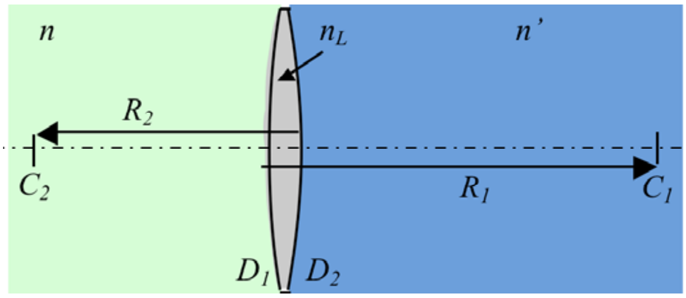
PROBLEMAS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA E INSTRUMENTAL

Unidad 8: Lentes delgadas

Jaume Escofet

UNIDAD 8. PROBLEMAS

1. Sea una lente delgada de índice n_L, sumergida en un medio anterior de índice n y un medio posterior de índice n' cuyos radios anterior y posterior son respectivamente R_1 y R_2 según se muestra en el esquema siguiente:



Para cada uno de los casos que se muestran a continuación.
a) Esquematiza la lente descrita.
Determina:
b) La potencia de cada dioptrio (P'_1 y P'_2) que constituye la lente.
c) Las potencias objeto P e imagen P' de la lente.
d) Las focales objeto f e imagen f' de la lente.

	n_L	n	n'	R_1 (mm)	R_2 (mm)
1.	1,50	1,00	1,30	500	–125
2.	1,50	1,00	1,80	500	–125
3.	1,50	1,00	1,30	–125	500
4.	1,50	1,00	1,80	–125	500
5.	1,50	1,00	1,00	500	–125
6.	1,50	1,00	1,00	–500	125
7.	1,50	1,00	1,00	500	∞
8.	1,50	1,00	1,00	∞	500
9.	1,50	1,00	1,00	125	500
10.	1,50	1,00	1,00	500	125
11.	1,50	1,30	1,30	500	125
12.	1,50	1,30	1,30	500	∞
13.	1,50	1,80	1,80	500	125
14.	1,50	1,80	1,80	500	∞
15	1,50	1,80	1,30	500	–125

2. Una lente de índice n_L sumergida en un medio de índice n tiene una potencia P'. Se sumerge la lente anterior en un medio de índice n'. Demuestra que la nueva potencia P'_N de la lente es:

$$P'_N = \frac{(n_L - n')}{(n_L - n)} P' .$$

---

3. Sean P' y f' los valores de la potencia y la focal de una lente delgada de indice $n_L = 3/2$ sumergida en aire. Determina los nuevos valores de la potencia, P'_N, y de la distancia focal, f'_N, cuando dicha lente se sumerge en agua ($n' = 4/3$).

R/ $P'_N = P'/3$, $f'_N = 4f'$.

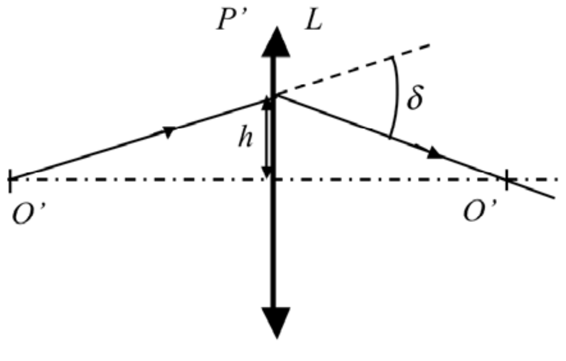
---

4. El cristalino del ojo humano puede modelizarse como una lente delgada de índice 1,400 y 19,0 D de potencia sumergida en un medio de índice $n = 1{,}336$ (humor acuoso). Determina:
a) La potencia del cristalino cuando se sumerge en aire.
b) La focal del cristalino cuando se sumerge en el humor acuoso.
c) La focal del cristalino cuando se sumerge en aire.

R/ a) $P'_N = 119$ D; b) $f' = 70{,}3$ mm; c) $f'_N = 8{,}40$ mm.

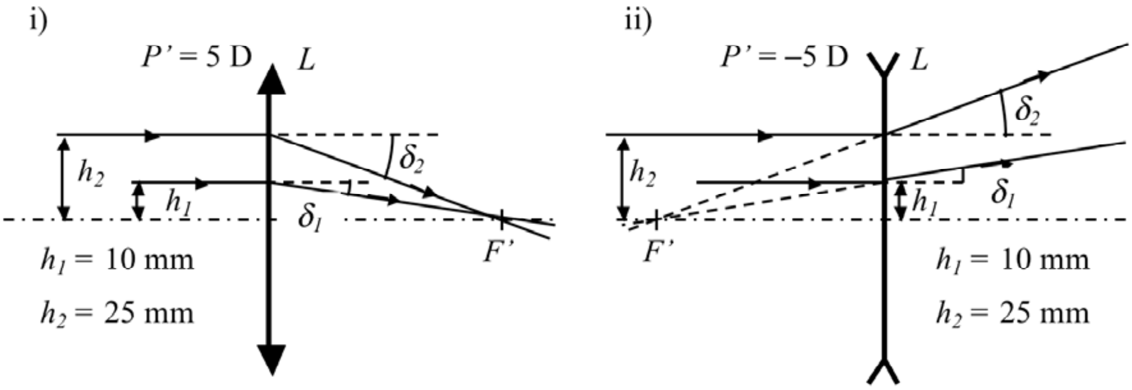
---

5. Demuestra que en una lente delgada sumergida en aire la desviación, δ, entre el rayo incidente y el rayo emergente cumple la condición $\delta = P'h$ (regla de Prentice). Dónde P' es la potencia de la lente y h la altura de incidencia del rayo.



---

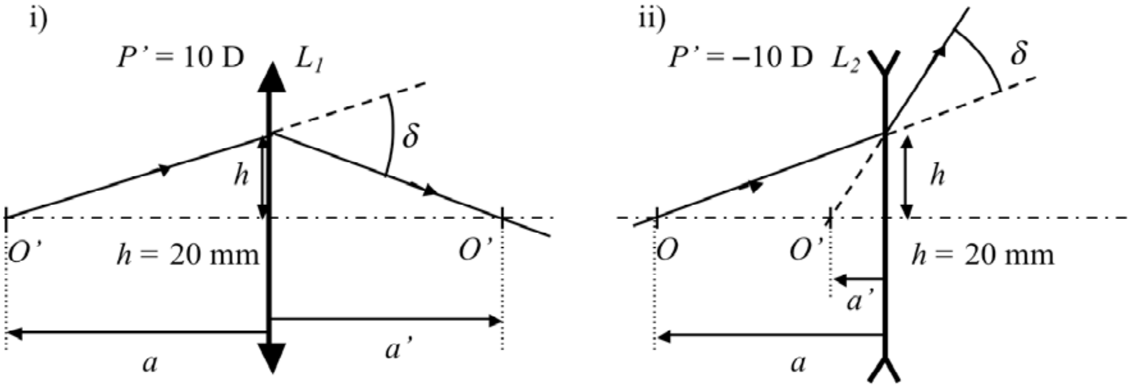
6. Considera las lentes de la figura sumergidas en aire. Determina en cada caso:
a) La desviación δ_1 y δ_2 del rayo incidente.
b) La potencia prismática asiciada a las desviaciones anteriores.



R/ δ_1 = 0,05 rad; δ_2 = 0,125 rad; δ_3 = –0,05 rad; δ_4 = –0,125 rad.

---

7. Considera las lentes de la figura sumergidas en aire. Determina en cada caso:
a) La desviación δ del rayo incidente.
b) La potencia prismática a la altura h = 20 mm.



(a) (b)

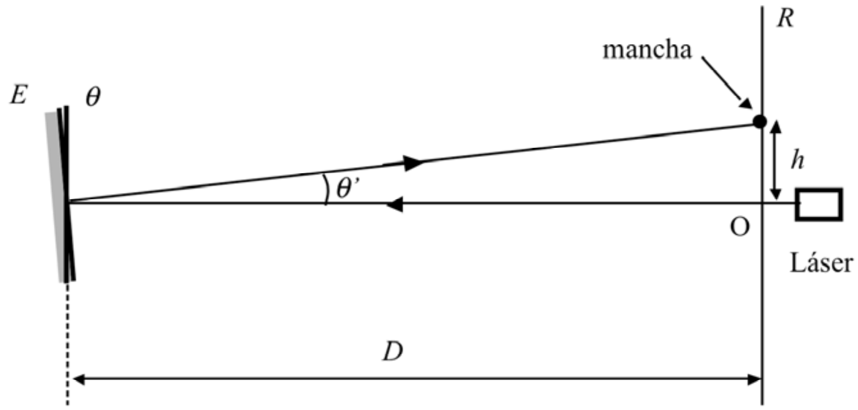
R/ i) a) δ = 0,20 rad; b) $Z = 20^{\Delta}$; ii) a) δ = –0,20 rad; ; b) $Z = -20^{\Delta}$.

---

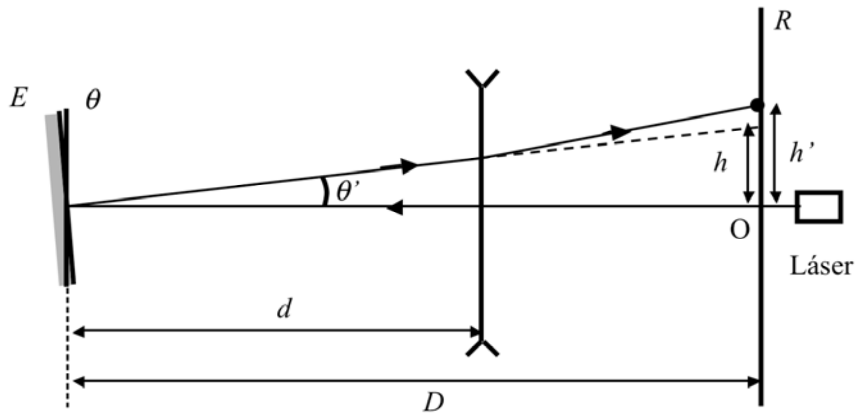
8. Se desea medir el pequeño ángulo de rotación θ, respecto de la vertical, de un espejo plano E con la ayuda de un rayo láser y una regla R. Para ello se procede de la manera siguiente:
Se separan la regla y el espejo una distancia D y se incide sobre el espejo con un rayo en la dirección horizontal de manera que el rayo reflejado muestre una pequeña mancha en la regla a la altura h. Considerando ángulos pequeños. Demuestra que:

a) $\theta' = 2\theta$.

b) $\theta = \dfrac{h}{2D}$.



Si a continuación se sitúa, a la distancia d del espejo, una lente divergente L de focal f' y centrada respecto de la dirección del rayo anterior, se observa en la regla una nueva mancha a una nueva altura h' según se muestra en la figura.



Demuestra que:

c) La nueva altura h' viene dada por: $h' = -\dfrac{2\theta}{|f'|}d^2 + \dfrac{2D\theta}{|f'|}d + 2D\theta$

d) Se obtiene el máximo desplazamiento h'_{max} de la mancha cuando: $d = \dfrac{D}{2}$.

9. Un objeto real de 30 mm de altura se sitúa a 200 mm de una lente delgada de 2,00 D de potencia. Considerando que el sistema se encuentra sumergido en aire, determina:
a) La posición de la imagen formada.
b) El tamaño de la imagen.
c) El carácter real o virtual de la imagen.

R/ a) $VO' = -1000/3$ mm; b) $y' = 50$ mm; c) Imagen virtual.

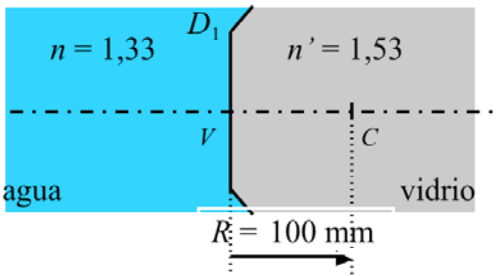
---

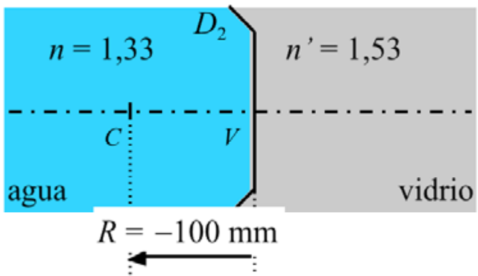
10. Una lente delgada positiva, sumergida en aire, de 200 mm de distancia focal forma una imagen cuyo tamaño es el doble que el del objeto. Determina la posición del objeto y de la imagen si:
a) La imagen es derecha.
b) La imagen es invertida.

R/ a) $VO = -100$ mm, $VO' = -200$ mm; b) $VO = -300$ mm, $VO' = -600$ mm.

---

11. Determina el sistema reducido (equivalente en aire) en el caso de los dioptrios siguientes:

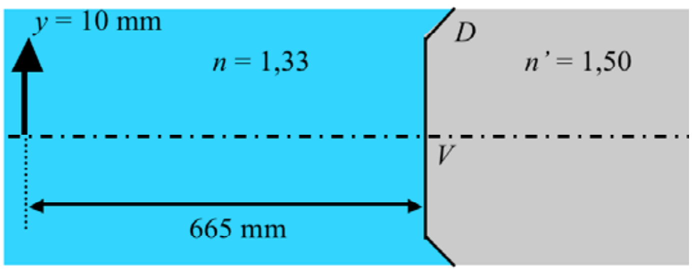




R/ D_1: Lente delgada con: $P'_1 = 2{,}00$ D ; $\overline{f'_1} = 500$ mm; $\overline{f_1} = -500$ mm.
D_2: Lente delgada con: $P'_2 = -2{,}00$ D ; $\overline{f'_1} = -500$ mm; $\overline{f_1} = 500$ mm.

---

12. Sea el sistema de la figura cuya potencia es de 6,00 D. Determina:
a) La posición de la imagen.
b) El tamaño de la imagen.
c) El carácter de la imagen.
Resuelve el ejercicio:
i) Directamente a partir de los datos del dioptrio.
ii) A través de la lente equivalente en aire.



R/ i) a) $s' = 375$ mm; b) $y' = -5$ mm; c) Real. ii) a) $a' = 375$ mm; b) $y' = -5$ mm; c) Real.

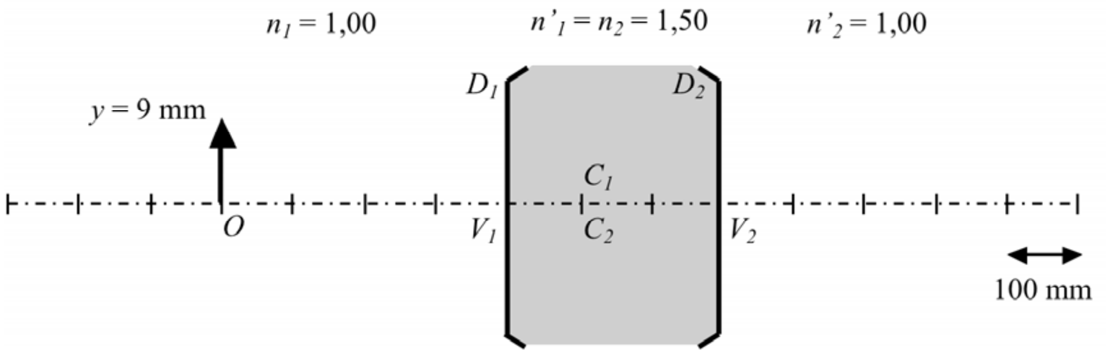
---

13. Determina la lente equivalente en aire que describe el ojo reducido cuando enfoca al infinito.

R/ P'_L = 60,00 D; $f' = \dfrac{1000}{60} = 16{,}67$ mm; $f = -\dfrac{1000}{60} = -16{,}67$ mm.

---

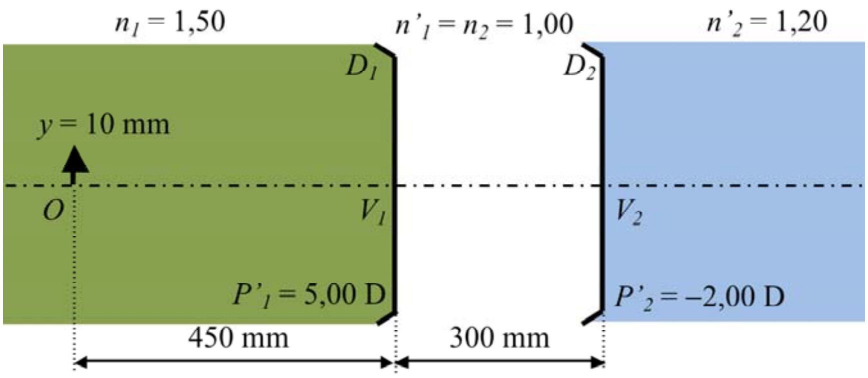
14. Sea el sistema de la figura. Determina:
a) La posición de la imagen del objeto *O*.
b) El tamaño de dicha imagen.
c) El carácter real o virtual de la imagen.
Resuelve el ejercicio:
i) A partir de la asociación de dioptrios.
ii) A partir del sistema equivalente en aire.



R/ a) i) a) V_2O' = 400/3 mm; b) y' = –6 mm; c) Real; ii) V_2O' = L_2O' = 400/3 mm; b) y' = –6 mm; c) Real.

---

15. Sea el sistema de la figura. Determina:
a) La posición de la imagen del objeto *O*.
b) El tamaño de dicha imagen.
c) El carácter real o virtual de la imagen.
Resuelve los apartados anteriores:
i) A partir de la asociación de dioptrios.
ii) A partir del sistema equivalente en aire.



R/ i) a) V_2O' = 900 mm; b) y' = – 50 mm; c) Real; ii) a) V_2O' = 900 mm; b) y' = – 50 mm; c) Real.

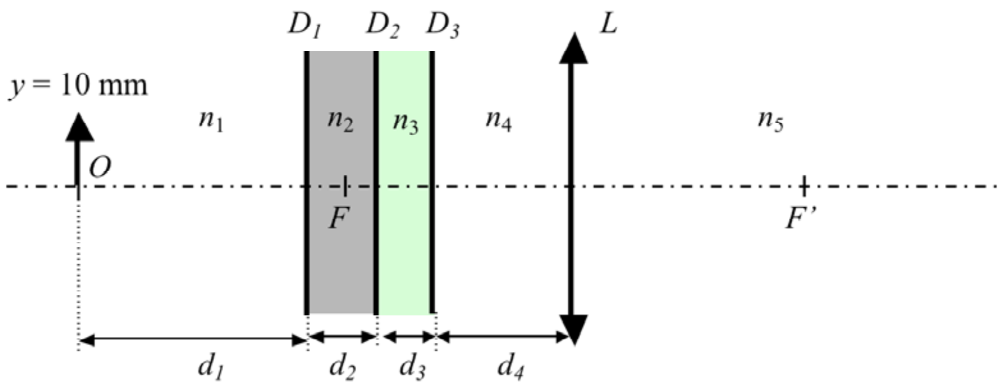
---

16. Sea el sistema de la figura formado por la asociación de tres dioptrios planos y una lente delgada de las siguientes características:

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
1,00	1,50	1,30	1,00	1,00

d_1	d_2	d_3	d_4	f'
100 mm	30 mm	26 mm	60 mm	100 mm

Determina:
a) La posición de la imagen formada.
b) El tamaño de la imagen.
c) El carácter real o virtual de la imagen.



