UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

ESCOLA UNIVERSITARIA POLITÈCNICA DE VILANOVA I LA GELTRÚ

FILTRES ELECTRONICS ANALOGICS I DIGITALS (FEAD)

Quadern d'activitats de filtres digitals

GRUPS: K45-S45 CURS: 2006/2007 -2

José Antonio Soria Pérez
Miguel Ángel Ruiz

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Prólogo

El presente dossier recoge toda una serie de ejercicios que se recomienda realizar para reforzar los conocimientos explicados en las sesiones teóricos. Estos ejercicios comprenden varios aspectos generales y específicos que tienen que ver con el diseño de filtros digitales: conceptos básicos sobre el muestreo de señales, el análisis de sistemas discretos y el diseño de filtros digitales a partir de filtros analógicos entre otros.

La gran mayoría de estas actividades pueden ser realizadas con el soporte de Matlab (consultar el documento: *quadern d'activitats de laboratori de filtres digitals*), una herramienta orientada al cálculo numérico en base al uso de matrices. En especial, los ejerciciosd que están marcados con un asterisco (*). Dicha herramienta es bastante indicada, especialmente para comprobar el resultado por el lector en las actividades que en este documento aparecen.

1. Conceptos básicos sobre señales digitales

1.1 Clasifique las señales siguientes en función de las siguientes características:

- Mono-*canal* o *multi-canal*
- Dominio *continuo* o *discreto*
- *Analógico* o *digital*

a) Precios de cierre de las acciones de la Bolsa de Valores de Madrid
b) Una película en color
c) La posición del volante de un automóvil en movimiento con respecto a unos ejes de referencia situados en el automóvil
d) Las medidas de alturas y peso de un niño tomadas mensualmente

1.2 Determine cuáles de las siguientes señales correspondientes a sinusoides son discretas y calcule su periodo fundamental

a) $\cos(0.01\cdot\pi\cdot n)$ b) $\cos\left(\pi\frac{30\cdot n}{105}\right)$ c) $\cos(3\cdot\pi\cdot n)$

d) $\mathrm{sen}(3\cdot n)$ e) $sen\left(\pi\frac{62\cdot n}{10}\right)$

1.3 Determine si cada una de las señales siguientes es periodica y calcule su periodo fundamental en caso afirmativo:

a) $x_a(t) = 3\cdot\cos(5\cdot t+\pi/6)$
b) $x(n) = 3\cdot\cos(5\cdot n+\pi/6)$
c) $x(n) = 2\cdot\exp[j\cdot(n/6-\pi)]$
d) $x(n) = \cos(n/8)\cdot\cos(\pi\cdot n/8)$
e) $x(n) = \cos(\pi\cdot n/2)-\mathrm{sen}(\pi\cdot n/2)+ 3\cdot\cos(\pi\cdot n/4+\pi/3)$

1.4 Demuestre que el periodo fundamental N_p de las señales:

$$s_k(n) = e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot k\cdot n/N}, k= 0, 1, 2, ...$$

viene dado por N_p = MCD(k,N), donde MCD denota el máximo común divisor de k y N

1.5 Considere la siguiente señal sinusoidal analógica:ç

$$x_a(t) = 3\cdot\mathrm{sen}(100\cdot\pi\cdot t)$$

a) Dibuje la señal $x_a(t)$ para $0 \leq t \leq 30$ms
b) La señal $x_a(t)$se muestrea con una tasa de Fs = 300 muestras/s. Determine la frecuencia de la señal en tiempo discreto de $x_a(nT)$, $T=1/F_S$, y demuestre que es periódica

c) Calcule los valores de las muestras de un periodo de $x(n)$. Dibuje $x(n)$ en el mismo gráfico en el que ha representado $x_a(t)$. ¿Cuál es el periodo en mseg de la señal en tiempo discreto?
d) Podría encontrar una tasa de muestreo F_S tal que la señal alcance su valor de pico $x(n)$ de 3?. ¿Cuál es el valor mínimo de F_S en este caso?

1.6 Una sinusoide en tiempo discreto $x_a(t)$ con periodo fundamental $T_p = 1/F_0$ se muestrea con una tasa $F_S = 1/T$ para dar lugar a una sinusoide en tiempo discreto $x(n)= x_a(nT)$

a) Demuestre que $x(n)$ es periódica si $T/T_p = k/N$ (T/T_p es un número racional)
b) Justifique la siguiente afirmación: $x(n)$ es periódica si su periodo funmdamental T_p en segundos, es igual a un número entero de periodos de $x_a(t)$.

