PROBLEMAS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA E INSTRUMENTAL

Unidad 9:
Sistemas Ópticos. Asociación. Lentes gruesas

Jaume Escofet

UNIDAD 9. PROBLEMAS

1. Determina la posición de los elementos cardinales en los sistemas siguientes:
a) Dioptrio esférico cóncavo con $|R| = 300$ mm, $n = 1,00$ y $n' = 1,50$.
b) Dioptrio esférico convexo con $|R| = 300$ mm, $n = 1,00$ y $n' = 1,50$.
c) Espejo esférico cóncavo con $|R| = 300$ mm.
d) Espejo esférico convexo con $|R| = 300$ mm.
Lente delgada de las siguientes características:

	R_1	R_2	n	n'	n_L
e)	500 mm	–500 mm	1,00	1,00	1,50
f)	–500 mm	500 mm	1,00	1,00	1,50
g)	∞	–500 mm	1,20	1,70	1,50

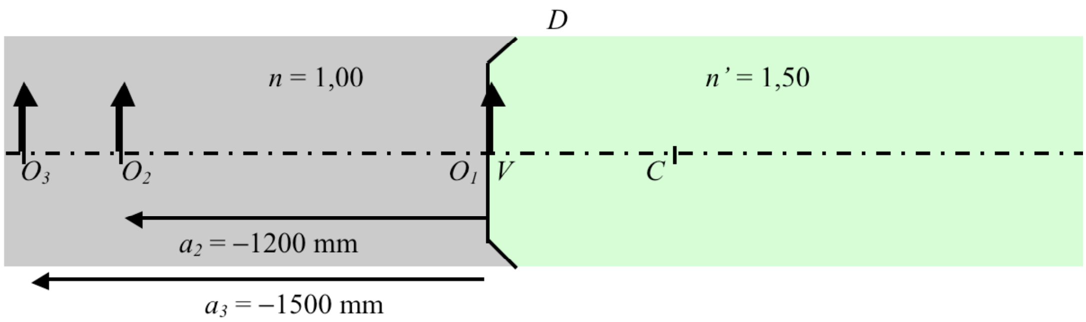
R/

	VH	*VH'*	*VF*	*VF'*	*VN*	*VN'*	*Vh*	*Vh'*	*Vn*	*Vn'*
a)	0	0	600	–900	–300	–300	1200	–1800	1500	–1500
b)	0	0	–600	900	300	300	–1200	1800	–1500	1500
c)	0	0	–150	–150	–300	–300	–300	–300	0	0
d)	0	0	150	150	300	300	300	300	0	0
e)	0	0	–500	500	0	0	–1000	1000	–1000	1000
f)	0	0	500	–500	0	0	1000	–1000	1000	–1000
g)	0	0	3000	–4250	–1250	–1250	6000	–8500	7250	–7250

Todas las distancias están expresadas en mm.

---

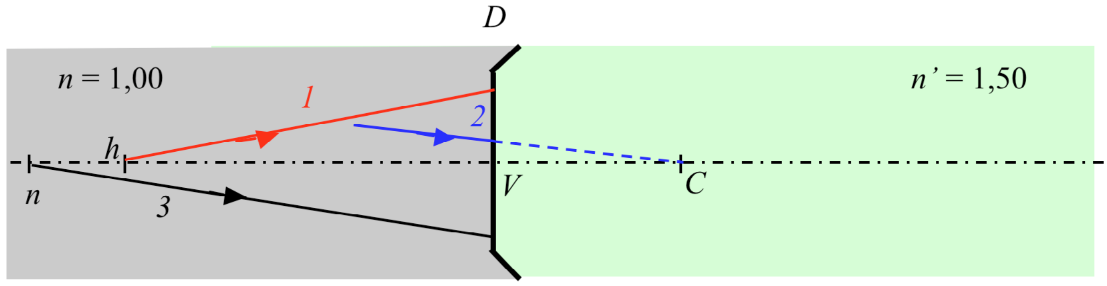
2. Sea el dioptrio esférico convexo de la figura de radio $R = 300$ mm. Sea un objeto de 10 mm de altura. Determina la posición y el tamaño de la imagen formada por el dioptrio cuando el objeto está situado en las posiciones siguientes:
a) $VO_1 = 0$ mm.
b) $VO_2 = –1200$ mm.
c) $VO_3 = –1500$ mm.



R/ a) $VO'_1 = 0$ mm, $y'_1 = 10$ mm; b) $VO'_2 = 1800$ mm, $y'_2 = –10$ mm; c) $VO'_3 = 1500$ mm, $y'_3 = –20/3$ mm.

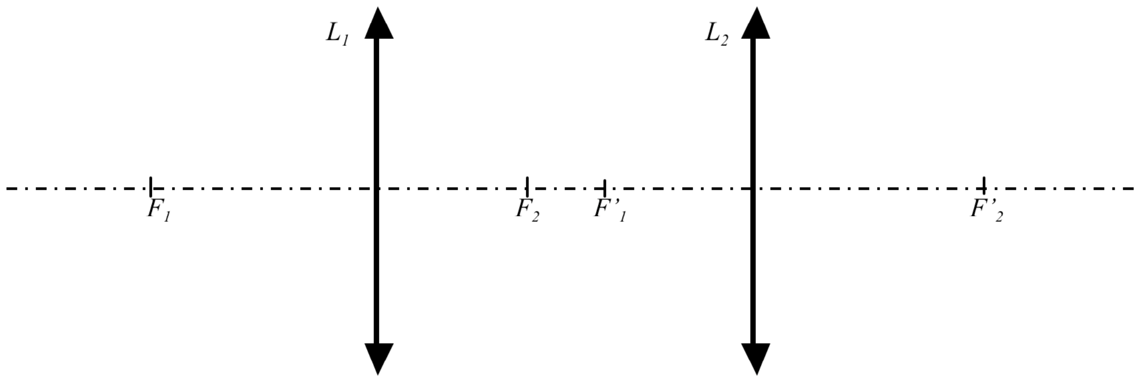
---

3. Sea el dioptrio esférico convexo de la figura de radio $R = 300$ mm. Determina la trayectoria de los rayos 1, 2 y 3.



---

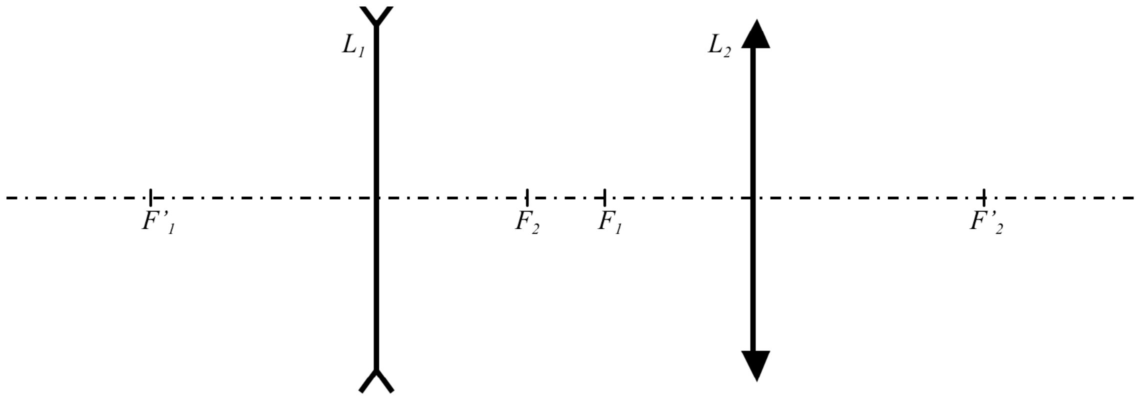
4. Sea el sistema de la figura sumergido en aire, donde: $f'_1 = 300$ mm, $f'_2 = 300$ mm y $F'_1F_2 = -100$ mm. Determina:
a) La posición de los planos principales H y H' dels sistema.
b) La posición de los puntos focales F y F' del sistema.
c) La posición de los restantes elementos cardinales del sistema.
i) Solución numérica.
ii) Solución gráfica.



R/ i) a) $L_1H = 1500$ mm, $L_2H' = -1500$ mm; b) $L_1F = 600$ mm, $L_2F' = -600$ mm; c) $L_1N = 1500$ mm, $L_2N' = -1500$ mm; $L_1h = -300$ mm, $L_2h' = 300$ mm; $L_1n = -300$ mm, $L_2n' = 300$ mm.

---

5. Sea el sistema de la figura, sumergido en aire, donde: $f'_1 = -300$ mm, $f'_2 = 300$ mm y $F_1F_2 = -100$ mm. Determina:
a) La posición de los planos principales H y H'.
b) La posición de F y F'.
c) La posición de los restantes elementos cardinales.
i) Solución numérica.
ii) Solución gráfica.



R/ ii) a) $L_1H = 300$ mm, $L_2H' = 300$ mm; b) $L_1F = -180$ mm, $L_2F' = 180$ mm; c) $L_1N = 300$ mm, $L_2N' = 300$ mm; $L_1h = -60$ mm, $L_2h' = 660$ mm; $L_1n = -60$ mm, $L_2n' = 660$ mm.

---

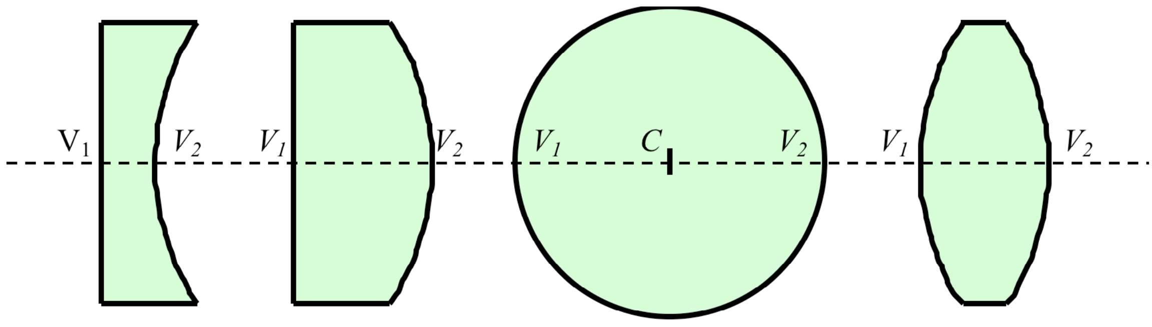
6. Considera dos lentes delgadas, L_1 y L_2, sumergidas en aire, cuyas potencias son, respectivamente, $P'_1 = +5{,}00$ D y $P'_2 = -20{,}0$ D. Determina:
a) La distancia L_1L_2 para que el sistema sea afocal.
b) La potencia del sistema en este caso.

R/ a) $L_1L_2 = 150$ mm; b) $P' = 0$ D.

---

7. Determina la posición de los elementos cardinales en les lentes gruesas siguientes sumergidas en aire.

a)	$V_1V_2 = 30$ mm;	$R = 50$ mm;	$n_L = 1{,}50$.
b)	$V_1V_2 = 80$ mm;	$R = -50$ mm;	$n_L = 1{,}50$.
c)	$V_1V_2 = 200$ mm;	$R_1 = -R_2 = 100$ mm;	$n_L = 1{,}50$.
d)	$V_1V_2 = 72$ mm;	$R_1 = -R_2 = 300$ mm;	$n_L = 1{,}50$.

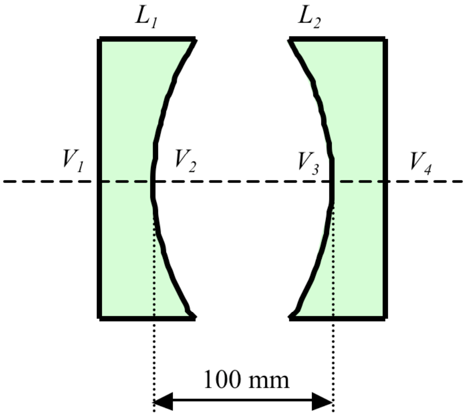


(a) (b) (c) (d)

R/ (a) V_1H=20 mm, V_2H'=0 mm, V_1F = 120 mm, V_2F' =–100 mm; (b) V_1H=53,3 mm, V_2H'=0 mm, V_1F = –46,7 mm, V_2F' =100 mm; (c) V_1H=100 mm, V_2H'= –100 mm, V_1F = –50 mm, V_2F' =50 mm; (d) V_1H=25 mm, V_2H'= –25 mm, V_1F = –312,5 mm, V_2F' =312,5 mm.

---

8. Se asocian dos lentes gruesas plano-cóncavas idénticas, L_1 y L_2, en aire, según se indica en la figura.



Teniendo en cuenta que:

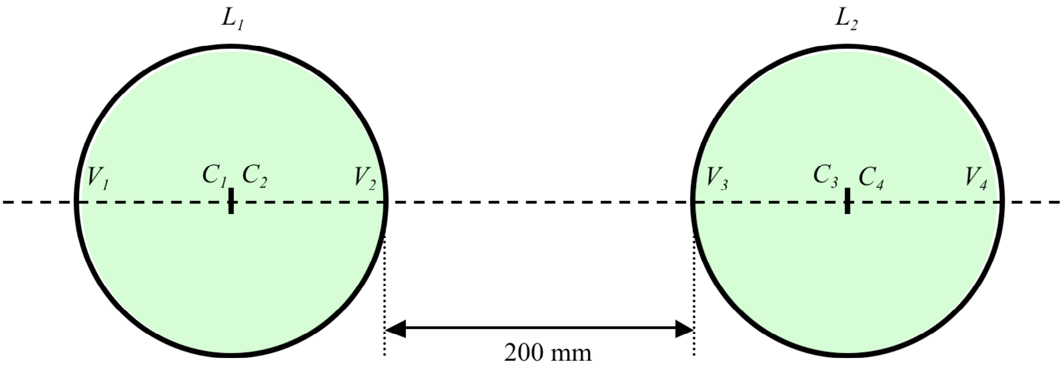
$V_1V_2 = V_3V_4 = 30$ mm, $V_2V_3 = 100$ mm, $R_2 = -R_3 = 50$ mm y $n_{L1} = n_{L2} = 1{,}50$.

Determina las posiciones de los elementos cardinales de la asociación.

R/ $V_1H = 160/3$ mm; $V_4H' = -160/3$ mm; $V_1F = 260/3$ mm; $V_4F' = -260/3$ mm.

---

9. Se asocian dos lentes gruesas esféricas idénticas, L_1 y L_2, en aire, según se indica en la figura.



Teniendo en cuenta que:

$V_1V_2 = V_3V_4 = 200$ mm, $V_2V_3 = 200$ mm, $R_1 = -R_2 = R_3 = -R_4 = 100$ mm y $n_{L1} = n_{L2} = 1{,}50$.

Determina:
a) Las posiciones de los elementos cardinales de la asociación.
Un objeto de 10 mm de altura se situa delante de la lente L_1 de manera que $V_1O = -350$ mm.Determina:
b) La posición de la imagen.
c) El tamaño de la imagen.

R/ a) $V_1H = -350$ mm, $V_4H' = 350$ mm, $V_1F = -125$ mm, $V_4F' = 125$ mm; b) $V_4O' = 350$ mm; c) $y' = 10$ mm.

---

10. Sean las lentes L_1 y L_2 del ejercicio anterior. Determina la distancia V_2V_3 de manera que el sistema sea afocal.

R/ V_2V_3=100 mm.

---

11. Un sistema está formado por dos lentes delgadas, L_1 y L_2, sumergidas en aire y separadas una distancia de 600 mm de manera que la potencia de la primera lente es cinco veces mayor que la potencia de la segunda. Determina la potencia de cada lente si:
a) La potencia del sistema es de 2,25 D.
b) La potencia del sistema es de −3,75 D.
b) El sistema es afocal.

R/ a) $P'_1 =$ 7,5 D, $P'_2 = 1{,}5$ D y $P'_1 =$ 2,5 D, $P'_2 = 0{,}5$ D; b) $P'_1 = 10$ D, $P'_2 = 2$ D; c) $P'_1 =$ 10 D, $P'_2 = 2$ D.

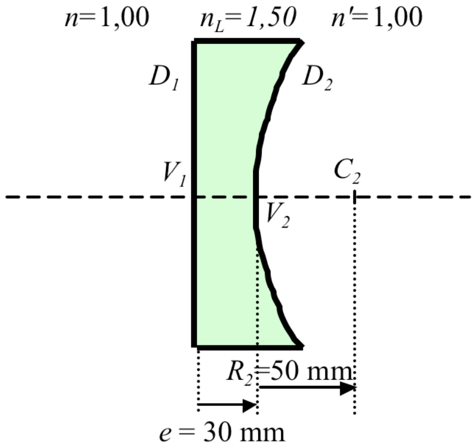
---

12. Una lente gruesa biconvexa, de índice $n_L = 1{,}60$ está sumergida en aire. La potencia de cada una de las superficies que la forman es de 4,00 D y su grosor es $e = V_1V_2 = 10$ mm. Determina:
a) La potencia de la lente.
b) La focal de la lente.
c) La potencia efectiva o de vértice posterior.
d) La focal efectiva o de vértice posterior.
e) La potencia neutralizante o de vértice anterior.
f) La focal neutralizante o de vértice anterior.

R/ a) $P' = 7{,}90$ D; b) $f' = 127$ mm; c) $P'_p = 8{,}10$ D; d) $f'_p = 123$ mm; e) $P_n = -8{,}10$ D; f) $f'_n = -123$ mm.

---

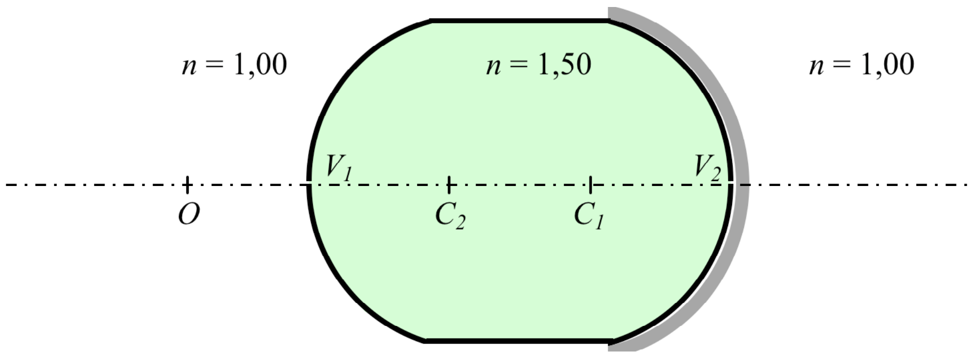
13. Sea la lente gruesa de la figura de las siguientes características:
$V_1V_2 = 30$ mm; $R = 50$ mm; $n_L = 1{,}50$.
Determina:
a) La focal de la lente.
b) La potencia de la lente.
c) La focal efectiva o de vértice posterior.
d) La potencia efectiva o de vértice posterior.
e) La focal neutralizante o de vértice anterior.
f) La potencia neutralizante o de vértice anterior.



R/ a) $f' = -100$ mm; b) $P' = -10{,}0$ D; c) $f'_p = -100$ mm; d) $P'_p = -10{,}0$ D;
e) $f_n = 120$ mm; f) $P_n = 8{,}33$ D.

---

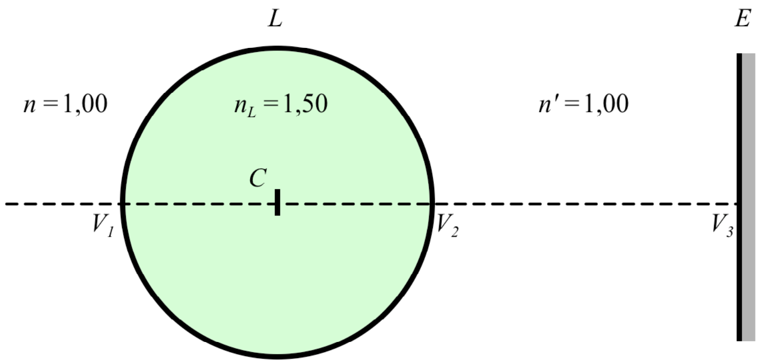
14. Sea el bloque de vidrio equiconvexo de la figura, sumergido en aire, en el que se ha espejado su cara posterior. Sabiendo que $R_1 = 100$ mm, $R_2 = -100$ mm y $V_1V_2 = 150$ mm. Determina:
a) La posición del espejo equivalente.
b) La posición de los elementos cardinales del sistema.
Un objeto está situado a la distancia $V_1O = -40$ mm.
Determina:
c) La posición de la imagen final (V_1O') que forma el sistema de la figura.
d) El aumento lateral de dicho sistema.