R/ a) LO' = 200 mm; b) y' = –10 mm; c) Real.

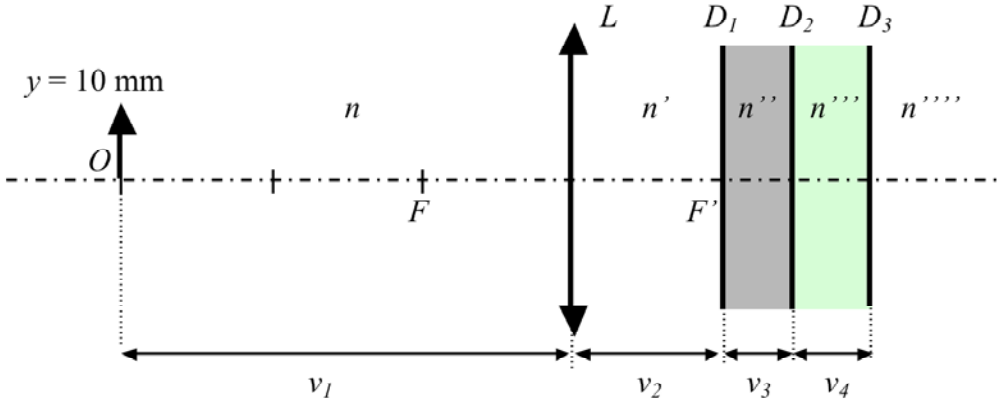
---

17. Sea el sistema de la figura de las siguientes características:

n	n_1	n_2	n_3	n_4
1,00	1,00	1,50	1,30	1,00

v_1	v_2	v_3	v_4	f'
300 mm	100 mm	45 mm	52 mm	100 mm

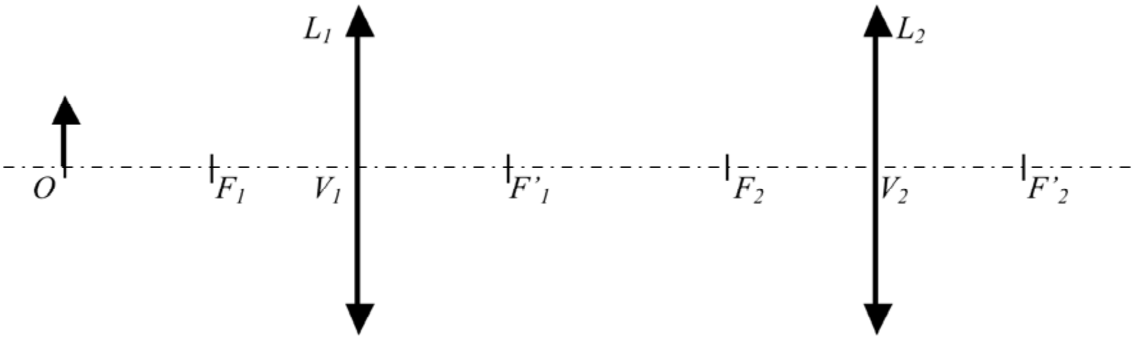
Determina:
a) La posición de la imagen formada.
b) El tamaño de la imagen.
c) El carácter real o virtual de la imagen.



R/ a) LO' = 171 mm; b) y' = –10 mm; c) Real.

---

18. Sea el sistema de la figura sumergido en aire:
$V_1O = -200$ mm; $f'_1 = f'_2 = 100$ mm; $V_1V_2 = 350$ mm.



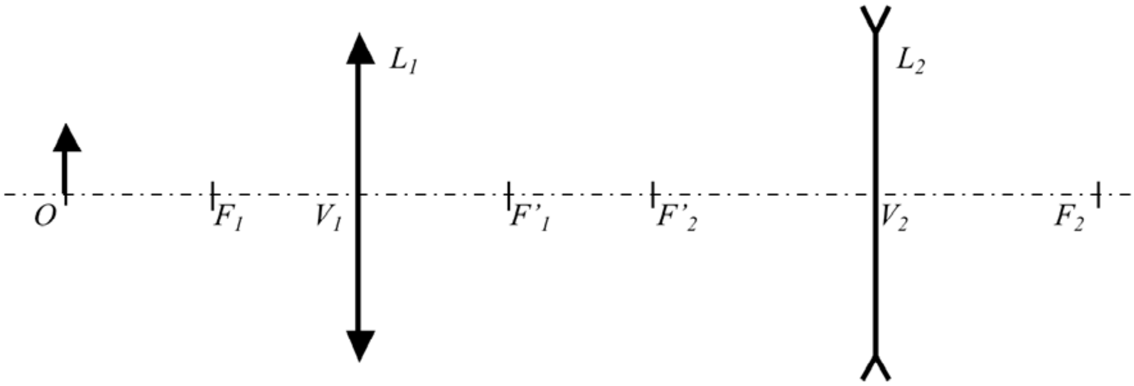
Determina:
a) La posición de la imagen intermedia o imagen formada por la primera lente.
b) El carácter real o virtual de la imagen intermedia.
c) El aumento lateral de la imagen intermedia.
d) La posición de la imagen final.
e) El carácter real o virtual de la imagen final.
f) El aumento lateral de la imagen formada por la segunda lente.
g) El aumento final.

Solución numérica y gráfica.

R/ a) $V_1O'_1$ = 200 mm; b) Real; c) $m_1 = -1$; d) $V_2O'_2 = V_2O'$ = 300 mm; e) Real;
f) $m_2 = -2$; g) $m = 2$.

---

19. Sea el sistema de la figura sumergido en aire:
V_1O = –200 mm; f'_1 = 100 mm; f'_2 = –150 mm; V_1V_2 = 350 mm;



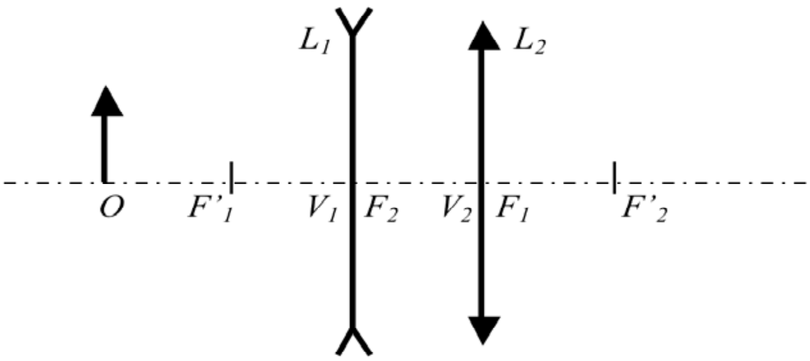
Determina:
a) La posición de la imagen intermedia o imagen formada por la primera lente.
b) El carácter real o virtual de la imagen intermedia.
c) El aumento lateral de la imagen intermedia.
d) La posición de la imagen final.
e) El carácter real o virtual de la imagen final.
f) El aumento lateral de la imagen formada por la segunda lente.
g) El aumento final.

Solución numérica y gráfica.

R/ a) $V_1O'_1$ = 200 mm; b) Real; c) m_1 = –1; d) $V_2O'_2 = V_2O'$ = –75 mm; e) Virtual; f) m_2 = 1/2; g) m = –1/2.

---

20. Sea el sistema de la figura sumergido en aire:
V_1O = –800 mm; f'_1 = –400 mm; f'_2 = 400 mm; V_1V_2 = 400 mm.



Determina:

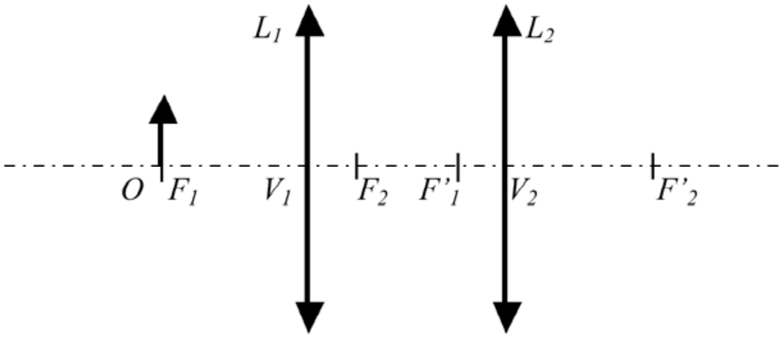
a) La posición de la imagen intermedia o imagen formada por la primera lente.
b) El carácter real o virtual de la imagen intermedia.
c) El aumento lateral de la imagen intermedia.
d) La posición de la imagen final.
e) El carácter real o virtual de la imagen final.
f) El aumento lateral de la imagen formada por la segunda lente.
g) El aumento final.

Solución numérica y gráfica

R/ a) $V_1O'_1 = -800/3$ mm; b) Virtual; c) $m_1 = 1/3$; d) $V_2O'_2 = 1000$ mm; e) Real; f) $m_2 = -3/2$; g) $m = -1/2$.

---

21. Sea el sistema de la figura sumergido en aire:
$V_1O = -150$ mm; $f'_1 = f'_2 = 150$ mm; $V_1V_2 = 150$ mm.



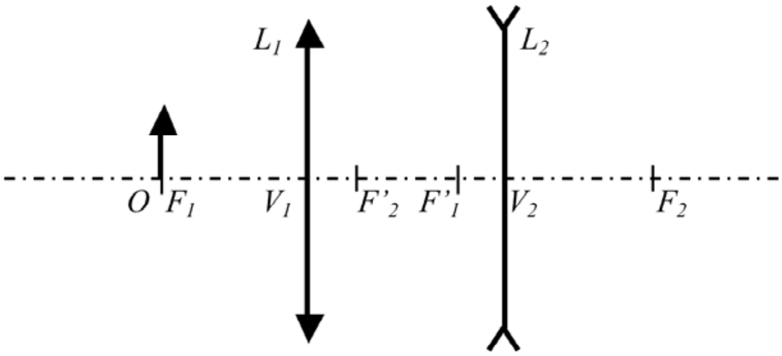
Determina:
a) La posición de la imagen final.
b) El aumento lateral de la imagen final.

R/ a) $V_2O' = 150$ mm; b) $m = -1$.

---

22. Sea el sistema de la figura sumergido en aire:
$V_1O = -150$ mm; $f'_1 = 150$ mm; $f'_2 = -150$ mm; $V_1V_2 = 200$ mm.

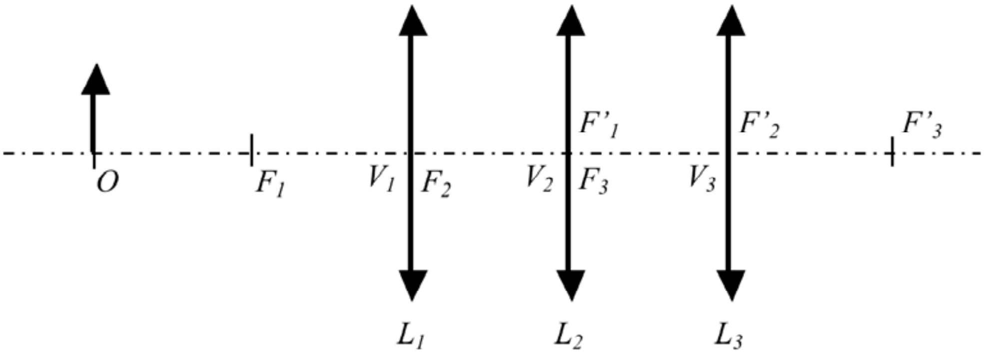
Determina:
a) La posición de la imagen final.
b) El aumento lateral de la imagen final.



R/ a) $V_2O' = -150$ mm; b) $m = -1$.

---

23. Sea el sistema de la figura sumergido en aire:
$V_1O = -600$ mm; $f'_1 = f'_2 = f'_3 = 300$ mm; $V_1V_2 = V_2V_3 = 300$ mm.



Determina:
a) La posición de la imagen formada por la primera lente.
b) El carácter real o virtual de la imagen formada por la primera lente.
c) El aumento lateral de la imagen formada por la primera lente.
d) La posición de la imagen formada por la segunda lente.
e) El carácter real o virtual de la imagen formada por la segunda lente.
f) El aumento lateral de la imagen formada por la segunda lente.
g) La posición de la imagen formada por la tercera lente o imagen final.
h) El carácter real o virtual de la imagen formada por la tercera lente o imagen final.
i) El aumento lateral de la imagen formada por la tercera lente.
j) El aumento final.

R/ a) $V_1O'_1 = 600$ mm; b) Real; c) $m_1 = -1$; d) $V_2O'_2 = 150$ mm; e) Real; f) $m_2 = 1/2$; g) $V_3O'_3 = -300$ mm; h) Virtual; i) $m_3 = 2$; j) $m = -1$

Comentarios a los problemas de la Unidad 8

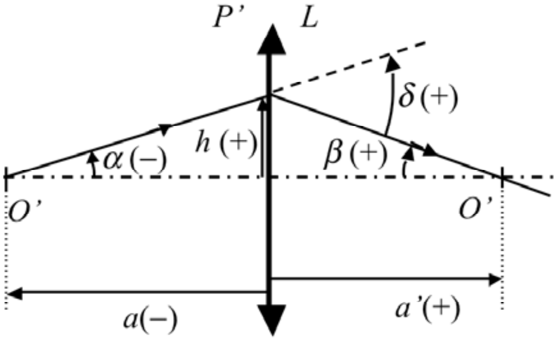
1. De resolución inmediata. Tèngase en cuenta que en una lente delgada $P' = P'_1 + P'_2$. En la mayoría de los casos en que los índices extremos son iguales ($n = n'$) el valor de la potencia puede encontrarse a partir de la fòrmula $P' = (n_L - n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$. Una vez obtenida la potencia el cálculo de las focales es inmediato.

2. Téngase en cuenta que la potencia P' de una lente delgada sumergida en un medio de índice n se expresa como $P' = (n_L - n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$. La fórmula anterior contiene dos factores, el dióptrico: $(n_L - n)$ y el referente a la geometría de la lente: $\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$. Cuando la lente se sumerge en medios diferentes el término geométrico no varía mientras que el dióptrico si.

3. Se determina en primer lugar la potencia de la lente a partir de la fórmula obtenida en el ejercicio anterior. A continuación se calcula la focal.

4. Se procede del mismo modo que en el ejercicio anterior.

5. Sea el esquema de la figura siguiente en donde entre paréntesis se muestra el signo de los ángulos.

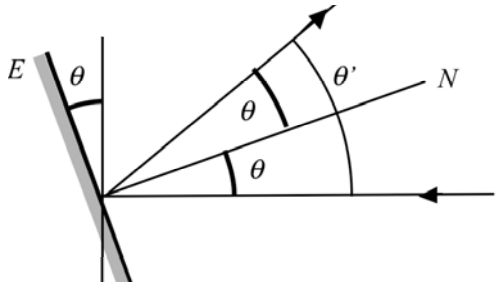


Aplicando relaciones de geometria entre ángulos y teniendo en cuenta la ecuación de Descartes se obtiene la regla de Prentice.

6. De resolución inmediata a partir de la regla de Prentice.

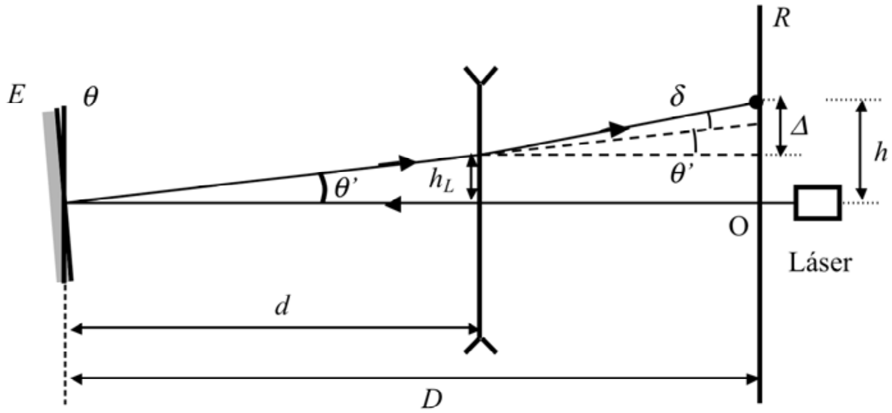
7. Se procede del mismo modo que en el ejercicio anterior. Debe aplicarse también la fórmula de la potencia prismática.

8. a) La reflexión del rayo en el espejo se esquematiza de la forma siguiente:



b) θ' se obtiene fácilmente buscando el valor de su tangente en el triángulo rectángulo que se muestra en la figura (se considera la aproximación de ángulos pequeños). Una vez obtenido θ', aplicando el apartado a) se obtiene de forma inmediata el valor de θ.

c) Una manera de obtener h' sería la que se muestra en el esquema siguiente. Se determina, en primer lugar el valor de δ a partir de la ecuación de Prentice. A continuación se termina h_L a partir de θ' i d. Conocidos δ y θ' se calcula Δ. Finalmente $h' = h_L + \Delta$.



d) Para obtener el valor máximo se deriva h' respecto de d y se iguala a cero. La solución de esta ecuación será $d = \dfrac{D}{2}$.

9. a) y b) De resolución inmediata aplicando cualquier ecuación de correspondencia. Por ser el objeto real éste estará situado delante de la lente o también $a = -200$ mm.

c) La imagen será real si está situada detrás de la lente ($a' > 0$). En caso contrario será virtual ($a' < 0$).

10. a) Si la imagen es derecha $m = 2$.
b) Si la imagen es invertida $m = -2$.
Conocida $f' = 200$ mm. A partir de la ecuación del aumento y de Descartes se obtienen las posiciones del objeto y de la imagen.

11, 12, 13, 14 y 15. De aplicación inmediata de las fórmulas de reducción de un dioptrio a una lente delgada sumergida en aire.

16. Se procede en primer lugar a buscar la posición de la imagen formada por la asociación de los tres dioptrios planos. A continuación la imagen obtenida anteriormente se considera el nuevo objeto para la lente delgada.

17. Se procede como en el ejercicio anterior buscando en primer lugar la imagen formada por la lente. A continuación la imagen obtenida anteriormente se considera el nuevo objeto para la asociación de los tres dioptrios planos.

