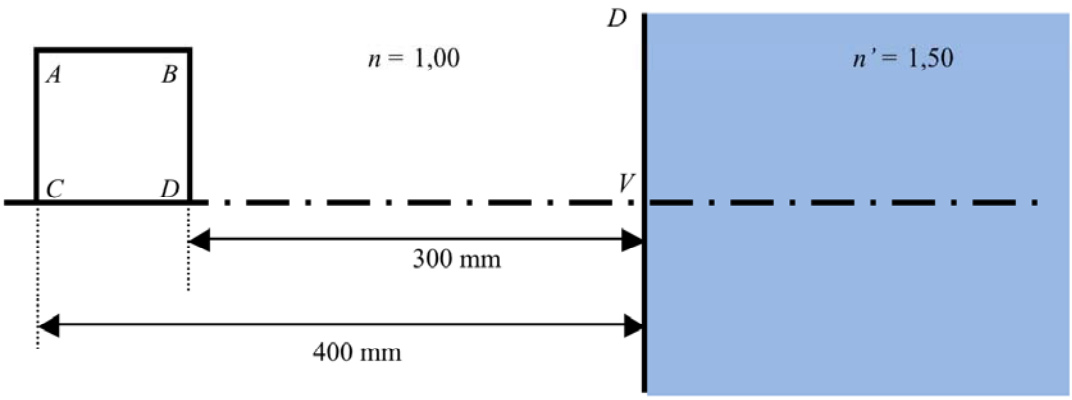
$$\overline{s_B} = \overline{s_{B'}}; \qquad \frac{s_B}{n} = \frac{s_{B'}}{n'}; \qquad s_B = VB; \quad s_{B'} = VB'; \quad \frac{VB}{n} = \frac{VB'}{n'}; \qquad VB' = \frac{n'}{n}VB.$$

Sustituyendo en la ecuación del aumento axial:

$$\alpha = \frac{\Delta z'}{\Delta z} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{VB' - VA'}{VB - VA} = \frac{\frac{n'}{n}VB - \frac{n'}{n}VA}{VB - VA} = \frac{n'\,(VB - VA)}{n\,(VB - VA)}; \qquad \alpha = \frac{n'}{n}.$$

---

6. Sea un dioptrio de índices n = 1,00 y n' = 1,50. Un objeto de forma cuadrada $ABCD$, de 100 mm de lado, se situa delante del dioptrio según se muestra en la figura.
Determina:
a) La posición de los 4 puntos $A'B'C'D'$.
b) Dibuja la forma de la imagen.



SOLUCIÓN:

a) Posición de C' y D':

$$\frac{s}{n} = \frac{s'}{n'}; \qquad s' = \frac{n'}{n}s \quad (1)$$

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's}; \qquad y' = y \quad (2)$$

Sustituyendo en (1) y (2): $s = s_C$ = –400 mm; n = 1,00 y n' = 1,50 se obtiene:

$$s'_{C'} = \frac{1{,}50}{1{,}00}(-400) = -600 \text{ mm}.$$

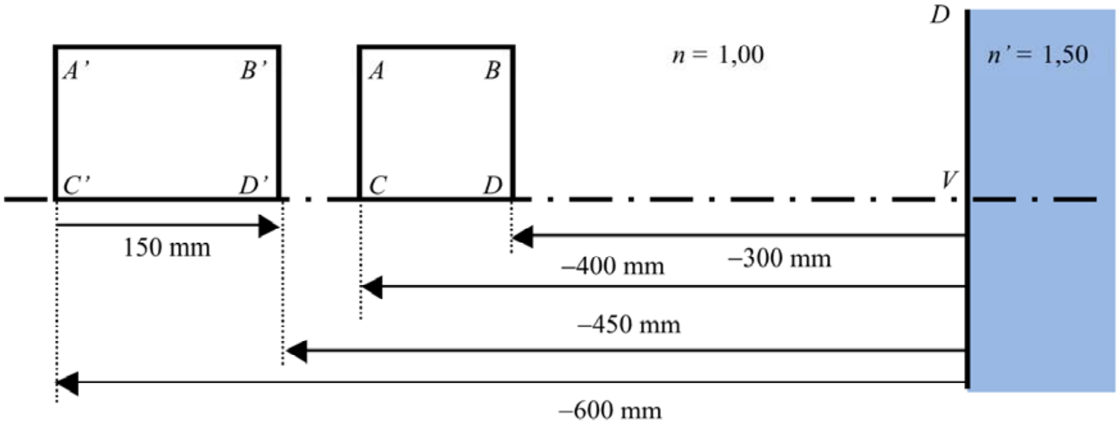
$$C'A' = y' = y = 100 \text{ mm}.$$

Procediendo de la misma manera para: $s = s_D = -300$ mm; $n = 1{,}00$ y $n' = 1{,}50$ se obtiene:

$$s'_{D'} = \frac{1{,}50}{1{,}00}(-300) = -450 \text{ mm}.$$

$$D'B' = y' = y = 100 \text{ mm}.$$

b) La posición de los puntos *A'B'C'D'* es la que se muestra en la figura:

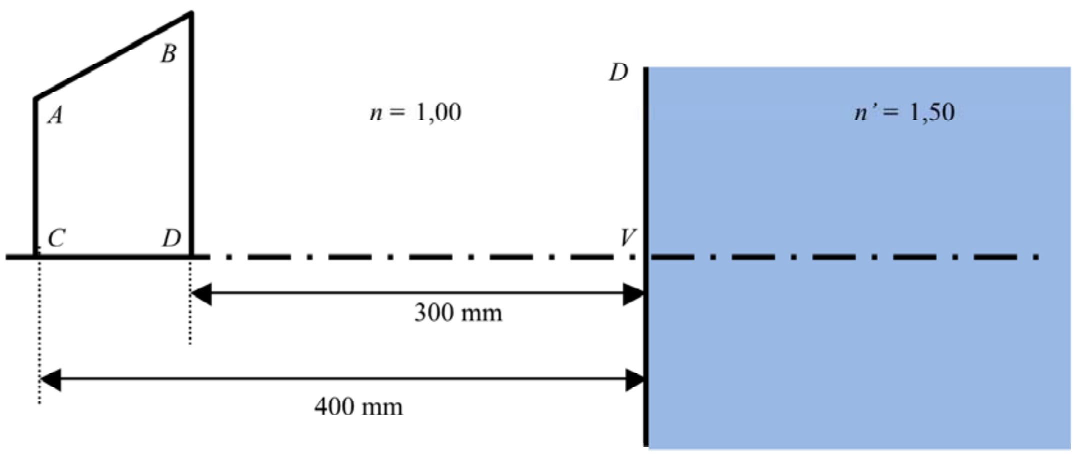


Vemos que la imagen de los puntos *A'B'C'D'* no es proporcional a los puntos *ABCD*.

La distancia *C'D'* es mayor que la distancia *CD* según el aumento axial:

$$\alpha = \frac{C'D'}{CD} = \frac{n'}{n}; \qquad C'D' = \frac{n'}{n}CD = \frac{1{,}50}{1{,}00}100 = 150 \text{ mm}.$$

Determinemos que pasaria en el caso del objeto de la figura siguiente:



Consideremos en caso general de un segmento *AB* de ecuación $y = as + b$.

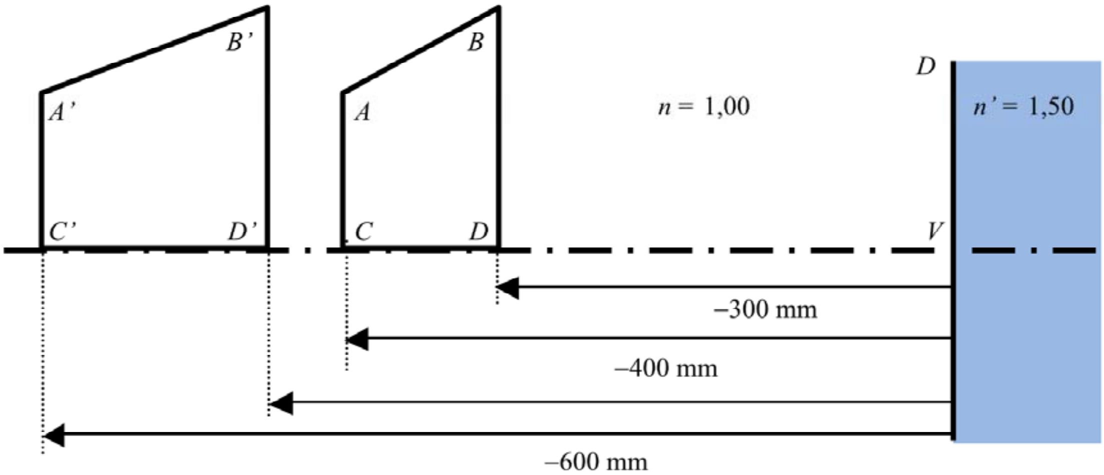
Despejando s de (1) se obtiene:

$$s = \frac{n}{n'}s' \quad (3)$$

La imagen formada por el dioptrio plano vendrá de sustituir en la ecuación de la recta los valores de s e y por los de las ecuaciones (3) y (2).