R/ a) $V_1C_{eq} = 40$ mm, $V_1V_{eq} = 200$ mm; b) $V_1H = 200$ mm, $V_2H' = 50$ mm, $V_1F = 120$ mm, $V_2F' = -30$ mm; c) $V_1O' = 80$ mm; d) $m = 1/2$.

---

15. Sea el sistema de la figura formado por la asociación de una lente esférica L de índice n_L = 1,50 y radio R = 100 mm y un espejo plano E.
Teniendo en cuenta que: V_1V_2 = 200 mm y V_2V_3 = 200 mm.



Determina:
a) La posición del espejo equivalente.
b) La posición de los elementos cardinales del sistema.
Un objeto está situado a la distancia V_1O = –50 mm.
Determina:
c) La posición de la imagen final (V_1O') que forma el sistema de la figura.
d) El aumento lateral de dicho sistema.

R/ a) V_1C_{eq} = –50 mm, V_1V_{eq} = –140 mm; b) V_1H = –140 mm, V_2H' = –340 mm, V_1F = –95 mm, V_2F' = –295 mm; c) V_1O' = –50 mm d) m = –1.

Comentarios generales a los problemas de la unidad 9

Los elementos formados por una sola superficie tales como el dioptrio y el espejo tienen los planos principales *H* y *H'* superpuestos entre ellos y coincidentes con la posición del dioptrio y el espejo. Lo mismo ocurre en el caso de las lentes delgadas. Los planos focales ***F*** y ***F'*** en este caso son los coinciden con los del dioptrio, el espejo o la lente.

Debe recordarse que los elementos cardinales son elementos conjugados entre si. Esto significa, por ejemplo, que si el objeto está situado en el punto *N*, la imagen estará en *N'* y si el objeto está situado en *n*, la imagen estará situada en *n'*. De este modo los elementos cardinales en forma de pares conjugados en un sistema óptico son:

(F, ∞); (∞, F'); (H, H'); (h, h'); (N, N') y (n, n').

Todos los ejercicios numéricos deben resolverse utilizando las fórmulas de la asociación de sistemas ópticos.

En el caso de dos lentes delgadas cada lente es un sistema óptico diferente, con sus planos principales y sus distancias focales.

En el caso de una lente gruesa, esta puede resolverse a partir de la asociación de dos dioptrios esféricos o bien a partir de las fórmulas relativas a la lente gruesa.

Los problemas en los que se asocian dioptrios y espejos los elementos cardinales coinciden con los del espejo equivalente.

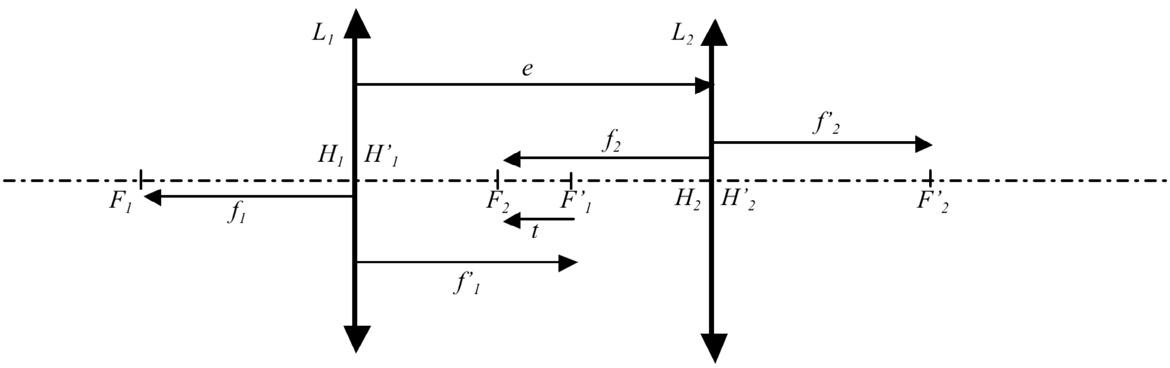
Comentarios a los problemas de la unidad 9

1. Los planos principales *H* y *H’* coinciden con la posición del elemento (dioptrio, espejo o lente delgada). Los planos focales *F* y *F’* coinciden con los del elemento. Una vez obtenida la posición de H, H’, F y F’ la posición de los restantes elementos cardinales es inmediata.

2. De resolución inmediata teniendo en cuenta las indicaciones del ejercicio anterior.

3. Problema de trazado gráfico donde deben tenerse en cuenta las posiciones de los diferentes pares conjugados.

4. Ejercicio de asociación de sistemas ópticos. En este caso los sistemas que se asocian son la dos lentes delgadas L_1 y L_2. Los elementos cardinales de cada sistema son los que se muestran en la figura:



En este caso: $f'_1 = 300$ mm, $f_1 = –300$ mm, $f'_2 = 300$ mm, $f_1 = –30$ mm, $t = –10$ mm y $e = 700$ mm.

Solución numérica:

Se aplican las fórmulas de la asociación de dos sistemas ópticos.

Solución gráfica:

Para determinar gráficamente las posiciones de *H’* y *F’* debe dibujarse la trayectoria de un rayo paralelo que incide sobre la lente L_1. El punto de corte entre el rayo a la salida de la lente L_2 y el eje óptico determinará el punto focal imagen *F’*. La intersección entre el rayo a la salida y el rayo paralelo de la entrada determinará *H’*.

Para determinar gráficamente las posiciones de *H* y *F* debe dibujarse la trayectoria que sigue un rayo que sale de L_2 paralelo al eje óptico. La intersección del rayo a la entrada con el eje óptico determinará *F*. La intersección entre el rayo a la entrada y el rayo paralelo a la salida determinará *H*.

5. Ejercicio igual que el anterior, en este caso ha cambiado la primera lente que es negativa.

6. Un sistema afocal es aquel en donde F'_1 y F_2 coinciden. O lo que es lo mismo: $t = 0$.

7. Puede resolverse a partir de la utilización de las fórmulas de la lente gruesa o también a partir de las fórmulas de la asociación de sistemas ópticos. En este caso los sistemas a asociar son dos dioptrios.

8. Se trata de la asociación de los lentes gruesas. Los datos referentes a la posición de los elementos cardinales de estas lentes han sido obtenidos en el apartado a) del ejercicio anterior.

9. Se resuelve del mismo modo que el ejercicio anterior teniendo en cuenta los datos del apartado (c) del ejercicio número 7.

10. Se resuelve eniendo en cuenta los datos del apartado c) del ejercicio 7 y considerando las condiciones de sistema afocal (ejercicio 6).

11. Se plantean dos ecuaciones, la primera a partir de la relación de potencias (Una potencia es 5 veces mayor que la otra), la segunda a partir de la fórmula de Gullstrand. La resolución de estas ecuaciones permitirá obtener las potencias buscadas.

12. De aplicación directa de las fórmulas correspondientes a la potencia de la lente, focal de la lente, potencia efectiva o potencia de vértice posterior, focal ofectiva o focal de vértice posterior, potencia neutralizante o de vértice anterior, focal neutralizante o de vértice anterior.

13. Se resuelve del mismo modo que el ejercicio anterior.

14. La posición del espejo equivalente se determina según puede verse en los problemas de la unidad 7 (Asociación de dioptrio y espejo) y de la unidad 8 (Asociación de lente delgada y espejo). Los elementos cardinales del sistema coincidirán con los elementos cardinales del espejo equivalente.
La posición y el aumento de la imagen final se determinarán a través del espejo equivalente.

15. Se resuelve del mismo modo que el ejercicio anterior.

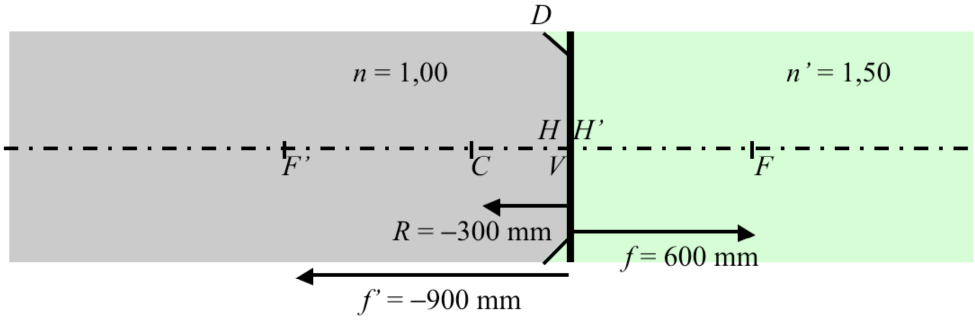
UNIDAD 9. SOLUCIONES

1. Determina la posición de los elementos cardinales en los sistemas siguientes:
a) Dioptrio esférico cóncavo con $|R| = 300$ mm, $n = 1{,}00$ y $n' = 1{,}50$.
b) Dioptrio esférico convexo con $|R| = 300$ mm, $n = 1{,}00$ y $n' = 1{,}50$.
c) Espejo esférico cóncavo con $|R| = 300$ mm.
d) Espejo esférico convexo con $|R| = 300$ mm.
Lente delgada de las siguientes características:

	R_1	R_2	n	n'	n_L
e)	500 mm	–500 mm	1,00	1,00	1,50
f)	–500 mm	500 mm	1,00	1,00	1,50
g)	∞	–500 mm	1,20	1,70	1,50

SOLUCIÓN:

a) Dioptrio esférico cóncavo con $|R| = 300$ mm, $R = -300$ mm, $n = 1{,}00$ y $n' = 1{,}50$.
Por estar compuesto por una sola superficie H y H' coinciden con la posición del dioptrio.



Determinación de las potencias y las focales:

$$P' = \frac{n' - n}{R} = \frac{1{,}50 - 1{,}00}{-0{,}300} = -\frac{5}{3}\text{ D.} \qquad P = -P' = \frac{5}{3}\text{ D.}$$

$$H'F' = f' = \frac{n'}{P'} = \frac{1{,}50}{-\frac{5}{3}} = -0{,}9\text{ m} = -900\text{ mm.} \quad HF = f = \frac{n}{P} = \frac{1{,}00}{\frac{5}{3}} = 0{,}6\text{ m} = 600\text{ mm.}$$

Las posiciones respecto del vértice V son:

$VH = 0$ mm. $\qquad$ $VH' = 0$ mm.

$VF = VH + HF = 0 + 600 = 600$ mm. $\qquad$ $VF = 600$ mm.

$VF' = VH' + H'F' = 0 - 900 = -900$ mm. $\qquad$ $VF = -900$ mm.

Puntos y planos antiprincipales h y h'. Posición respecto del vértice V:

$Fh = f$. $\quad Vh = VF + Fh = VF + f = 600 + 600 = 1200$ mm.
$F'h' = f'$. $\quad Vh' = VF' + F'h' = VF' + f' = -900 - 900 = -1800$ mm.

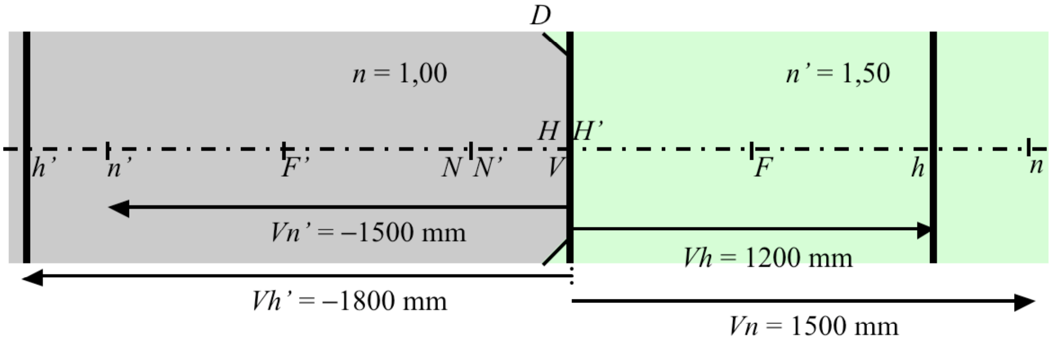
Puntos nodales N y N'. Posición respecto del vértice V:

$FN = f'$. $\quad VN = VF + FN = VF + f' = 600 - 900 = -300$ mm.
$F'N' = f$. $\quad VN' = VF' + F'N' = VF' + f = -900 + 600 = -300$ mm.

Puntos antinodales n y n'. Posición respecto del vértice V:

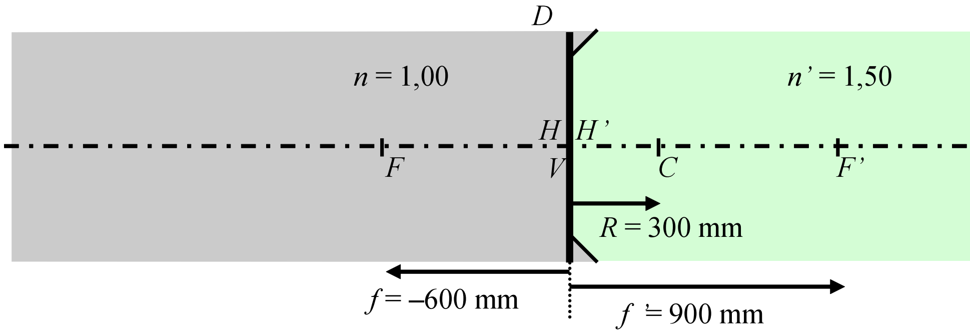
$Fn = -f'$. $\quad Vn = VF + Fn = VF - f' = 600 - (-900) = 1500$ mm.
$F'n' = -f$. $\quad Vn' = VF' + F'n' = VF' - f = -900 - 600 = -1500$ mm.

Las posiciones de los elementos cardinales son:



---

b) Dioptrio esférico convexo con $|R| = 300$ mm, $R = 300$ mm, $n = 1{,}00$ y $n' = 1{,}50$.
Por estar compuesto por una sola superficie H y H' coinciden con la posición del dioptrio.



$$P' = \frac{n' - n}{R} = \frac{1{,}50 - 1{,}00}{0{,}300} = \frac{5}{3}\ \text{D}. \qquad P = -P' = -\frac{5}{3}\ \text{D}.$$

$$H'F' = f' = \frac{n'}{P'} = \frac{1{,}50}{\frac{5}{3}} = 0{,}9 \text{ m} = 900 \text{ mm.} \quad HF = f = \frac{n}{P} = \frac{1{,}00}{-\frac{5}{3}} = -0{,}6 \text{ m} = -600 \text{ mm.}$$

Las posiciones respecto del vértice V son:

$VH = 0$ mm.	$VH' = 0$ mm.
$VF = VH + HF = 0 - 600 = -600$ mm.	$VF = -600$ mm.
$VF' = VH' + H'F0 = 0 + 900 = 900$ mm.	$VF' = 900$ mm.

Puntos y planos antiprincipales h y h'. Posición respecto del vértice V:

$Fh = f$. $\quad Vh = VF + Fh = VF + f = -600 - 600 = -1200$ mm.
$F'h' = f'$. $\quad Vh' = VF' + F'h' = VF' + f' = 900 + 900 = 1800$ mm.

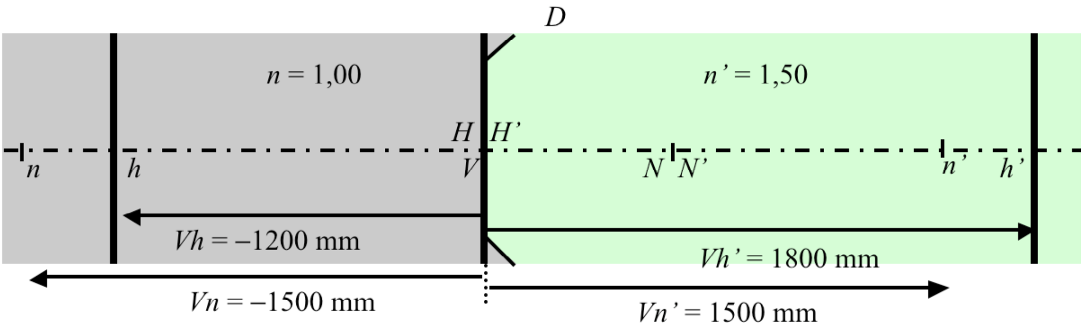
Puntos nodales N y N'. Posición respecto del vértice V:

$FN = f'$. $\quad VN = VF + FN = VF + f' = -600 + 900 = 300$ mm.
$F'N' = f$. $\quad VN' = VF' + F'N' = VF' + f = 900 - 600 = 300$ mm.

Puntos antinodales n y n'. Posición respecto del vértice V:

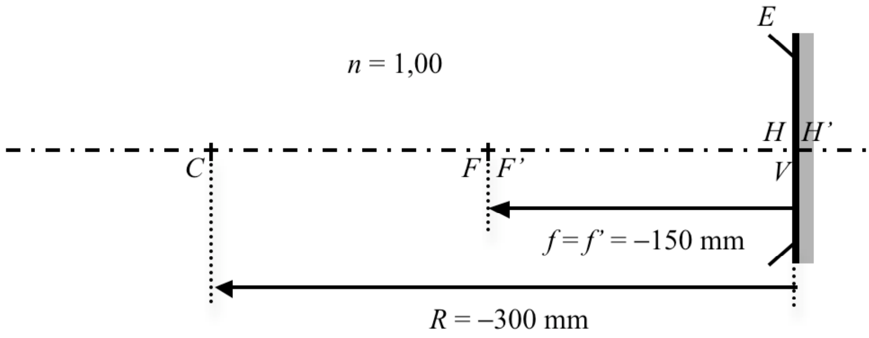
$Fn = -f'$. $\quad Vn = VF + Fn = VF - f' = -600 - 900 = -1500$ mm.
$F'n' = -f$. $\quad Vn' = VF' + F'n' = VF' - f = 900 + 600 = 1500$ mm.

Las posiciones de los elementos cardinales son:



---

c) Espejo esférico cóncavo con $|R| = 300$ mm. $R = -300$ mm.
Tenemos en cuenta que $n = -n'$.



$$P' = -\frac{2n}{R} = -\frac{2}{-0{,}300} = \frac{20}{3}\ \text{D}. \qquad P = -P' = -\frac{20}{3}\ \text{D}.$$

$$H'F' = f' = \frac{n'}{P'} = -\frac{n}{P'} = -\frac{1{,}00}{\frac{20}{3}} = -\frac{3{,}00}{20} = -0{,}150\ \text{m} = -150\ \text{mm}.$$

$$HF = f = \frac{n}{P} = -\frac{n}{P'} = -\frac{1{,}00}{\frac{20}{3}} = -\frac{3{,}00}{20} = -0{,}150\ \text{m} = -150\ \text{mm}.$$

Las posiciones respecto del vértice V son:

$VH = 0$ mm. $VH' = 0$ mm.
$VF = VH + HF = 0 - 150 = -150$ mm. $VF = -150$ mm.
$VF' = VH' + HF' = 0 - 150 = -150$ mm. $VF' = -150$ mm.

Puntos y planos antiprincipales h y h'. Posición respecto del vértice V:

$Fh = f$. $Vh = VF + Fh = VF + f = -150 - 150 = -300$ mm.
$F'h' = f'$. $Vh' = VF' + F'h' = VF' + f' = -150 - 150 = -300$ mm.

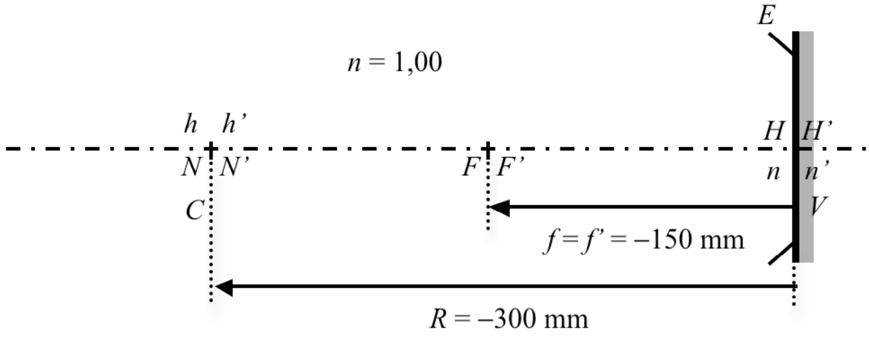
Puntos nodales N y N'. Posición respecto del vértice V:

$FN = f'$. $VN = VF + FN = VF + f' = -150 - 150 = -300$ mm.
$F'N' = f$. $VN' = VF' + F'N' = VF' + f = -150 - 150 = -300$ mm.