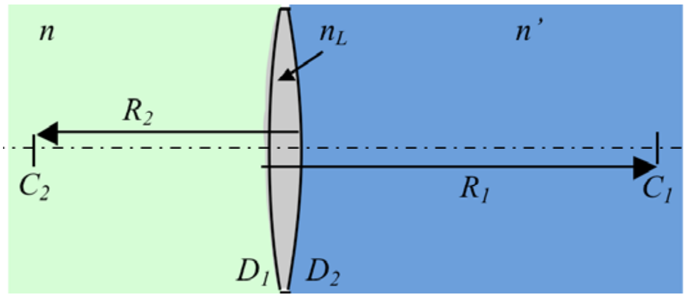
18, 19 y 20. Problema de asociación de dos lentes delgadas. Se determina en primer lugar la posición de la imagen formada por la lente L_1. A continuación la imagen obtenida se considera el nuevo objeto para la lente L_2. Debe tenerse en cuenta que la imagen es virtual si está situada a la izquierda de la lente que ha formado dicha imagen ($a' < 0$) y que es real en caso contrario ($a' > 0$). Finalmente el aumento en una asociación de elementos ópticos es igual al producto de los aumentos producido por cada uno de los elementos.

21 y 22. Problema de asociación de dos lentes delgadas. Se trata de un sistema de Badal.

23. Problema de asociación de tres lentes delgadas. Se determina en primer lugar la posición de la imagen formada por la lente L_1. A continuación la imagen obtenida se considera el nuevo objeto para la lente L_2 y se determina la imagen que forma dicha lente. Esta nueva imagen se considera el nuevo objeto para la lente L_3 y se determina, finalmente, la posición de la imagen formada por la lente L_3 o imagen final. Debe tenerse en cuenta que la imagen será real si está situada detrás de la lente ($a' > 0$). En caso contrario será virtual ($a' < 0$). Finalmente el aumento en una asociación de elementos ópticos es igual al producto de los aumentos producido por cada uno de los elementos.

UNIDAD 8. SOLUCIONES

1. Sea una lente delgada de índice n_L, sumergida en un medio anterior de índice n y un medio posterior de índice n' cuyos radios anterior y posterior son respectivamente R_1 y R_2 según se muestra en el esquema siguiente:

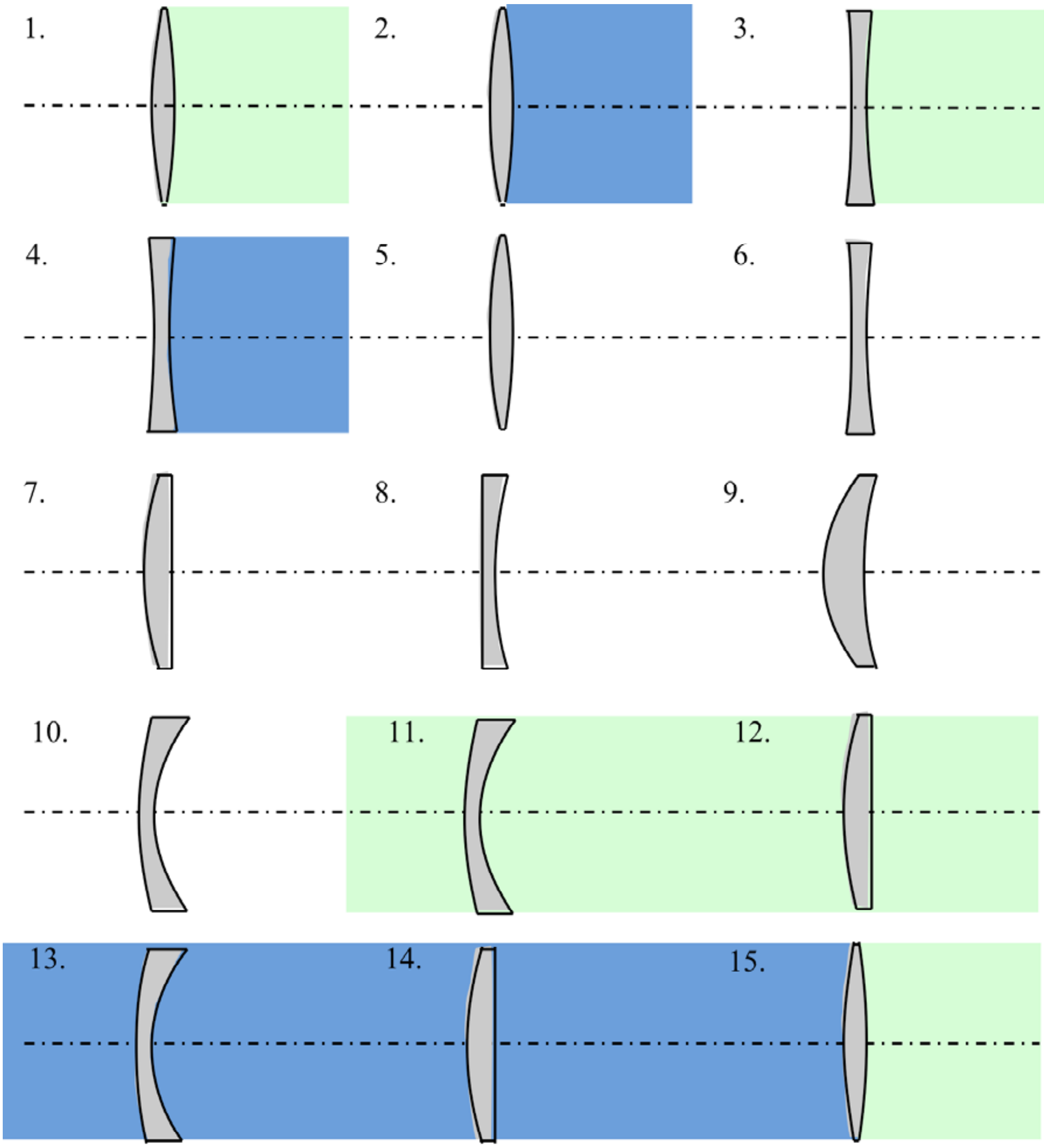


Para cada uno de los casos que se muestran a continuación.
a) Esquematiza la lente descrita.
Determina:
b) La potencia de cada dioptrio (P'_1 y P'_2) que constituye la lente.
c) Las potencias objeto P e imagen P' de la lente.
d) Las focales objeto f e imagen f' de la lente.

	n_L	n	n'	R_1 (mm)	R_2 (mm)
1.	1,50	1,00	1,30	500	–125
2.	1,50	1,00	1,80	500	–125
3.	1,50	1,00	1,30	–125	500
4.	1,50	1,00	1,80	–125	500
5.	1,50	1,00	1,00	500	–125
6.	1,50	1,00	1,00	–500	125
7.	1,50	1,00	1,00	500	∞
8.	1,50	1,00	1,00	∞	500
9.	1,50	1,00	1,00	125	500
10.	1,50	1,00	1,00	500	125
11.	1,50	1,30	1,30	500	125
12.	1,50	1,30	1,30	500	∞
13.	1,50	1,80	1,80	500	125
14.	1,50	1,80	1,80	500	∞
15	1,50	1,80	1,30	500	–125

SOLUCIÓN:

a) Esquema de las diferentes lentes:



Potencia del primer dioptrio:

$$P'_1 = \frac{n'_1 - n_1}{R_1}$$

Potencia del segundo dioptrio:

$$P'_2 = \frac{n'_2 - n_2}{R_2}$$

Potencia de la lente:

$$P' = P'_1 + P'_2$$

Focal objeto de la lente:

$$f = \frac{n}{P}$$

Focal imagen de la lente:

$$f' = \frac{n'}{P'}$$

Teniendo en cuenta que $n_1 = n$, $n'_1 = n_L$, $n_2 = n_L$ y $n'_2 = n'$ se obtiene:

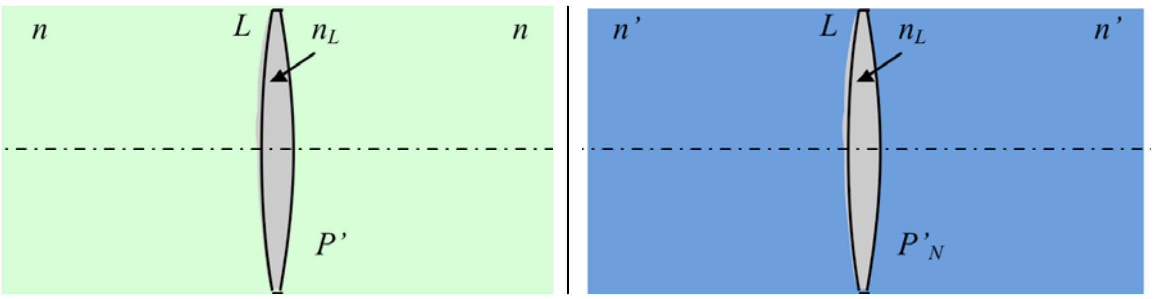
	P'_1 (D)	P'_2 (D)	P (D)	P' (D)	f (mm)	f'(mm)
1.	1,00	1,60	–2,60	2,60	– 384,62	500,00
2.	1,00	–2,40	1,40	–1,40	714,29	–1285,71
3.	– 4,00	– 0,40	4,40	– 4,40	227,27	– 295,45
4.	– 4,00	0,60	3,40	– 3,40	294,12	– 529,41
5.	1,00	4,00	– 5,00	5,00	– 200,00	200,00
6.	–1,00	– 4,00	5,00	– 5,00	200,00	– 200,00
7.	1,00	0,00	– 1,00	1,00	– 1000,00	1000,00
8.	0,00	–1,00	1,00	–1,00	1000,00	– 1000,00
9.	4,00	–1,00	– 3,00	3,00	– 333,33	333,33
10.	1,00	– 4,00	3,00	–3,00	333,33	– 333,33
11.	0,40	–1,60	1,20	– 1,20	1083,33	– 1083,33
12.	0,40	0,00	– 0,40	0,40	– 3250,00	3250,00
13.	– 0,60	2,40	–1,80	1,80	– 1000,00	1000.00
14.	– 0,60	0,00	0,60	– 0,60	3000,00	– 3000,00
15.	–0,60	1,60	–1,00	1,00	–1800,00	1300,00

---

2. Una lente de índice n_L sumergida en un medio de índice n tiene una potencia P'. Se sumerge la lente anterior en un medio de índice n'. Demuestra que la nueva potencia P'_N de la lente es:

$$P'_N = \frac{(n_L - n')}{(n_L - n)} P' .$$

SOLUCIÓN:



Potencia de la lente L cuando se encuentra sumergida en un medio de índice n:

$$P' = (n_L - n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (1)$$

Potencia de la lente L cuando se encuentra sumergida en un medio de índice n':

$$P'_N = (n_L - n')\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (2)$$

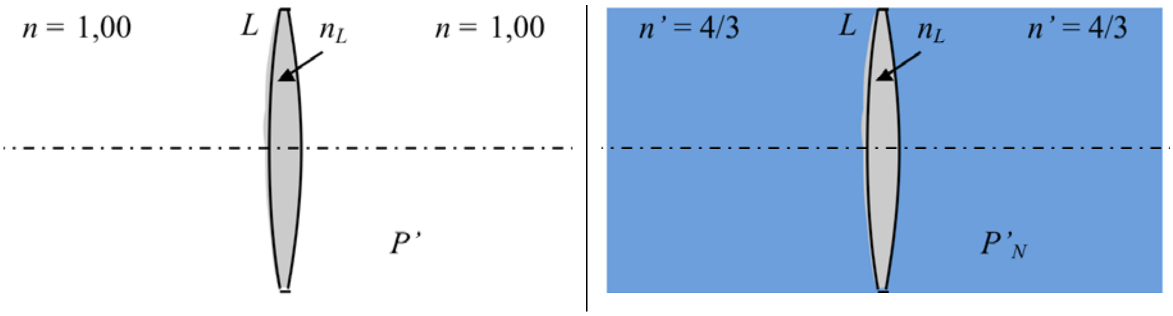
Dividiendo (2) entre (1) y despejando P'_N se obtiene:

$$P'_N = \frac{(n_L - n')}{(n_L - n)} P' \qquad (3)$$

---

3. Sean P' y f' los valores de la potencia y la focal de una lente delgada de índice $n_L = 3/2$ sumergida en aire. Determina los nuevos valores de la potencia, P'_N, y de la distancia focal, f'_N, cuando dicha lente se sumerge en agua ($n' = 4/3$).

SOLUCIÓN:



De la fórmula del ejercicio anterior:

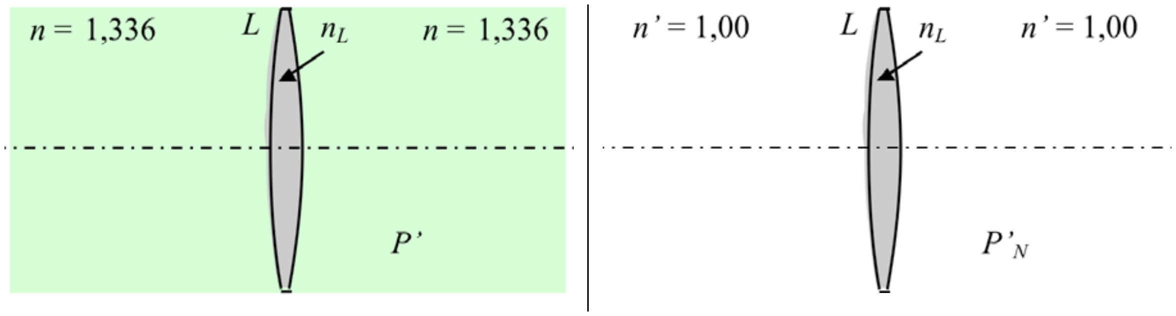
$$P'_N = \frac{(n_L - n')}{(n_L - n)} P' = \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right)}{\left(\frac{3}{2} - 1{,}00\right)} P' = \frac{\frac{9-8}{6}}{\frac{3-2}{2}} P' = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} P' = \frac{2}{6} P' = \frac{P'}{3}.$$

$$f'_N = \frac{n'}{P'_N} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{P'}{3}} = \frac{4}{P'} = \frac{4}{\frac{1{,}00}{f'}} = 4f'.$$

---

4. El cristalino del ojo humano puede modelizarse como una lente delgada de índice 1,400 y 19,0 D de potencia sumergida en un medio de índice n = 1,336 (humor acuoso). Determina:
a) La potencia del cristalino cuando se sumerge en aire.
b) La focal del cristalino cuando se sumerge en el humor acuoso.
c) La focal del cristalino cuando se sumerge en aire.

SOLUCIÓN:



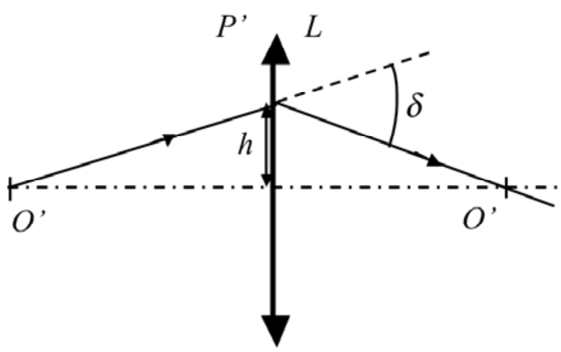
a) $P'_N = \dfrac{(n_L - n')}{(n_L - n)} P' = \dfrac{(1{,}400 - 1{,}000)}{(1{,}400 - 1{,}336)} 19{,}0 = 119 \text{ D}.$

b) $f' = \dfrac{n}{P'} = \dfrac{1{,}336}{19{,}0} = 0{,}0703 \text{ m} = 70{,}3 \text{ mm}.$

c) $f'_N = \dfrac{n'}{P'_N} = \dfrac{1{,}000}{119{,}0} = 0{,}00840 \text{ m} = 8{,}40 \text{ mm}.$

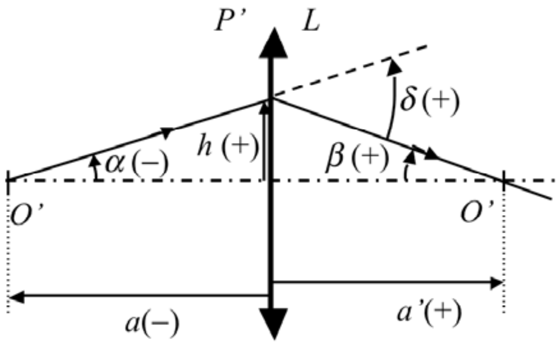
---

5. Demuestra que en una lente delgada sumergida en aire la desviación, δ, entre el rayo incidente y el rayo emergente cumple la condición $\delta = P'h$ (regla de Prentice). Dónde P' es la potencia de la lente y h la altura de incidencia del rayo.



SOLUCIÓN:

Establezcamos los parámetros con el criterio de signos correspondiente:



De la figura resulta:

$$|\delta| = |\alpha| + |\beta| \tag{1}$$

$$\delta = -\,\alpha + \beta \tag{2}$$

$$\alpha = \frac{h}{a} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{h}{a'}. \tag{3}$$

Sustituyendo (3) en (2):

$$\delta = -\frac{h}{a} + \frac{h}{a'} = h\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) \tag{4}$$

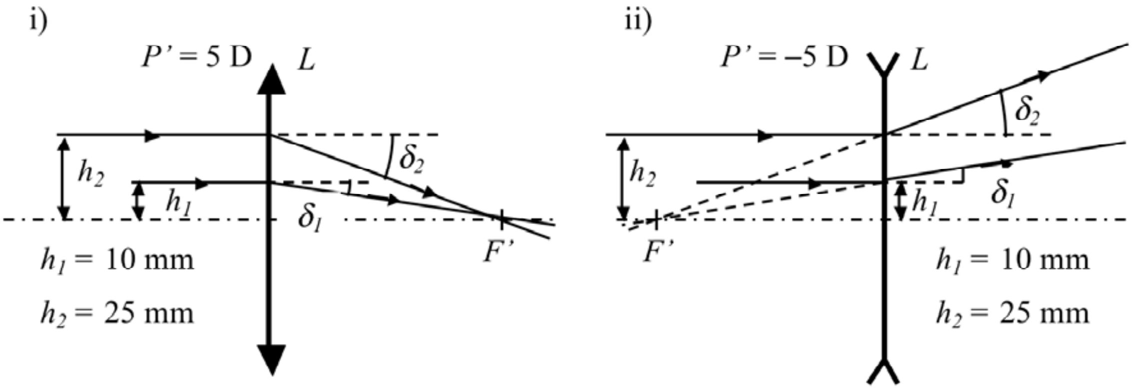
De la ecuación de Descartes:

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = P' \tag{5}$$

Sustituyendo (5) en (4) se obtiene:

$$\delta = P'h \tag{6}$$

6. Considera las lentes de la figura sumergidas en aire. Determina en cada caso:
a) La desviación δ_1 y δ_2 del rayo incidente.
b) La potencia prismática asociada a las desviaciones anteriores.