$y' = a\dfrac{n}{n'}s' + b$. Lo que significa que la imagen de un segmento recto es otro segmento recto de distinta pendiente.

En nuestro caso el segmento AB la recta imagen será la que se muestra en la figura:

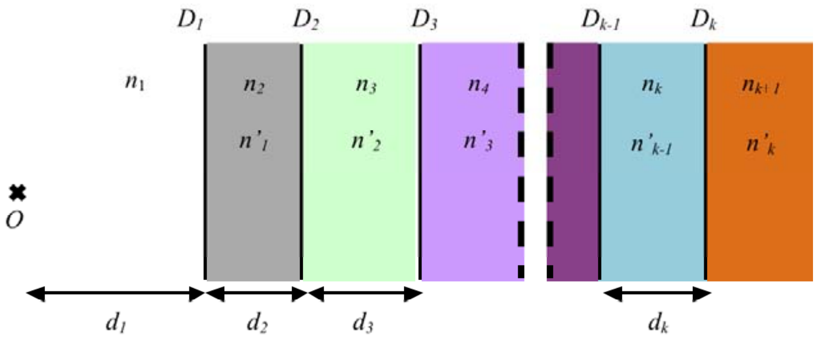


La imagen formada es anamórfica respecto del objeto. La altura se mantiene constante mientras que, en este dioptrio, la amplitud axial ha aumentado.

En el caso general de que el objeto tenga una forma dada por $y = f(s)$ la forma de la imagen viene dada por:

$y' = f\left(\dfrac{n}{n'}s'\right) = h(s')$, lo que significa que, en gneral, la forma del objeto y de la imagen no coinciden.

7. Sea el sistema formado por la asociación de k dioptrios planos según se muestra en la figura. Determina:
a) La posición de la imagen formada por D_1.
b) La posición de la imagen formada por la acción de D_1 y D_2.
c) La posición de la imagen formada por la acción de D_1, D_2 y D_3.
d) La posición de la imagen formada por la acción de k dioptrios.



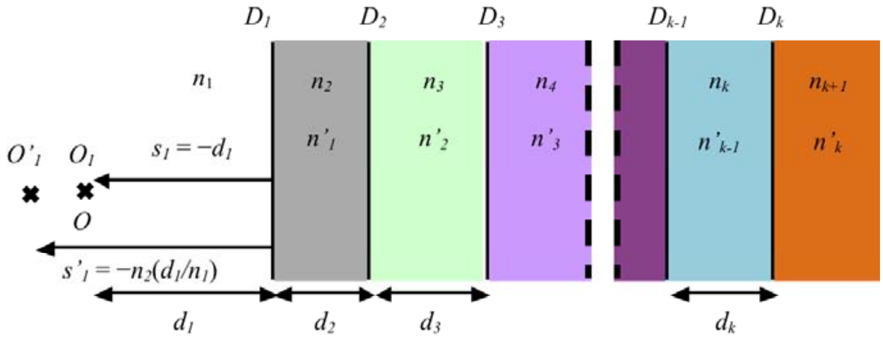
SOLUCIÓN:

a) Imagen formada por la acción del dioptrio D_1:

$s_1 = -d_1$; $\quad \overline{s_1} = \dfrac{s_1}{n_1} = -\dfrac{d_1}{n_1} = -\overline{d_1}$;

$\overline{s'_1} = \dfrac{s'_1}{n'_1} = \dfrac{s'_1}{n_2}$;

$\overline{s'_1} = \overline{s_1}$; $\quad \dfrac{s'_1}{n_2} = -\dfrac{d_1}{n_1}$; $\quad s'_1 = -n_2\dfrac{d_1}{n_1} = -n_2\overline{d_1}$.

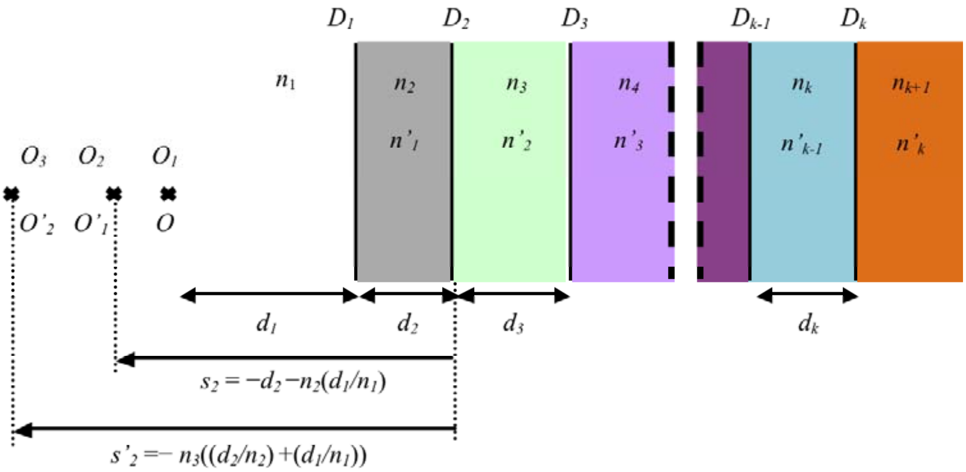


b) Imagen formada por la acción de los dioptrios D_1 y D_2:

$$s_2 = -d_2 + s'_1 = -d_2 - n_2\frac{d_1}{n_1}; \qquad \overline{s_2} = \frac{s_2}{n_2} = \frac{-d_2 - n_2\dfrac{d_1}{n_1}}{n_2} = -\left(\frac{d_2}{n_2} + \frac{d_1}{n_1}\right) = -\left(\overline{d_2} + \overline{d_1}\right)$$

$\overline{s'_2} = \dfrac{s'_2}{n'_2} = \dfrac{s'_2}{n_3}$;

$$\overline{s'}_2 = \overline{s}_2\,; \qquad \frac{s'_2}{n_3} = -\left(\frac{d_2}{n_2} + \frac{d_1}{n_1}\right)\ ; \quad s'_2 = -n_3\left(\frac{d_2}{n_2} + \frac{d_1}{n_1}\right) = -\,n_3\left(\overline{d_2} + \overline{d_1}\right).$$



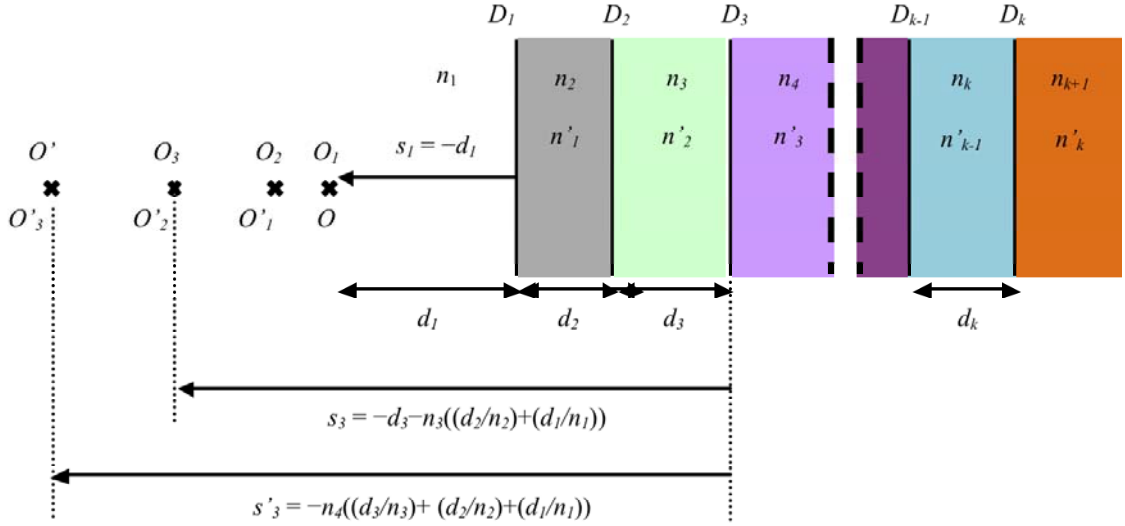
c) Imagen formada por la acción de los dioptrios D_1, D_2 y D_3:

$$s_3 = -d_3 + s'_2 = -d_3 - n_3\left(\frac{d_2}{n_2} + \frac{d_1}{n_1}\right);$$

$$\overline{s}_3 = \frac{s_3}{n_3} = \frac{-d_3 - n_3\left(\dfrac{d_2}{n_2} + \dfrac{d_1}{n_1}\right)}{n_3} = -\left(\frac{d_3}{n_3} + \frac{d_2}{n_2} + \frac{d_1}{n_1}\right) = -\left(\overline{d_1} + \overline{d_2} + \overline{d_3}\right);$$

$$\overline{s'}_3 = \frac{s'_3}{n'_3} = \frac{s'_3}{n_4}\,;$$

$$\overline{s}_3 = \overline{s'}_3\,; \qquad \frac{s'_3}{n_4} = -\left(\frac{d_3}{n_3} + \frac{d_2}{n_2} + \frac{d_1}{n_1}\right); \quad s'_3 = -n_4\left(\frac{d_3}{n_3} + \frac{d_2}{n_2} + \frac{d_1}{n_1}\right) = -\,n_4\left(\overline{d_1} + \overline{d_2} + \overline{d_3}\right).$$



d) Imagen formada por la acción de k dioptrios:

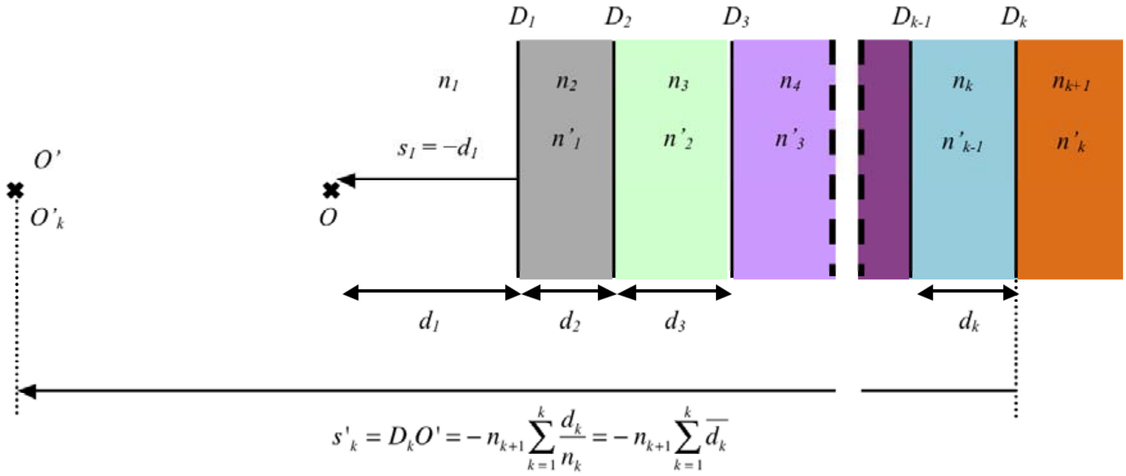
Generalizando los resultados obtenido en los apartados anteriores se deduce que:

EN UNA ASOCIACIÓN DE DIOPTRIOS PLANOS, LA DISTANCIA REDUCIDA IMAGEN ES LA SUMA DE DISTANCIAS REDUCIDAS CAMBIADAS DE SIGNO.

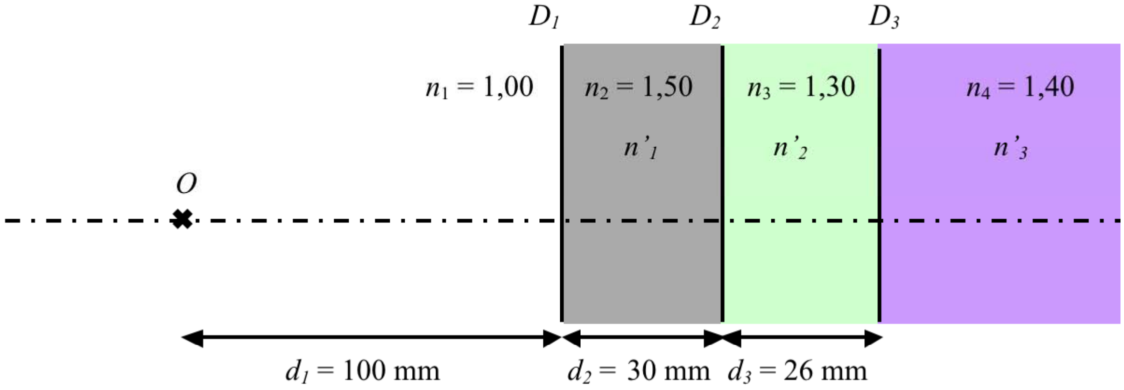
$$\overline{D_k O'} = \overline{s'_k} = -\sum_{k=1}^{k} \frac{d_k}{n_k} = -\sum_{k=1}^{k} \overline{d_k} \, .$$

La posición de la imagen será:

$$D_k O' = s'_k - n_{k+1} \sum_{k=1}^{k} \frac{d_k}{n_k} = -n_{k+1} \sum_{k=1}^{k} \overline{d_k} \, .$$



8. Sea la asociación de dioptrios planos de la figura. Determina la posición de la imagen que forman del objeto *O*.

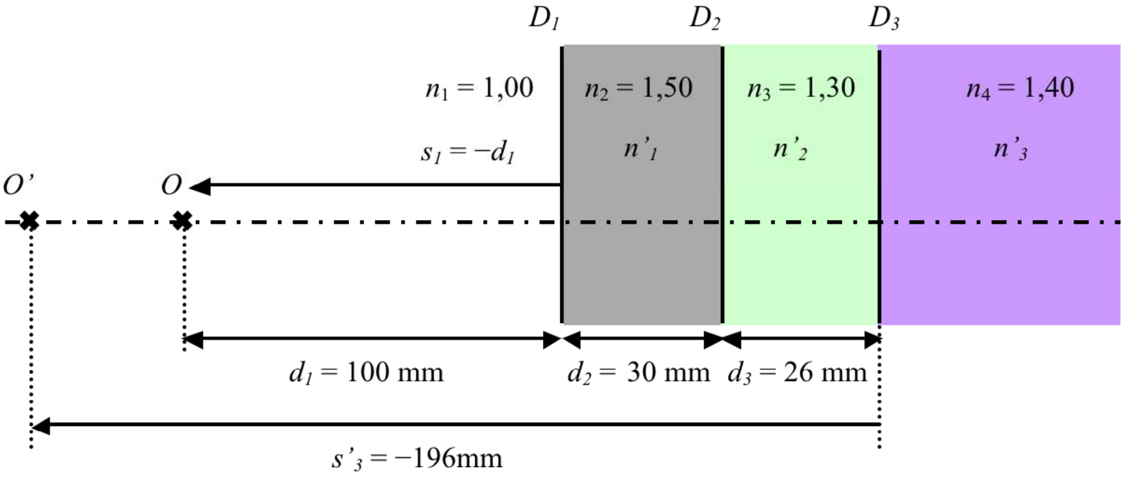


SOLUCIÓN:

$$\overline{s'_3} = -\left(\overline{d_1} + \overline{d_2} + \overline{d_3}\right) = -\left(\frac{d_3}{n_3} + \frac{d_2}{n_2} + \frac{d_1}{n_1}\right) \ ; \quad \overline{s'_3} = -\left(\frac{26}{1,30} + \frac{30}{1,5} + \frac{100}{1}\right) = -140 \text{ mm} .$$

$$\overline{s'_3} = \frac{s'_3}{n'_3} = \frac{s'_3}{n_4} \ ; \qquad s'_3 = n_4 \overline{s'_3} = 1,40.(-140\ ) = -196 \text{ mm} .$$

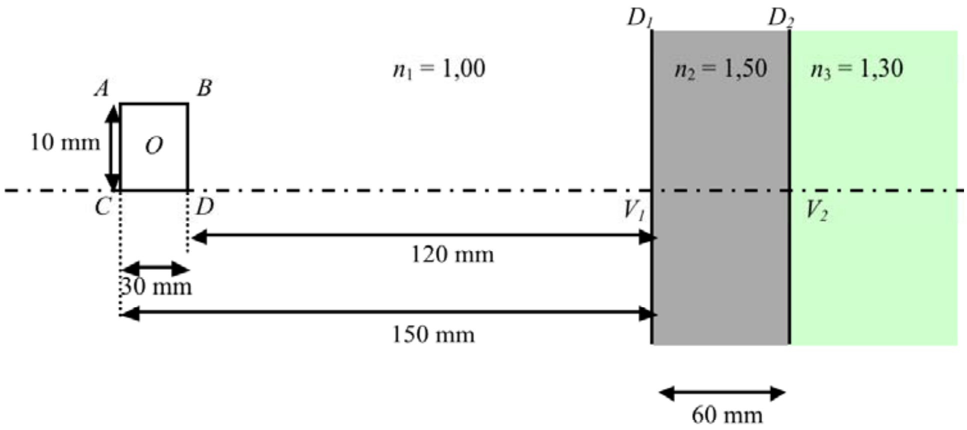
$$D_3O' = s'_3 = -196 \text{ mm}$$



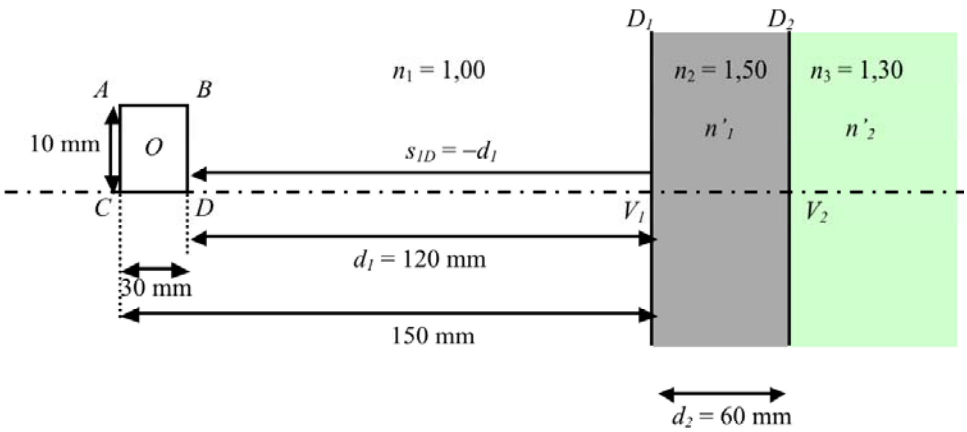
9. Sea un objeto plano de forma rectangular *ABCD* situado delante de la asociación de dos dioptrios planos según se muestra en la figura. Determina:

a) La posición de la imagen.

b) El tamaño de la imagen.