Puntos antinodales n y n'. Posición respecto del vértice V:

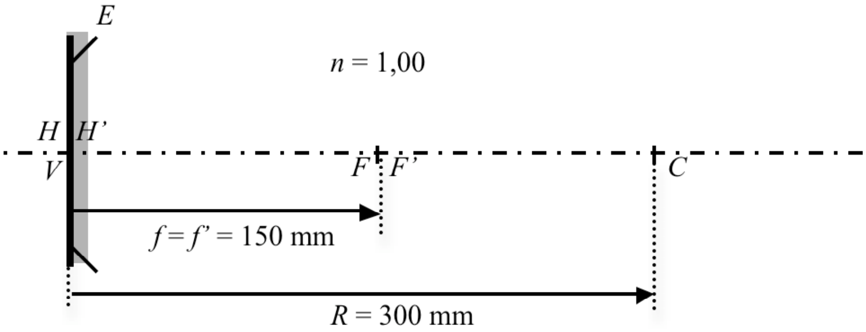
$Fn = -f'$. $Vn = VF + Fn = VF - f' = -150 - (-150) = 0$ mm.
$F'n' = -f$. $Vn' = VF' + F'n' = VF' - f = -150 - (-150) = 0$ mm.

Las posiciones de los elementos cardinales son:



---

d) Espejo esférico convexo con $|R| = 300$ mm. $R = 300$ mm.



$$P' = -\frac{2n}{R} = -\frac{2}{0{,}300} = -\frac{20}{3}\text{ D.} \qquad P = -P' = \frac{20}{3}\text{ D.}$$

$$H'F' = f' = \frac{n'}{P'} = -\frac{n}{P'} = -\frac{1{,}00}{-\frac{20}{3}} = \frac{3{,}00}{20} = 0{,}150\text{ m} = 150\text{ mm.}$$

$$HF = f = \frac{n}{P} = -\frac{n}{P'} = -\frac{1{,}00}{-\frac{20}{3}} = \frac{3{,}00}{20} = 0{,}150\text{ m} = 150\text{ mm.}$$

Las posiciones respecto del vértice V son:

$VH = 0$ mm.
$VF = VH + HF = 0 + 150 = 150$ mm.
$VF' = VH' + HF' = 0 + 150 = 150$ mm.

$VH' = 0$ mm.
$VF = 150$ mm.
$VF' = 150$ mm.

Puntos y planos antiprincipales h y h'. Posición respecto del vértice V:

$Fh = f$. $\quad Vh = VF + Fh = VF + f = 150 + 150 = 300$ mm.
$F'h' = f'$. $\quad Vh' = VF' + F'h' = VF' + f' = 150 + 150 = 300$ mm.

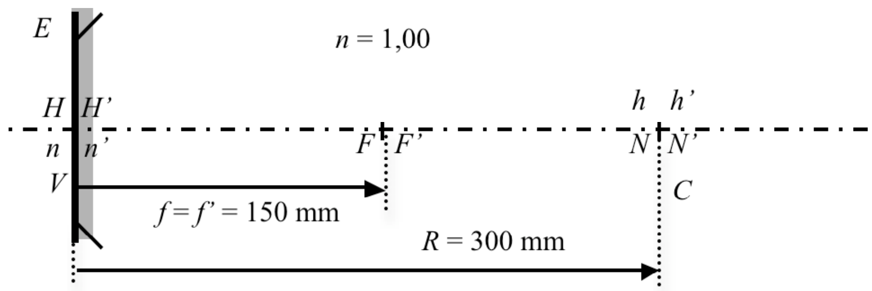
Puntos nodales N y N'. Posición respecto del vértice V:

$FN = f'$. $\quad VN = VF + FN = VF + f' = 150 + 150 = 300$ mm.
$F'N' = f$. $\quad VN' = VF' + F'N' = VF' + f = 150 + 150 = 300$ mm.

Puntos antinodales n y n'. Posición respecto del vértice V:

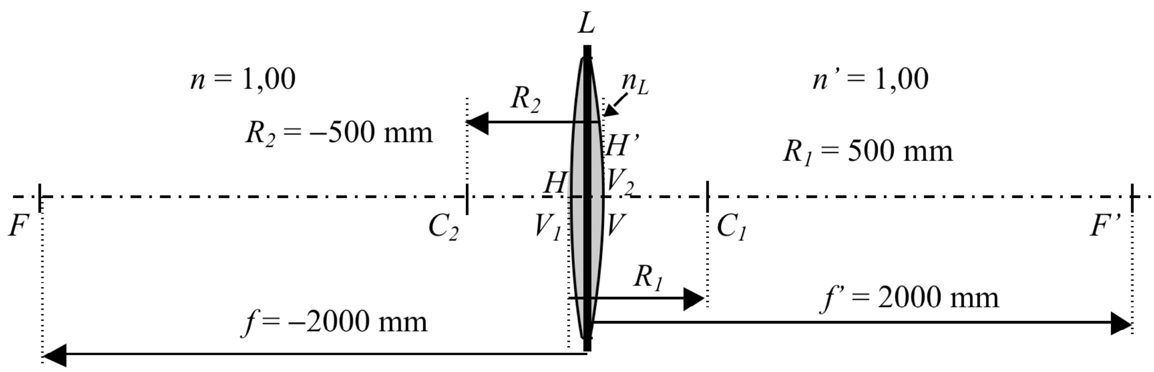
$Fn = -f'$. $\quad Vn = VF + Fn = VF - f' = 150 - 150 = 0$ mm.
$F'n' = -f$. $\quad Vn' = VF' + F'n' = VF' - f = 150 - 150 = 0$ mm.

Las posiciones de los elementos cardinales son:



---

e) $R_1 = 500$ mm, $\quad R_2 = -500$ mm, $\quad n = 1{,}00$, $\quad n' = 1{,}00$, $\quad n_L = 1{,}50$.



Por ser los índices extremos iguales $n = n'$ la potencia se calcula como:

$$P' = (n_L - n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1{,}50 - 1{,}00)\left(\frac{1}{0{,}500} - \frac{1}{-0{,}500}\right) = 4{,}00 \text{ D.}$$

$$P = -P' = -0{,}50 \text{ D.}$$

$$H'F' = f' = \frac{n'}{P'} = \frac{1{,}00}{4{,}00} = 0{,}500 \text{ m} = 500 \text{ mm.}$$

$$HF = f = \frac{n}{P} = \frac{1{,}00}{-4{,}00} = -\,0{,}500 \text{ m} = -\,500 \text{ mm.}$$

Por ser lente delgada $V_1V_2 = V_1V = V_2V = 0$.

Las posiciones respecto del vértice V son:

$VH = 0$ mm.	$VH' = 0$ mm
$VF = VH + HF = 0 - 500 = -500$ mm.	$VF = -500$ mm.
$VF' = VH' + HF' = 0 + 2000 = 2000$ mm.	$VF' = 500$ mm.

Puntos y planos antiprincipales h y h'. Posición respecto del vértice V:

$Fh = f$. $\quad Vh = VF + Fh = VF + f = -\,500 - 500 = -1000$ mm.
$F'h' = f'$. $\quad Vh' = VF' + F'h' = VF' + f' = 500 + 500 = 1000$ mm.

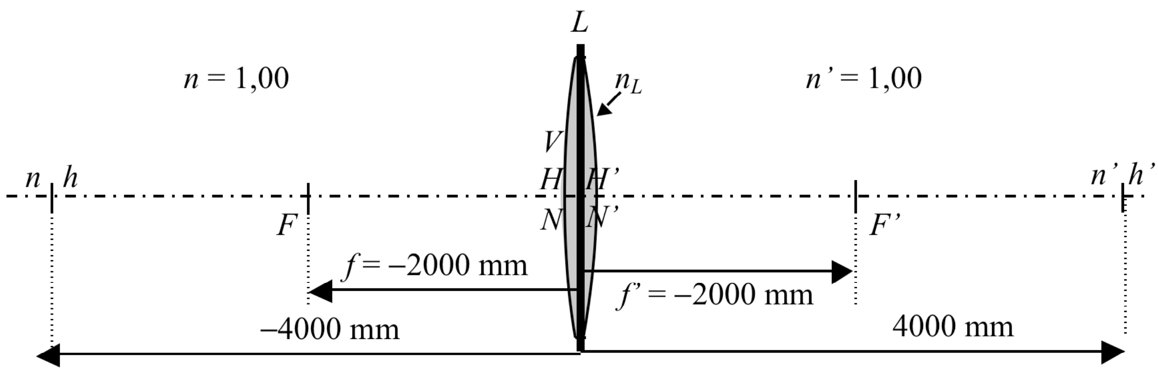
Puntos nodales N y N'. Posición respecto del vértice V:

$FN = f'$. $\quad VN = VF + FN = VF + f' = -\,500 + 500 = 0$ mm.
$F'N' = f$. $\quad VN' = VF' + F'N' = VF' + f = 500 - 500 = 0$ mm.

Puntos antinodales n y n'. Posición respecto del vértice V:

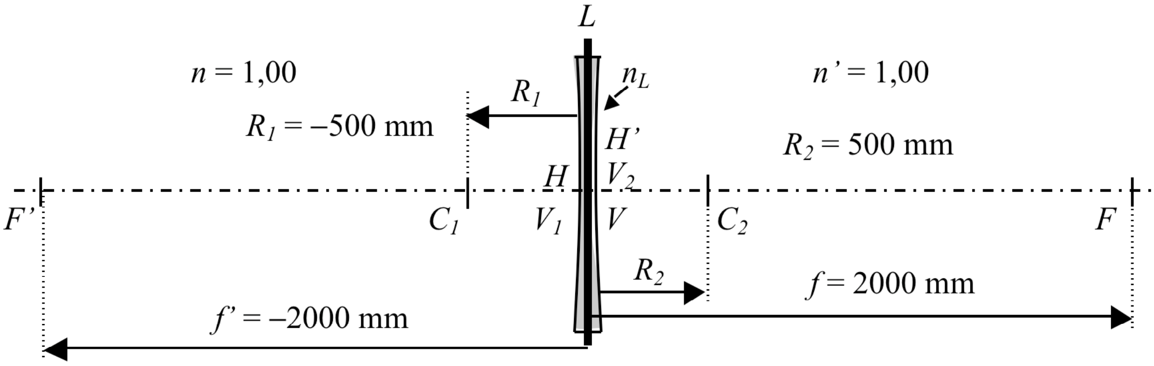
$Fn = -f'$. $\quad Vn = VF + Fn = VF - f' = -\,500 - 500 = -1000$ mm.
$F'n' = -f$. $\quad Vn' = VF' + F'n' = VF' - f = 500 + 500 = 1000$ mm.

Las posiciones de los elementos cardinales son:



-----

f) $R_1 = -500$ mm, $R_2 = 500$ mm, $n = 1{,}00$, $n' = 1{,}00$, $n_L = 1{,}50$.



Por ser los índices extremos iguales $n = n'$ la potencia se calcula como:

$$P' = (n_L - n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1{,}50 - 1{,}00)\left(\frac{1}{-0{,}500} - \frac{1}{0{,}500}\right) = -2{,}00 \text{ D.}$$

$$P = -P' = 2{,}00 \text{ D.}$$

$$H'F' = f' = \frac{n'}{P'} = \frac{1{,}00}{-2{,}00} = -0{,}500 \text{ m} = -500 \text{ mm.}$$

$$HF = f = \frac{n}{P} = \frac{1{,}00}{2{,}00} = 0{,}500 \text{ m} = 500 \text{ mm.}$$

Por ser lente delgada $V_1V_2 = V_1V = V_2V = 0$.

Las posiciones respecto del vértice V son:

$VH = 0$ mm.
$VF = VH + HF = 0 + 500 = 500$ mm.
$VF' = VH' + HF' = 0 - 500 = -500$ mm.

$VH' = 0$ mm
$VF = 500$ mm.
$VF' = -500$ mm.

Puntos y planos antiprincipales h y h'. Posición respecto del vértice V:

$Fh = f$. $Vh = VF + Fh = VF + f = 500 + 500 = 1000$ mm.
$F'h' = f'$. $Vh' = VF' + F'h' = VF' + f' = -500 - 500 = -1000$ mm.

Puntos nodales N y N'. Posición respecto del vértice V:

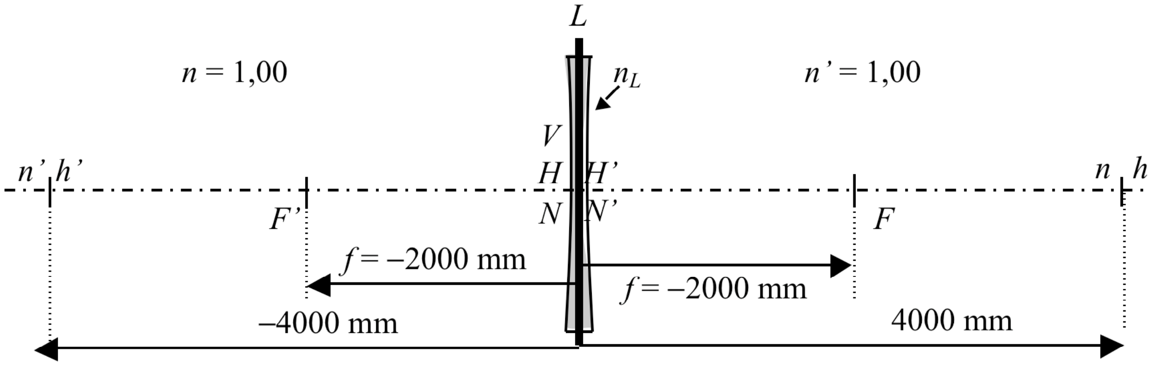
$FN = f'$. $VN = VF + FN = VF + f' = 500 - 500 = 0$ mm.
$F'N' = f$. $VN' = VF' + F'N' = VF' + f = -500 + 500 = 0$ mm.

Puntos antinodales n y n'. Posición respecto del vértice V:

$Fn = -f'$. $\quad Vn = VF + Fn = VF - f' = 500 - (-500) = 1000$ mm.

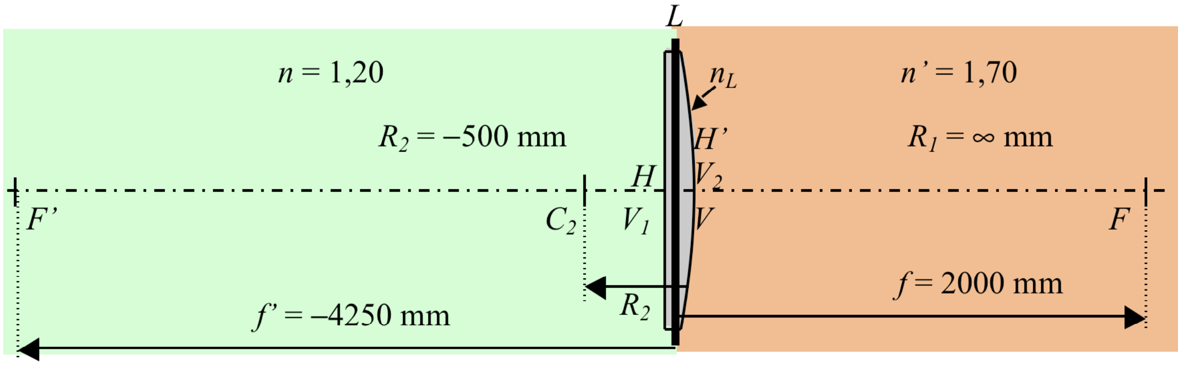
$F'n' = -f$. $\quad Vn' = VF' + F'n' = VF' - f = -500 - 500 = -1000$ mm.

Las posiciones de los elementos cardinales son:



---

g) $R_1 = \infty$ mm, $\quad R_2 = -500$ mm, $\quad n = 1{,}20$, $\quad n' = 1{,}70$, $\quad n_L = 1{,}50$.



Por ser los índices extremos diferentes $n \neq n'$ la potencia debe calcularse como suma de potencias de dioptrios.

$$P' = P'_1 + P'_2 = \frac{n_L - n}{R_1} + \frac{n' - n_L}{R_2} = \frac{1{,}50 - 1{,}20}{\infty} + \frac{1{,}70 - 1{,}50}{-0{,}500} = -0{,}40 \text{ D.}$$

$$P = -P' = 0{,}40 \text{ D.}$$

$$H'F' = f' = \frac{n'}{P'} = \frac{1{,}70}{-0{,}40} = -4{,}25 \text{ m} = -4250 \text{ mm.}$$

$$HF = f = \frac{n}{P} = \frac{1{,}20}{0{,}40} = 3 \text{ m} = 3000 \text{ mm.}$$

Por ser lente delgada $V_1V_2 = V_1V = V_2V = 0$.

Las posiciones respecto del vértice V son:

$VH = 0$ mm.
$VF = VH + HF = 0 + 3000 = 3000$ mm.
$VF' = VH' + HF' = 0 - 4250 = -4250$ mm.

$VH' = 0$ mm
$VF = 3000$ mm.
$VF' = -4250$ mm.

Puntos y planos antiprincipales h y h'. Posición respecto del vértice V:

$Fh = f$. $\quad Vh = VF + Fh = VF + f = 3000 + 3000 = 6000$ mm.
$F'h' = f'$. $\quad Vh' = VF' + F'h' = VF' + f' = -4250 - 4250 = -8500$ mm.

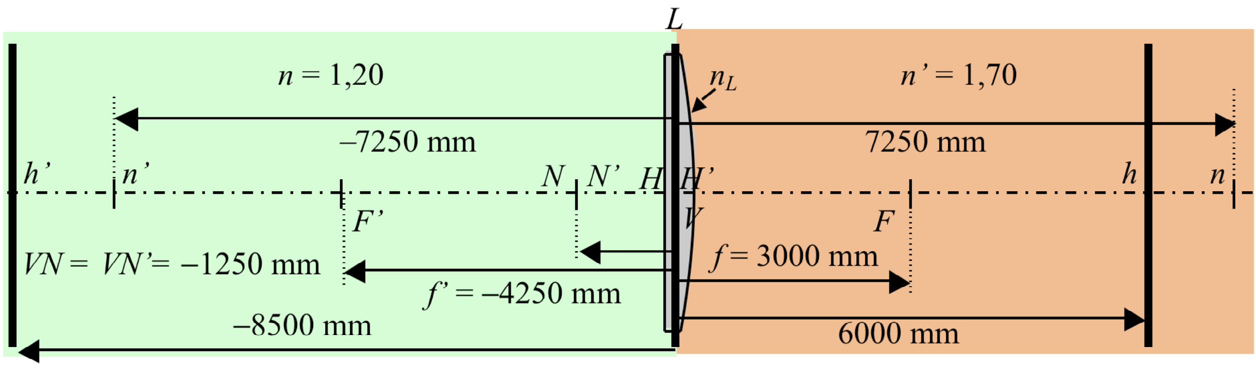
Puntos nodales N y N'. Posición respecto del vértice V:

$FN = f'$. $\quad VN = VF + FN = VF + f' = 3000 - 4250 = -1250$ mm.
$F'N' = f$. $\quad VN' = VF' + F'N' = VF' + f = -4250 + 3000 = -1250$ mm.

Puntos antinodales n y n'. Posición respecto del vértice V:

$Fn = -f'$. $\quad Vn = VF + Fn = VF - f' = 3000 - (-4250) = 7250$ mm.
$F'n' = -f$. $\quad Vn' = VF' + F'n' = VF' - f = -4250 - 3000 = -7250$ mm.

Las posiciones de los elementos cardinales son:

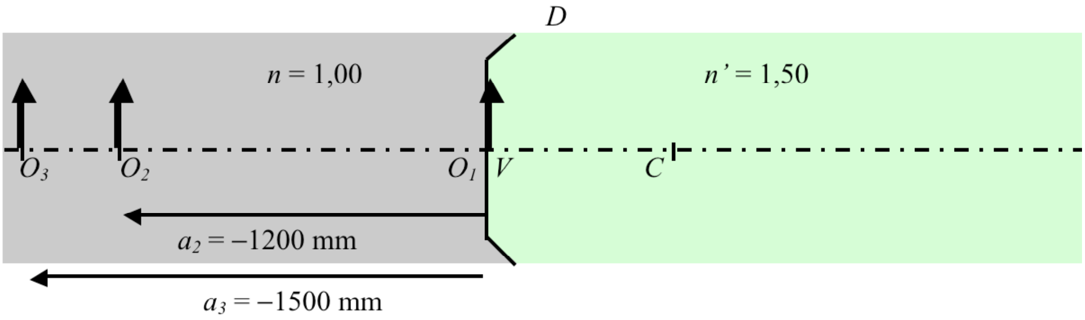


2. Sea el dioptrio esférico convexo de la figura de radio $R = 300$ mm. Sea un objeto de 10 mm de altura. Determina la posición y el tamaño de la imagen formada por el dioptrio cuando el objeto está situado en las posiciones siguientes:

a) $VO_1 = 0$ mm.