SOLUCIÓN:

a) De la regla de Prentice:

$$\delta = P'h.$$

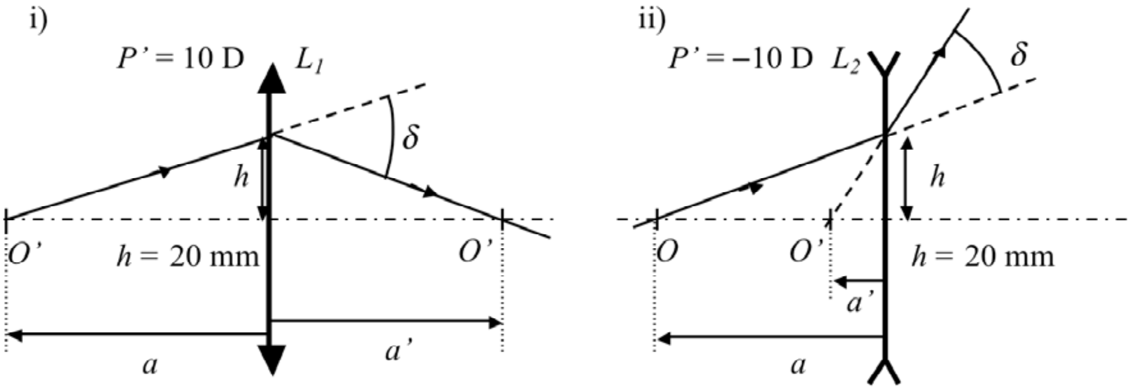
h	i) Lente positiva: $P' = 5$ D $= 0{,}005$ mm^{-1}	ii) Lente negativa: $P' = -5$ D $= -0{,}005$ mm^{-1}
$h_1 = 10$ mm	$\delta_1 = 0{,}005(10) = 0{,}05$ rad	$\delta_1 = -0{,}005(10) = -0{,}05$ rad
$h_2 = 25$ mm	$\delta_2 = 0{,}005(25) = 0{,}125$ rad	$\delta_2 = -0{,}005(10) = -0{,}125$ rad

b) De la fórmula de la potencia de un prisma delgado:

$$Z = 100\,tan\,\delta = 100\delta.$$

δ	i) Lente positiva: $P' = 5$ D $= 0{,}005$ mm^{-1}	δ	i) Lente negativa: $P' = -5$ D $= -0{,}005$ mm^{-1}
$\delta_1 = 0{,}05$rad	$Z_1 = 100(0{,}05) = 5^{\Delta}$	$\delta_1 = -0{,}05$rad	$Z_1 = 100(-0{,}05) = -5^{\Delta}$
$\delta_2 = 0{,}125$rad	$Z_2 = 100(0{,}125) = 12{,}5^{\Delta}$	$\delta_2 = -0{,}125$rad	$Z_2 = 100(-0{,}125) = -12{,}5^{\Delta}$

7. Considera las lentes de la figura sumergidas en aire. Determina en cada caso:
a) La desviación δ del rayo incidente.
b) La potencia prismática a la altura h = 20 mm.



(a) (b)

SOLUCIÓN:

a) De la regla de Prentice:

$$\delta = P'h\,.$$

h	i) Lente positiva: $P' = 10\text{ D} = 0{,}010\text{ mm}^{-1}$	ii) Lente negativa: $P' = -10\text{ D} = -0{,}010\text{ mm}^{-1}$
$h = 20\text{ mm}$	$\delta = 0{,}010(20) = 0{,}20\text{ rad}$	$\delta = -0{,}010(20) = -0{,}20\text{ rad}$

b) De la fórmula de la potencia de un prisma delgado:

$$Z = 100\tan\delta = 100\delta.$$

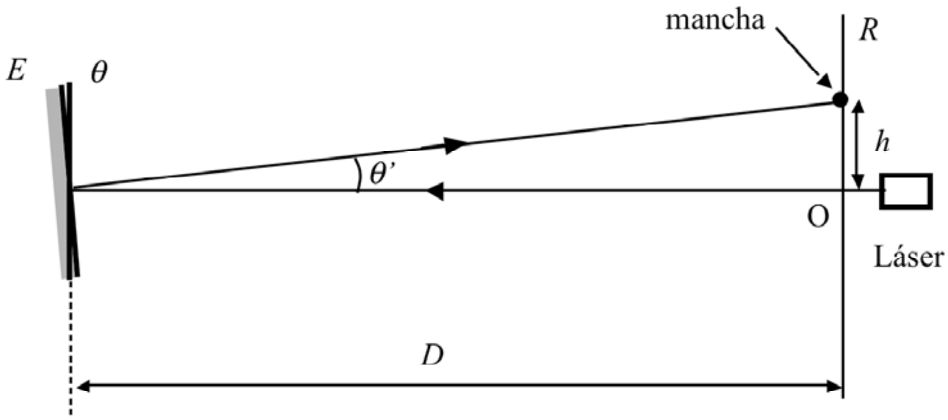
δ	i) Lente positiva: $P' = 10\text{ D} = 0{,}010\text{ mm}^{-1}$	δ	ii) Lente negativa: $P' = -10\text{ D} = -0{,}010\text{ mm}^{-1}$
$\delta = 0{,}20\text{ rad}$	$Z = 100(0{,}20) = 20^{\Delta}$	$\delta = -0{,}20\text{ rad}$	$Z = 100(-0{,}20) = -20^{\Delta}$

8. Se desea medir el pequeño ángulo de rotación θ, respecto de la vertical, de un espejo plano E con la ayuda de un rayo láser y una regla R. Para ello se procede de la manera siguiente:

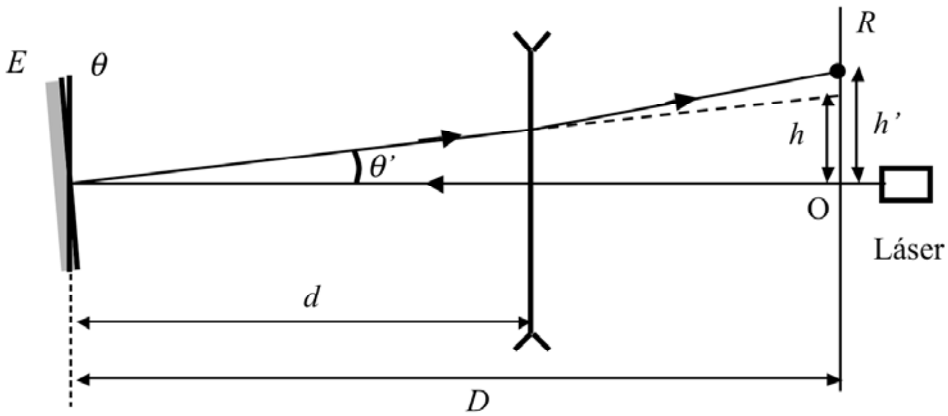
Se separan la regla y el espejo una distancia D y se incide sobre el espejo con un rayo en la dirección horizontal de manera que el rayo reflejado muestre una pequeña mancha en la regla a la altura h. Considerando ángulos pequeños. Demuestra que:

a) $\theta' = 2\theta$.

b) $\theta = \dfrac{h}{2D}$.



Si a continuación se sitúa, a la distancia d del espejo, una lente divergente L de focal f' y centrada respecto de la dirección del rayo anterior, se observa en la regla una nueva mancha a una nueva altura h' según se muestra en la figura.



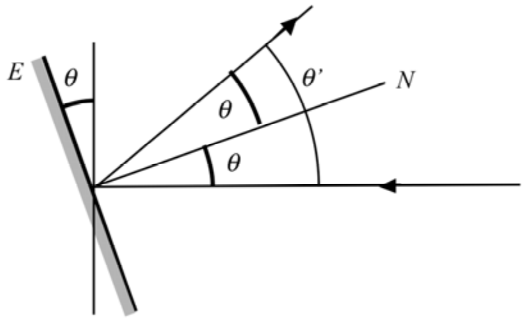
Demuestra que:

c) La nueva altura h' viene dada por: $h' = -\dfrac{2\theta}{|f'|}d^2 + \dfrac{2D\theta}{|f'|}d + 2D\theta$

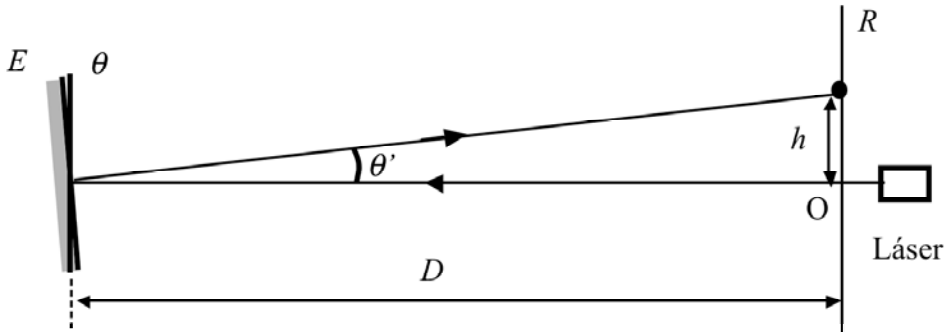
d) Se obtiene el máximo desplazamiento h'_{max} de la mancha cuando: $d = \dfrac{D}{2}$.

SOLUCIÓN:

a) De la geometría de la figura y aplicando la ley de la reflexión se observa que $\theta' = 2\theta$.



b)



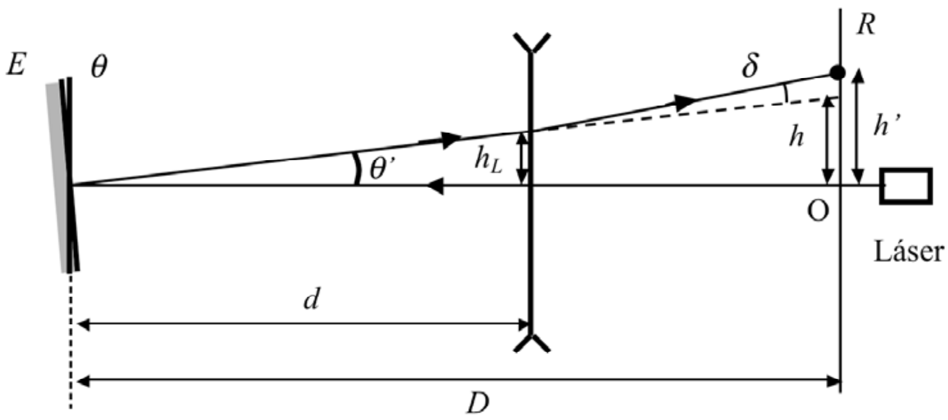
Teniendo en cuenta ángulos pequeños:

$$h = D\tan\theta' = D\theta' = D2\theta$$

Despejando θ:

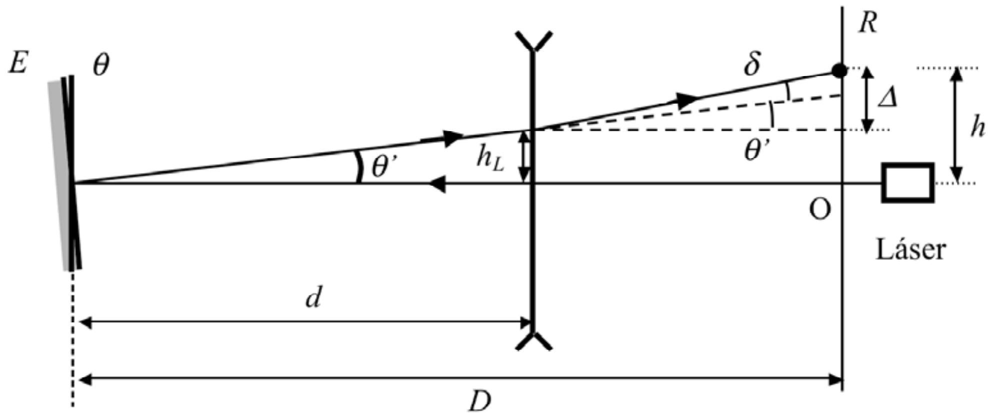
$$\theta = \frac{h}{2D}.$$

c)



De la regla de Prentice:

$$|\delta| = h_L |P'| = \frac{h_L}{|f'|}.$$



$$h_L = d\,\theta'$$

$$\Delta = (D-d)(\delta+\theta') = (D-d)\left(\frac{h_L}{|f'|}+\theta'\right) = (D-d)\frac{d\theta'}{|f'|}+\theta'$$

$$\Delta = (D-d)\,\theta'\left(\frac{d}{|f'|}+1\right).$$

$$h' = h_L + \Delta = \left[d + (D-d)\left(\frac{d}{|f'|}+1\right)\right]\theta'.$$

Operando y reagrupando términos:

$$h' = -\frac{\theta'}{|f'|}d^2 + \frac{D\theta'}{|f'|}d + D\theta'.$$

$$h' = -\frac{2\theta}{|f'|}d^2 + \frac{2D\theta}{|f'|}d + 2D\theta.$$

d) La expresión anterior muestra que *h’* depende de *d* según una función de segundo grado del tipo $y = ad^2 + bd + c$ cuyo valor máximo se encuentra para: $d = -\frac{b}{2a}$. En el caso de la función anterior el valor máximo h'_{max} estará en:

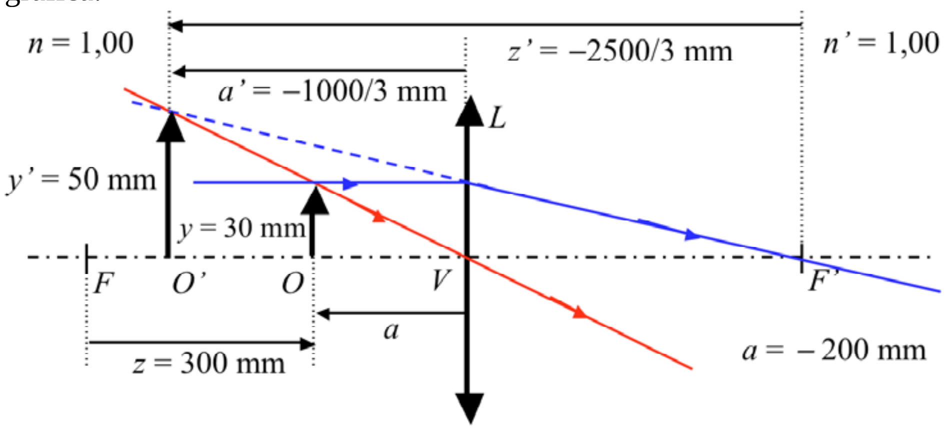
$$d = -\frac{\frac{2D\theta}{f'}}{2\left(-\frac{2\theta}{f'}\right)} = \frac{D}{2}.$$

---

9. Un objeto real de 30 mm de altura se sitúa a 200 mm de una lente delgada de 2,00 D de potencia. Considerando que el sistema se encuentra sumergido en aire, determina:
a) La posición de la imagen formada.
b) El tamaño de la imagen.
c) El carácter real o virtual de la imagen.

SOLUCIÓN:

Solución gráfica:



Solución numérica:

$$P' = \frac{n'}{f'} = \frac{1}{f'}; \qquad f' = \frac{1}{P'} = \frac{1}{2{,}00} = 0{,}500 \text{ m} = 500 \text{ mm}.$$

a) Tomando orígenes en la lente:

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'}; \qquad a = -200 \text{ mm}; \qquad f' = 500 \text{ mm}.$$

$$-\frac{1}{-200}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{500}\;;\;\frac{1}{a'}=\frac{1}{500}-\frac{1}{200}=\frac{2-5}{1000}=-\frac{3}{1000}\;;\;a'=-\frac{1000}{3}=-333\,\text{mm}\,.$$

VO' = –1000/3 mm = –333 mm.

Tomando orígenes en los puntos focales:

$z\,z'=-\left(f'\right)^2$; z = 300 mm; f' = 500 mm;

$300\left(z'\right)=-\left(500\right)^2$; $z'=F'O'=-\dfrac{250000}{300}=-\dfrac{2500}{3}$ mm;

VO' = *VF'* + *F'O'* = $500-\dfrac{2500}{3}=-\dfrac{1000}{3}$ mm = -333 mm.

b) $m=\dfrac{y'}{y}=\dfrac{a'}{a}$; $\dfrac{y'}{30}=\dfrac{-\dfrac{1000}{3}}{-200}$; y' = 50 mm.

También puede calcularse a partir de:

$m=\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{z'}{f'}=\dfrac{\dfrac{2500}{3}}{500}$; $\dfrac{y'}{30}=\dfrac{\dfrac{2500}{3}}{500}$; y' = 50 mm.

c) La imagen final es virtual, derecha y mayor que el objeto.

---

10. Una lente delgada positiva, sumergida en aire, de 200 mm de distancia focal forma una imagen cuyo tamaño es el doble que el del objeto. Determina la posición del objeto y de la imagen si:
a) La imagen es derecha.
b) La imagen es invertida.

SOLUCIÓN:

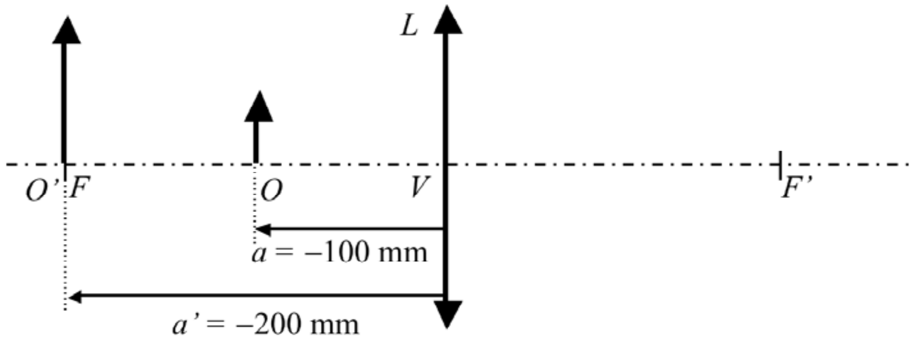
a) Si la imagen es derecha el aumento es positivo. m = +2.

$m=\dfrac{a'}{a}$; $a'=ma$; $a'=2a$.

$-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a'}=\dfrac{1}{f'}$; $-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2a}=\dfrac{1}{200}$; $\dfrac{-2+1}{2a}=\dfrac{1}{200}$;

$$a = VO = -\frac{200}{2} = -100 \text{ mm}.$$

$$a' = VO' = 2a' = -200 \text{ mm}.$$



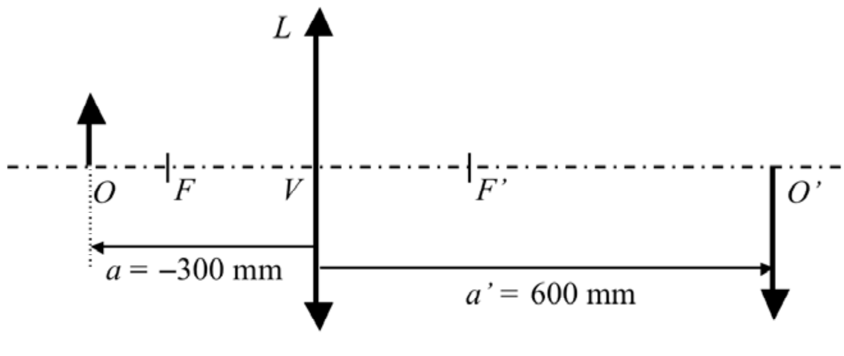
b) Si la imagen es invertida el aumento es negativo. $m = -2$.

$m = \frac{a'}{a}$; $\quad a' = ma$; $\quad a' = -2a$.