SOLUCIÓN:



a) Imagen del punto *D*.

$$\overline{s'_{1D}} = -\left(\frac{d_2}{n_2} + \frac{d_1}{n_1}\right); \qquad \overline{s'_{1D}} = -\left(\frac{60}{1,50} + \frac{120}{1,00}\right) = -160 \text{ mm.}$$

$$\overline{s'_{1D}} = \frac{s'_{1D}}{n'_2} = \frac{s'_{1D}}{n_3}; \qquad s'_{1D} = n_3 \overline{s'_{1D}} = 1,30(-160\ ) = -208 \text{ mm.}$$

$D_2D' = -208$ mm.

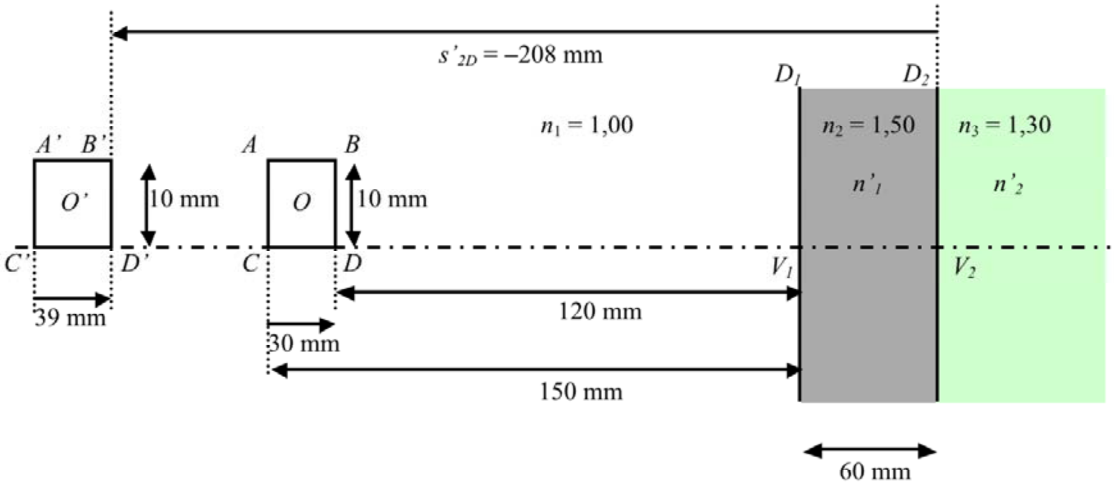
b) Aumento axial del sistema:

$$\alpha_1 = \frac{n'_1}{n_1} = \frac{n_2}{n_1}; \qquad \alpha_2 = \frac{n'_2}{n_2} = \frac{n_3}{n_2}; \qquad \alpha = \alpha_1\,\alpha_2 = \frac{n_2}{n_1}\frac{n_3}{n_2} = \frac{n_3}{n_1} = \frac{1{,}30}{1{,}00} = 1{,}30.$$

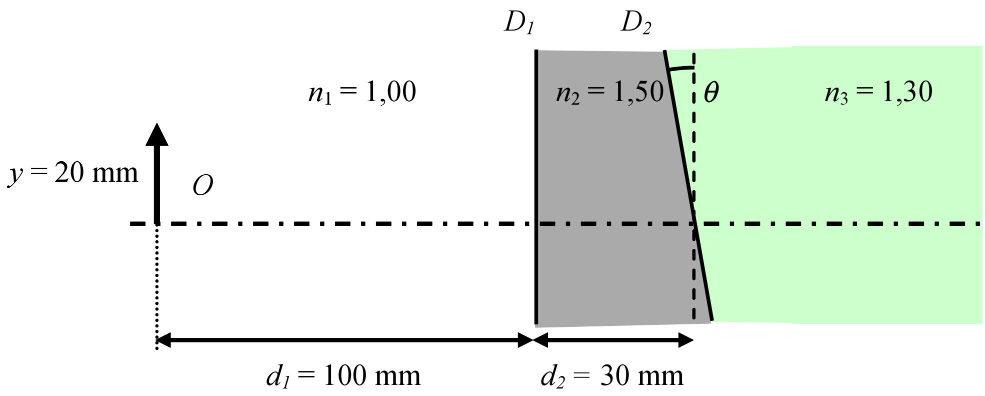
$$\alpha = \frac{\Delta z'}{\Delta z} = \frac{C'D'}{CD}; \qquad C'D' = \alpha\, CD; \qquad C'D' = 1{,}30.30 = 39 \text{ mm}.$$

Recordemos que en la asociación de dioptrios planos el aumento lateral es $m = +1$ lo que significa que $A'C' = AC$ y $D'B' = DB$.

La figura siguiente muestra la posición y el tamaño de la imagen.



10. Sea la asociación de dos dioptrios planos de la figura en donde el último de ellos está rotado una ángulo $\theta = 10º$ en dirección contraria a las agujas del reloj según se muestra en la figura. Determina:
a) La posición de la imagen.
b) El tamaño de la imagen.



SOLUCIÓN:

a) Imagen formada por D_1:

$$\overline{s_1} = \overline{s'_1}; \quad \frac{s_1}{n_1} = \frac{s_1'}{n'_1} = \frac{s'_1}{n_2}; \qquad s_1 = -100 \text{ mm}; \qquad \frac{-100}{1,00} = \frac{s'_1}{1,50};$$

$s'_1 = -150$ mm.

El aumento lateral es $m_1 = +1$.

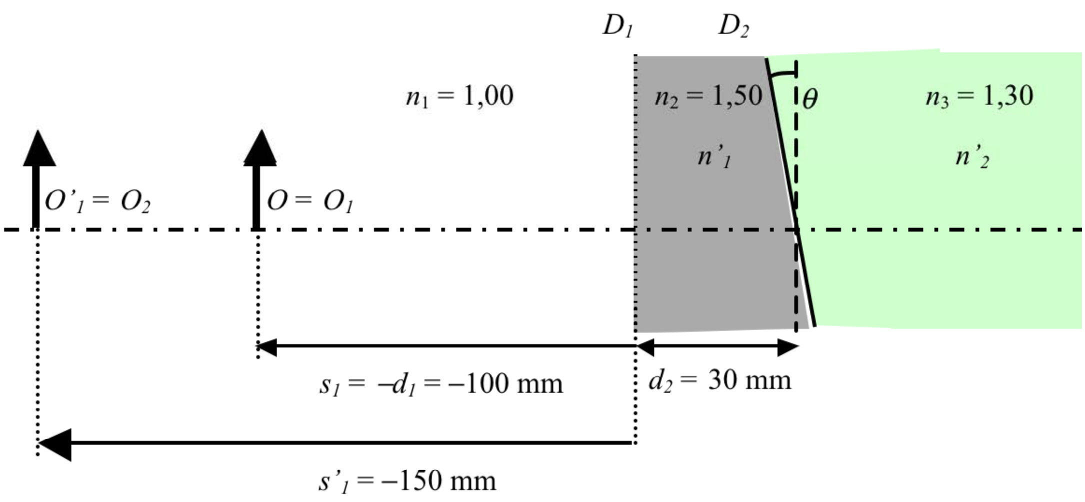
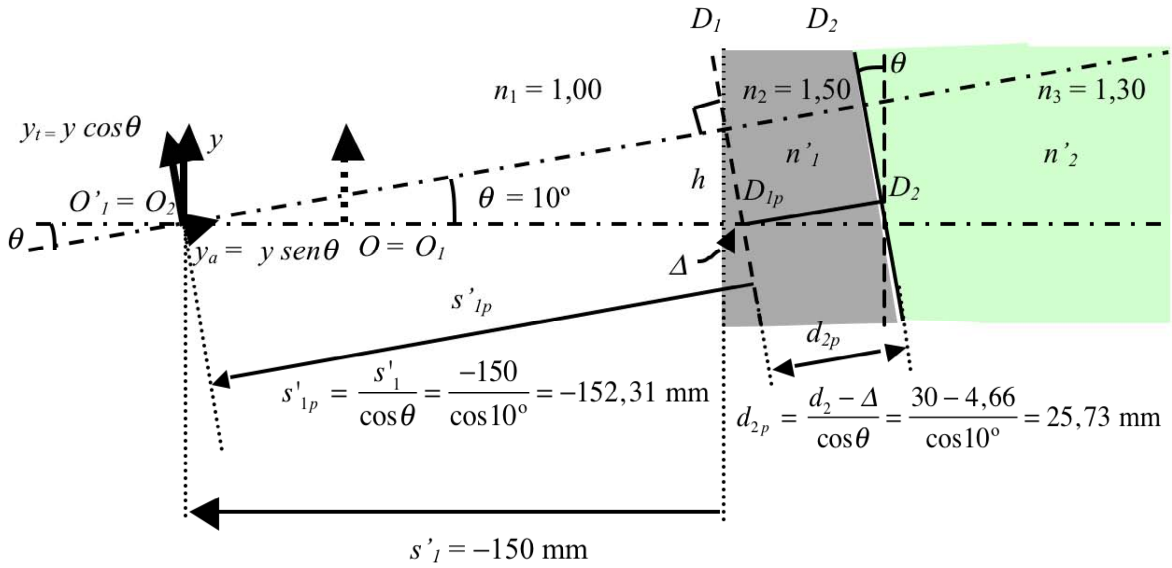