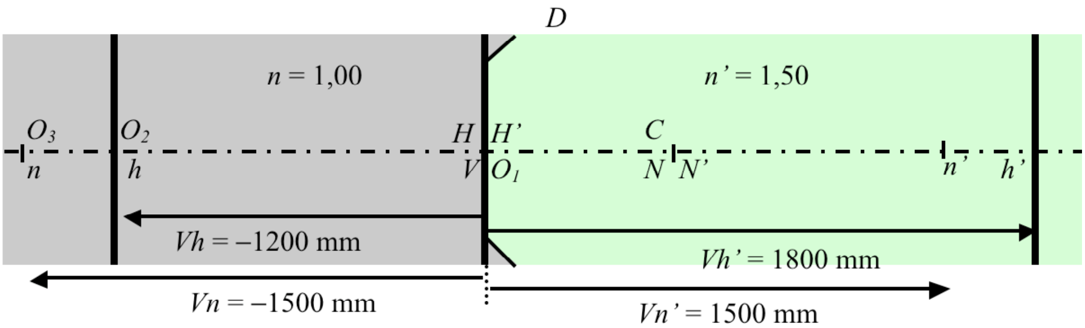
b) $VO_2 = -1200$ mm.

c) $VO_3 = -1500$ mm.



SOLUCIÓN:

Las diferentes posiciones del objeto coinciden con las de diferentes elementos cardinales según se muestra en la figura siguiente (ver apartado b) del ejercicio anterior).



a) $VO_1 = 0$ mm.

En este caso la posición de O_1 coincide con H. La imagen estará en H' y el aumento lateral valdrá $m = +1$.

Así pués: $a'_1 = VO'_1 = VH' = 0$ mm. $y'_1 = +10$ mm.

b) $VO_2 = -1200$ mm.

La posición de O_2 coincide con h. La imagen estará en h' y el aumento lateral valdrá $m = -1$.

Así pués: $a'_2 = VO'_2 = Vh' = 1800$ mm. $y'_2 = -10$ mm.

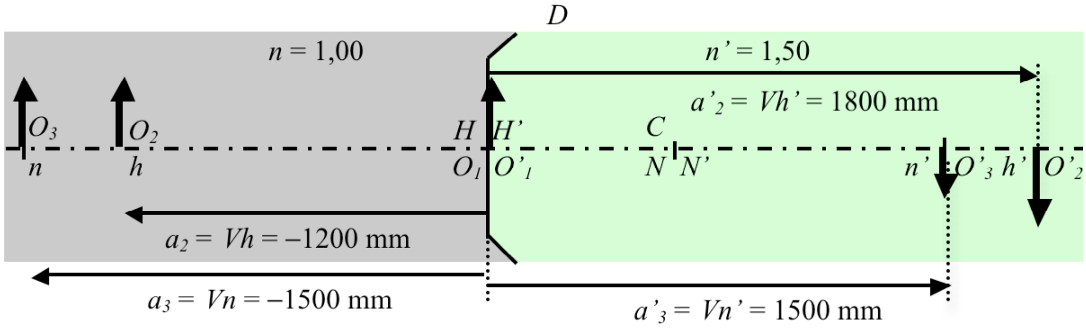
c) $VO_3 = -1500$ mm.

La posición de O_3 coincide con n. La imagen estará en n'.

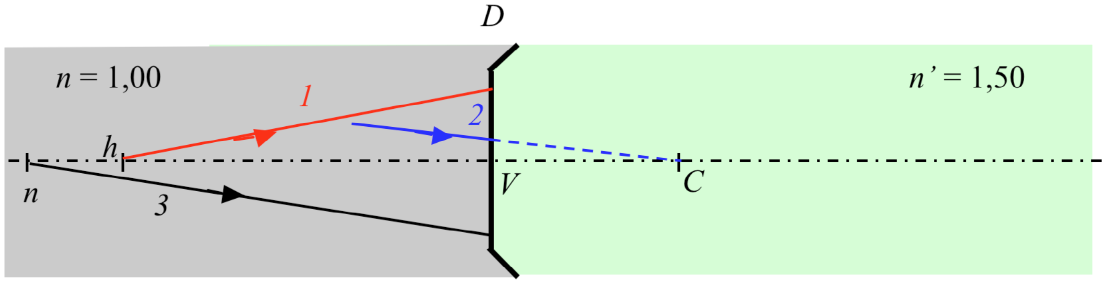
Así pués: $a'_3 = VO'_3 = Vn' = 1500$ mm.

$$m = \frac{na'}{n'a} = \frac{1{,}00(1500)}{1{,}50(-1500)} = -\frac{2}{3}.$$

$$y'_3 = my_3 = -\frac{2}{3}10 = -\frac{20}{3} \text{ mm.}$$

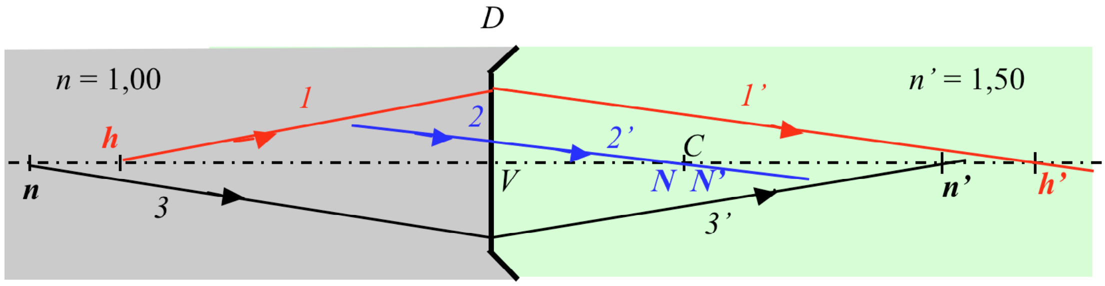


3. Sea el dioptrio esférico convexo de la figura de radio $R = 300$ mm. Determina la trayectoria de los rayos 1, 2 y 3.

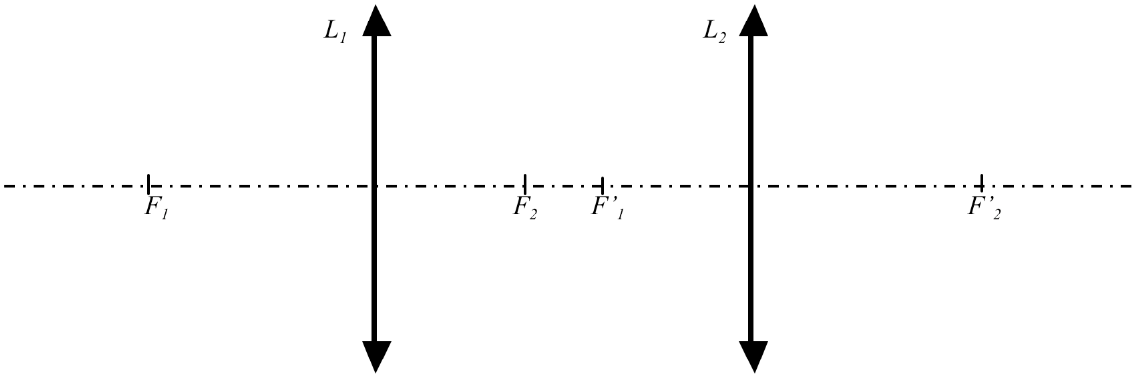


SOLUCIÓN:

Se trata de tres rayos que pasan por elementos cardinales del sistema. A la salida pasarán por su conjugado imagen. Del ejercicio 1b):



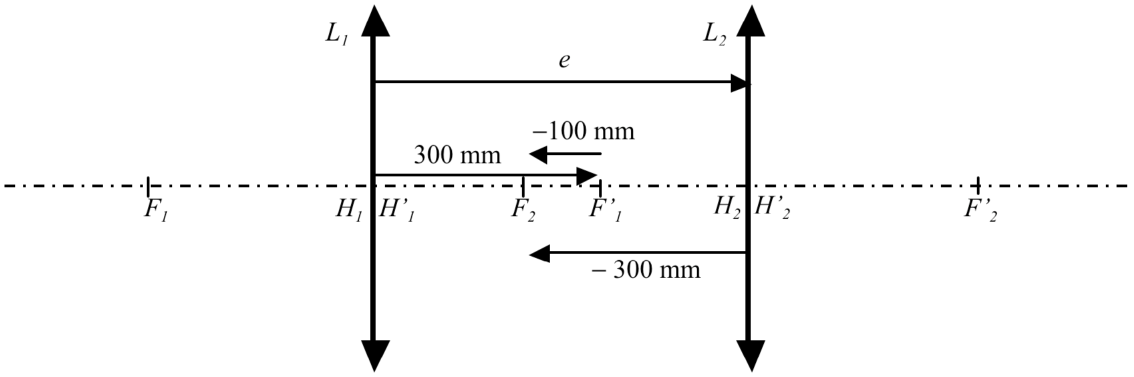
4. Sea el sistema de la figura sumergido en aire, donde: $f'_1 = 300$ mm, $f'_2 = 300$ mm y $F'_1F_2 = -100$ mm. Determina:
a) La posición de los planos principales H y H' dels sistema.
b) La posición de los puntos focales F y F' del sistema.
c) La posición de los restantes elementos cardinales del sistema.
i) Solución numérica.
ii) Solución gráfica.



SOLUCIÓN:

i)

a) Consideremos la asociación de dos elementos formados por las lentes L_1 y L_2.



De la figura: $e = H'_1H_2 = L_1L_2 = 500$ mm. $\quad t = F'_1F_2 = -100$ mm.

Teniendo en cuenta que: $f_1 = -300$ mm, $f'_1 = 300$ mm, $f_2 = -300$ mm, $f'_2 = 300$ mm

$$L_1H = H_1H = \frac{f_1\, e}{t} = \frac{(-300)\,500}{-100} = 1500 \text{ mm.}$$

$$L_2H' = H'_2H' = \frac{f'_2\, e}{t} = \frac{(300)\,500}{-100} = -1500 \text{ mm.}$$

b) $HF = f = \dfrac{f_1\, f_2}{t} = \dfrac{(-300)(-300)}{-100} = -\dfrac{90000}{100} = -\ 900$ mm.

$$H'F' = f' = -\frac{f'_1\, f'_2}{t} = -\frac{300 . 300}{-100} = \frac{90000}{100} = 900 \text{ mm.}$$

Los valores de *f* y *f '* son iguales y cambiados de signos porque los índices extremos son iguales.

$L_1F = L_1H + HF = 1500 - 900 = 600$ mm.
$L_2F' = L_2H' + H'F' = -1500 + 900 = -\ 600$ mm.

c) Otros elementos cardinales.

c1) Posición de *N* y *N'*:

$FN = f'$. $\quad L_1N = L_1F + FN = L_1F + f' = 600 + 900 = 1500$ mm.
$F'N' = f$. $\quad L_2N' = L_2F' + F'N' = L_2F' + f = -\ 600 - 900 = -1500$ mm.

Al estar el sistema sumergido en aire las posiciones de los pares conjugados (*H*, *H'*) y (*N*, *N'*) coinciden.

c2) Posición de *h* y *h'*:

$Fh = f$. $\quad L_1h = L_1F + Fh = L_1F + f = 600 - 900 = -300$ mm.
$F'h' = f'$. $\quad L_2h' = L_2F' + F'h' = L_2F' + f' = -\ 600 + 900 = 300$ mm.

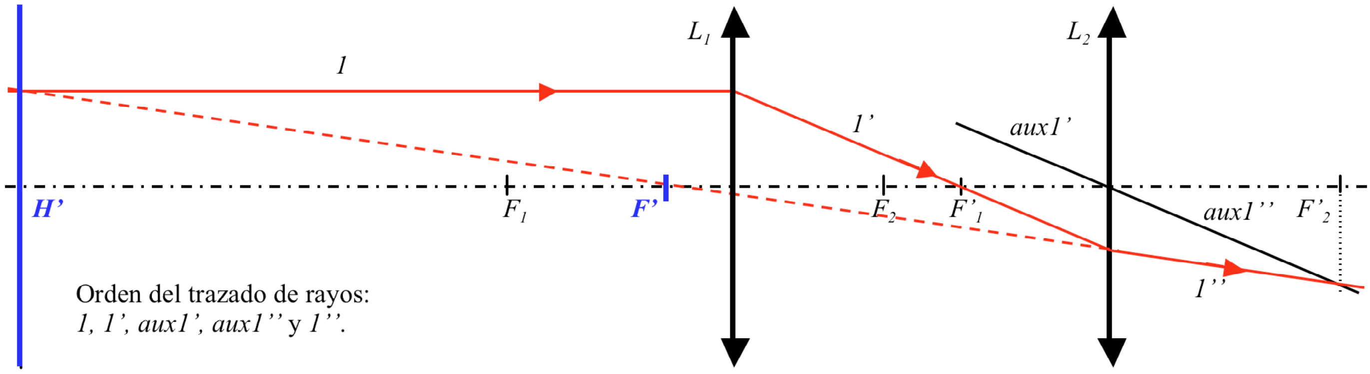
c3) Posición de *n* y *n'*:

$Fn = -f'$. $\quad L_1n = L_1F + Fn = L_1F - f' = 600 - 900 = -300$ mm.
$F'n' = -f$. $\quad L_2n' = L_2F' + F'n' = L_2F' - f = -\ 600 + 900 = 300$ mm.

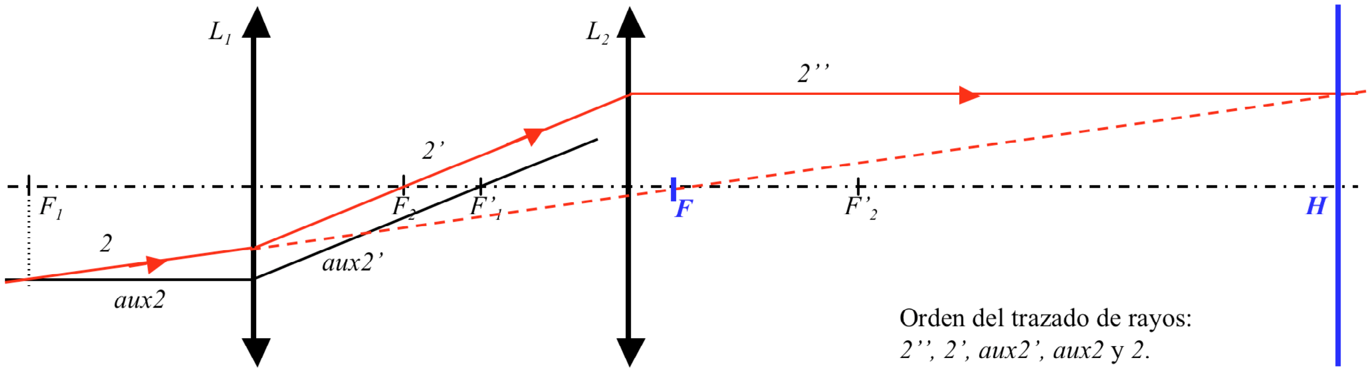
Al estar el sistema sumergido en aire las posiciones de los pares conjugados (*h*, *h'*) y (*n*, *n'*) coinciden.

ii) En el apartado de solución gráfica solamente determinaremos *H, H', F* y *F'*.

Posición de *H'* y *F'*:

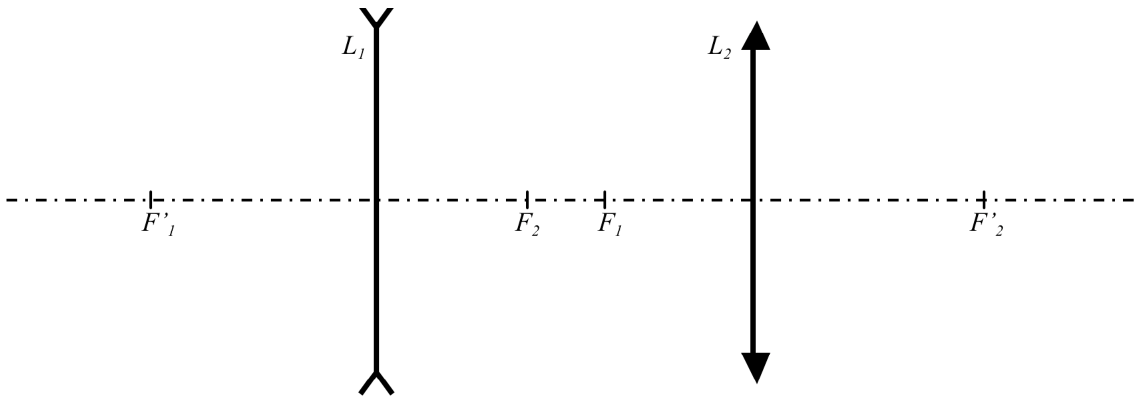


Posición de *H* y *F*.



5. Sea el sistema de la figura, sumergido en aire, donde: $f'_1 = -300$ mm, $f'_2 = 300$ mm y $F_1F_2 = -100$ mm. Determina:

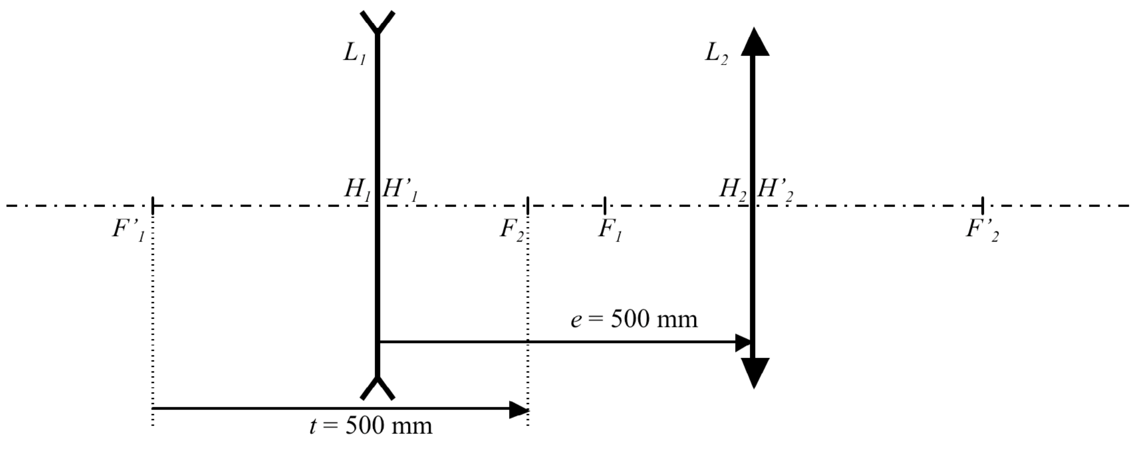
a) La posición de los planos principales H y H'.
b) La posición de F y F'.
c) La posición de los restantes elementos cardinales.
i) Solución numérica.
ii) Solución gráfica.



SOLUCIÓN:

i)

a) Consideremos la asociación de dos elementos formados por las lentes L_1 y L_2.



De la figura: $e = H'_1H_2 = L_1L_2 = 500$ mm.

$t = F'_1H'_1 + H'_1H_2 + H_2F'_2 = -300 + 500 + 300 = 500$ mm.

Teniendo en cuenta que: $f_1 = 300$ mm, $f'_1 = -300$ mm, $f_2 = -300$ mm, $f'_2 = 300$ mm

$$L_1H = H_1H = \frac{f_1\, e}{t} = \frac{(300)\,500}{500} = 300 \text{ mm.}$$
$$L_2H' = H'_2\,H' = \frac{f'_2\, e}{t} = \frac{(300)\,500}{500} = \;300 \text{ mm.}$$

b) $$HF = f = \frac{f_1\, f_2}{t} = \frac{300\,(-300)}{500} = -\frac{90000}{500} = -180 \text{ mm.}$$
$$H'F' = f' = -\frac{f'_1\, f'_2}{t} = -\frac{(-300)\,300}{500} = \frac{90000}{500} = \;180 \text{ mm.}$$

Los valores de f y f' son iguales y cambiados de signos porque los índices extremos son iguales.

$$L_1F = L_1H + HF = 300 - 180 = 120 \text{ mm.}$$
$$L_2F' = L_2H' + H'F' = 300 + 180 = \;480 \text{ mm.}$$

c) Otros elementos cardinales.

c1) Posición de N y N':

$FN = f'$. $\quad L_1N = L_1F + FN = L_1F + f' = \;120 + 180 = 300$ mm.
$F'N' = f$. $\quad L_2N' = L_2F' + F'N' = L_2F' + f = 480 - 180 = 300$ mm.