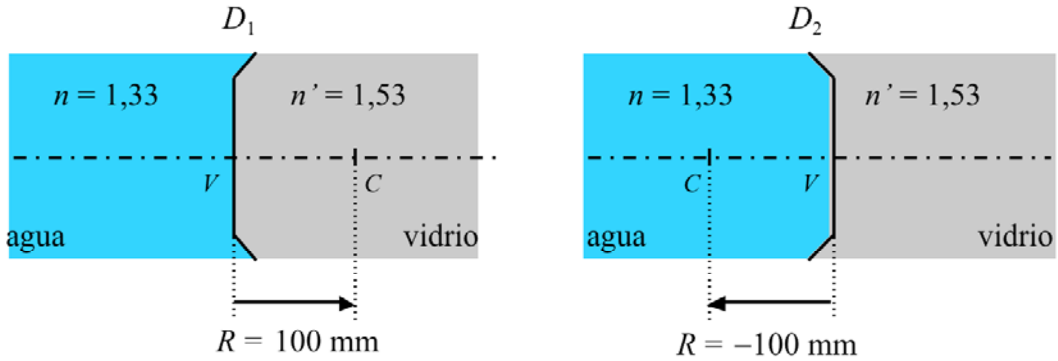
$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'}$; $\quad -\frac{1}{a} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{200}$; $\quad \frac{-2-1}{2a} = \frac{1}{200}$;

$$a = VO = -\frac{600}{2} = -300 \text{ mm}.$$

$$a' = VO' = -2a' = 600 \text{ mm}$$



11. Determina el sistema reducido (equivalente en aire) en el caso de los dioptrios siguientes:



SOLUCIÓN:

Dioptrio D_1:

$$P'_1 = \frac{n'_1 - n_1}{R_1}; \quad n_1 = n = 1{,}33; \quad n'_1 = n' = 1{,}53; \quad R_1 = R = +100 \text{ mm} = 0{,}100 \text{ m}.$$

$$P'_1 = \frac{1{,}53 - 1{,}33}{0{,}100} = 2{,}00 \text{ D}. \qquad P_1 = -P'_1 = -2{,}00 \text{ D}.$$

$$f'_1 = \frac{n'_1}{P'_1} = \frac{1{,}53}{2{,}00} = 0{,}765 \text{ m} = 765 \text{ mm}. \qquad f_1 = R - f'_1 = 100 - 765 = -665 \text{ mm}.$$

Dioptrio D_2:

$$P'_2 = \frac{n'_2 - n_2}{R_2}; \quad n_2 = n = 1{,}33; \quad n'_2 = n' = 1{,}33; \quad R_2 = R = -100 \text{ mm} = -\,0{,}100 \text{ m}.$$

$$P'_2 = \frac{1{,}53 - 1{,}33}{-0{,}100} = -2{,}00 \text{ D}. \qquad P_2 = -P'_2 = +2{,}00 \text{ D}.$$

$$f'_2 = \frac{n'_2}{P'_2} = \frac{1{,}53}{-2{,}00} = -0{,}765 \text{ m} = -\,765 \text{ mm}.$$

$$f_2 = R_2 - f'_2 = -\,100 - \left(-765\right) = 665 \text{ mm}.$$

De la ecuación de Descartes aplicada al dioptrio esférico:

$$-S + S' = P';$$

$$-\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=\frac{n'}{f'_D}; \qquad -\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=P'_D.$$

Donde f'_D és la focal del dioptrio esférico y P'_D su potencia.

Operando:

$$-\frac{1}{\frac{s}{n}}+\frac{1}{\frac{s'}{n'}}=\frac{1}{\frac{f'_D}{n'}}; \qquad -\frac{1}{\frac{s}{n}}+\frac{1}{\frac{s'}{n'}}=P'_D.$$

$$-\frac{1}{\overline{s}}+\frac{1}{\overline{s'}}=\frac{1}{\overline{f'_D}}; \qquad -\frac{1}{\overline{s}}+\frac{1}{\overline{s'}}=P'_D. \tag{1}$$

Donde: $\overline{s}=\frac{s}{n}$; $\quad \overline{s'}=\frac{s'}{n'}$ $\quad$ y $\quad \overline{f'_D}=\frac{f'_D}{n'}$.

De las ecuación de Descartes aplicada a la lente delgada cuando se encuentra sumergida en aire:

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f'}. \qquad -\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=P'_L \tag{2}$$

Tomando: $a=\overline{s}$; $a'=\overline{s'}$ y $f'=\overline{f'_D}$ o $P'_D=P'_L$, el sistema formado por el dioptrio D queda reducido a un sistema formado por una lente L sumergida en aire (sistema reducido).

La focal de la lente reducida es:

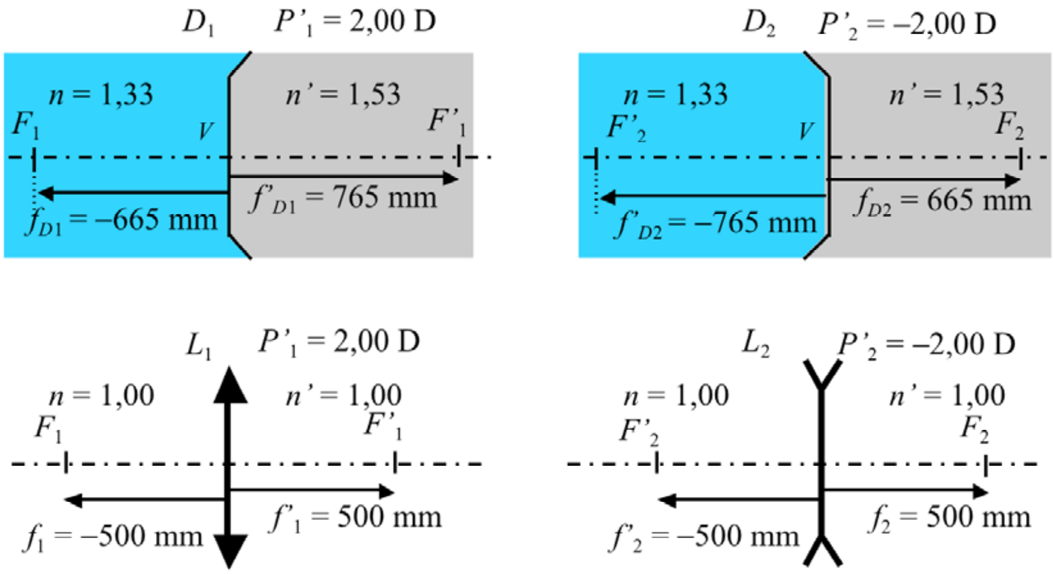
Dioptrio D_1: $\quad f'_{D_1}=765$ mm. $\quad f'_1=\overline{f'_{D_1}}=\frac{f'_{D_1}}{n'}=\frac{765}{1{,}53}=500$ mm.

Por ser el sistema reducido (sumergido en aire)

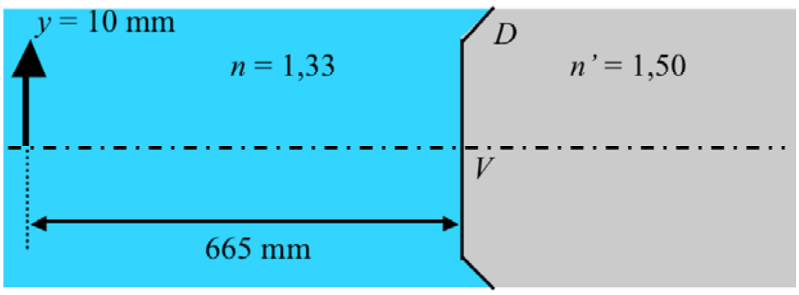
$f_1=-f'_1=-500$ mm.

Dioptrio D_2: $\quad f'_{D_2}=-765$ mm. $\quad f'_2=\overline{f'_{D_2}}=\frac{f'_{D_2}}{n'}=-\frac{765}{1{,}53}=-500$ mm.

$f_2=-f'_2=-(-500)=500$ mm.



12. Sea el sistema de la figura cuya potencia es de 6,00 D. Determina:
a) La posición de la imagen.
b) El tamaño de la imagen.
c) El carácter de la imagen.
Resuelve el ejercicio:
i) Directamente a partir de los datos del dioptrio.
ii) A través de la lente equivalente en aire.



SOLUCIÓN:

i) Considerando el dioptrio esfèrico *D*:

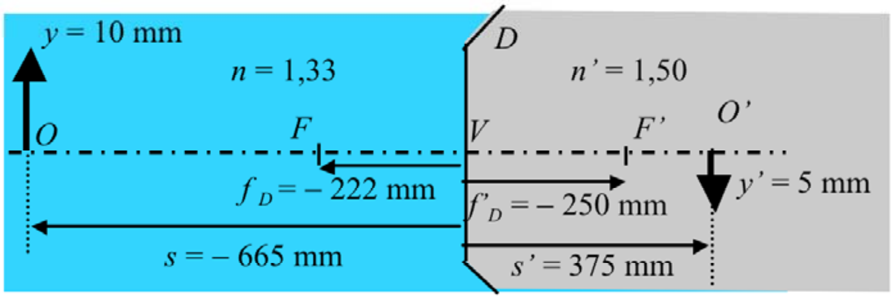
a) De la ecuación de Descartes:

$$-S + S' = P'_D \,; \qquad -\frac{s}{n} + \frac{s'}{n'} = P'_D \,.$$

$n = 1{,}33; \qquad n' = 1{,}50; \qquad s = -\,665\ \text{mm}; \qquad P'_D = 6{,}00\ \text{D} = 6{,}00\ \text{m}^{-1} = \dfrac{6}{1000}\ \text{mm}^{-1};$

$$f'_D = \frac{n'}{P'_D} = \frac{1{,}50}{6{,}00} = 0{,}250\ \text{m} = 250\ \text{mm};$$

$$f_D = \frac{n}{P_D} = -\frac{1{,}33}{6{,}00} = -\,0{,}222\ \text{m} = -\,222\ \text{mm}.$$



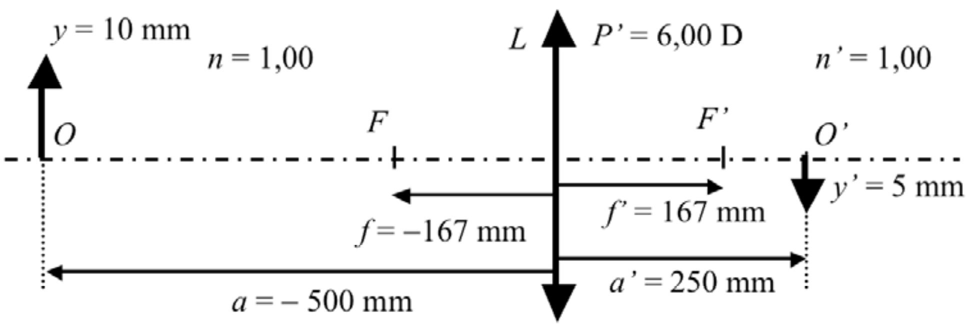
$$-\frac{1{,}33}{-665} + \frac{1{,}50}{s'} = \frac{6{,}00}{1000}; \qquad \frac{1{,}50}{s'} = \frac{6{,}00}{1000} - \frac{1{,}33}{665} = \frac{3990 - 1330}{665000} = \frac{2660}{665000};$$

$s' = 375$ mm.

b) $m = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{n\,s'}{n'\,s} = \dfrac{y'}{10} = \dfrac{1{,}33(375)}{1{,}50(-665)}; \qquad y = -5$ mm.

c) Debido que $s' > 0$ la imagen es real.

ii) Considerando la lente equivalente en aire:



a) Del ejercicio anterior:

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=P'_L$$

$$a=\bar{s}=\frac{s}{n}=-\frac{665}{1{,}33}=-500\ \text{mm};\quad f'=\overline{f'_D}=\frac{f'_D}{n'}=\frac{250}{1{,}50}=167\ \text{mm};$$

$f = -f' = -167$ mm.

$$P'_L=P'_D=6{,}00\ \text{D}=\frac{6{,}00}{1000}\ \text{mm}^{-1}.$$

$$-\frac{1}{-500}+\frac{1}{a'}=\frac{6}{1000};\qquad \frac{1}{a'}=\frac{6}{1000}-\frac{1}{500}=\frac{6-2}{1000}=\frac{4}{1000};\qquad a'=250\ \text{mm}.$$

Deshacemos el cambio:

$$a'=\overline{s'}=\frac{s'}{n'}.$$

$s'=n'a'=1{,}50.250=375$ mm. Valor que coincide con el calculado anteriormente.

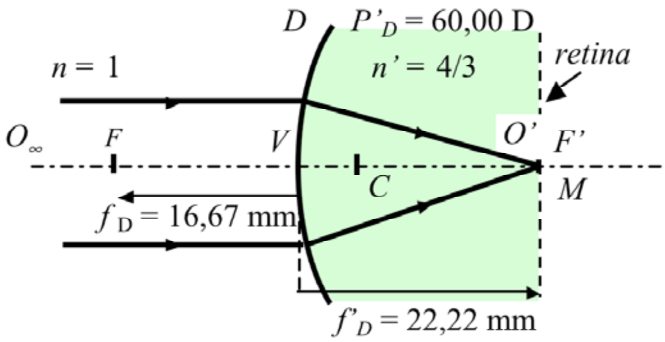
b) $m=\frac{y'}{y}=\frac{a'}{a}=\frac{y'}{10}=\frac{250}{-500};\qquad y=-5$ mm.

c) Debido que $a' > 0$ la imagen es real.

13. Determina la lente equivalente en aire que describe el ojo reducido cuando enfoca al infinito.

SOLUCIÓN:

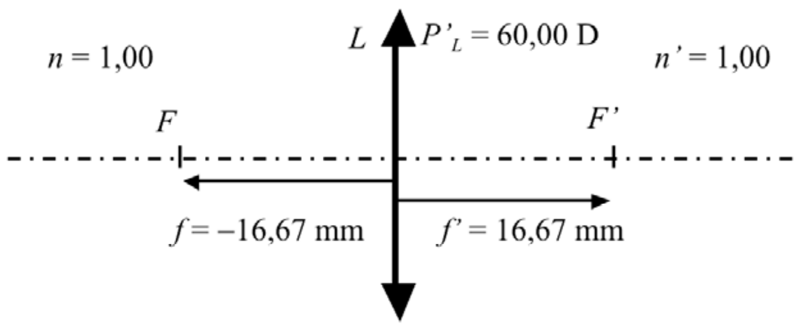
Consideremos el siguiente esquema de ojo reducido para un observador emétrope:



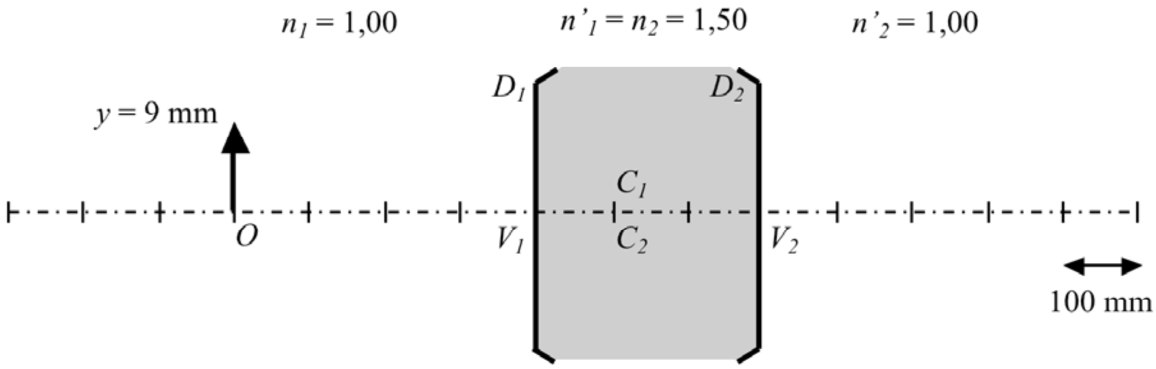
$$f'_D = \frac{n'}{P'_D} = \frac{\frac{4}{3}}{60} = \frac{4}{3.60}\ \text{m} = \frac{1000}{60}\frac{4}{3}\ \text{mm} = 22{,}22\ \text{mm}.$$

$$P'_L = P'_D; \qquad f' = \overline{f'_D} = \frac{f'_D}{n'} = \frac{\frac{1000}{60}\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1000}{60} = 16{,}67\ \text{mm}; \quad f = -f' = -16{,}67\ \text{mm}.$$

La lente equivalente en aire que describe el ojo reducido se muestra en la figura siguiente:



14. Sea el sistema de la figura. Determina:
a) La posición de la imagen del objeto *O*.
b) El tamaño de dicha imagen.
c) El carácter real o virtual de la imagen.
Resuelve los apartados b), c) y d):
i) A partir de la asociación de dioptrios.
ii) A partir del sistema equivalente en aire.



R/ a) i) a) $V_2O' = 400/3$ mm; b) $y' = -6$ mm; c) Real; ii) $V_2O' = L_2O' = 400/3$ mm; b) $y' = -6$ mm; c) Real.