1.7 Una señal analógica contiene frecuencias hasta los 10KHz

a) ¿Qué intervalo de frecuencias de muestreo permite su reconstrucción exacta a partir de sus muestras?
b) Suponga que muestreamos esta señal a una velocidad de 250 muestras/s. ¿Cuál es la frecuencia más alta que se puede representar de forma unívoca con esta tasa?

1.8 Un electrocardiograma (ECG) analógico contiene frecuencias útiles hasta los 100Hz

a) ¿Cuál es la tasa de Nyquist que hay que utilizar en el muestreo de esta señal?
b) Suponga que se muestrea esta señal a razón de 250 muestras/s. ¿Cuál es la frecuencia más alta que se podrá representar de forma con esta tasa de muestreo?

1.9 Una señal analógica $x_a(t) = \text{sen}(480\cdot\pi\cdot t) + 3\cdot\text{sen}(720\cdot\pi\cdot t)$ se muestrea 600 veces por segundo

a) Determine la tasa de Nyquist para $x_a(t)$
b) Determine la máxima frecuencia a la que se puede muestrear para que no existe ambigüedad al reconstruir la señal original
c) ¿Cuáles son las frecuencias, en radianes, de la señal resultante $x(n)$?
d) Si $x(n)$ se pasa a través de un conversor D/A ideal, ¿cuál es la señal reconstruida $y_a(t)$ que se obtiene?

1.10 Por un enlace de comunicaciones digitales se transmiten palabras codificadas en binario que representan muestras de la siguiente señal de entrada:

$$x_a(t) = 3\cdot\cos(600\cdot\pi\cdot t) + 2\cdot\cos(1800\cdot\pi\cdot t)$$

El enlace trabaja a 10000 bits/s y cada muestra de entrada se cuantifica en un rango que puede tener 1024 valores de tensión diferentes.

a) ¿Cuál es la frecuencia de muestreo y la máxima que no produce ambigüedad al recuperar la señal original?

b) ¿Cuál es la tasa de Nyquist que se ha de utilizar para la señal original?
c) ¿Cuáles son las componentes frecuenciales que se obtienen en tiempo discreto?
d) ¿Determine la resolución (Δ)?

1.11 Considere el sistema de procesado de señal que se muestra a continuación. Los periodos de muestreo de los conversores A/D y D/A son T = 5mseg y T' = 1mseg, respectivamente. Determine la salida del sistema $y_a(t)$ a la entrada:

$$x_a(t) = 3\cdot\cos(100\cdot\pi\cdot t) + 2\cdot\text{sen}(250\pi\cdot t)$$

teniendo en cuenta que el post-filtrado elimina cualquier componente frecuencial por encima de $F_S/2$.

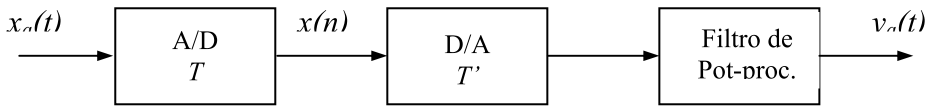


Figura 1.1.- Sistema de procesado de señal

1.12 La siguiente señal en tiempo discreto: $x(n)$= 6.35·cos($\pi\cdot n/10$) es cuantificada con una resolución (a) Δ=0.1 ó (b) Δ=0.02. ¿Cuántos bits se necesita en el conversor A/D para representar la señal en cada caso?

1.13 Determine la velocidad de bit y la resolución del muestreo de una señal sísmica cuyo rango dinámico es de un voltio si la velocidad de muestreo es F_S = 20muestras/seg y se utiliza un conversor A/D de 8 bits en dicha conversión.¿Cuál es la frecuencia máxima que se podría observar en la señal sísmica resultante acorde con dicho muestreo?