Al estar el sistema sumergido en aire las posiciones de los pares conjugados (H, H') y (N, N') coinciden.

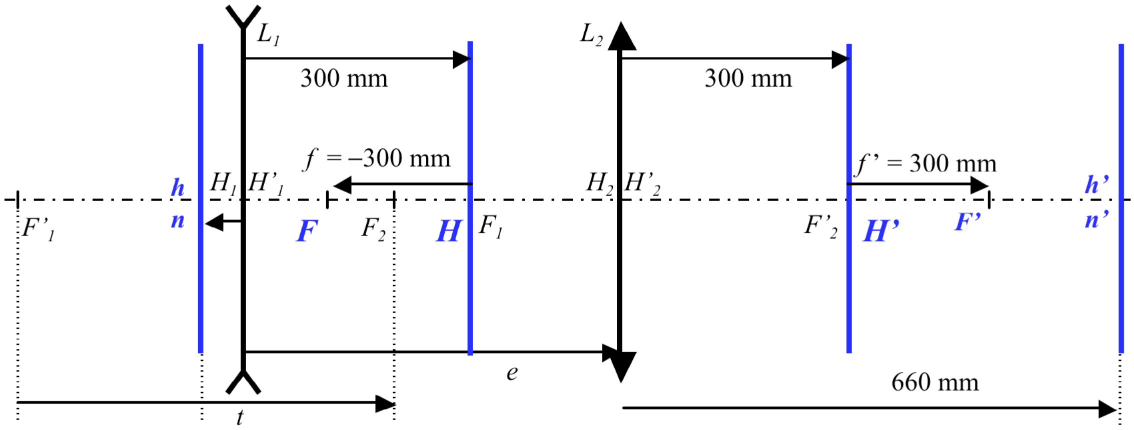
c2) Posición de h y h':

$Fh = f$. $\quad L_1h = L_1F + Fh = L_1F + f = \;120 - 180 = -60$ mm.
$F'h' = f'$. $\quad L_2h' = L_2F' + F'h' = L_2F' + f' = \;480 + 180 = 660$ mm.

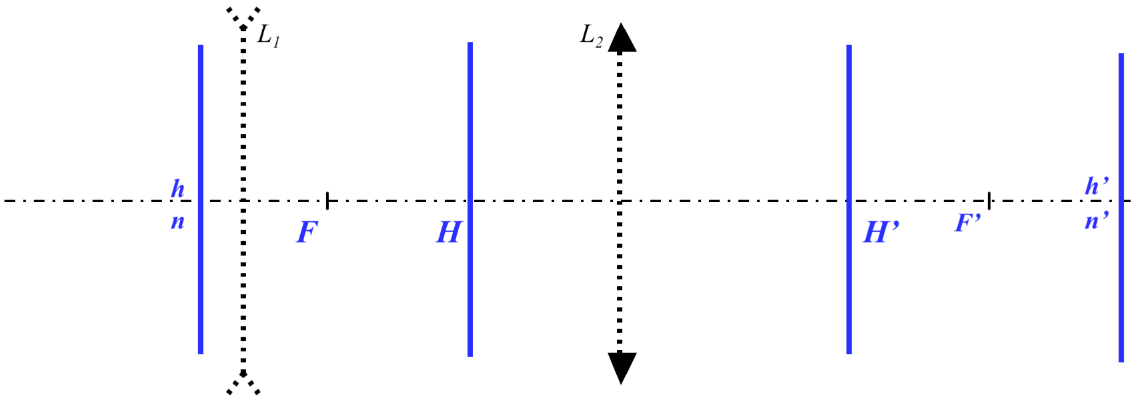
c3) Posición de n y n':

$Fn = -f'$. $\quad L_1n = L_1F + Fn = L_1F - f' = \;120\; - 180 = -60$ mm.
$F'n' = -f$. $\quad L_2n' = L_2F' + F'n' = L_2F' - f = \;480\; + 180 = 660$ mm.

Al estar el sistema sumergido en aire las posiciones de los pares conjugados (h, h') y (n, n') coinciden.

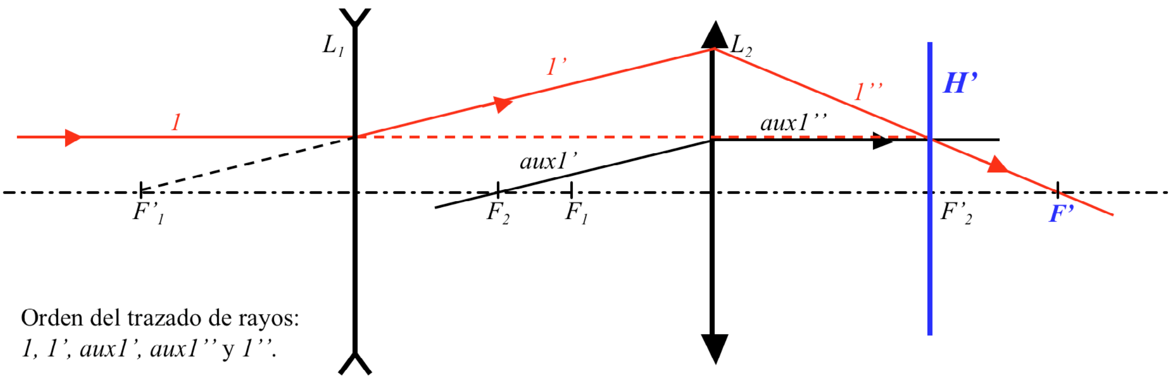


El sistema anterior es equivalente a:

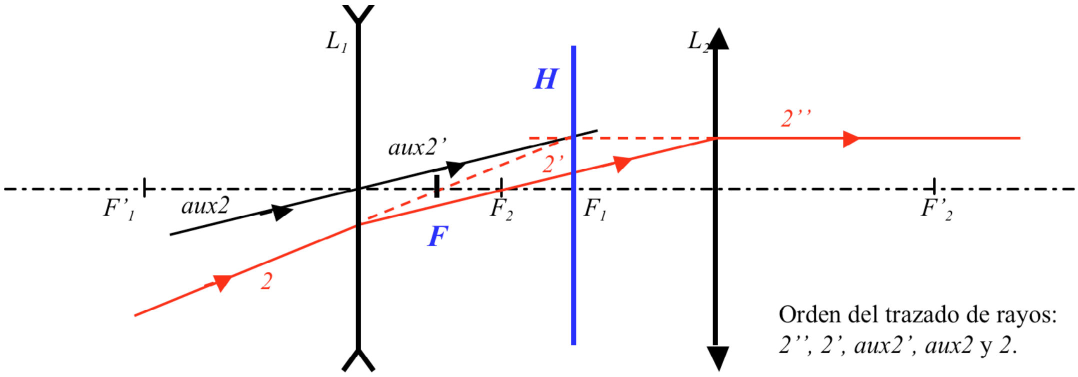


ii) En el apartado de solución gráfica solamente determinaremos *H, H', F* y *F'*.

a) Posición de *H'* y *F'*:



b) Posición *H* y *F*.



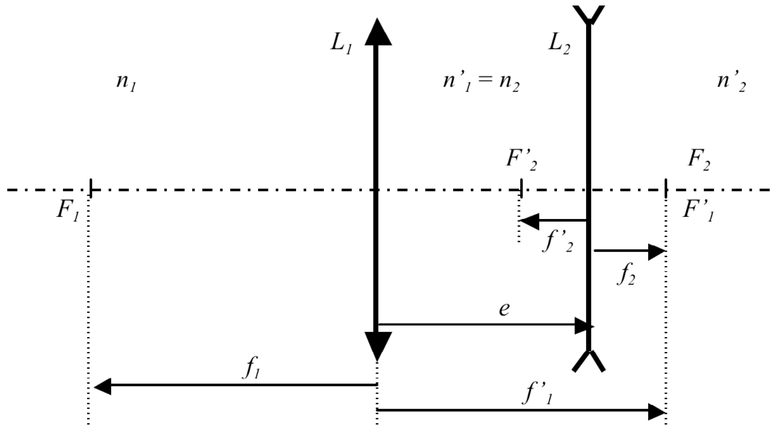
6. Considera dos lentes delgadas, L_1 y L_2, sumergidas en aire, cuyas potencias son, respectivamente, $P'_1 = +5{,}00$ D y $P'_2 = -20{,}0$ D. Determina:

a) La distancia L_1L_2 para que el sistema sea afocal.

b) La potencia del sistema en este caso.

SOLUCIÓN:

a) Para que el sistema sea afocal debe cumplirse que $t = F'_1F_2 = 0$, lo que significa que los puntos F'_1 y F_2 coinciden.



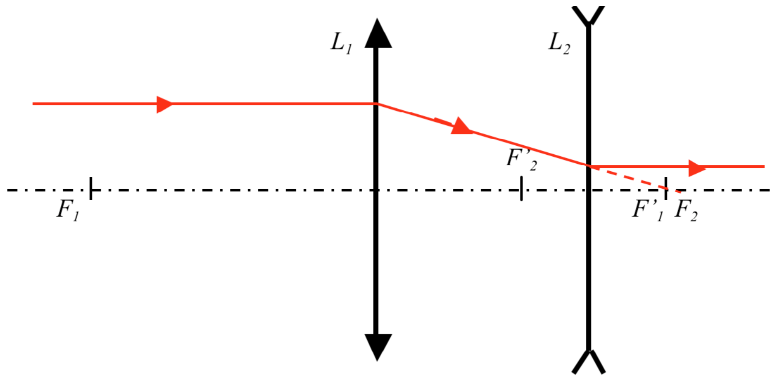
$$f'_1 = \frac{n'_1}{P'_1} = \frac{1{,}00}{5{,}00} = 0{,}200 = 200 \text{ mm.} \qquad f_1 = -f'_1 = -200 \text{ mm.}$$

$$f'_2 = \frac{n'_2}{P'_2} = \frac{1{,}00}{-20{,}0} = -0{,}050 \text{ m} = -50 \text{ mm.} \qquad f_2 = -f'_2 = 50 \text{ mm.}$$

En la figura se observa que:

$L_1L_2 = L_1F'_1 + F'_1F_2 + F_2L_2 = f'_1 + 0 - f_2 = 200 - 50 = 150$ mm.

La trayectoria de un rayo de luz que incide paralelo al eje óptico será:



Otra manera de hacerlo:

A partir de:

$$F'_1F_2 = t = e - f'_1 + f_2\ ;$$

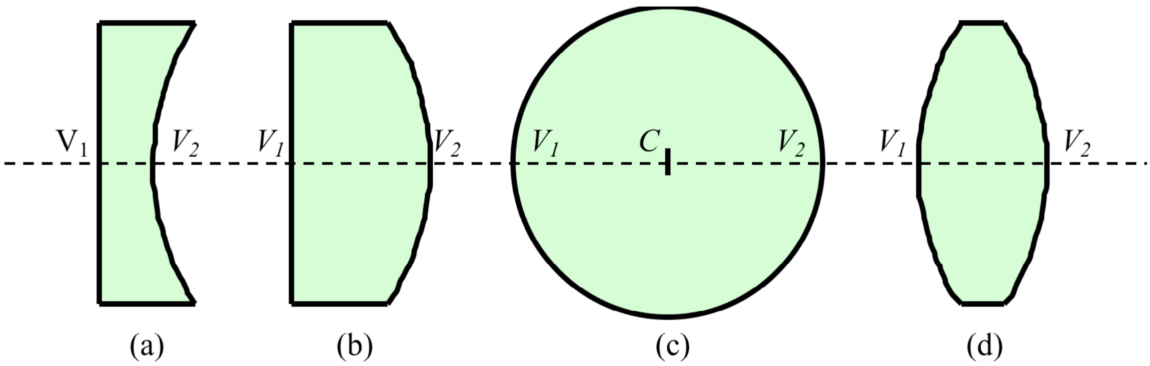
Por ser el sistema afocal: $t = 0$. Substituyendo t en la ecuación anterior y despejando e se obtiene:

$$e = f'_1 - f_2 = 200 - 50 = 150 \text{ mm.}$$

b) En un sistema afocal, a la vista de la figura anterior $f' = \infty$, lo que significa que $P' = 0$ D.

7. Determina la posición de los elementos cardinales en les lentes gruesas siguientes sumergidas en aire.

a) $V_1V_2 = 30$ mm; $R = 50$ mm; $n_L = 1{,}50$.
b) $V_1V_2 = 80$ mm; $R = -50$ mm; $n_L = 1{,}50$.
c) $V_1V_2 = 200$ mm; $R_1 = -R_2 = 100$ mm; $n_L = 1{,}50$.
d) $V_1V_2 = 72$ mm; $R_1 = -R_2 = 300$ mm; $n_L = 1{,}50$.



SOLUCIÓN:

a) $V_1V_2 = 30$ mm; $R = 50$ mm $= 0{,}050$ m; $n_L = 1{,}50$.

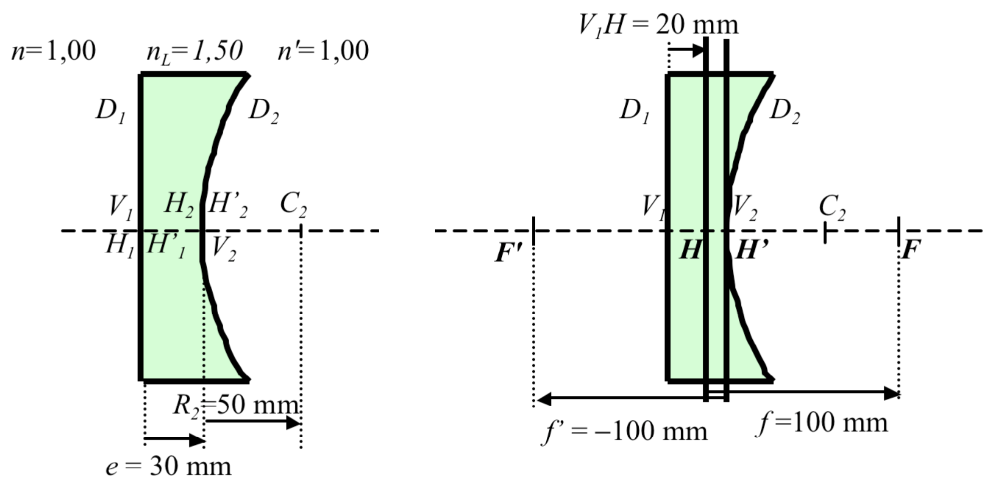


Figura 1

Consideremos la lente gruesa como la asociación de dos dioptrios D_1 y D_2, donde D_1 es un dioptrio plano ($R_1 = \infty$).

Determinemos en primer lugar la potencia P' de la lente:

$$P' = \frac{n'}{f'} = (n_L - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{(n_L-1)^2}{n_L}\frac{e}{R_1R_2} = -(n_L-1)\frac{1}{R_2} = -(1{,}50-1)\frac{1}{0{,}050} = -10{,}00 \text{ D.}$$

$$H'F' = f' = \frac{n'}{P'} = \frac{1{,}00}{-10{,}00} = -0{,}100 \text{ m} = -100 \text{ mm.}$$

Dado que la lente está sumergida en aire ($n = n' = 1{,}00$):

$$f = -f' = 100 \text{ mm} = HF.$$

Posición de los planos principales:

$$V_1H = H_1H = -\frac{(n_L - 1)}{n_L}\frac{ef'}{R_2} = -\frac{(1{,}50-1)}{1{,}50}\cdot\frac{30\cdot(-100)}{50} = 20 \text{ mm}.$$

$$V_2H' = H_2'H' = -\frac{(n_L - 1)}{n_L}\frac{ef'}{R_1} = -\frac{(1{,}50-1)}{1{,}50}\cdot\frac{30\cdot(-100)}{\infty} = 0.$$

Posición de los planos focales:

$V_1F = V_1H + HF = 20 + 100 = 120$ mm.
$V_2F' = V_2H' + H'F' = 0 - 100 = -100$ mm.

La figura 1 muestra la posición de los elementos cardinales.

---

b) $V_1V_2 = 80$ mm; $R = -50$ mm $= -0{,}050$ m; $n_L = 1{,}50$.

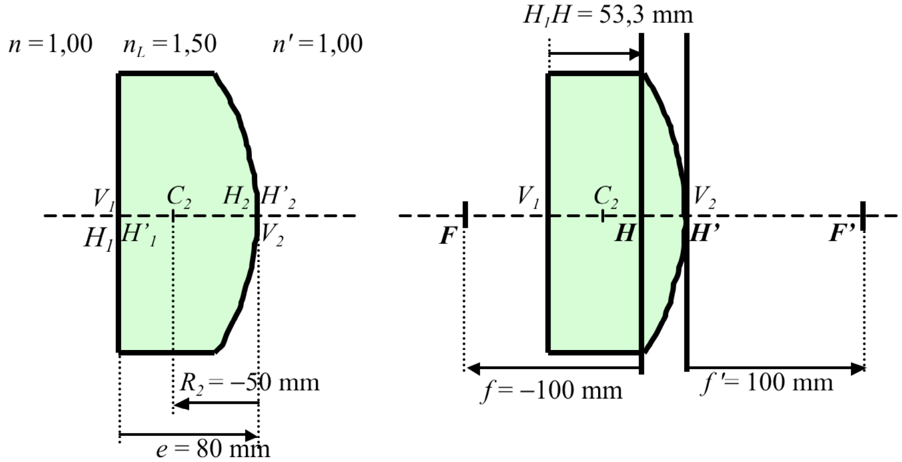


Figura 2

Procediendo como en el apartado anterior y teniendo en cuenta que $R_2 = \infty$:

$$P' = \frac{n'}{f'} = (n_L - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{(n_L - 1)^2}{n_L}\frac{e}{R_1 R_2} = -(n_L - 1)\frac{1}{R_2} = -(1{,}50 - 1)\frac{1}{-0.050} = 10{,}00 \text{ D.}$$

$$H'F' = f' = \frac{n'}{P'} = \frac{1{,}00}{10{,}0} = 0{,}100 \text{ m} = 100 \text{ mm.}$$

Dado que la lente está sumergida en aire ($n = n' = 1{,}00$):

$f = -f' = -100 \text{ mm} = HF$.

Posición de los planos principales:

$$V_1H = H_1H = -\frac{(n_L - 1)}{n_L}\frac{ef'}{R_2} = -\frac{(1{,}50 - 1)}{1{,}50}\cdot\frac{80 \cdot 100}{(-50)} = \frac{160}{3} = 53{,}3 \text{ mm}.$$

$$V_2H' = H_2'H' = -\frac{(n_L - 1)}{n_L}\frac{ef'}{R_1} = -\frac{(1{,}50 - 1)}{1{,}50}\cdot\frac{80 \cdot 100}{\infty} = 0 \text{ mm.}$$

Posición de los planos focales:

$$V_1F = V_1H + HF = \frac{160}{3} - 100 = -\frac{140}{3} = 46{,}7 \text{ mm.}$$

$$V_2F' = V_2H' + H'F' = 0 + 100 = 100 \text{ mm.}$$

La figura 2 muestra la posición de los elementos cardinales.

---

c) $R_1 = -R_2 = 100$ mm; $n_L = 1{,}50$.