SOLUCIÓN:

i) Considerando la asociación de dioptrios:

a) Dioptrio D_1:

$$P'_{D_1} = \frac{n'_1 - n_1}{R_1}; \qquad n_1 = 1,00; \qquad n'_1 = 1,50; \qquad R_1 = 100 \text{ mm} = 0,100 \text{ m}.$$

$$P'_{D_1} = \frac{1,50 - 1,00}{0,100} = 5,00 \text{ D} = \frac{5}{1000} \text{ mm}^{-1}; \qquad P_{D_1} = -P'_{D_1} = -5,00 \text{ D} = -\frac{5}{1000} \text{ mm}^{-1}.$$

Imagen formada for el dioptrio D_1:

$$-S_1 + S'_1 = P'_{D_1}; \qquad -\frac{n_1}{s_1} + \frac{n'_1}{s'_1} = P'_{D_1}.$$

$$n_1 = 1,00; \qquad n'_1 = 1,50; \qquad s_1 = -400 \text{ mm}; \qquad P'_{D_1} = \frac{5}{1000} \text{ mm}^{-1};$$

$$-\frac{1{,}00}{-\ 400}+\frac{1{,}50}{s'_1}=\frac{5}{1000};\qquad \frac{1{,}50}{s'_1}=\frac{5}{1000}-\frac{1}{400}=\frac{10-5}{2000}=\frac{5}{2000};\qquad s'_1 = 600 \text{ mm.}$$

$$m_1=\frac{n_1\ s'_1}{n'_1\ s_1}=\frac{1{,}00(600)}{1{,}50(-400)}=-1;\qquad y'_1=m_1 y_1=-1(9)=-9\ \text{mm}.$$

Dioptrio D_2:

$$P'_{D_2}=\frac{n'_2-n_2}{R_2};\qquad n_2 = 1{,}50;\qquad n'_2 = 1{,}00;\qquad R_2 = -200 \text{ mm} = -0{,}200 \text{ m.}$$

$$P'_{D_2}=\frac{1{,}00-1{,}50}{-\ 0{,}200}=\frac{0{,}50}{0{,}200}=2{,}50\ \text{D}=\frac{2{,}50}{1000}\ \text{mm}^{-1};$$

$$P_{D_2}=-P'_{D_2}=-2{,}50\ \text{D}=-\frac{2{,}50}{1000}\ \text{mm}^{-1}.$$

Imagen formada por el dioptrio D_2:

$$-S_2+S'_2=P'_{D_2};\qquad -\frac{n_2}{s_2}+\frac{n'_2}{s'_2}=P'_{D_2}.$$

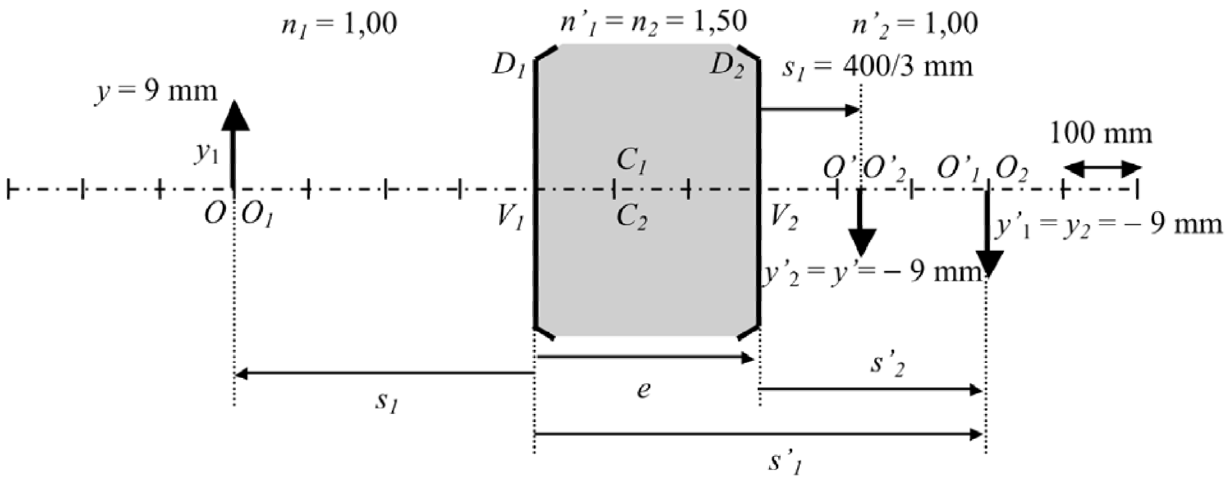
$n_2 = 1{,}50$; $n'_2 = 1{,}00$; $s_2 = s'_1 - V_1V_2 = s'_1 - e = 600 - 300 = 300$ mm;

$$P'_{D_2}=\frac{2{,}50}{1000}\ \text{mm}^{-1}.$$

$$-\frac{1{,}50}{300}+\frac{1{,}00}{s'_2}=\frac{2{,}5}{1000};\qquad \frac{1}{s'_2}=\frac{1}{400}+\frac{1{,}50}{300}=\frac{3+6}{1200}=\frac{9}{1200}=\frac{3}{400};$$

$$s'_2=D_2O'=\frac{400}{3}\ \text{mm}$$

$$m_2=\frac{n_2\ s'_2}{n'_2\ s_2}=\frac{1{,}50\frac{400}{3}}{1{,}00(300)}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3};\qquad y'_2=m_2y_2=\frac{2}{3}(-9)=-6\ \text{mm}$$



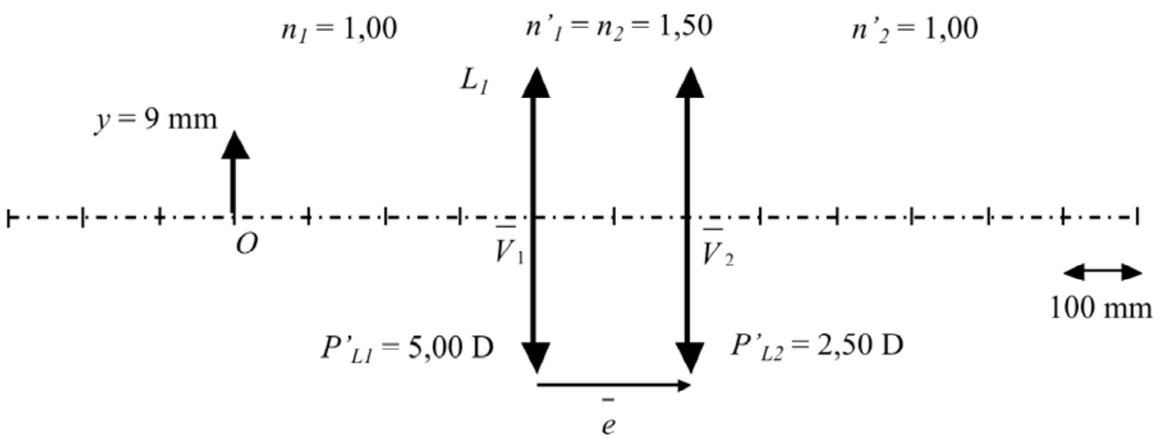
b) $m = m_1 m_2 = -1\left(\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{2}{3}$.

$$m = \frac{y'}{y}; \qquad y' = my = -\frac{2}{3}(9) = -6 \text{ mm.}$$

c) La imagen es real ya que $s'_2 > 0$.

ii) Considerando la asociación de dos lentes equivalentes en aire:

$$\bar{e} = \overline{V_1 V_2} = \frac{e}{n_2} = \frac{V_1V_2}{n_2} = \frac{300}{1,5} = 200 \text{ mm.}$$



a) Lente equivalente L_1:

Imagen formada por la lente L_1.

$$-\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a'_1}=P'_{L_1}$$

$$a_1=\bar{s}_1=\frac{\bar{s}_1}{n_1}=-\frac{400}{1{,}00}=-400\ \text{mm};\qquad P'_{L_1}=P'_{D_1}=5{,}00\ \text{D}=\frac{5}{1000}\ \text{mm}^{-1}.$$

$$-\frac{1}{-400}+\frac{1}{a'_1}=\frac{5}{1000};\qquad \frac{1}{a'_1}=\frac{5}{1000}-\frac{1}{400}=\frac{10-5}{2000}=\frac{5}{2000};$$

$a'_1 = 400$ mm.

$$m_1=\frac{a'_1}{a_1}=\frac{400}{-400}=-1;\qquad y'_1=m_1y_1=-1(9)=-9\ \text{mm}$$

Imagen formada por la lente L_2:

$$-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a'_2}=P'_{L_2}$$

$$a_2=a_1-\bar{e}=400-200=200\ \text{mm}.$$

$$P'_{L_2}=P'_{D_2}=2{,}5\ \text{D}=\frac{2{,}5}{1000}\ \text{mm}^{-1}.$$

$$-\frac{1}{200}+\frac{1}{a'_2}=\frac{2{,}5}{1000};\qquad \frac{1}{a'_2}=\frac{1}{400}+\frac{1}{200}=\frac{1+2}{400}=\frac{3}{400};$$

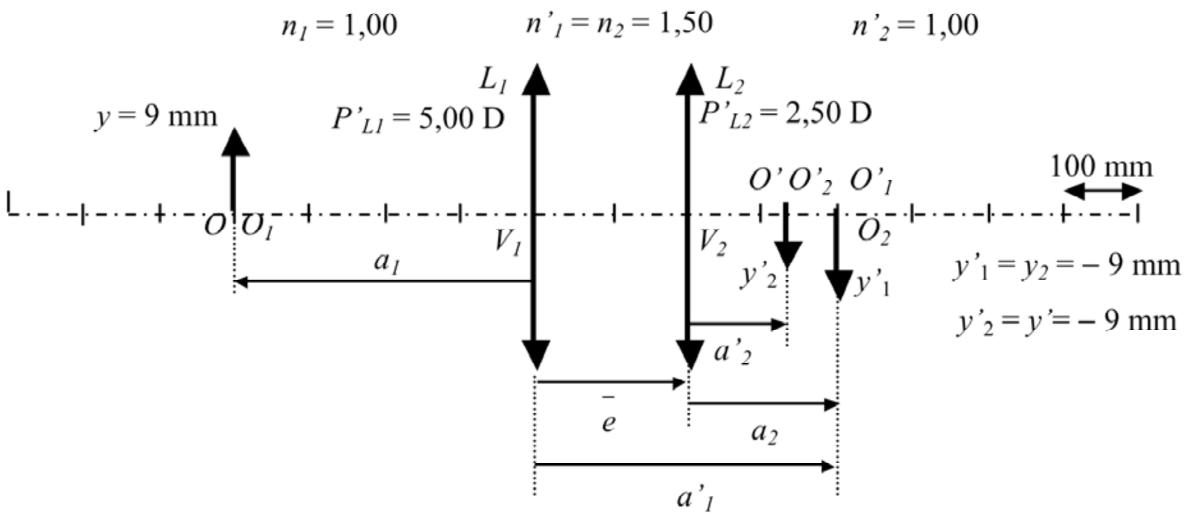
$$a'_2=L_2O'=\frac{400}{3}\ \text{mm}.$$

La posición de la imagen respecto del vértice V_2 del dioptrio será:

$$a'_2 = \overline{s'_2} = \frac{s'_2}{n'_2}; \qquad s'_2 = D_2O' = n'_2\, a'_2 = 1{,}00\left(\frac{400}{3}\right) = \frac{400}{3}\ \text{mm.}$$

Valor que coincide con el encontrado anteriormente.

$$m_2 = \frac{a'_2}{a_2} = \frac{\frac{400}{3}}{200} = \frac{2}{3}; \qquad y'_2 = m_2 y_2 = \frac{2}{3}(-9) = -6\ \text{mm}.$$

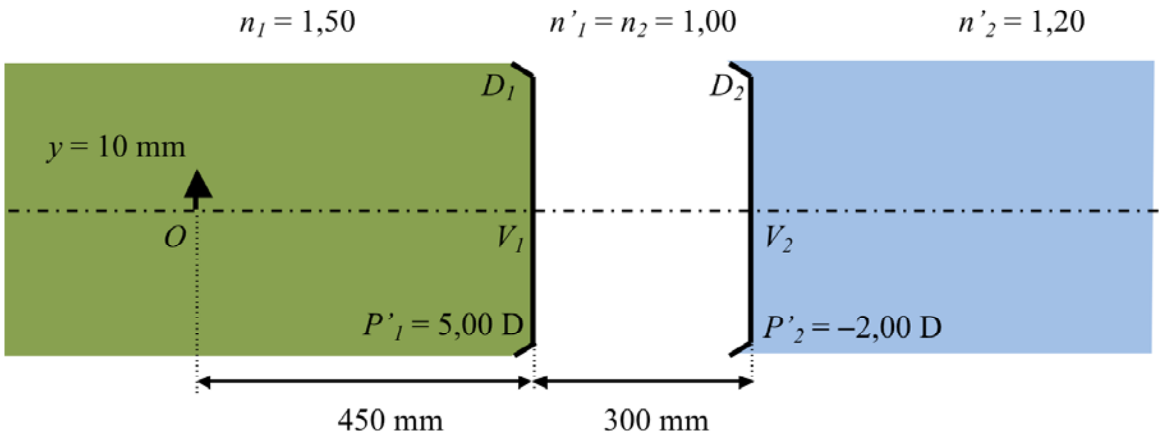


b) $m = m_1 m_2 = -1\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}.$

$$m = \frac{y'}{y}; \qquad y' = my = -\frac{2}{3}(9) = -6\ \text{mm.}$$

c) La imagen es real ya que $a'_2 > 0$.

15. Sea el sistema de la figura. Determina:
a) La posición de la imagen del objeto *O*.
b) El tamaño de dicha imagen.
c) El carácter real o virtual de la imagen.
Resuelve los apartados anteriores:
i) A partir de la asociación de dioptrios.
ii) A partir del sistema equivalente en aire.



SOLUCIÓN:

i) Considerando la asociación de dioptrios:

a) Imagen formada for el dioptrio D_1:

$$-S_1 + S'_1 = P'_{D_1}; \qquad -\frac{n_1}{s_1} + \frac{n'_1}{s'_1} = P'_{D_1}.$$

$n_1 = 1{,}50$; $\quad n'_1 = 1{,}00$; $\quad s_1 = -450$ mm; $\quad P'_{D_1} = 5{,}00\ \text{D} = \dfrac{5}{1000}\ \text{mm}^{-1}$;

$$-\frac{1{,}50}{-450} + \frac{1{,}00}{s'_1} = \frac{5}{1000}; \qquad \frac{1{,}00}{s'_1} = \frac{5}{1000} - \frac{1{,}50}{450} = \frac{5}{1000} - \frac{1}{300} = \frac{15-10}{3000} = \frac{5}{3000};$$

$s'_1 = 600$ mm.

$$m_1 = \frac{n_1\, s'_1}{n'_1\, s_1} = \frac{1{,}50(600)}{1{,}00(-450)} = -2; \qquad y'_1 = m_1 y_1 = -2(10) = -20\ \text{mm}.$$

Imagen formada por el dioptrio D_2:

$$-S_2 + S'_2 = P'_{D_2}\,; \qquad -\frac{n_2}{s_2} + \frac{n'_2}{s'_2} = P'_{D_2}.$$

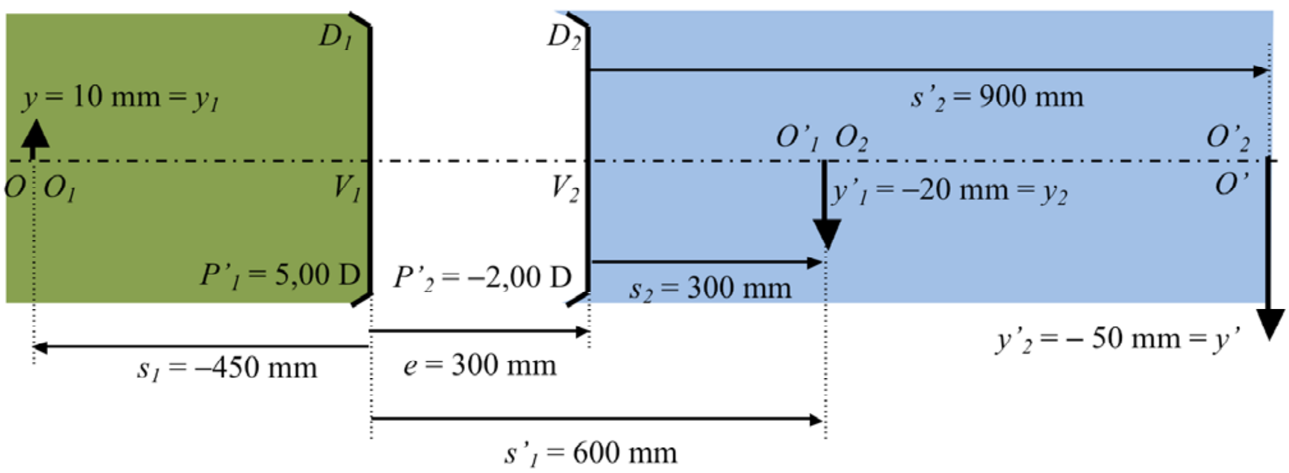
$n_2 = 1{,}00$; $n'_2 = 1{,}20$; $s_2 = s'_1 - e = 600 - 300 = 300$ mm;

$$P'_{D_2} = -\;2\;\mathrm{D} = -\frac{2{,}00}{1000}\;\mathrm{mm}^{-1}.$$

$$-\frac{1{,}00}{300} + \frac{1{,}20}{s'_2} = -\frac{2{,}00}{1000}\,; \qquad \frac{1{,}20}{s'_2} = -\frac{2{,}00}{1000} + \frac{1{,}00}{300} = \frac{-6+10}{3000} = \frac{4}{3000}\,;$$

$$s'_2 = V_2O' = 900\;\mathrm{mm}.$$

$$m_2 = \frac{n_2\;s'_2}{n'_2\;s_2} = \frac{1{,}00(900)}{1{,}20(300)} = 2{,}5; \qquad y'_2 = m_2 y_2 = 2{,}5(-20) = -\;50\;\mathrm{mm}\,.$$



b) $m = m_1 m_2 = -2(2{,}5) = -\;5$.