Imagen formada por D_2:

El eje óptico correspondiente a este dioptrio deberá ser perpendicular a la superficie plana que determina la superficie D_2. De esta forma el nuevo eje óptico estará rotado θ = 10º respecto del eje original.



La distancia s'_{1p} entre D_1 y O'_1 en la dirección perpendicular a D_2 es:

$$s'_{1p} = \frac{s'_1}{\cos\theta} = \frac{-150}{\cos 10º} = -152,31 \text{ mm}$$

De la figura anterior:

$$h = |s'_1| \tan\theta = 150.\tan 10º = 26,45 \text{ mm.}$$

$$\Delta = h \tan\theta = 26,45.\tan 10º = 4,66 \text{ mm.}$$

La distancia entre D_1 y D_2 en la dirección perpendicular a la superficie D_2 es:

$$D_{1p}D_2 = d_{2p} = \frac{d_2 - \Delta}{\cos\theta} = \frac{30 - 4,66}{\cos 10º} = 25,73 \text{ mm}$$

La posición de la imagen O'_2 formada por D_2 vendrá dada por:

$$\overline{s_{2p}} = \overline{s'_{2p}}; \quad \frac{s_{2p}}{n_2} = \frac{s'_{2p}}{n'_2}; \qquad n'_2 = n_3; \; s_{2p} = s'_{1p} - d_{2p} = -152,31 - 25,73 = -178,04 \text{ mm;}$$

$$\frac{-178,04}{1,50} = \frac{s'_{2p}}{1,30}; \quad s'_{2p} = -154,28 \text{ mm.}$$

b) Descomponemos el objeto O_2 en una componente perpendicular o transversal al eje (y_t) y en otra componente paralela o axial al eje (y_a).

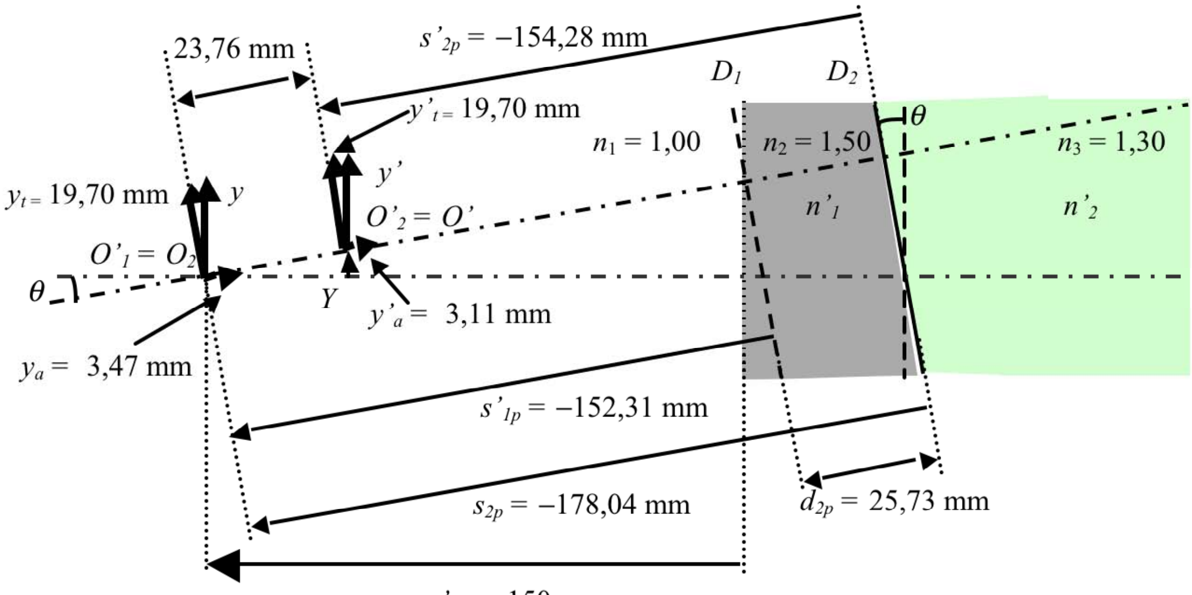
$y_t = y \cos\theta = 20 \cos 10^\circ = 19{,}70$ mm. $\qquad y_a = y \sin\theta = 20 \sin 10^\circ = 3{,}47$ mm.

El aumento lateral es $m_2 = +1$, lo que significa que $y'_t = y_t = 19{,}70$ mm.

En cambio el aumento axial vale: $\alpha_2 = \dfrac{n'_2}{n_2} = \dfrac{n_3}{n_2} = \dfrac{1{,}30}{1{,}50} = 0{,}87$, lo que significa que

$$\alpha_2 = \frac{y'_a}{y_a}; \qquad y'_a = \alpha_2\, y_a; \qquad y'_a = 0{,}87.3{,}47 = 3{,}11 \text{ mm.}$$

La posición y el tamaño de la imagen final se muestra en la figura siguiente:



El tamaño de la imagen en valor absoluto será:

$$y' = \sqrt{(y'_t)^2 + (y'_a)^2} = \sqrt{19{,}70^2 + 3{,}11^2} = 19{,}94 \text{ mm.}$$

El ángulo entre y' e y'_t vale:

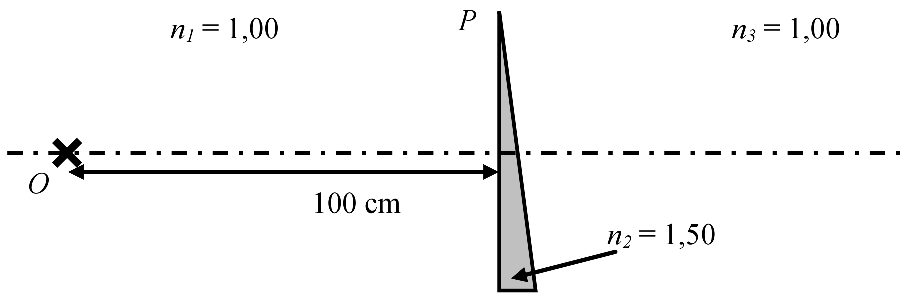
$$\tan\theta' = \frac{y'_a}{y'_t} = \frac{3{,}11}{19{,}70}; \qquad \theta' = 8{,}97^\circ.$$

De este modo el ángulo girado entre y e y' será: $10^\circ - 8{,}97 = 1{,}03^\circ$.

El desplazamiento vertical Y de la imagen será:

$Y = 23{,}76 \text{ sen } 10^\circ = 4{,}13$ mm.

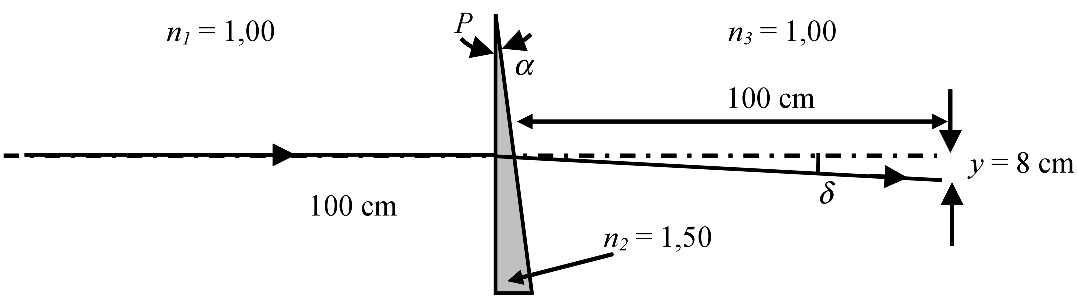
11. Sea un prisma delgado P de índice n = 1,50, potencia $Z = 8^{\Delta}$ sumergido en aire. Un objeto está situado delante del prisma a la distancia de 100 cm según se muestra en la figura. Determina:
a) La posición de la imagen formada por el prisma.
b) El desplazamiento vertical de la imagen.
c) Compara el resultado anterior con el que se obtendría aplicando la fórmula de la desviación en un prisma delgado.