1.14* *Muestreo de señales sinusoidales. Aliasing.* Considere la siguiente señal en tiempo continuo.

$$x_a(t) = \text{sen}(2\cdot\pi\cdot F_0\cdot t), \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

Dada que $x_a(t)$ se describe de forma matemàtica, su versión muestreada puede describirse con valores tomados cada T segundos. La señal muestreada queda definida en este caso, mediante la expresión

$$x(n) = x_a(nT) = \text{sen}(2\cdot\pi\cdot F_0 /F_S\cdot\cdot t), \quad -\infty \leq n \leq \infty$$

donde F_S = 1/T

a) Represente la señal $x(n)$, $0 \leq n \leq 99$ para F_S =5KHz y F_0 =0.5, 2, 3 y 4.5KHz. Comente las similitudes y diferencias que hay entre las diferentes representaciones.
b) Suponga que F_0 = 2Khz y que el muestreo F_S = 50KHz.

1.- Dibuje la señal $x(n)$. ¿Cuál es la frecuencia f_0 de la señal $x(n)$?

2.- Dibuje ahora la señal *y(n)* obtenida a partir de las muestras pares de la señal de *x(n)* (*y(n)=x(2n)*). ¿Es sinusoidal? ¿Por qué? Si es así, cual es su frecuencia de oscilación?

1.15* *Error de cuantificación en la conversión A/D de una señal digital.* Sea $x_q(n)$ la señal obtenida al cuantificar $x(n) = \mathrm{sen}(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot n)$. La potencia del error de cuantificación se define como:

$$P_q = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^2(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[x_q(n) - x(n)\right]^2$$

La calidad de la señal cuantificada se mide mediante la relación señal-ruido de cuantificación (SQNR)

$$SQNR = 10\cdot\log_{10}\frac{P_x}{P_q}$$

donde P_x es la potencia de la señal sin cuantificar *x(n).*

a) Para f_0 = 1/50 y N = 200, escriba un programa para cuantificar la señal *x(n)* usando un truncamiento, con 64, 128 y 256 nivéles de cuantificación. En cada caso, dibuje las señales *x(n),* $x_q(n)$ y *e(n)* calculando el SQNR correspondiente.
b) Repita el apartado a) usando redondeo en vez de truncamiento.
c) Comente los resultados obtenidos en los dos casos anteriores.
d) Compare los valores de SQNR medidos en cada caso con los de la expresión teórica (Consultar apuntes de clase)

1.16 Una señal discreta *x(n)* se define como

$$x(n) = \begin{cases} 1 + n/3, & -3 < n < -1 \\ 1, & 0 < n < 3 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Determine sus valores y dibuje *x(n)*
b) Dibuje ña señal que resultaría si:

   1.- En primer lugar se refleja *x(n)* y luego se desplaza cuatro muestras
   2.- En primer lugar se desplaza *x(n)* cuatro muestras y luego se refleja

c) Represente la señal *x(-n+*4*)*
d) Compare los resultados de los apartados (b) y (c) y deduzca una regla para obtener *x(-n+k)* de *x(n)*
e) ¿Es posible determinar *x(n)* en terminos de *δ(n)* y *u(n)*?

1.17 La siguiente figura muestra una señal discreta *x(n)*:

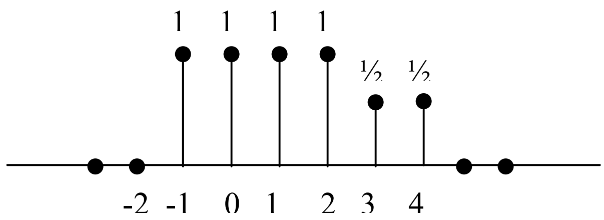


Figura 2.1.- Señal discreta *x(n)* del ejercicio 2.2

Represente cada una de las siguientes señales:

a) $x(n-2)$
b) $x(n-4)$
c) $x(n+2)$
d) $x(n)\cdot u(n-2)$
e) $x(n-1)\cdot \delta(n-3)$
f) $x(n^2)$
g) La parte par de $x(n)$
h) La parte impar de $x(n)$

1.18 Demuestre que:

a) $\delta(n) = u(n)-u(n-1)$
b) $u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$

1.19 Demuestre que cualquier señal puede descomponerse en una parte par y una par. ¿Es esta una descomposición única? Ilustre los resultados con la siguiente señal:

$$x(n) = \{2, 3, \underset{\uparrow}{4}, 5, 6\}$$

1.20 Demuestre que la energía (potencia) de una señal es igual a la suma de energías (potencias) de su parte par e impar.