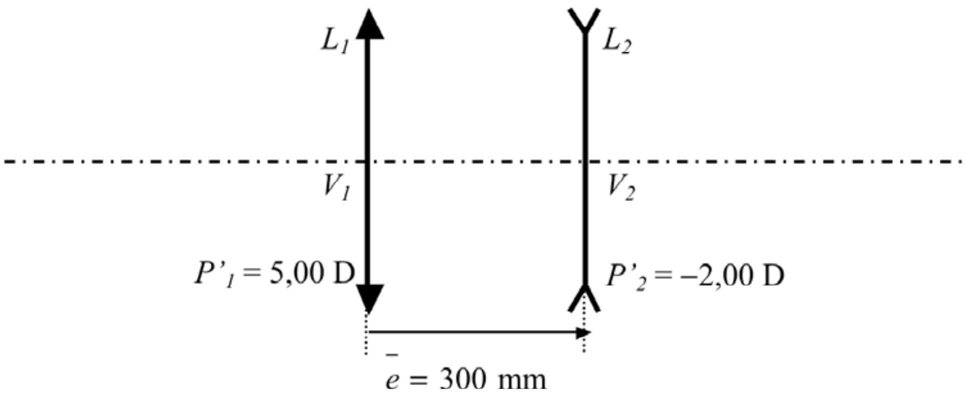
$$m = \frac{y'}{y}\,; \qquad y' = my = -5(10) = -\;50\;\mathrm{mm}\,.$$

c) La imagen es real ya que $s'_2 > 0$.

ii) Considerando la asociación de lentes equivalentes en aire:

$$\bar{e} = \overline{V_1V_2} = \frac{e}{n_2} = \frac{V_1V_2}{n_2} = \frac{300}{1{,}00} = 300 \text{ mm.}$$

El sistema formado por los dioptrios D_1 y D_2 es equivalente al sistema formado por la asociación de dos lentes delgadas en aire de la figura:



a) Imagen formada por la lente L_1.

$$-\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a'_1} = P'_{L_1}$$

$$a_1 = \bar{s}_1 = \frac{s_1}{n_1} = -\frac{450}{1{,}50} = -300 \text{ mm;} \qquad P'_{L_1} = P'_{D_1} = 5 \text{ D} = \frac{5}{1000} \text{ mm}^{-1}.$$

$$-\frac{1}{-300} + \frac{1}{a'_1} = \frac{5}{1000}; \qquad \frac{1}{a'_1} = \frac{5}{1000} - \frac{1}{300} = \frac{15-10}{3000} = \frac{5}{3000};$$

a'_1 = 600 mm.

$$m_1 = \frac{a'_1}{a_1} = \frac{600}{-300} = -2; \qquad y'_1 = m_1 y_1 = -2(10) = -20 \text{ mm}.$$

Imagen formada por la lente L_2:

$$-\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a'_2} = P'_{L_2}$$

$$a_2 = a_1 - \bar{e} = 600 - 300 = 300 \text{ mm}.$$

$$P'_{L_2} = P'_{D_2} = -2{,}00 \text{ D} = -\frac{2{,}00}{1000} \text{ mm}^{-1}.$$

$$-\frac{1}{300} + \frac{1}{a'_2} = -\frac{2{,}00}{1000}; \qquad \frac{1}{a'_2} = -\frac{2}{1000} + \frac{1}{300} = \frac{-6+10}{3000} = \frac{4}{3000};$$

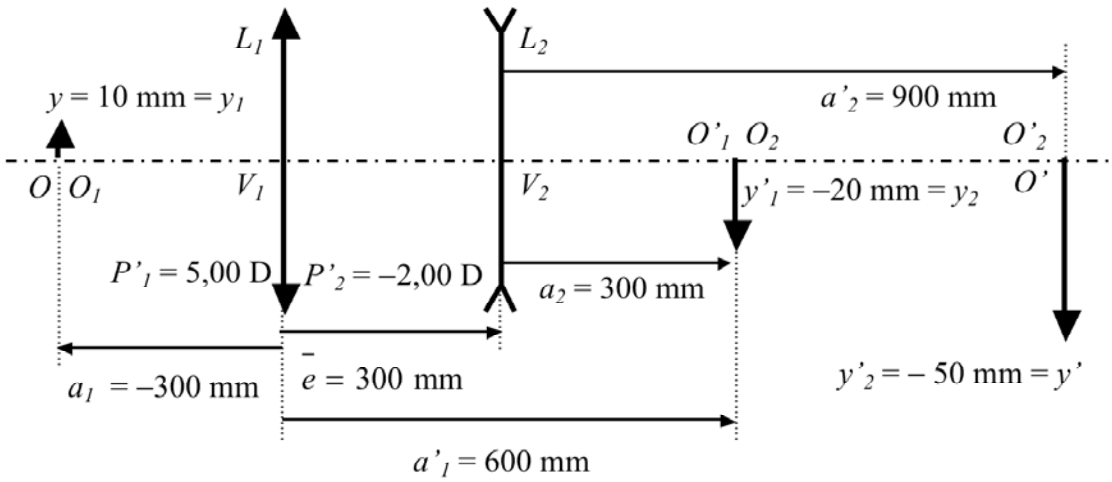
$$a'_2 = L_2O' = 750 \text{ mm}.$$

La posición de la imagen respecto del vértice V_2 del dioptrio será:

$$a'_2 = \overline{s'_2} = \frac{s'_2}{n'_2}; \qquad s'_2 = V_2O' = n'_2\, a'_2 = 1{,}20(750) = 900 \text{ mm}.$$

Valor que coincide con el encontrado anteriormente.

$$m_2 = \frac{a'_2}{a_2} = \frac{750}{300} = 2{,}5; \qquad y'_2 = m_2 y_2 = 2{,}5(-20) = -50 \text{ mm}.$$



b) $m = m_1 m_2 = -2(2{,}5) = -5$.

$$m = \frac{y'}{y}; \qquad y' = my = -5(10) = -50 \text{ mm}.$$

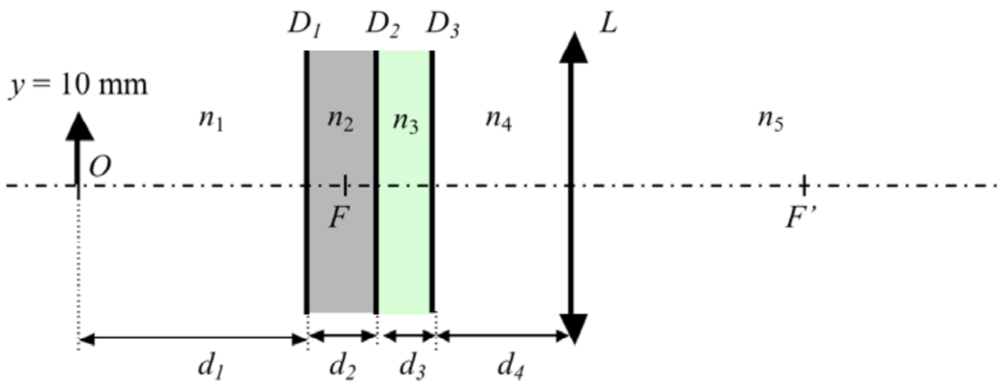
c) La imagen es real ya que $a'_2 > 0$.

16. Sea el sistema de la figura formado por la asociación de tres dioptrios planos y una lente delgada de las siguientes características:

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
1,00	1,50	1,30	1,00	1,00

d_1	d_2	d_3	d_4	f'
100 mm	30 mm	26 mm	60 mm	100 mm

Determina:
a) La posición de la imagen formada.
b) El tamaño de la imagen.
c) El carácter real o virtual de la imagen.



SOLUCIÓN:

a) Formación de la imagen:

Imagen formada por los dioptrios D_1, D_2 y D_3:

$$\overline{D_3O'_3} = s'_3 = -n'_3\left(\overline{d_3} + \overline{d_2} + \overline{d_1}\right) = -\,n_4\left(\frac{d_3}{n_3} + \frac{d_2}{n_2} + \frac{d_1}{n_1}\right);$$

Sustituyendo los valores de la tabla:

$$\overline{D_3O'_3} = s'_3 = -1{,}00\left(\frac{26}{1{,}30} + \frac{30}{1{,}50} + \frac{100}{1{,}00}\right) = -140 \text{ mm}.$$

$m_{123} = +1$. $\qquad y'_3 = m_{123}y_3 = 1(10) = 10 \text{ mm}.$

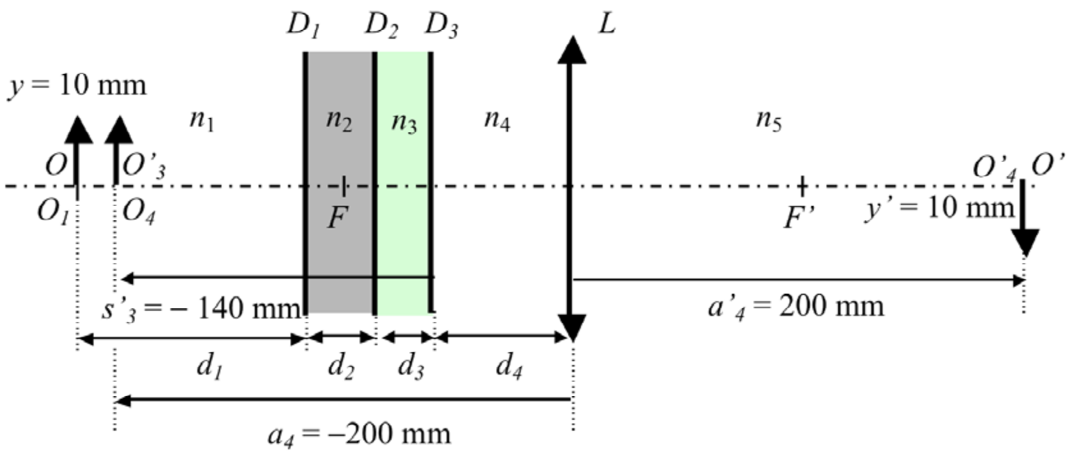
Imagen formada por la lente L:

$$-\frac{n_4}{a_4}+\frac{n'_4}{a'_4}=\frac{n'_4}{f'}\,; \qquad -\frac{1{,}00}{a_4}+\frac{1{,}00}{a'_4}=\frac{1{,}00}{f'}\,.$$

$a_4 = LO_4 = LO'_3 = LD_3 + D_3O'_3 = -d_4 + D_3O'_3 = -60 - 140 = -200$ mm;

$f' = 100$ mm.

$$-\frac{1}{-200}+\frac{1}{a'_4}=\frac{1}{100}\,; \qquad \frac{1}{a'_4}=\frac{1}{100}-\frac{1}{200}=\frac{2-1}{200}=\frac{1}{200}\,; \qquad a'_4 = 200 \text{ mm.}$$



$$m_4 = \frac{a'_4}{a_4} = \frac{200}{-200} = -1. \qquad y'_4 = m_4 y_4 = -1(10) = -10 \text{ mm.}$$

b) $m = m_{123} m_4 = 1(-1) = -1$.

$$m = \frac{y'}{y}\,; \qquad y' = my = -1(10) = -10 \text{ mm (Imagen invertida).}$$

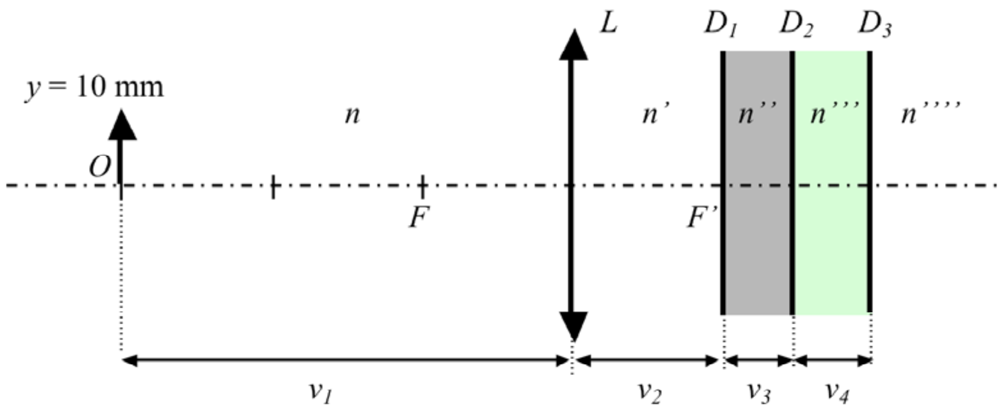
c) La imagen es real ya que $a'_4 > 0$.

17. Sea el sistema de la figura de las siguientes características:

n	n_1	n_2	n_3	n_4
1,00	1,00	1,50	1,30	1,00

v_1	v_2	v_3	v_4	f'
300 mm	100 mm	45 mm	52 mm	100 mm

Determina:
a) La posición de la imagen formada.
b) El tamaño de la imagen.
c) El carácter real o virtual de la imagen.



SOLUCIÓN:

a) Posición de la imagen:

Imagen formada por la lente L:

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f'}; \qquad a = -v_1 = -300 \text{ mm}; \quad f' = 100 \text{ mm}.$$

$$-\frac{1}{-300}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{100}; \qquad \frac{1}{a'}=\frac{1}{100}-\frac{1}{300}=\frac{3-1}{300}=\frac{2}{300}; \qquad a' = LO'_L = 150 \text{ mm}.$$

$$m_L = \frac{a'}{a} = \frac{150}{-300} = -\frac{1}{2}. \qquad y'_L = m_L y = -\frac{1}{2}(10) = -5 \text{ mm}.$$

Imagen formada por los dioptrios D_1, D_2 y D_3:

$$D_3O'_3 = s'_3 = -\,n'_3\left(\overline{d_3} + \overline{d_2} + \overline{d_1}\right) = -\,n_4\left(\frac{d_3}{n_3} + \frac{d_2}{n_2} + \frac{d_1}{n_1}\right) \qquad (1)$$

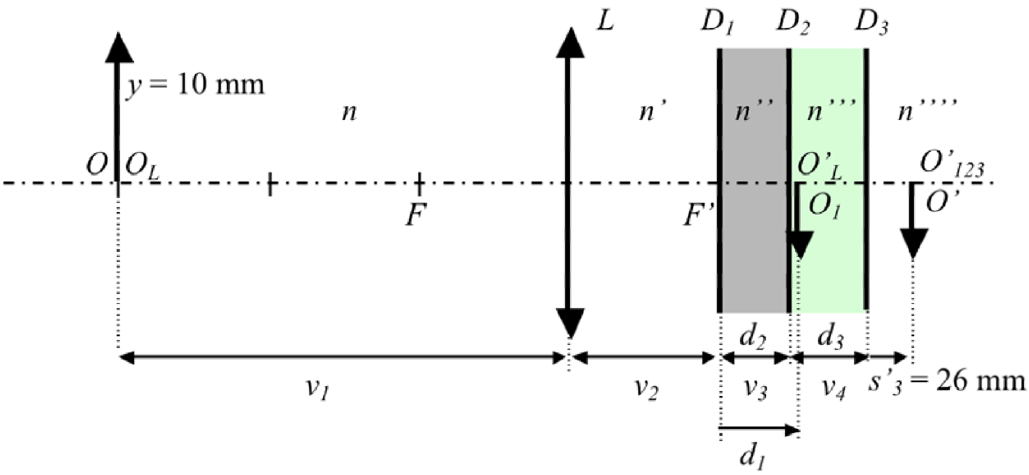
En este caso: n_1 = 1,00; n_2 =1,00; n_3 = 1,50; n_4 = 1,30; n_5 = 1,00;

$d_1 = D_1O'_L = D_1O_1 = D_1L + LO_1 = -v_2 + LO_1 = -100 + 150 = 50$ mm.

Debido a que O'_L está situado a la derecha de D_1, según el convenio de signos utilizado al deducir la fórmula (1), el valor de d_1 debe tomarse como negativo.

d_1 = –50 mm; $d_2 = v_3$ = 45 mm; $d_3 = v_4$ = 45 mm.

$$D_3O'_3 = s'_3 = -\,1{,}30\left(\frac{52}{1{,}3} + \frac{45}{1{,}50} + \frac{(-50)}{1{,}00}\right) = 26 \text{ mm}\,.$$



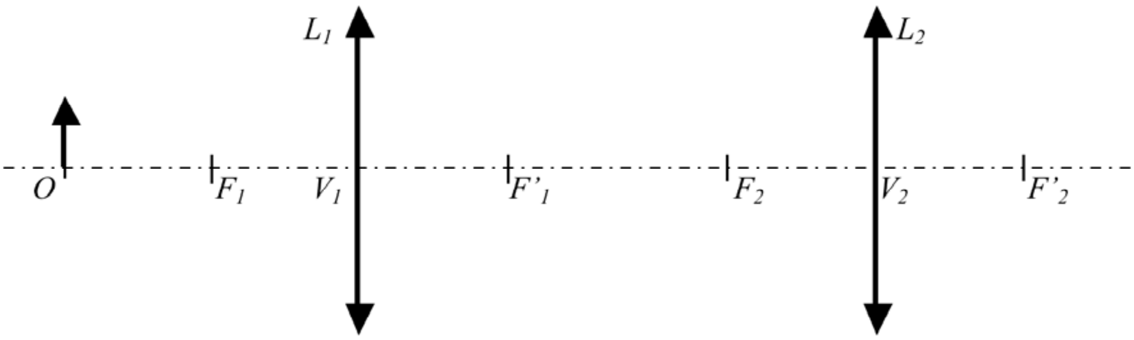
m_{123} = +1. $\qquad y'_3 = m_{123}y'_L = 1(10) = 10$ mm.

b) $m = m_L m_{123} = -\frac{1}{2}(1) = -1\,.$

$m = \dfrac{y'}{y}; \qquad y' = my = -\dfrac{1}{2}(10) = -5$ mm.

c) La imagen es real ya que $s'_3 > 0$.

18. Sea el sistema de la figura sumergido en aire:
V_1O = –200 mm; $f'_1 = f'_2$ = 100 mm; V_1V_2 = 350 mm.



Determina:
a) La posición de la imagen intermedia o imagen formada por la primera lente.
b) El carácter real o virtual de la imagen intermedia.
c) El aumento lateral de la imagen intermedia.
d) La posición de la imagen final.
e) El carácter real o virtual de la imagen final.
f) El aumento lateral de la imagen formada por la segunda lente.
g) El aumento final.

Solución numérica y gráfica.

SOLUCIÓN NUMÉRICA:

a) a_1 = –200 mm, f'_1 = 100 mm.

$$-\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a'_1}=\frac{1}{f'_1}; \qquad -\frac{1}{-200}+\frac{1}{a'_1}=\frac{1}{100}; \qquad \frac{1}{a'_1}=\frac{1}{100}-\frac{1}{200}=\frac{2-1}{200}=\frac{1}{200};$$

$a'_1 = V_1O'_1$ = 200 mm.

Se cumple que si $a_1 = 2f_1$ = –200 mm resulta que $a'_1 = 2f'_1$ = 200 mm.

b) La imagen intermedia es real ya que $a'_1 > 0$.

c) $$m_1=\frac{y'_1}{y_1}=\frac{a'_1}{a_1}; \qquad m_1=\frac{200}{-200}=-1.$$

d) $a_2 = V_2O_2 = V_2O'_1 = V_2V_1 + V_1O'_1$ = –350 + 200 = –150 mm, f'_2 = 10 cm;

$$-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a'_2}=\frac{1}{f'_2}; \qquad -\frac{1}{-150}+\frac{1}{a'_1}=\frac{1}{100}; \qquad \frac{1}{a'_2}=\frac{1}{100}-\frac{1}{150}=\frac{3-2}{300}=\frac{1}{300};$$

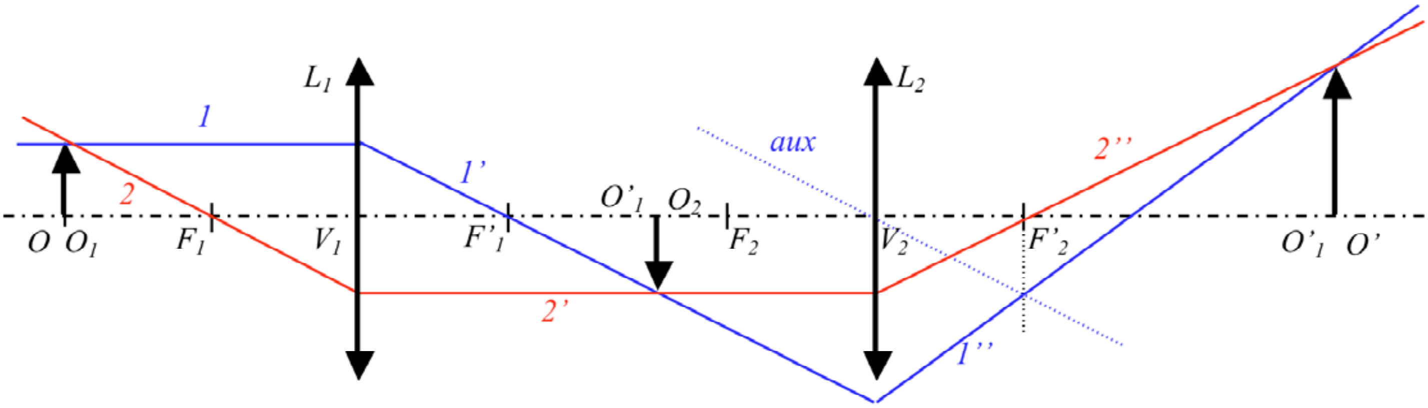
$a'_2 = V_2O'_2 = 300$ mm.

e) La imagen final es real ya que $a'_2 > 0$.