SOLUCIÓN:

a) Por ser $Z = 8^{\Delta}$ la desviación del rayo de luz a 100 cm de distancia es de 8 cm.

$$Z = 100 \tan \delta ; \quad \tan \delta = \delta = \frac{8}{100} \text{ rad} = 4{,}6^{\circ} .$$



$\delta = \left(\dfrac{n}{n'} - 1 \right) \alpha$. Dónde n es el índice del prisma ($n = n_2$ = 1,5) y n' es el índice el medio exterior ($n' = n_1 = n_3$ = 1,00). Simplificando resulta: $\delta = (n-1)\alpha$.

$$\frac{8}{100} = (1{,}5 - 1)\alpha ; \qquad \alpha = \frac{8}{50} \text{ rad} = 9{,}2^{\circ} .$$

Podemos considerar la acción del prisma delgado como la asociación de dos dioptrios planos dónde uno de ellos está rotado un ángulo α.

Imagen formada por el primer dioptrio:

$\overline{s_1} = \overline{s'_1}$; $\quad \dfrac{s_1}{n_1} = \dfrac{s'_1}{n'_1} = \dfrac{s'_1}{n_2}$; $\quad s_1 = -d_1 = -100$ cm; $\quad \dfrac{-100}{1,00} = \dfrac{s'_1}{1,50}$;

$s'_1 = -150$ cm.

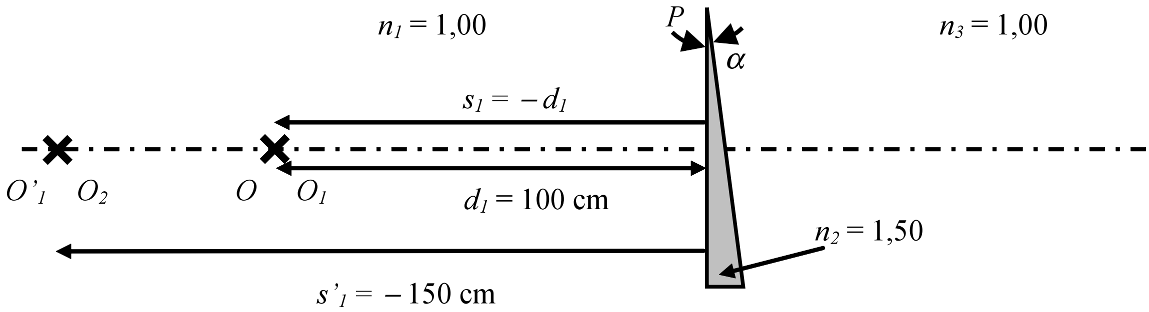
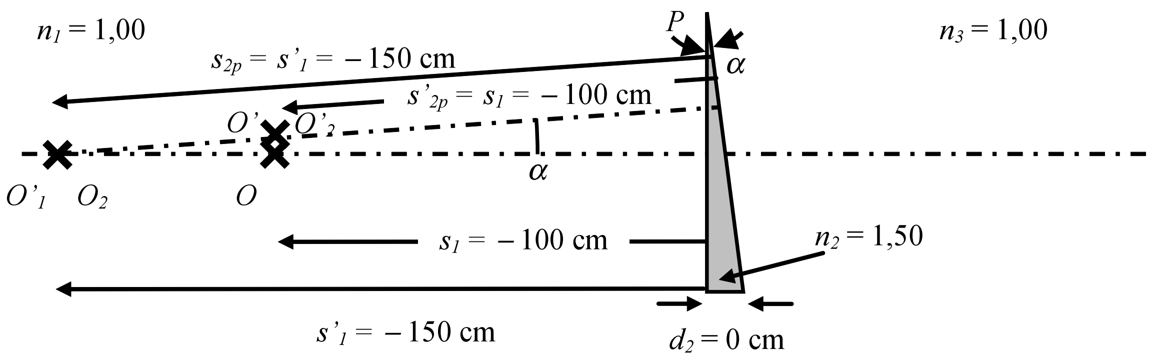


Imagen formada por el segundo dioptrio:

Debe considerarse el eje perpendicular a la superficie del dioptrio.



Por ser el prisma delgado $\quad d_2 = 0$ cm.

Por ser el ángulo α pequeño tomamos la aproximación $\cos\alpha \approx \cos 0^\circ = 1$.

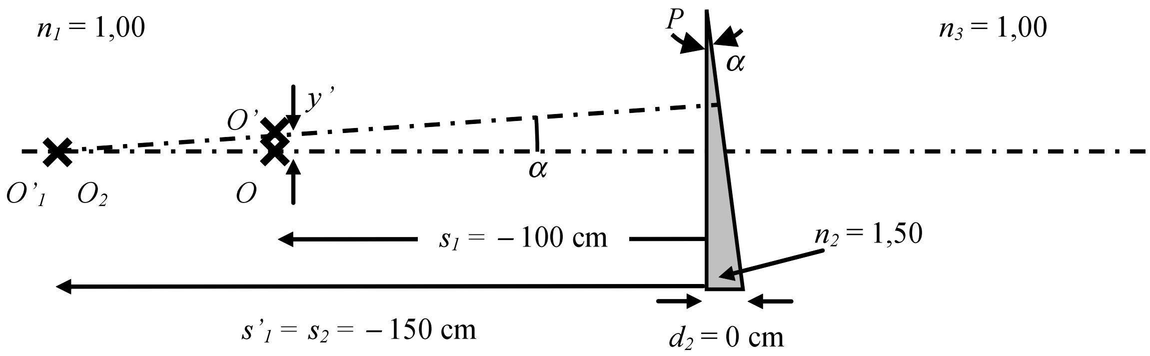
$s_{2p} = \dfrac{s'_1}{\cos\alpha} = \dfrac{s'_1}{\cos 9{,}2^\circ} \approx \dfrac{s'_1}{\cos 0^\circ} = s'_1 = -150$ cm. De este modo la distancia s_{2p} coincide con s'_1.

$\overline{s_{2p}} = \overline{s'_{2p}}$; $\quad \dfrac{s_{2p}}{n_1} = \dfrac{s'_{2p}}{n'_1} = \dfrac{s'_{2p}}{n_2}$; $\quad \dfrac{-150}{1,50} = \dfrac{s'_{2p}}{1,00}$; $\quad s'_{2p} = -100$ cm.

$PO' = -100$ cm.

El resultado anterior muestra que en la aproximación de prisma delgado el plano objeto y el plano imagen coinciden.

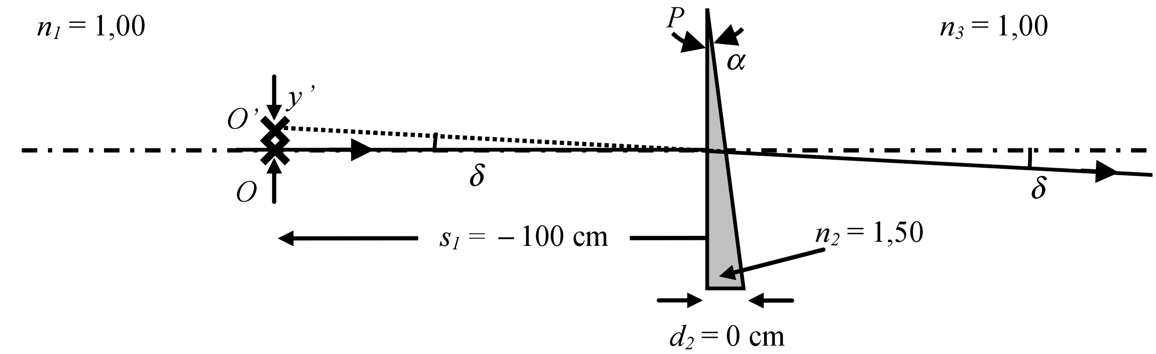
b) Sea *y'* el desplazamiento vertical entre *O* y *O'*.



$y' = OO' = (s_1 - s_2)\tan\alpha = (s_1 - s_2)\,\alpha$.