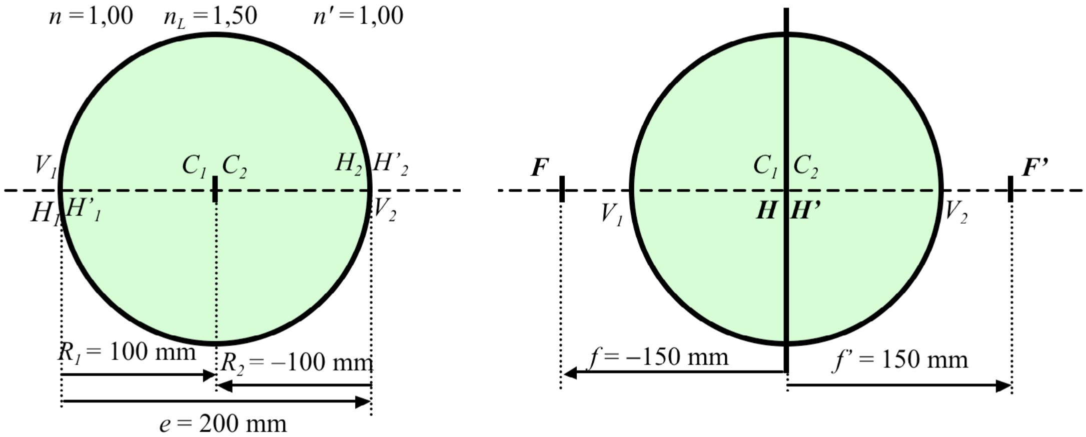


Figura 3

En este caso hallaremos directamente la distancia focal imagen de la lente gruesa a partir de la fórmula:

$$H'F' = f' = -\frac{n_L}{(n_L-1)}\frac{R_1R_2}{n_L(R_1-R_2)-(n_L-1)e}.$$

$$H'F' = f' = -\frac{1{,}50}{(1{,}50-1)}\cdot\frac{100\cdot(-100)}{1{,}5(100-(-100))-(1{,}50-1)200} = 150 \text{ mm.}$$

Dado que la lente está sumergida en aire ($n = n' = 1{,}00$):

$$f = -f' = -150 \text{ mm} = HF.$$

Posición de los planos principales:

$$V_1H = H_1H = \frac{e\cdot R_1}{n_L(R_1-R_2)-(n_L-1)e} = \frac{200\cdot 100}{1{,}50(100-(-100))-(1.5-1)200} = 100 \text{ mm.}$$

$$V_2H' = H_2'H' = \frac{e\cdot R_2}{n_L(R_1-R_2)-(n_L-1)e} = \frac{200\cdot(-100)}{1{,}50(100-(-100))-(1{,}50-1)200} = -100 \text{ mm.}$$

Posición de los planos focales:

$$V_1F = V_1H + HF = 100-150 = -50 \text{ mm.}$$
$$V_2F' = V_2H' + H'F' = -100 + 150 = 50 \text{ mm.}$$

La figura 3 muestra la posición de los elementos cardinales.

---

d) $V_1V_2 = 72$ mm; $R_1 = -R_2 = 300$ mm; $n = 1{,}50$.

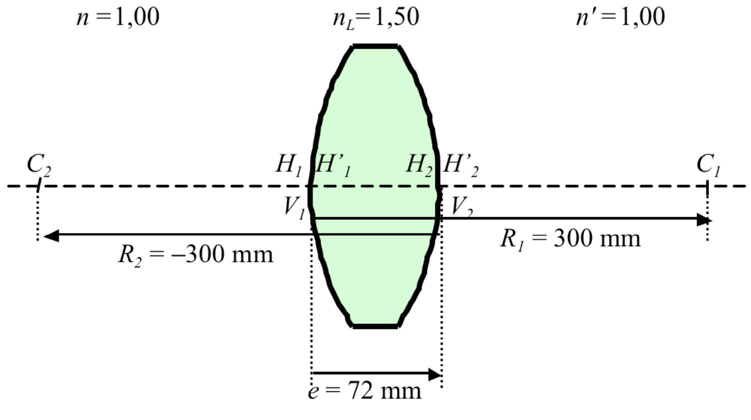


Figura 4

La distancia focal imagen de la lente gruesa será:

$$H'F' = f' = -\frac{n_L}{(n_L-1)}\frac{R_1R_2}{n_L(R_1-R_2)-(n_L-1)e}.$$

$$H'F' = f' = -\frac{1{,}50}{(1{,}50-1)}\cdot\frac{300\cdot(-300)}{1{,}50(300-(-300))-(1{,}50-1)72} = 312{,}5 \text{ mm.}$$

Dado que la lente está sumergida en aire ($n = n' = 1{,}00$):

$$f = -f' = -312{,}5 \text{ mm} = HF.$$

Posición de los planos principales:

$$V_1H = H_1H = \frac{e\cdot R_1}{n_L(R_1-R_2)-(n_L-1)e} = \frac{72\cdot 300}{1{,}50(300-(-300))-(1{,}50-1)72} = 25 \text{ mm.}$$

$$V_2H' = H_2'H' = \frac{e\cdot R_2}{n_L(R_1-R_2)-(n_L-1)e} = \frac{72\cdot(-300)}{1{,}50(300-(-300))-(1{,}50-1)72} = -25 \text{ mm.}$$

Posición de los planos focales:

$$V_1F = V_1H + HF = 25-312{,}5 = -287{,}5 \text{ mm.}$$
$$V_2F' = V_2H' + H'F' = -25 + 312{,}5 = 287{,}5 \text{ mm.}$$

La figura 5 muestra la posición de los elementos cardinales.

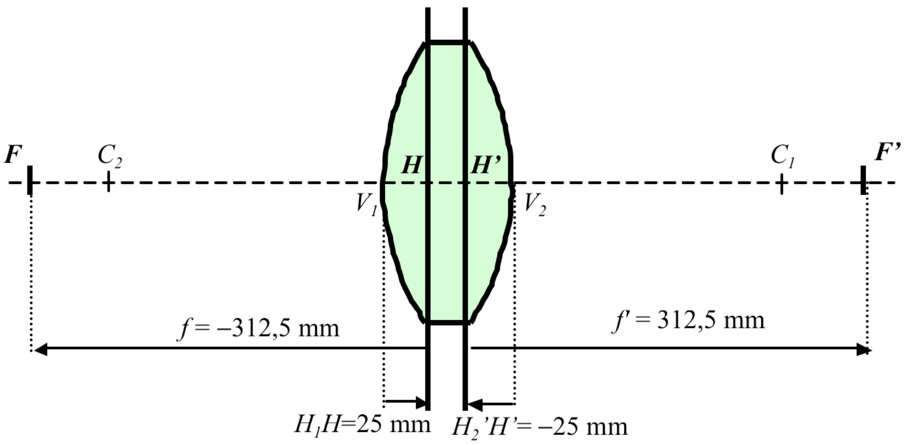
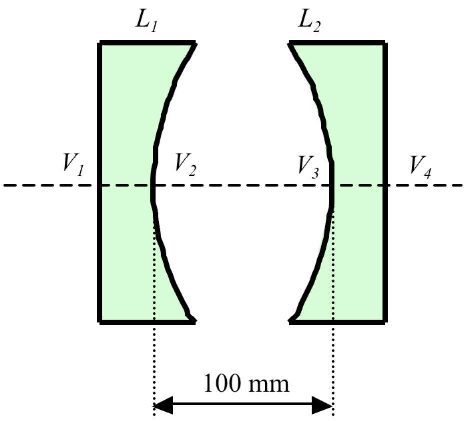


Figura 5

8. Se asocian dos lentes gruesas plano-cóncavas idénticas, L_1 y L_2, en aire, según se indica en la figura.



Teniendo en cuenta que:

$V_1V_2 = V_3V_4 = 30$ mm, $V_2V_3 = 100$ mm, $R_2 = -R_3 = 50$ mm y $n_{L1} = n_{L2} = 1{,}50$.

Determina las posiciones de los elementos cardinales de la asociación.

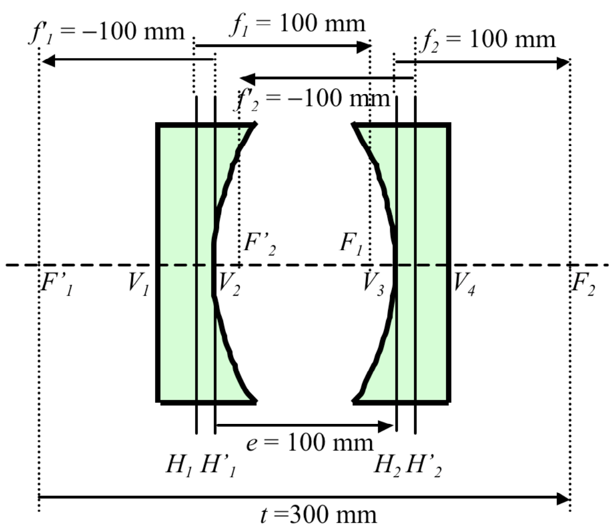
SOLUCIÓN:

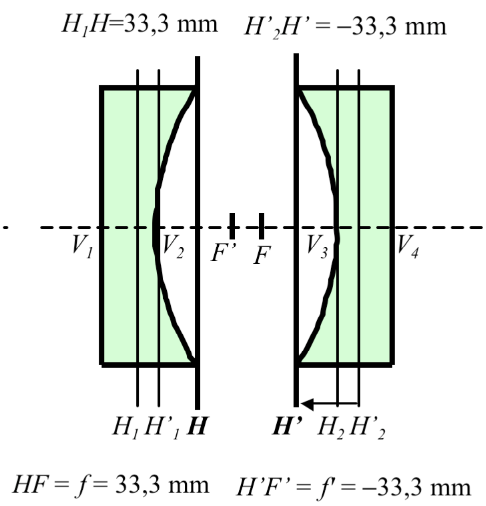
Considerando el apartado a) del problema anterior, las posiciones de los elementos cardinales y las distancias focales en cada lente son:

Lente L_1: $V_1H_1 = 20$ mm, $V_2H'_1 = 0$ mm, $V_1F_1 = 120$ mm y $V_2F'_1 = -100$ mm.
Lente L_2: $V_3H_2 = 0$ mm, $V_4H'_2 = -20$ mm, $V_3F_2 = 100$ mm y $V_4F'_2 = f'_2 = -120$ mm.

Determinación de la distancia t:

$t = F'_1F_2 = F'_1V_2 + V_2V_3 + V_3F'_2 = 100 + 100 + 100 = 300$ mm.





Focales de la asociación de lentes:

$$HF = f = \frac{f_1 f_2}{t} = \frac{100 \cdot 100}{300} = \frac{100}{3} = 33{,}3 \text{ mm.} \qquad f = -f' = -\frac{100}{3} = -33{,}3 \text{ mm} = H'F'.$$

$$H_1 H = \frac{e f_1}{t} = \frac{100 \cdot 100}{300} = \frac{100}{3} = 33{,}3 \text{ mm.}$$

$$H_2' H' = \frac{e f_2'}{t} = \frac{100 \cdot (-100)}{300} = -\frac{100}{3} = -33{,}3 \text{ mm} .$$

Las distancias respecto de los vértices V_1 y V_4, según se observa en la figura 1**,** serán:

$$V_1 H = V_1 H_1 + H_1 H = 20 + \frac{100}{3} = \frac{160}{3} = 53{,}3 \text{ mm} .$$

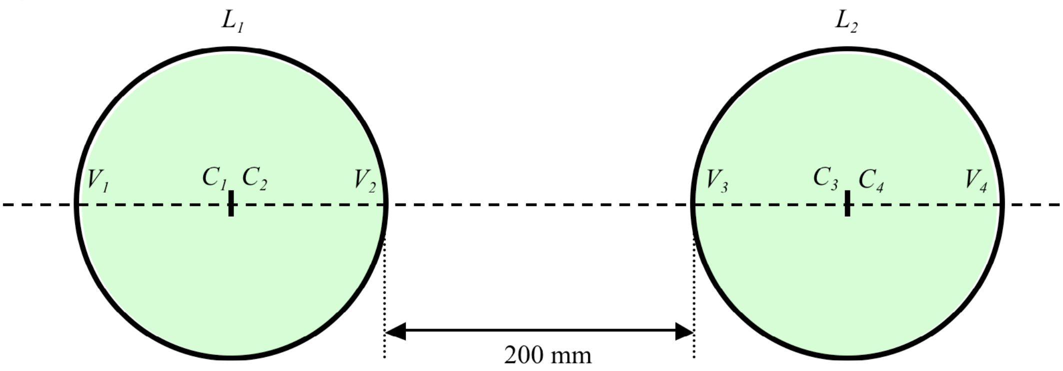
$$V_1 F = V_1 H + HF = \frac{160}{3} + \frac{100}{3} = \frac{260}{3} = 86{,}7 \text{ mm.}$$

$$V_4 H' = V_4 H'_2 + H'_2 H' = -20 - \frac{100}{3} = -\frac{160}{3} = -53{,}3 \text{ mm} .$$

$$V_4 F' = V_4 H' + H'F' = -\frac{160}{3} - \frac{100}{3} = -\frac{260}{3} = -86{,}7 \text{ mm} .$$

---

9. Se asocian dos lentes gruesas esféricas idénticas, L_1 y L_2, en aire, según se indica en la figura.



Teniendo en cuenta que:

$V_1V_2 = V_3V_4 = 200$ mm, $V_2V_3 = 200$ mm, $R_1 = -R_2 = R_3 = -R_4 = 100$ mm y $n_{L1} = n_{L2} = 1{,}50$.

Determina:
a) Las posiciones de los elementos cardinales de la asociación.
Un objeto de 10 mm de altura se situa delante de la lente L_1 de manera que $V_1O = -350$ mm.Determina:
b) La posición de la imagen.
c) El tamaño de la imagen.

SOLUCIÓN:

a) Considerando el apartado c) del problema 8, las posiciones de los elementos cardinales y las distancias focales en cada lente son:

Lente L_1:
$V_1H_1 = 100$ mm, $V_2H'_1 = -100$ mm, $V_1F_1 = -50$ mm y $V_2F'_1 = 50$ mm.

Lente L_2:
$V_3H_2 = 100$ mm, $V_4H'_2 = -100$ mm, $V_3F_2 = -50$ mm y $V_4F'_2 = 50$ mm.

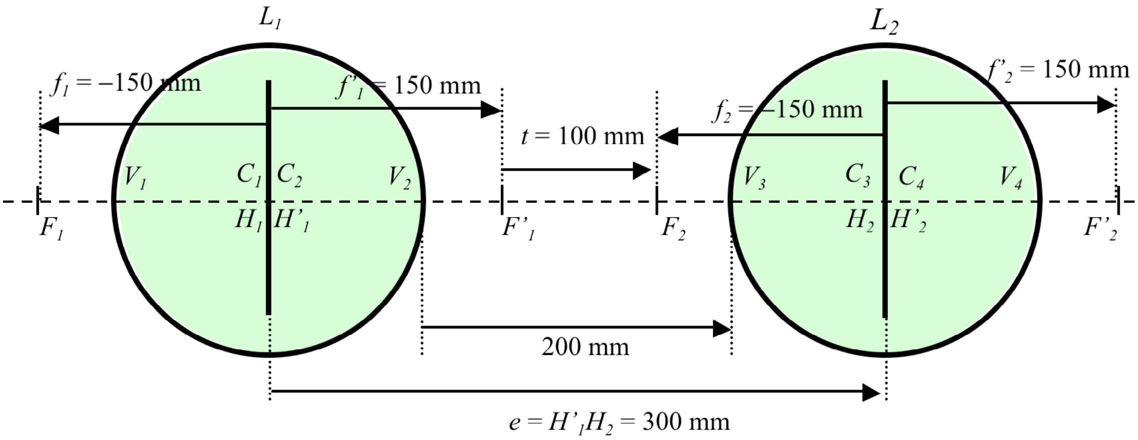


Figura 1

Determinación de la distancia t:

$t = F'_1F_2 = F'_1V_2 + V_2V_3 + V_3F'_2 = -50 + 200 - 50 = 100$ mm.

Las focales de la asociación de estas lentes, según las fórmulas de la asociación de sistemas ópticos son:

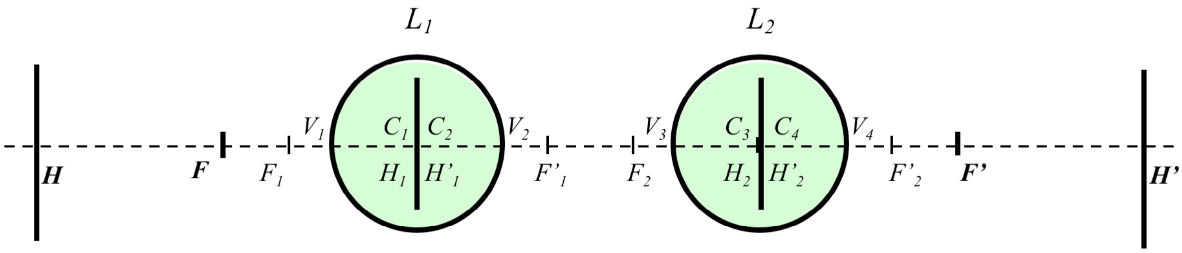
$$HF = f = \frac{f_1 f_2}{t} = \frac{(-150)\cdot 150}{100} = 225 \text{ mm.} \qquad f' = -f = -225 \text{ mm} = H'F'.$$

$$H_1H = \frac{ef_1}{t} = \frac{300(-150)}{100} = -450 \text{ mm.}$$

$$H_2'H' = \frac{ef_2'}{t} = \frac{300\cdot 150}{100} = 450 \text{ mm}.$$

Las distancias respecto de los vértices V_1 y V_4, según se observa en la figura 1, serán:

$$V_1H = V_1H_1 + H_1H = 100 - 450 = -350 \text{ mm.}$$
$$V_1F = V_1H + HF = -350 + 225 = -125 \text{ mm.}$$
$$V_4H' = V_4H'_2 + H'_2H' = -100 + 450 = 350 \text{ mm..}$$
$$V_4F' = V_4H' + H'F' = 350 - 225 = 125 \text{ mm.}$$



b) $V_1O = V_1H = -350$ mm. El objeto está situado en el plano principal objeto del sistema. La imagen estará en el plano principal imagen del sistema:

$V_4O' = V_4H' = 350$ mm.

c) Por la propiedad de los planos principales: $m = +1$. Lo que significa que $y' = 10$ mm. La imagen es derecha y del mismo tamaño que el objeto.

---

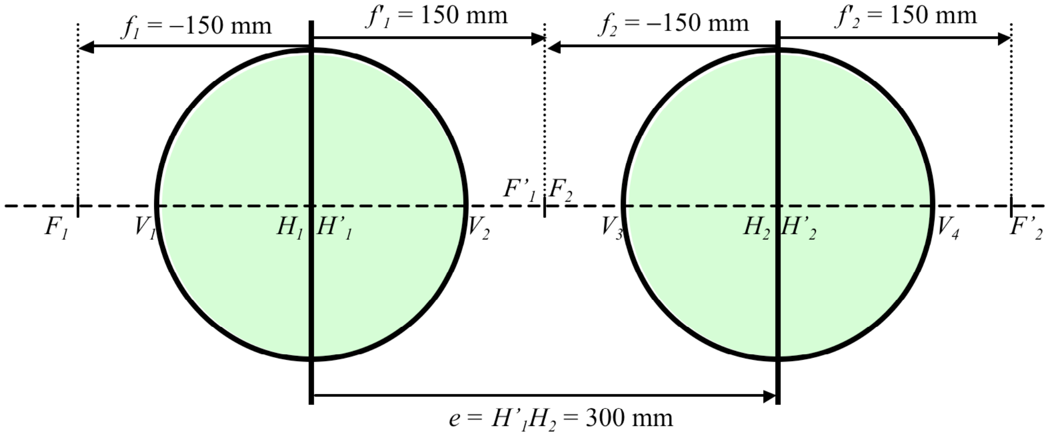
10. Sean las lentes L_1 y L_2 del ejercicio anterior. Determina la distancia V_2V_3 de manera que el sistema sea afocal.

SOLUCIÓN:

a) Teniendo en cuenta el apartado c) del problema 8, las posiciones de los elementos cardinales y las distancias focales en cada lente son:

Lente L_1:
$V_1H_1 = 100$ mm, $V_2H'_1 = -100$ mm, $V_1F_1 = -50$ mm y $V_2F'_1 = 50$ mm.

Lente L_2:
$V_3H_2 = 100$ mm, $V_4H'_2 = -100$ mm, $V_3F_2 = -50$ mm y $V_4F'_2 = 50$ mm.



A partir de:

$$F'_1F_2 = t = e - f'_1 + f_2 \,;$$

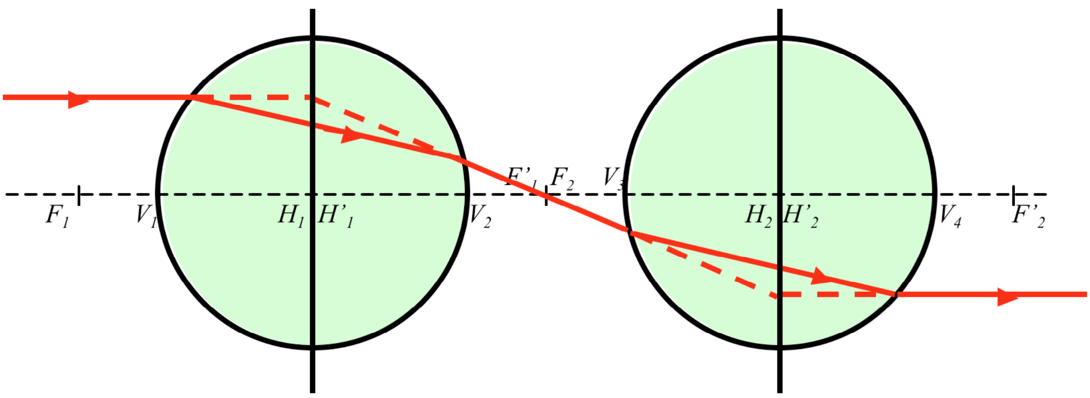
Por ser el sistema afocal: $t = 0$. Substituyendo t en la ecuación anterior y despejando e se obtiene:

$e = f'_1 - f_2 = 150 - (-50) = 300 \text{ mm} = H'_1H_2$.