Sistemas discretos

2.1 Considere el sistema:

$$y(n)=T[x(n)] = x(n^2)$$

a) Determine si dicho sistema es invariante en el tiempo.
b) Ilustre el resultado del apartado a) en el caso de aplicar la siguiente señalal sistema anterior:

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 < n < 3 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

1. Dibuje la señal $x(n)$
2. Determine y dibuje la señal $y(n)=T[x(n)]$
3. Dibuje la señal $y_2' = y(n-2)$
4. Determine y dibuje la señal $x_2 = x(n-2)$
5. Determine y dibuje la señal $y_2(n)=T[x_2(n)]$
6. Compare las señales $y_2(n)$ y $y_2'(n)$. ¿Qué conclusiones se pueden extraer?

c) Repita el apartado b) para el siguiente sistema:

$$y(n)=T[x(n)] = x(n)-x(n-1)$$

¿Puede usar este resultado para sacar alguna conclusión sobre la invarianza en el tiempo del sistema?

d) Repita el apartado b) para el siguiente sistema

$$y(n)=T[x(n)] = n \cdot x(n)$$

2.2 Los sistemas discretos pueden ser:

1.- Estático o dinámico
2.- Lineal o no lineal
3.- Invariante en el tiempo o variante en el tiempo
4.- Causal o no causal
5.- Estable o inestable

Referente a las propiedades anteriores, estudie los siguientes sistemas:

a) $y(n) = \cos[x(n)]$
b) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x(k)$
c) $y(n) = x(n) \cdot \cos[x(n)]$
d) $y(n) = x(-n+2)$
e) $y(n) = Trn[x(n)]$, donde $Trn[\cdot]$ denota la operación que sirve para quedarse con la parte entera de cada muestra en $x(n)$ obtenida por *truncamiento*.

f) $y(n) = Rnd[x(n)]$, donde $Rrn[\cdot]$ denota la operación que sirve para quedarse con la parte entera de cada muestra en *x(n)* obtenida por *redondeo*.
g) $y(n) = |x(n)|$
h) $y(n) = x(n) \cdot u(n)$
i) $y(n) = x(n) + n \cdot x(n+1)$
j) $y(n) = x(2n)$, Sistema compresor de señal
k) $y(n) = \begin{cases} x(n), & \text{si } x(n) > 0 \\ 0, & \text{si } x(n) < 0 \end{cases}$
l) $y(n) = x(-n)$
m) $y(n) = \text{sign}[x(n)]$
n) El sistema de muestreo ideal con entrada $x_a(t)$ y salida $x_a(nT)$, $-\infty \le n \le \infty$

2.3 Dos sistemas discretos T_1 y T_2 se conectan en serie para formar un nuevo sistema T_c , como se muestra en la siguiente figura.

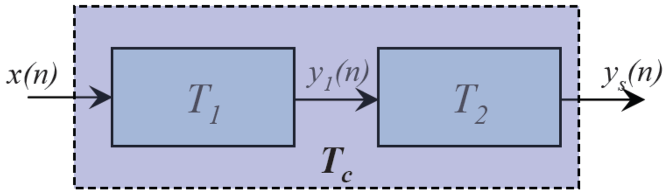


Figura 2.1.- Conexión de dos sistemas en serie

Demuestre para cada caso que viene a continuación si las afirmaciones son ciertas o falsas

a) Si T_1 y T_2 son **lineales**, entonces T_c también es lineal (es decir, la conexión en serie de los dos sistemas es lineal)
b) Si T_1 y T_2 son **invariantes** en el tiempo, entonces T_c también es invariante en el tiempo.
c) Si T_1 y T_2 son **causales** en el tiempo, entonces T_c también es causal.
d) Si T_1 y T_2 son **lineales** y **invariantes** en el tiempo, entonces T_c también lo es.
e) Si T_1 y T_2 son **lineales** y **invariantes** en el tiempo, entonces el sistema global T_c no cambia, es decir, $T_c = T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1$
f) Repita el apartada e) suponiendo que ambos sistemas son ahora **variantes** en el tiempo. Ponga un ejemplo
g) Si T_1 y T_2 son **no lineales,** entonces T_c no lo es.
h) Si T_1 y T_2 son **estables,** entonces T_c también lo es.
i) Demuestre mediante un ejemplo que lo contrario de los apartados c) y h) no es cierto en general.

2.4 Sea T un sistema LTI, estable BIBO en reposo con entrada *x(n)* y salida *y(n)*. Demuestre que:

a) Si *x(n)* es periódica con periodo N ($x(n) = x(n+N)$ para todo $n \ge 0$), la salida *y(n)* tiende a una señal periódica con el mismo periodo.
b) Si *x(n)* está acotada y tiende a una constante, la salida también tiende a una constante.
c) Si *x(n)* es una señal de energía, la salida *y(n)* también será una señal de energía.