Sustituyendo: $y' = OO' = \left(-100 - (-150)\right)\dfrac{8}{50} = 50\dfrac{8}{50} = 8$ cm.

c) Consideremos la acción del prisma delgado:



El desplazamiento vertical de la imagen vendrá dado por:

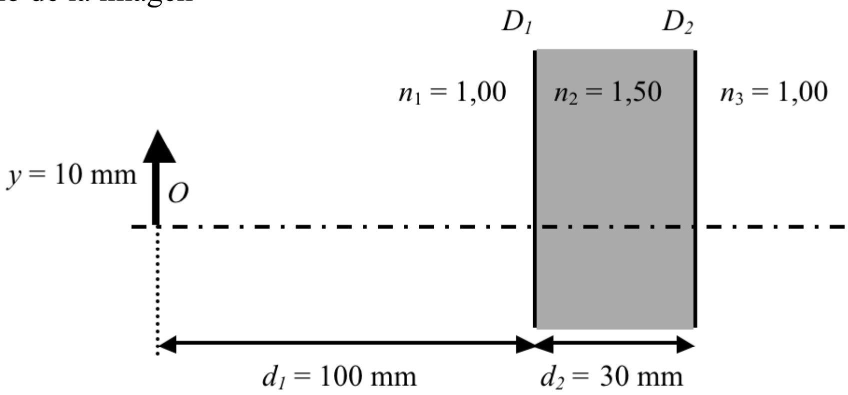
$y' = OO' = -s_1\tan\delta = -s_1\delta$. Teniendo en cuenta que $\delta = (n-1)\alpha$.

$y' = OO' = -s_1(n-1)\alpha = -s_1 n\alpha + s_1\alpha$.

$\dfrac{s_1}{n_1} = \dfrac{s'_1}{n'_1} = \dfrac{s_2}{n_2}$; $\qquad s_2 = n_2 s_1 = n s_1$. Sustituyendo en la expresión anterior se obtiene:

$y' = OO' = -s_2\alpha + s_1\alpha = (s_1 - s_2)\alpha$. Expresión que coincide con la encontrada en el apartado anterior.

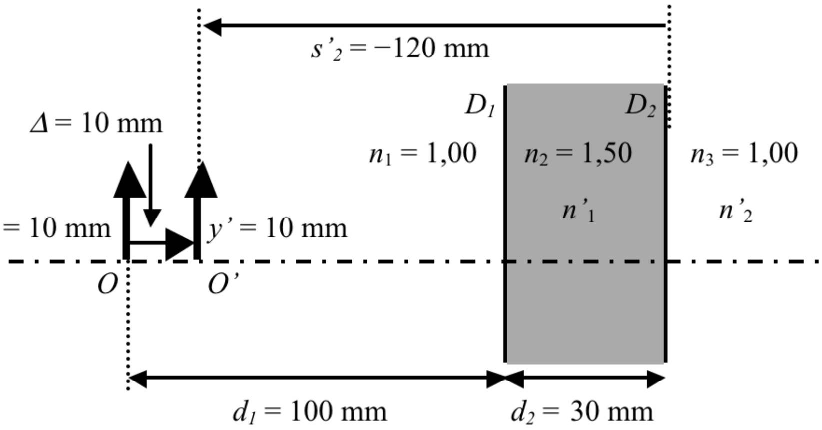
12. Sea la lámina plano-paralela de la figura. Determina
a) La posición de la imagen.
b) El tamaño de la imagen



SOLUCIÓN:

a) $\overline{s'_2} = -\left(\dfrac{d_2}{n_2} + \dfrac{d_1}{n_1}\right)$; $\quad \overline{s'_2} = -\left(\dfrac{30}{1,50} + \dfrac{100}{1,00}\right) = -120$ mm.

$\overline{s'_2} = \dfrac{s'_2}{n'_2} = \dfrac{s'_2}{n_3}$; $\quad s'_2 = n_3\overline{s'_2} = 1,00(-120) = -120$ mm. $\quad D_2O' = -120$ mm.



La posición de la imagen puede resolverse a partir del desplazamiento que produce una lámina plano-paralela de grosor d e índice n sumergida en un medio de índice n'. El desplazamiento de la imagen viene dado por:

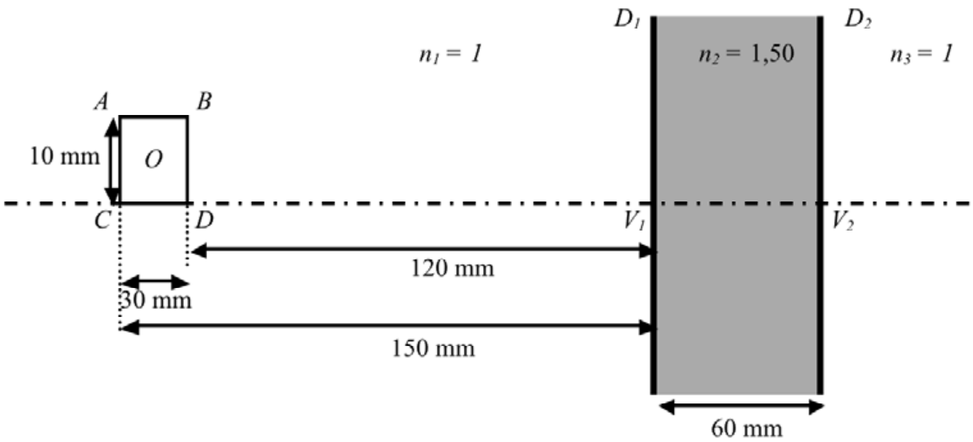
$\Delta = OO' = \dfrac{n - n'}{n} d$. En nuestro caso $n = n_2 = 1,50$, $n' = n_1 = n_3 = 1,00$ y $d = 30$ mm.

$$\Delta = OO' = \frac{1,50 - 1,00}{1,50} 30 = 10 \text{ mm}.$$

b) $m = m_1 m_2 = (+1)(+1) = +1$.

$m = \dfrac{y'}{y} = 1$; $\quad y' = y = 10$ mm.

13. Sea el objeto plano de forma rectangular *ABCD* situado delante de una lámina plano-paralela según se muestra en la figura. Determina:
a) La posición de la imagen.
b) El tamaño de la imagen.



SOLUCIÓN:

a) Imagen del punto *D*. $s_1 = -d_1 = -120$ mm.

$$\overline{s'_2} = -\left(\frac{d_2}{n_2} + \frac{d_1}{n_1}\right); \qquad \overline{s'_2} = -\left(\frac{60}{1{,}50} + \frac{120}{1{,}00}\right) = -160 \text{ mm.}$$

$$\overline{s'_2} = \frac{s'_2}{n'_2} = \frac{s'_2}{n_3}; \qquad s'_2 = n_3 \overline{s'_2} = 1{,}00.(-160\ ) = -160 \text{ mm.}$$

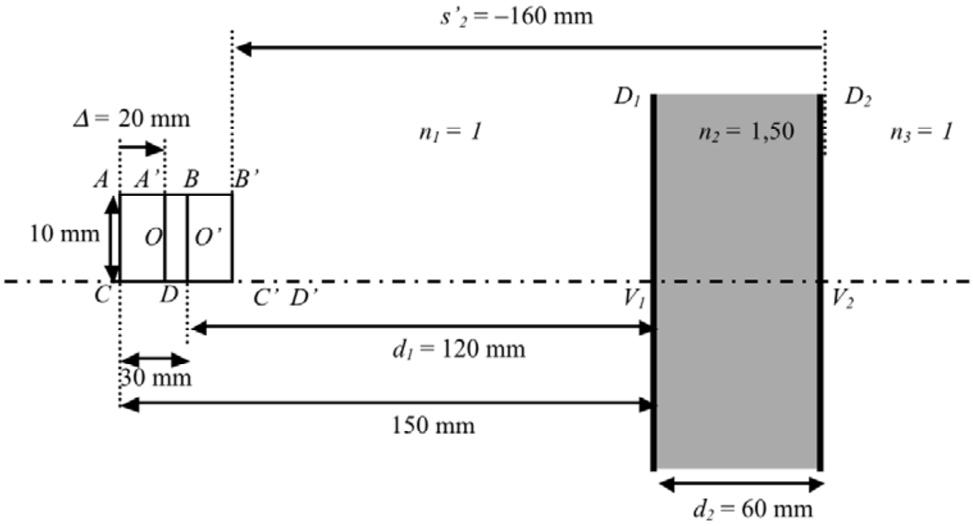
$D_2D' = -160$ mm.

b) Aumento axial del sistema.

$$\alpha_1 = \frac{n'_1}{n_1} = \frac{n_2}{n_1}; \qquad \alpha_2 = \frac{n'_2}{n_2} = \frac{n_3}{n_2}; \qquad \alpha = \alpha_1\,\alpha_2 = \frac{n_2}{n_1}\frac{n_3}{n_2} = \frac{n_3}{n_1}; \qquad \alpha = +1.$$

Recordemos que en la asociación de dioptrios planos el aumento lateral es $m = +1$.

Así pues el tamaño de la imagen, axialmente y lateralmente, será igual que el del objeto. Su posición se muestra en la imagen siguiente.