Lo que significa que:

$V_2V_3 = V_2H'_1 + H'_1H_2 + H_2V_3 = -100 + 300 - 100 = 100$ mm .

La trayectoria de un rayo de luz que incide paralelo al eje será:



11. Un sistema está formado por dos lentes delgadas, L_1 y L_2, sumergidas en aire y separadas una distancia de 600 mm de manera que la potencia de la primera lente es cinco veces mayor que la potencia de la segunda. Determina la potencia de cada lente si:

a) La potencia del sistema es de 2,25 D.

b) La potencia del sistema es de –3,75 D.

b) El sistema es afocal.

SOLUCIÓN:

a) De la fórmula de Gullstrand:

$$P' = P'_1 + P'_2 - \frac{e}{n'_1} P'_1 \, P'_2 .$$

Teniendo en cuenta que $n'_1 = 1$, $e = 600$ mm = 0,600 m y que $P' = 2{,}25$ D, resulta:

$$2{,}25 = P'_1 + P'_2 - 0{,}600 P'_1 \, P'_2 . \qquad (1)$$

Por otra parte, las potencias de las lentes están relacionas según:

$$P'_1 = 5\, P'_2 \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene:

$$2{,}25 = 5P'_2 + P'_2 - 0{,}60\,(5)\, P'_2 \, P'_2$$

$$2{,}25 = 6P'_2 - 3\, P'^2_2$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$3\, P'^2_2 - 6P'_2 + 2{,}25 = 0$$

$$P'_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(2{,}25)}}{2(3)} = \frac{6 \pm \sqrt{9}}{6} = \frac{6 \pm 3}{6}$$

Las soluciones de la ecuación anterior son:

$P'_{21} = 1{,}5$ D y $P'_{22} = 0{,}5$ D.

Las potencias correspondientes a la primera lente serán: $P'_{11} = 7{,}5$ D y $P'_{12} = 2{,}5$ D.

Existen dos configuraciones que cumplen la ecuación anterior:

$P'_{11} = 7{,}5$ D y $P'_{21} = 1{,}5$ D.

$P'_{12} = 2{,}5$ D y $P'_{22} = 0{,}5$ D.

b) Procediendo del mismo modo que en el caso anterior se obtiene:

$$-3{,}75 = 6P'_2 - 3\,P'^2_2 .$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$3\,P'^2_2 - 6P'_2 - 3{,}75 = 0 .$$

$$P'_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(-3{,}75)}}{2(3)} = \frac{6 \pm \sqrt{81}}{6} = \frac{6 \pm 9}{6}$$

Las soluciones de la ecuación anterior son:

$P'_{21} = 2{,}5$ D y $P'_{22} = -0{,}5$ D.

Las potencias correspondientes a la primera lente serán: $P'_{11} = 12{,}5$ D y $P'_{12} = -2{,}5$ D.

Existen dos configuraciones que cumplen la ecuación anterior:

$P'_{11} = 12{,}5$ D y $P'_{21} = 2{,}5$ D.

$P'_{12} = -2{,}5$ D y $P'_{22} = -0{,}5$ D.

c) Por ser el sistema afocal $P' = 0$ D.

Procediendo del mismo modo que en el caso anterior se obtiene:

$$0 = 6P'_2 - 3\,P'^2_2$$

Sacando factor común se obtiene:

$$0 = 3P'_2\,(2 - P'_2)$$

La ecuación tiene dos soluciones, la primera es la solución trivial que es $P'_2 = 0$.

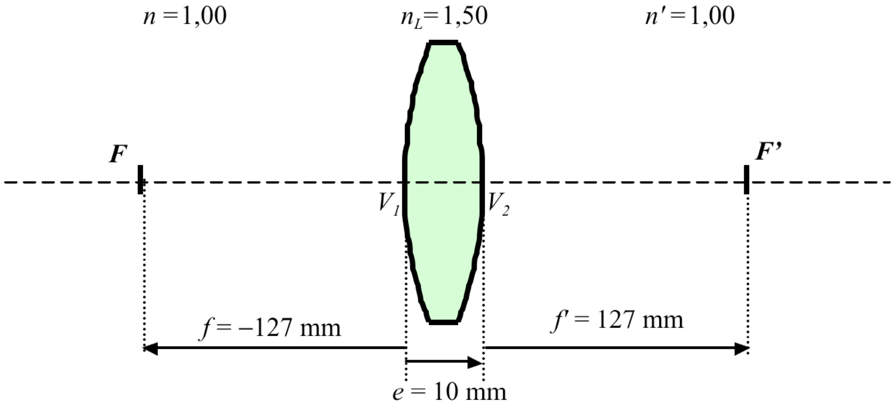
La segunda solución viene de resolver la ecuación: $2 - P'_2 = 0$, por lo que la solución es:

$$P'_2 = 2 \text{ D}.$$

La potencia de la primera lente, en este caso, será $P'_1 = 10$ D.

12. Una lente gruesa biconvexa, de índice n_L = 1,60 está sumergida en aire. La potencia de cada una de las superficies que la forman es de 4,00 D y su grosor es $e = V_1V_2$ = 10 mm. Determina:
a) La potencia de la lente.
b) La focal de la lente.
c) La potencia efectiva o de vértice posterior.
d) La focal efectiva o de vértice posterior.
e) La potencia neutralizante o de vértice anterior.
f) La focal neutralizante o de vértice anterior.

SOLUCIÓN:



a) La potencia de la lente se determinará mediante la fórmula de Gullstrand:

$$P' = P'_1 + P'_2 - \frac{e}{n'_1} P'_1 P'_2 .$$

Donde P'_1 es la potencia del primer dioptrio que forma la lente, P'_1 = 4,00 D.

P'_2 es la potencia del segundo dioptrio que forma la lente, P'_2 = 4,00 D.

e es la separación entre dioptrios (grosor de la lente), e = 10 mm = 0,010 m.

n'_1 el índice del medio que separa los dioptrios 1 y 2, $n'_1 = n_L$ = 1,60.

$$P' = 4{,}00 + 4{,}00 - \frac{0{,}01}{1{,}60} 4{,}00\left(4{,}00\right) = 7{,}90\ \mathrm{D} .$$

b) Las distancias focales serán:

$$H'F' = f' = \frac{n'}{P'} = \frac{1{,}00}{7{,}90} = 0{,}127\ \mathrm{m} = 127\ \mathrm{mm}. \qquad HF = f = -f' = -127\ \mathrm{mm}.$$

c) La potencia efectiva o de vértice posterior P'_p vale:

$$P'_p = \frac{P'}{1 - \dfrac{e}{n_L} P'_1} = \frac{P'}{1 - \bar{e}P'_1}.$$

Donde P' es la potencia de la lente, e es el grosor de la lente y n_L el índice de la lente.

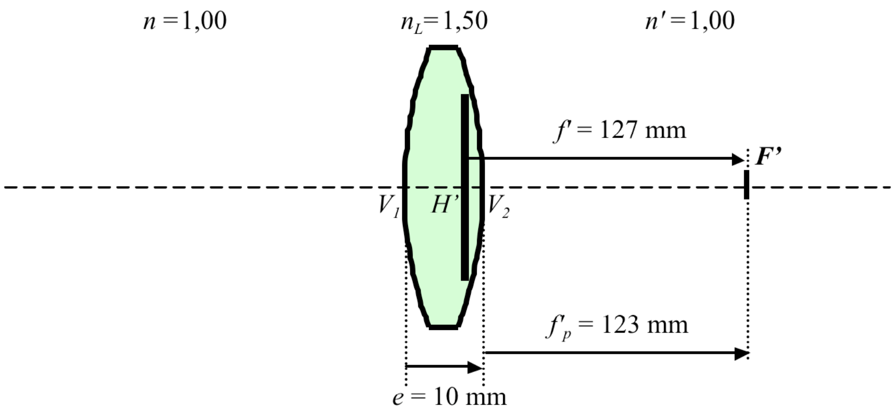
$$P'_p = \frac{P'}{1 - \dfrac{e}{n_L} P'_1} = \frac{7{,}90}{1 - \dfrac{0{,}01}{1{,}60} 4{,}00} = 8{,}10 \text{ D}.$$

d) La focal efectiva o de vértice posterior $V_2F' = f'_p$ vale:

$$V_2F' = f'_p = \frac{n'}{P'_p} = \frac{1{,}00}{8{,}10} = 0{,}123 \text{ m} = 123 \text{ mm}.$$

A partir de los datos anteriores puede determinarse la posición del plano principal H'.

$$V_2F' = V_2H' + H'F';$$
$$V_2H' = V_2F' - H'F';$$
$$V_2H' = 123 - 127 = -4 \text{ mm}.$$



e) La potencia neutralizante o de vértice anterior P'_n vale:

$$P_n = \frac{P}{1 + \dfrac{e}{n_L} P_2} = \frac{P}{1 + \bar{e}P_2}.$$

En este caso $P = -P' = -7{,}90$ D; $\quad P_2 = -P'_2 = -4{,}00$ D.

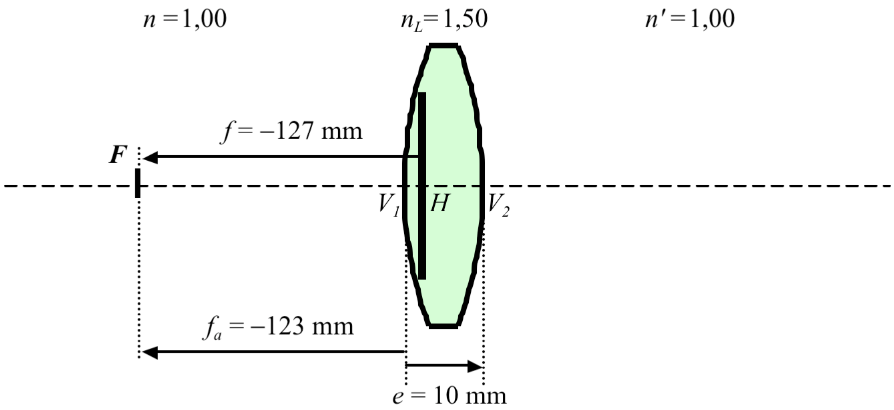
$$P_n = \frac{P}{1 + \dfrac{e}{n_L} P_2} = \frac{-7{,}90}{1 + \dfrac{0{,}010}{1{,}60}(-4{,}00)} = -8{,}10 \text{ D}.$$

f) La focal neutralizante o de vértice anterior $V_1F = f'_n$ vale:

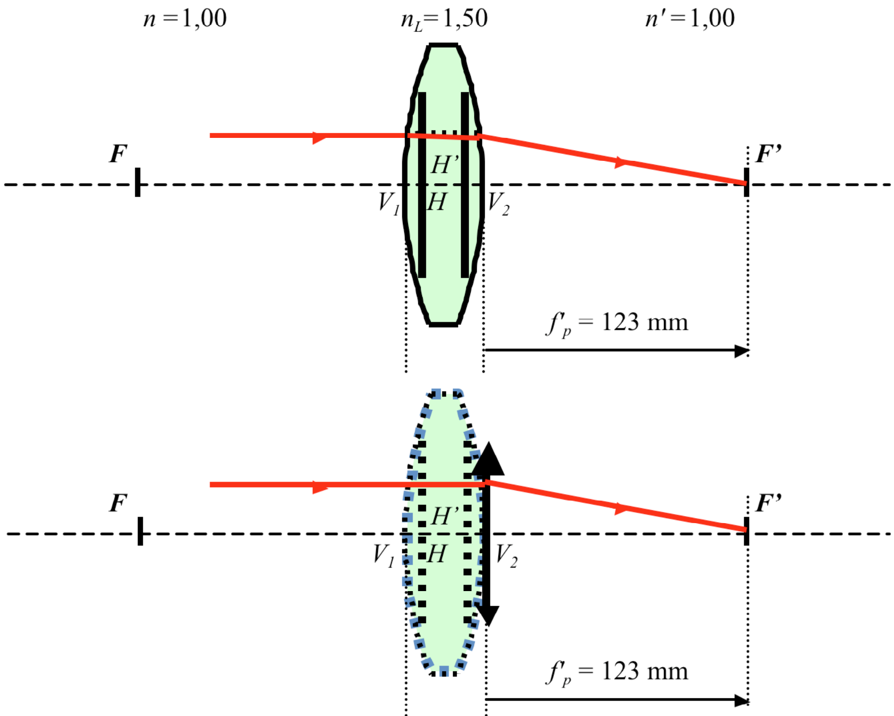
$$V_1F = f'_n = \frac{n}{P_n} = \frac{1{,}00}{-8{,}10} = -0{,}123 \text{ m} = -123 \text{ mm}.$$

A partir de los datos anteriores puede determinarse la posición del plano principal H.

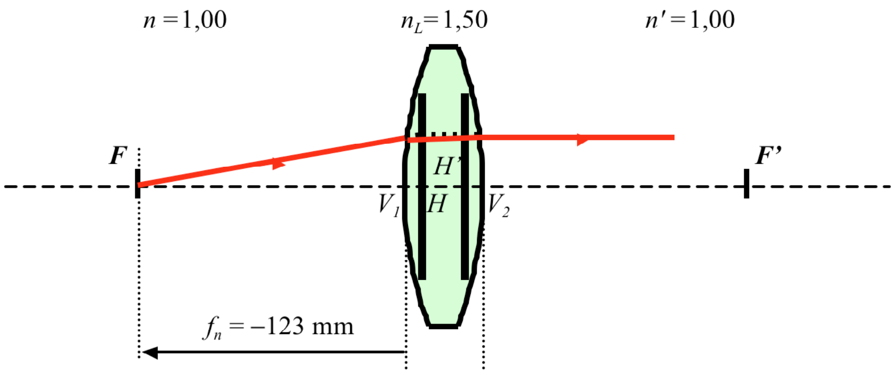
$$V_1F = V_1H + HF;$$
$$V_1H = V_1F - HF$$
$$V_1H = -123 - (-127) = 4 \text{ mm}.$$

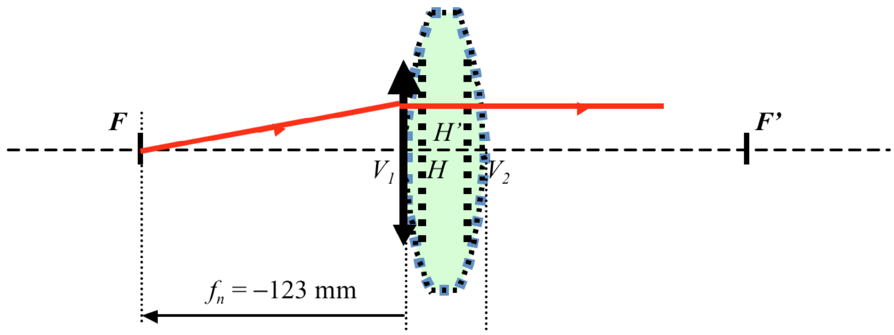


Significado de la focal efectiva o de vértice posterior:



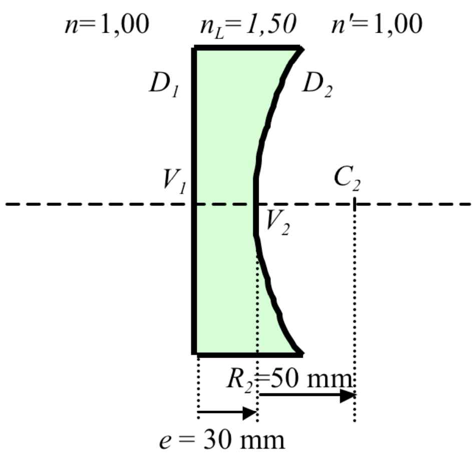
Significado de focal neutralizante o de vértice anterior:





---

13. Sea la lente gruesa de la figura de las siguientes características:
$V_1V_2 = 30$ mm; $R = 50$ mm; $n_L = 1{,}50$.
Determina:
a) La focal de la lente.
b) La potencia de la lente.
c) La focal efectiva o de vértice posterior.
d) La potencia efectiva o de vértice posterior.
e) La focal neutralizante o de vértice anterior.
f) La potencia neutralizante o de vértice anterior.



SOLUCIÓN:

Del apartado a) del ejercicio 7 sabemos que:

V_1H=20 mm, V_2H'=0 mm, V_1F = 120 mm, V_2F' =–100 mm; P' = –10,0 D;
$H'F'$ = –100 mm.

a) $f' = H'F'$ = 100 mm = 0,100 m.

b) P' = –10,0 D.

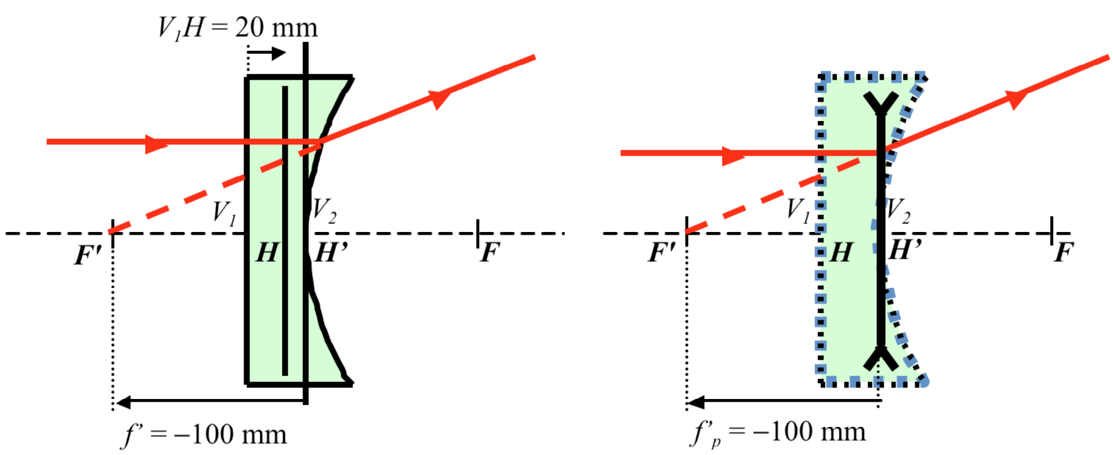
c) $f'_p = V_2F'$ = –100 mm = –0,100 m.

d) $P'_p = \dfrac{n'}{f'_p} = \dfrac{1{,}00}{-0{,}100} = -10{,}0$ D.

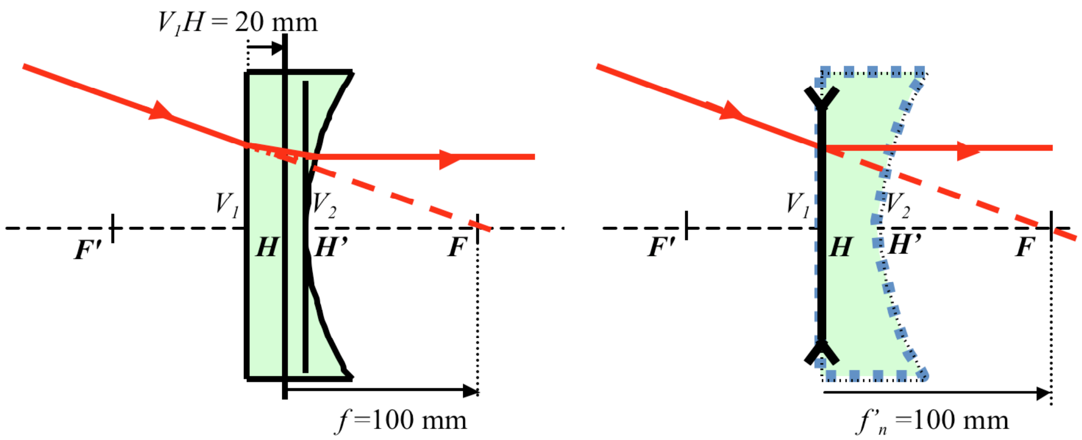
e) $f_n = V_1F$ = 120 mm = 0,120 m.

f) $P_n = \dfrac{n}{f_n} = \dfrac{1{,}00}{0{,}120} = \dfrac{5}{6} = 8{,}33$ D.