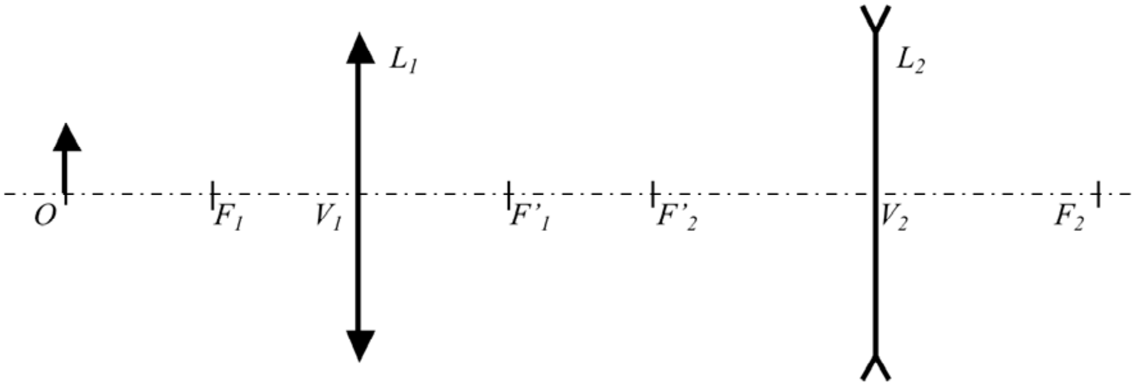
f) $m_2=\frac{y'_2}{y_2}=\frac{a'_2}{a_2}; \qquad m_2=\frac{300}{-150}=-2$

g) $m = m_1\, m_2 = (-1)(-2) = 2$

SOLUCIÓN GRÁFICA:



19. Sea el sistema de la figura sumergido en aire:
$V_1O = -200$ mm; $f'_1 = 100$ mm; $f'_2 = -150$ mm; $V_1V_2 = 350$ mm;



Determina:
a) La posición de la imagen intermedia o imagen formada por la primera lente.
b) El carácter real o virtual de la imagen intermedia.
c) El aumento lateral de la imagen intermedia.
d) La posición de la imagen final.
e) El carácter real o virtual de la imagen final.
f) El aumento lateral de la imagen formada por la segunda lente.
g) El aumento final.

Solución numérica y gráfica.

SOLUCIÓN NUMÉRICA:

a) $a_1 = -200$ mm, $f'_1 = 100$ mm;

$$-\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a'_1}=\frac{1}{f'_1};\ -\frac{1}{-200}+\frac{1}{a'_1}=\frac{1}{100};\ \frac{1}{a'_1}=\frac{1}{100}-\frac{1}{200}=\frac{2-1}{200}=\frac{1}{200};$$

$a'_1 = V_1O'_1 = 200$ mm.

Se cumple que si $a_1 = 2f_1 = -200$ mm resulta que $a'_1 = 2f'_1 = 200$ mm.

b) La imagen intermedia es real ya que $a'_1 > 0$.

c) $m_1=\dfrac{y'_1}{y_1}=\dfrac{a'_1}{a_1};\qquad m_1=\dfrac{200}{-200}=-1.$

d) $a_2 = V_2O_2 = V_2O'_1 = V_2V_1 + V_1O'_1 = -350 + 200 = -150$ mm, $f'_2 = -150$ mm;

$$-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a'_2}=\frac{1}{f'_2};\ -\frac{1}{-150}+\frac{1}{a'_1}=\frac{1}{-150};\ \frac{1}{a'_2}=-\frac{1}{150}-\frac{1}{150}=\frac{-2}{150}\ ;$$

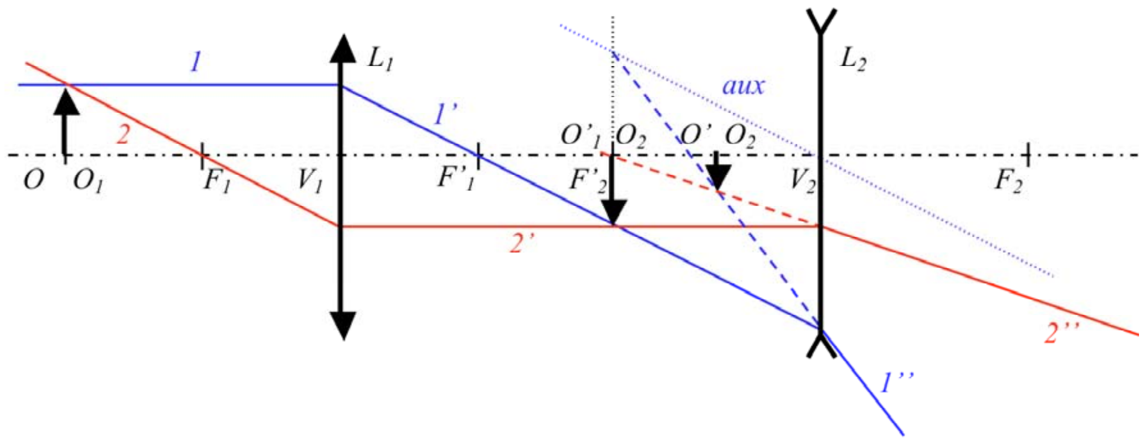
$a'_2 = V_2O'_2 = -75$ mm.

e) $m_2=\frac{y'_2}{y_2}=\frac{a'_2}{a_2};\quad m_2=\frac{-75}{-150}=\frac{1}{2}.$

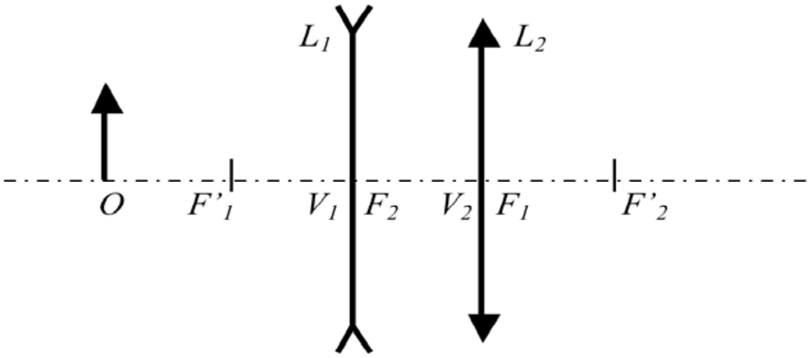
f) La imagen final es virtual ya que $a'_2 < 0$.

g) $m = m_1\, m_2 = (-1)\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$

SOLUCIÓN GRÁFICA:



20. Sea el sistema de la figura sumergido en aire:
$V_1O = -800$ mm; $f'_1 = -400$ mm; $f'_2 = 400$ mm; $V_1V_2 = 400$ mm.



Determina:
a) La posición de la imagen intermedia o imagen formada por la primera lente.
b) El carácter real o virtual de la imagen intermedia.
c) El aumento lateral de la imagen intermedia.
d) La posición de la imagen final.
e) El carácter real o virtual de la imagen final.
f) El aumento lateral de la imagen formada por la segunda lente.
g) El aumento final.

Solución numérica y gráfica

SOLUCIÓN NUMÉRICA:

a) Lente L_1: $a_1 = -800$ mm; $f_1' = -400$ mm

$$-\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a'_1}=\frac{1}{f'_1}\,;\; -\frac{1}{-800}+\frac{1}{a'_1}=\frac{1}{-400}\,;\; \frac{1}{a'_1}=-\frac{1}{400}-\frac{1}{800}=\frac{-2-1}{800}=-\frac{3}{800}\,;$$

$$a'_1 = V_1O'_1 = -\frac{800}{3}\text{ mm}\,;$$

b) La imagen intermedia es virtual ya que $a'_1 < 0$.

$$\text{c) } m_1=\frac{y'_1}{y_1}=\frac{a'_1}{a_1}\,;\; m_1=\frac{y'_1}{y_1}=\frac{-\frac{800}{3}}{-800}=\frac{1}{3}\,.$$

d) Lente L_2: $a_2 = V_2O_2 = V_2O'_1 = V_2V_1 + V_1O'_1 = -400 - \frac{800}{3} = -\frac{2000}{3}$ mm ;

$f_2' = 400$ mm

$$-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a'_2}=\frac{1}{f'_2}; \qquad -\frac{1}{-\frac{2000}{3}}+\frac{1}{a'_2}=\frac{1}{400}; \qquad \frac{3}{2000}+\frac{1}{a'_2}=\frac{1}{400};$$

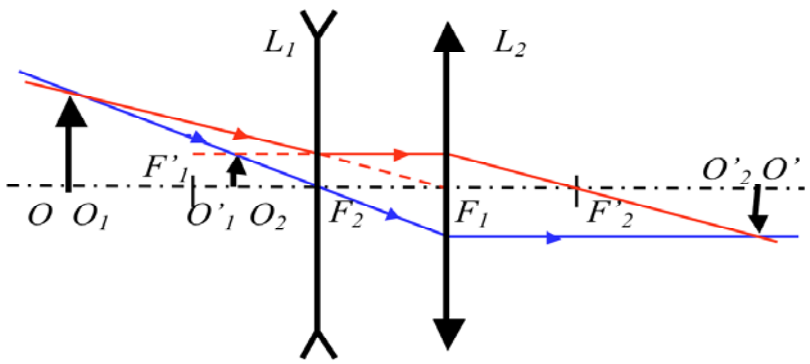
$$\frac{1}{a'_2}=\frac{1}{400}-\frac{3}{2000}=\frac{5-3}{2000}=\frac{2}{2000}=\frac{1}{1000}; \qquad a_2' = V_2O' = 1000 \text{ mm.}$$

e) La imagen final es real ya que $a'_2 > 0$.

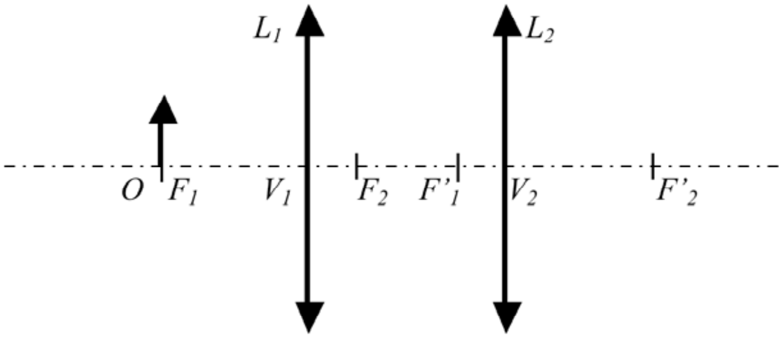
f) $m_2=\frac{y'_2}{y_2}=\frac{a'_2}{a_2}; \qquad m_2=\frac{y'_2}{y_2}=\frac{1000}{-\frac{2000}{3}}=-\frac{3}{2};$

g) $m=m_1\ m_2=\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

SOLUCIÓN GRÁFICA:



21. Sea el sistema de la figura sumergido en aire:
$V_1O = -150$ mm; $f'_1 = f'_2 = 150$ mm; $V_1V_2 = 150$ mm.



Determina:
a) La posición de la imagen final.
b) El aumento lateral de la imagen final.

SOLUCIÓN:

Se trata de un sistema de Badal ya que el objeto está situado en el foco objeto de la primera lente.

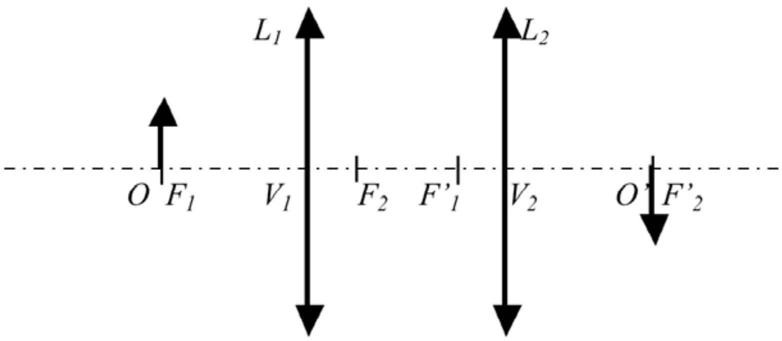
a) La imagen final estará en el foco imagen de la segunda lente.

$a'_2 = V_2O' = f'_2 = 150$ mm.

b) Aumento de un sistema de Badal:

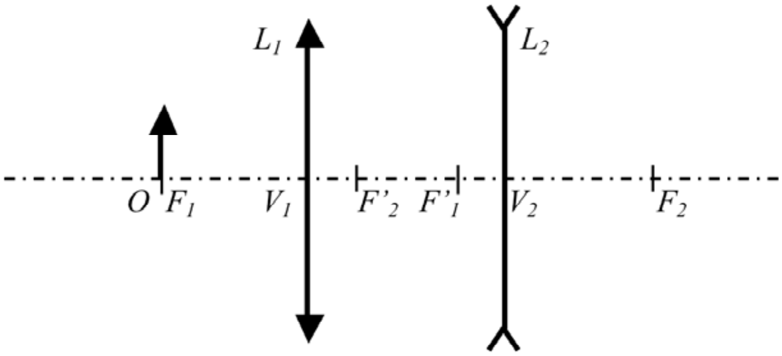
$m = \frac{y'}{y} = \frac{f_2}{f_1'}$. $f_2 = -f'_2 = -150$ mm; $f'_1 = 150$ mm.

$$m = \frac{-150}{150} = -1$$



22. Sea el sistema de la figura sumergido en aire:
$V_1O = -150$ mm; $f'_1 = 150$ mm; $f'_2 = -150$ mm; $V_1V_2 = 200$ mm.

Determina:
a) La posición de la imagen final.
b) El aumento lateral de la imagen final.



SOLUCIÓN:

Se trata de un sistema de Badal ya que el objeto está situado en el foco objeto de la primera lente.

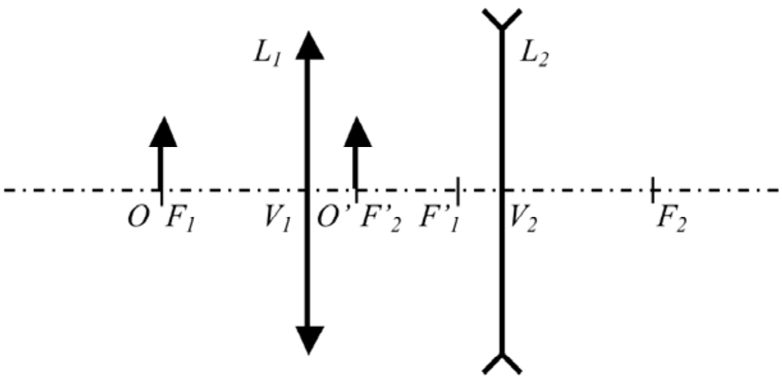
a) La imagen final estará en el foco imagen de la segunda lente.

$a'_2 = V_2O' = f'_2 = -150$ mm.

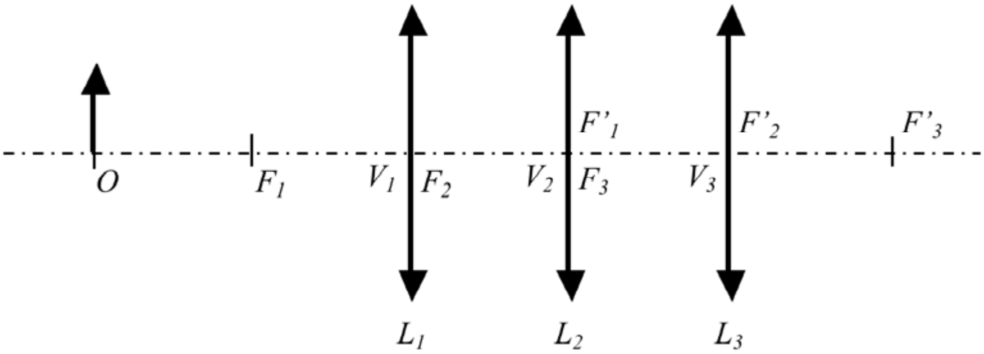
b) Aumento de un sistema de Badal:

$m = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{f_2}{f_1'}$. $f_2 = -f'_2 = 150$ mm; $f'_1 = 150$ mm.

$$m = \frac{150}{150} = 1$$



23. Sea el sistema de la figura sumergido en aire:
$V_1O = -600$ mm; $f'_1 = f'_2 = f'_3 = 300$ mm; $V_1V_2 = V_2V_3 = 300$ mm.



Determina:
a) La posición de la imagen formada por la primera lente.
b) El carácter real o virtual de la imagen formada por la primera lente.
c) El aumento lateral de la imagen formada por la primera lente.
d) La posición de la imagen formada por la segunda lente.
e) El carácter real o virtual de la imagen formada por la segunda lente.
f) El aumento lateral de la imagen formada por la segunda lente.
g) La posición de la imagen formada por la tercera lente o imagen final.
h) El carácter real o virtual de la imagen formada por la tercera lente o imagen final.
i) El aumento lateral de la imagen formada por la tercera lente.
j) El aumento final.

SOLUCIÓN:

Imagen formada por L_1:

a) Dado que el objeto está situado a la distancia $a_1 = V_1O = V_1O_1 = 2f_1 = -600$ mm, la imagen está situada a la distancia $a'_1 = 2f'_1 = 600$ mm. O sea $a'_1 = V_1O'_1 = 600$ mm.

b) La imagen formada por la primera lente es real ya que $a'_1 > 0$.

c) $m_1 = \dfrac{y'_1}{y_1} = \dfrac{a'_1}{a_1} = \dfrac{600}{-600} = -1.$

d) Imagen formada por la lente L_2:

$a_2 = V_2O_2 = V_2O'_1 = V_2V_1 + V_1O'_1 = -300 + 600 = 300$ mm, $f_2' = 300$ mm.

$$-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a'_2}=\frac{1}{f'_2};\ -\frac{1}{300}+\frac{1}{a'_2}=\frac{1}{300};\ \frac{1}{a'_2}=\frac{1}{300}+\frac{1}{300}=\frac{2}{300}=\frac{1}{150};$$

$a_2' = V_2O'_2 = 150$ mm.

e) La imagen formada por la segunda lente es real ya que $a'_2 > 0$.

f) $m_2=\frac{y'_2}{y_2}=\frac{a'_2}{a_2}=\frac{150}{300}=\frac{1}{2}$; $m_2=\frac{y'_2}{y_2}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$.

g) Imagen formada por la lente L_3:

$a_3 = V_3O_3 = V_3O'_2 = V_3V_2 + V_2O'_2 = -300 + 150 = -150$ mm; $f_3' = 300$ mm.

$$-\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a'_3}=\frac{1}{f'_3};\qquad -\frac{1}{-150}+\frac{1}{a'_3}=\frac{1}{300};\qquad \frac{1}{a'_3}=\frac{1}{300}-\frac{1}{150}=\frac{1-2}{300}=-\frac{1}{300};$$

$a'_3 = V_3O'_3 = V_3O' = -300$ mm.

h) La imagen formada por la tercera lente es virtual ya que $a'_3 < 0$.

i) $m_3=\frac{y'_3}{y_3}=\frac{a'_3}{a_3}=\frac{-300}{-150}=2$.

j) $m=m_1\,m_2\,m_3=(-1)\,\frac{1}{2}\,2=-1$.