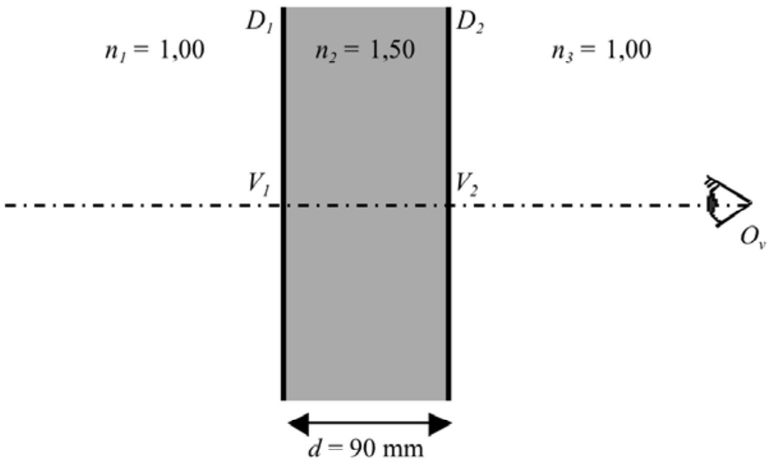


Otra manera más sencilla de obtener el resultado anterior es considerar el desplazamiento que produce la lámina plano-paralela.

$$\Delta = OO' = \frac{n-1}{n} d = \frac{1{,}50 - 1{,}00}{1{,}50} 60 = 20 \text{ mm}.$$

En cuanto a los aumentos debe tenerse en cuenta que en una lámina plano-paralela sumergida en índices de extremos iguales el aumento lateral vale $m = +1$ y el aumento axial vale $\alpha = +1$.

14. Sea una lámina plano-paralela de índice n = 1,50 y 90 mm de grosor sumergida en aire. Determina su grosor aparente.

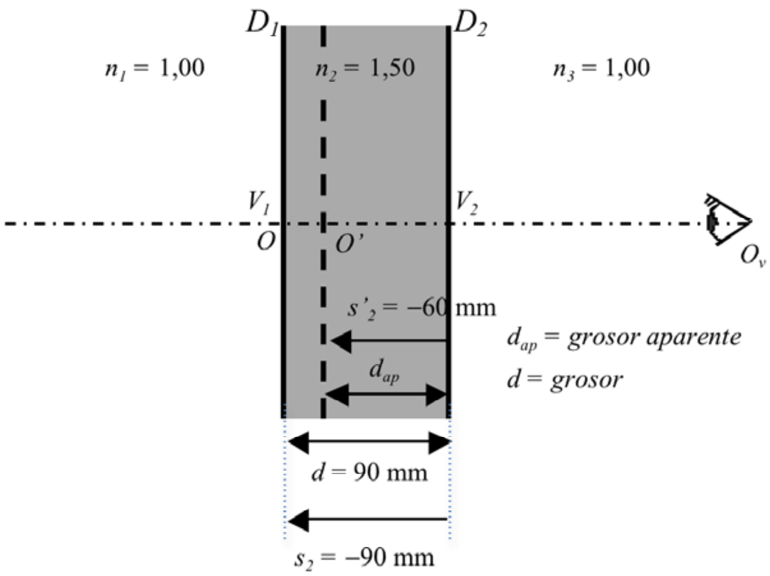


SOLUCIÓN:

El grosor aparente, d_{ap}, es la distancia, expresada en valor absoluto, entre la superficie del dioptrio D_2 y la imagen del dioptrio plano D_1 a través del dioptrio D_2.

$$d_{ap} = | V_2O' | .$$

El grosor aparente será la distancia percibida por el observador visual O_v cuando mira la superficie plana del dioptrio D_1 a través del dioptrio D_2.



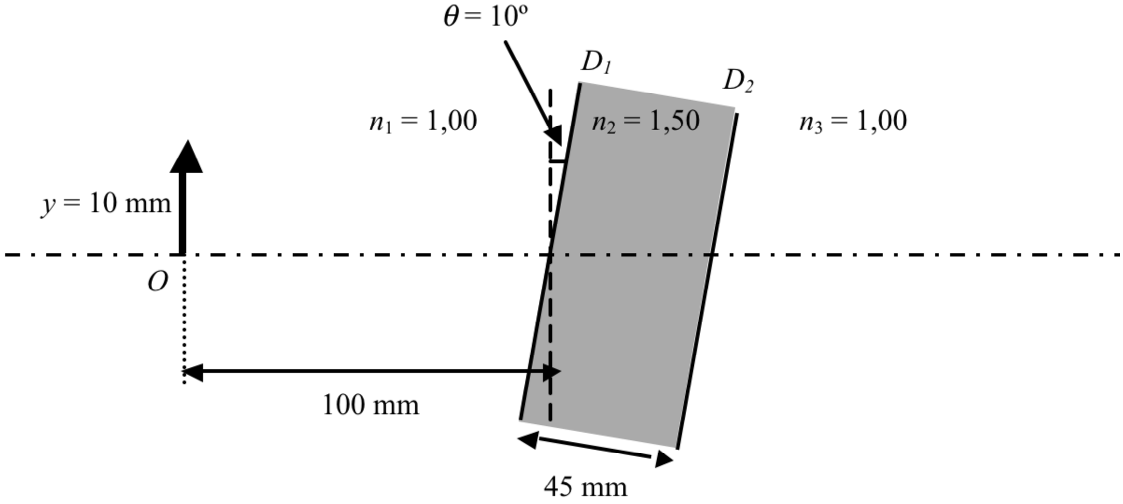
$\bar{s}_2 = \bar{s}'_2$; $\qquad \dfrac{s_2}{n_2} = \dfrac{s'_2}{n'_2} = \dfrac{s'_2}{n_3}$; $\qquad s_2 = -d = -90$ mm; $\qquad n_2 = 1{,}50$; $n_3 = 1{,}00$.

$\dfrac{-90}{1{,}50} = \dfrac{s'_2}{1{,}00}$; $\qquad s'_2 = V_2O' = -60$ mm; $\qquad d_{ap} = |s'_2| = |V_2O'| = 60$ mm.

15. Un objeto O de tamaño y está situado delante de una lámina plano-paralela de 45 mm de grosor la cual está girada un ángulo de 10º en dirección de las agujas del reloj según se muestra en la figura. Determina:

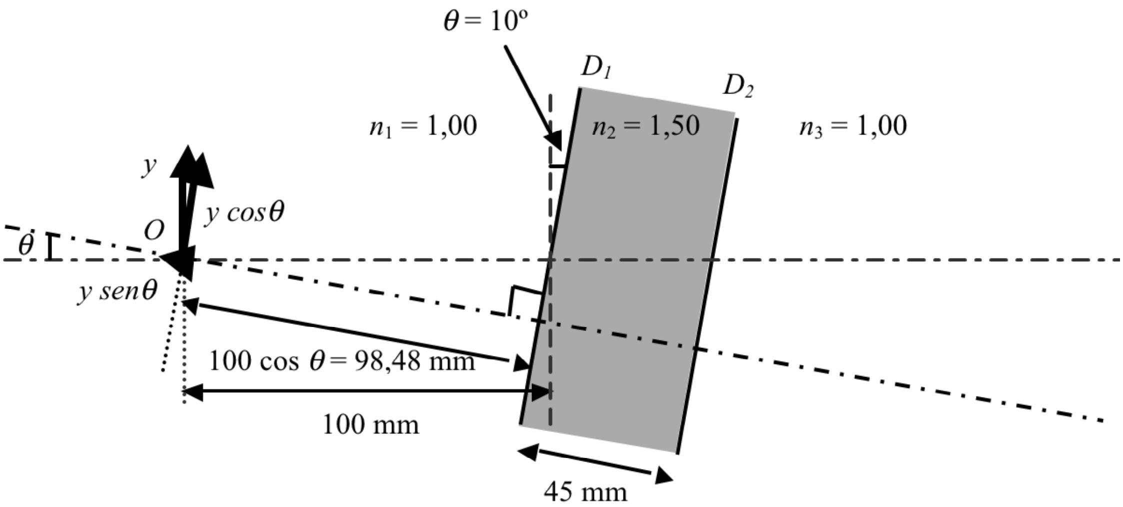
a) La posición de la imagen.

b) El tamaño de la imagen.



SOLUCIÓN:

Consideremos el objeto O situado en el eje óptico del sistema, esto es, perpendicular a las caras de la lámina.



En una lámina plano-paralela la imagen se encuentra desplazada del objeto una distancia:

$\Delta = OO' = \dfrac{n - n'}{n} d$. En nuestro caso $n = n_2 = 1{,}50$, $n' = n_1 = n_3 = 1{,}00$ y $d = 45$ mm.

$$\Delta = OO' = \frac{1{,}50 - 1{,}00}{1{,}50}\, 45 = 15 \text{ mm.}$$

De este modo:

$D_1O' = 98{,}48 - 15 = 83{,}48$ mm.

$D_2O' = 83{,}48 + 45 = 128{,}48$ mm.

Teniendo en cuenta que el aumento axial y el aumento lateral en una lámina plano-paralela es igual a +1 el tamaño de la imagen será igual que el del objeto. La posición de la imagen será la que se muestra en la figura.