Significado de la focal efectiva o de vértice posterior



Significado de la focal neutralizante o de vértice anterior:



14. Sea el bloque de vidrio equiconvexo de la figura, sumergido en aire, en el que se ha espejado su cara posterior. Sabiendo que R_1 = 100 mm, R_2 = –100 mm y V_1V_2 = 150 mm. Determina:

a) La posición del espejo equivalente.

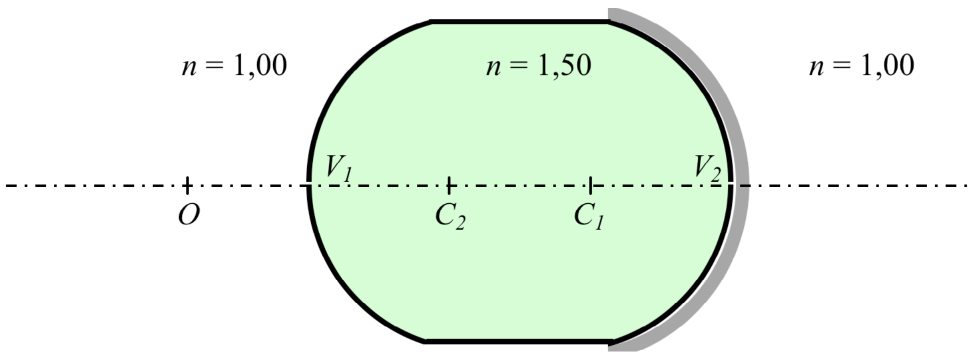
b) La posición de los elementos cardinales del sistema.

Un objeto está situado a la distancia V_1O = –40 mm.

Determina:

c) La posición de la imagen final (V_1O') que forma el sistema de la figura.

d) El aumento lateral de dicho sistema.



SOLUCIÓN:

a) Posición del vértice, V_{eq}, del espejo equivalente:

Su posición es la del conjugado objeto de V_2 a través del primer dioptrio.

De la ecuación del dioptrio esférico:

$$n\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{s}\right)=n'\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{s'}\right); \quad n = 1;\ R = 100 \text{ mm};\ n' = 1{,}50;\ s' = V_1V_2 = 150 \text{ mm}.$$

$$1{,}00\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{s}\right)=1{,}50\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{150}\right); \qquad \frac{1{,}00}{100}-\frac{1{,}00}{s}=\frac{1{,}50}{100}-\frac{1{,}50}{150};$$

$$\frac{1{,}00}{s}=\frac{1{,}00}{100}-\frac{1{,}50}{100}+\frac{1{,}50}{150}=\frac{3{,}00-4{,}50+3{,}00}{300}=\frac{1{,}50}{300}; \qquad s=V_1V_{eq}=200 \text{ mm.}$$

Posición del centro, C_{eq}, del espejo equivalente:

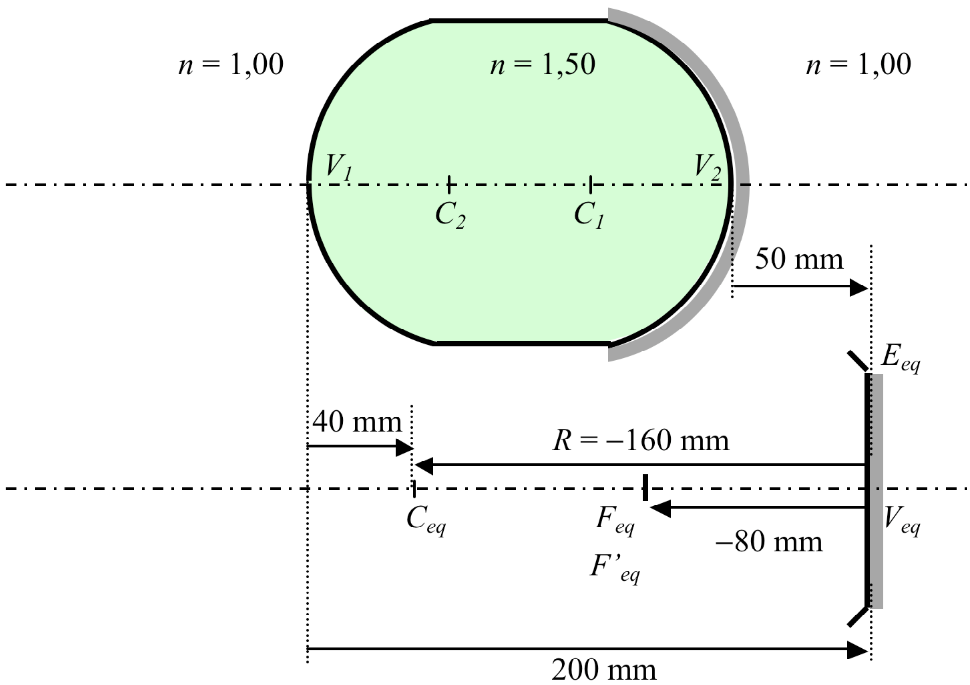
Su posición es la del conjugado objeto de C_2 a través del primer dioptrio.

$$n\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{s}\right)=n'\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{s'}\right); \quad n=1{,}00;\ R=100 \text{ mm};\ n'=1{,}50;\ s'=50 \text{ mm.}$$

$$1{,}00\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{s}\right)=1{,}50\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{50}\right); \qquad \frac{1}{10}-\frac{1}{s}=\frac{1{,}5}{10}-\frac{1{,}5}{5};$$

$$\frac{1}{s}=\frac{1{,}00}{100}-\frac{1{,}50}{100}+\frac{1{,}50}{50}=\frac{1{,}00-1{,}50+3{,}00}{100}=\frac{2{,}50}{100}; \qquad s=V_1C_{eq}=40 \text{ mm.}$$

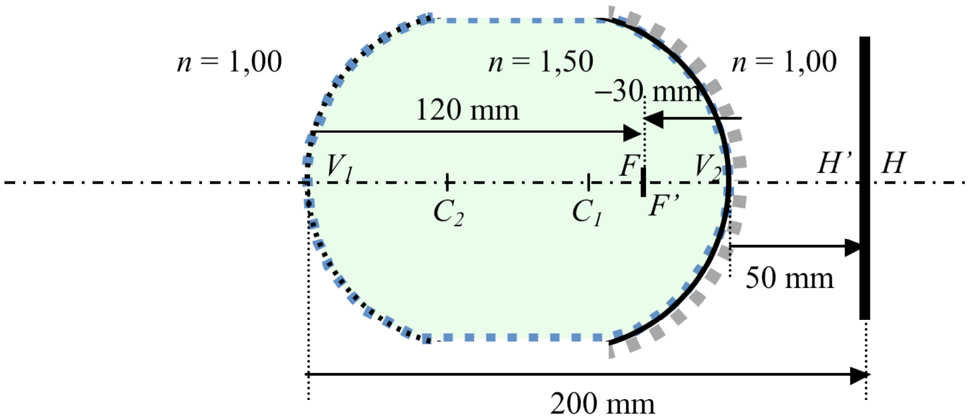
Así pues el sistema anterior es equivalente al espejo siguiente:



b) Los elementos cardinales del sistema coinciden con los del espejo equivalente E_{eq}.

De este modo:

$V_1H = V_1V_{eq} = 200$ mm.
$V_2H' = V_2V_1 + V_1H' = V_2V_1 + V_1H = -150 + 200 = 50$ mm.
$V_1F = V_1H + HF = 200 - 80 = 120$ mm.
$V_2F' = V_2H' + H'F' = 50 - 80 = -30$ mm.



c) Para determinar la imagen de O se busca la posición de ésta a través del espejo equivalente.

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}, \quad s = -240 \text{ mm}, \quad R = -160 \text{ mm}.$$

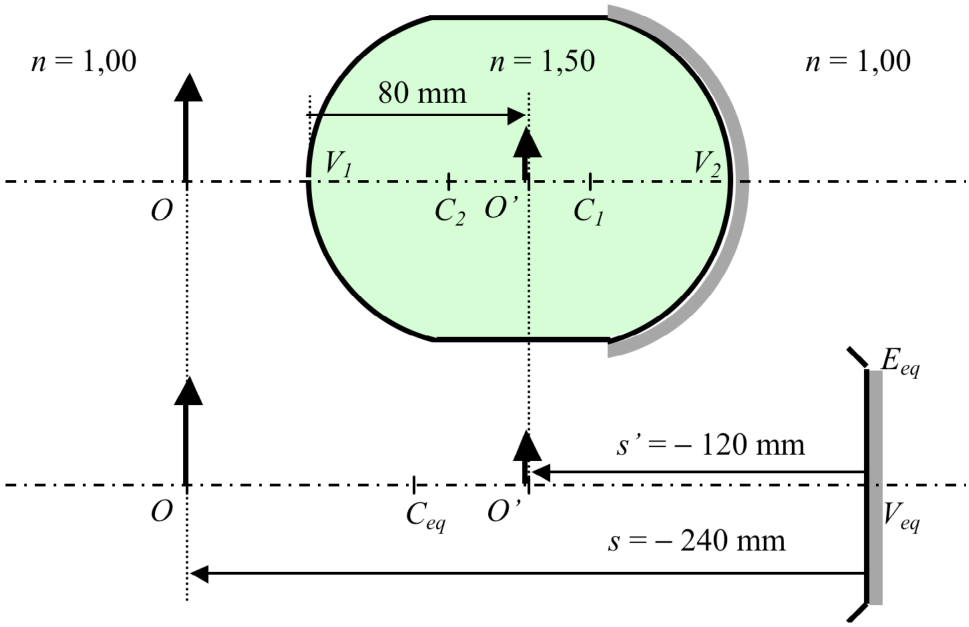
$$\frac{1}{-240} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{-160}; \quad \frac{1}{s'} = -\frac{2}{160} + \frac{1}{240} = \frac{-6+2}{480} = -\frac{4}{480};$$

$s' = V_{eq}O' = -120$ mm.

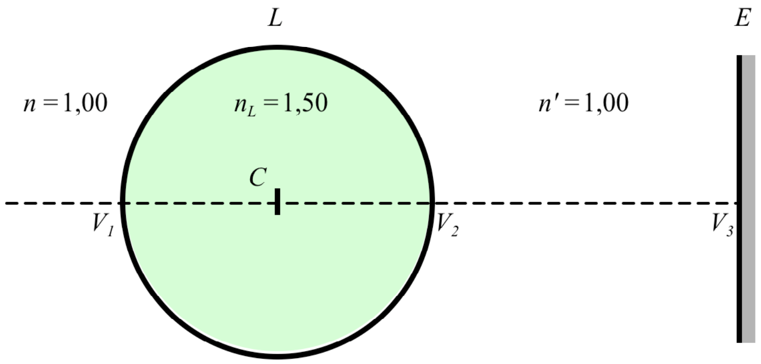
La posición de la imagen final respecto del vértice V_1 es:

$V_1O' = V_1V_{eq} + V_{eq}O' = 200 - 120 = 80$ mm.

d) El aumento que da el espejo equivalente es: $m = -\dfrac{s'}{s} = -\dfrac{-120}{-240} = -\dfrac{1}{2}$.



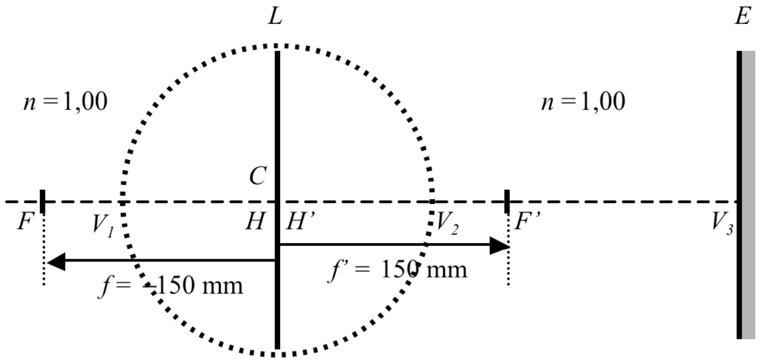
15. Sea el sistema de la figura formado por la asociación de una lente esférica L de índice $n_L = 1{,}50$ y radio $R = 100$ mm y un espejo plano E.
Teniendo en cuenta que: $V_1V_2 = 200$ mm y $V_2V_3 = 200$ mm.



Determina:
a) La posición del espejo equivalente.
b) La posición de los elementos cardinales del sistema.
Un objeto está situado a la distancia $V_1O = -50$ mm.
Determina:
c) La posición de la imagen final (V_1O') que forma el sistema de la figura.
d) El aumento lateral de dicho sistema.

SOLUCIÓN:

a) Teniendo en cuenta el apartado c) del problema 8, el sistema es equivalente a:



Posición del vértice, V_{eq}, del espejo equivalente:

Su posición es la del conjugado objeto de V_3 a través del la lente esférica.

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f'};\qquad a' = 400 \text{ mm},\ f' = 150 \text{ mm}.$$

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{400}=\frac{1}{150};\qquad \frac{1}{a}=\frac{1}{400}-\frac{1}{150}=\frac{3-8}{1200}=-\frac{5}{1200};\quad a = HV_{eq} = -240 \text{ mm}.$$

$$V_1V_{eq} = V_1H + HV_{eq} = 100 - 240 = -140 \text{ mm}.$$

Posición del centro, C_{eq}, del espejo equivalente:

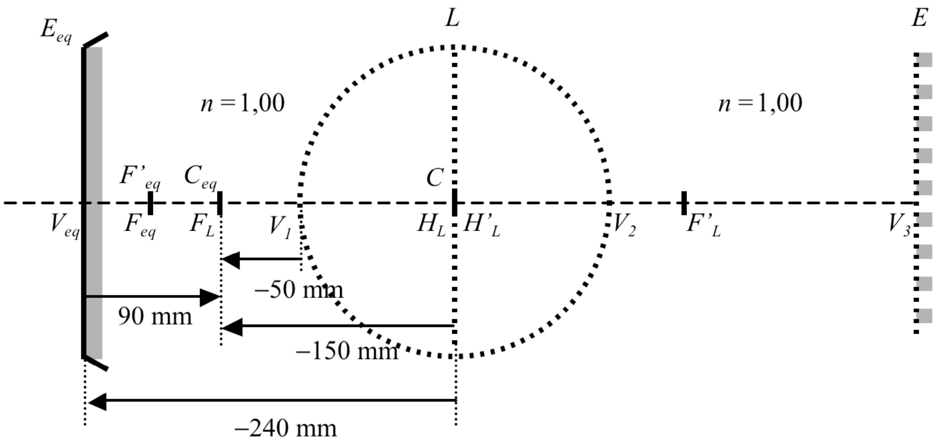
$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f'};\qquad a' = \infty \text{ mm},\quad f' = 150 \text{ mm}.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior: $a = HC_{eq} = -150$ mm.

$$V_1C_{eq} = V_1H + HC_{eq} = 100 - 150 = -50 \text{ mm}.$$

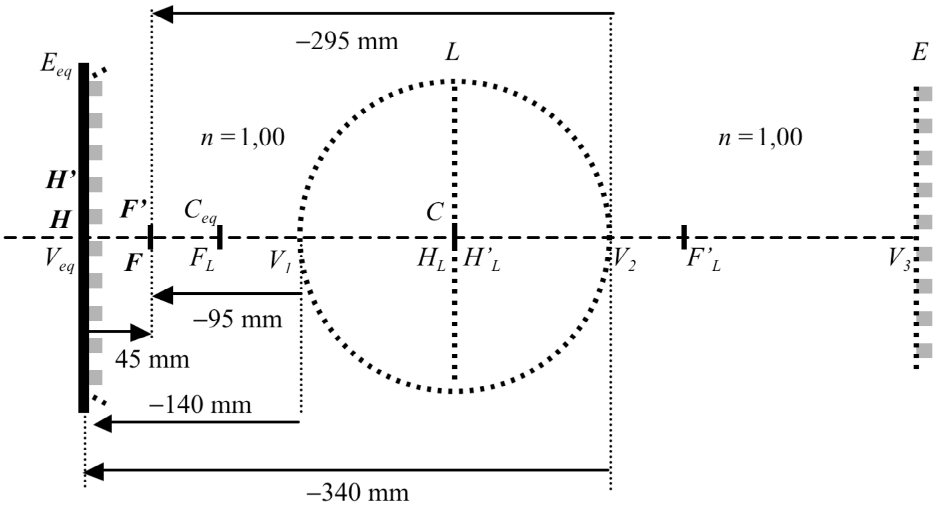
$$R_{eq} = V_{eq}C_{eq} = V_{eq}V_1 + V_1C_{eq} = 140 - 50 = 90 \text{ mm}.$$

$$V_{eq}F = f = \frac{R_{eq}}{2} = \frac{90}{2} = 45 \text{ mm};\qquad V_{eq}F' = f' = \frac{R_{eq}}{2} = 45 \text{ mm}.$$



b) Los elementos cardinales del sistema coinciden con los del espejo equivalente E_{eq}.

$V_1H = V_1V_{eq} = -140$ mm.
$V_2H' = V_2V_1 + V_1H' = V_2V_1 + V_1H = -200 - 140 = -340$ mm.
$V_1F = V_1H + HF = -140 + 45 = -95$ mm.
$V_2F' = V_2H' + H'F' = -340 + 45 = -295$ mm.

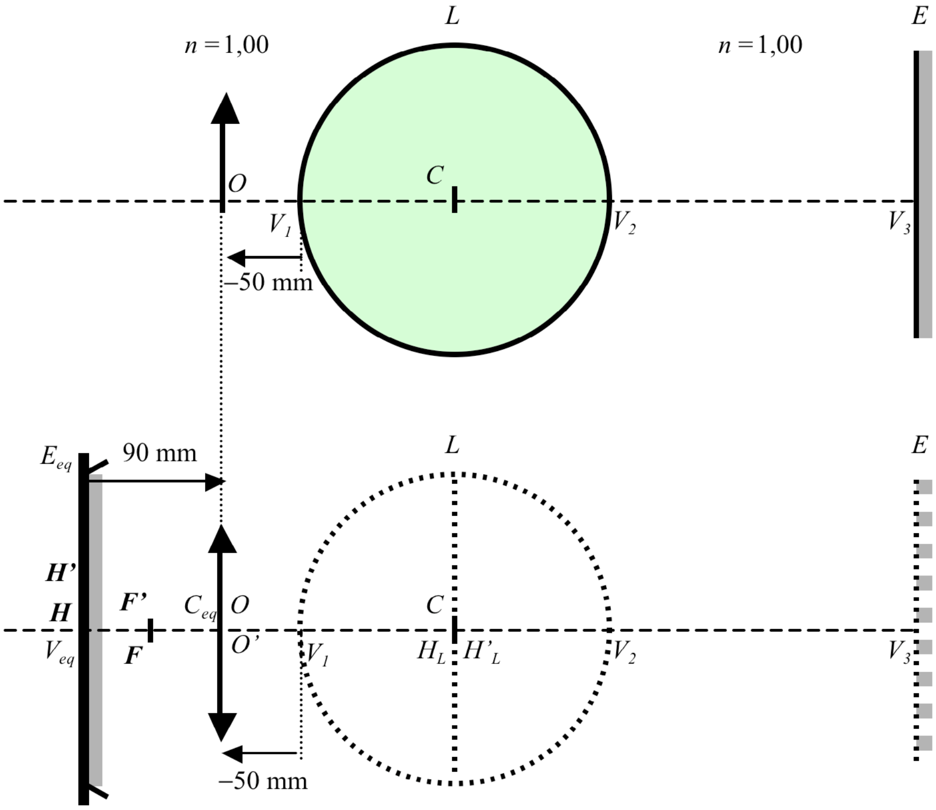


c) Para determinar la imagen de O se busca la posición de ésta a través del espejo equivalente.

Notemos que $V_1O = V_1C_{eq} = -50$ mm, lo que significa que la imagen estará en la misma posición $V_1O' = V_1C_{eq} = -50$ mm.

d) El aumento será $m = -1$.

La imagen final será real, invertida y del mismo tamaño que el objeto.


L
E
n = 1,00
n = 1,00
O
C
V1
V2
V3
–50 mm
Eeq
90 mm
L
E
H'
H
F'
Ceq
O
C
Veq
F
O'
V1
HL
H'L
V2
V3
–50 mm