2.5 Para un determinado sistema invariante en el tiempo se han observado las siguientes parejas de entrada-salida:

$$x_1(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, 2\} \overset{T}{\longleftrightarrow} y_1(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2\}$$

$$x_2(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 3\} \overset{T}{\longleftrightarrow} y_2(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 0, 2\}$$

$$x_3(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 0, 1\} \overset{T}{\longleftrightarrow} y_2(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 1\}$$

¿Es posible extraer algún tipo de conclusión sobre la linealidad del sistema? ¿Cuál es la respuesta impulsional del sistema?

2.6 Para un determinado sistema invariante en el tiempo se han observado las siguientes parejas de entrada-salida:

$$x_1(n) = \{-1, \underset{\uparrow}{2}, 1\} \overset{T}{\longleftrightarrow} y_1(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, -1, 0, 1\}$$

$$x_2(n) = \{1, \underset{\uparrow}{-1}, 1\} \overset{T}{\longleftrightarrow} y_2(n) = \{-1, \underset{\uparrow}{1}, 0, 2\}$$

$$x_3(n) = \{0, \underset{\uparrow}{1}, 1\} \overset{T}{\longleftrightarrow} y_2(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 1\}$$

¿Es posible extraer alguna conclusión sobre la invarianza en el tiempo del sistema?

2.7 Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que un sistema LTI en reposo sea estable BIBO es:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leq M_h < \infty$$

para cualquier constante M_h

2.8 Demuestre que:

a) Un sistema en reposo es causal si y sólo si para cualquier entrada $x(n)$ si:

$$x(n) = 0 \text{ para } n < n_0,\ y(n) = 0 \text{ para } n < n_0$$

b) Un sistema LTI en reposo es causal si y sólo si:

$$h(n) = 0 \text{ para } n < 0$$

2.9 Demuestre que:

a) Para cualquier constante *a*, real o compleja, y cualesquiera que sean los números enteros y finitos, *M* y *N*, tenemos que:

$$\sum_{n=M}^{N} a^n = \begin{cases} \dfrac{a^M - a^{N+1}}{1-a}, & \text{si } a \neq 1 \\ N - M + 1, & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

b) Si $|a| < 1$, entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

c) Si $y(n) = x(n)*h(n)$, entonces

$$\sum\nolimits_y = \sum\nolimits_x \sum\nolimits_h$$

donde $\sum_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)$

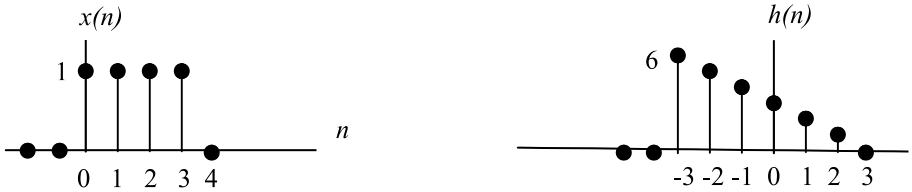
2.10 Calcule la convolución $y(n) = x(n)*h(n)$ y compruebe el resultado utilizando el test proporcionado en el apartado c) del ejercicio 2.9

a) $x(n) = \{1, 2, 4\}$, $h(n) = \{1, 1, 1, 1, 1\}$
b) $x(n) = \{1, 2, -1\}$, $h(n) = x(n)$
c) $x(n) = \{0, 1, -2, 3, -4\}$, $h(n) = \{½, ½, 1, ½\}$
d) $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $h(n) = 1$
e) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, -2, 3\}$, $h(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 1, 1, 1, 1\}$
f) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 1, 1, 1\}$, $h(n) = \{1, \underset{\uparrow}{-2}, 3\}$
g) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, -3\}$, $h(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, -1, -1\}$
h) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 2\}$, $h(n) = u(n)$
i) $x(n) = \{1, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 1\}$, $h(n) = \{1, -2, -3, \underset{\uparrow}{4}\}$
j) $x(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{0}, 2, 1\}$, $h(n) = x(n)$
k) $x(n) = (½)^n \cdot u(n)$, $h(n) = (¼)^n \cdot u(n)$

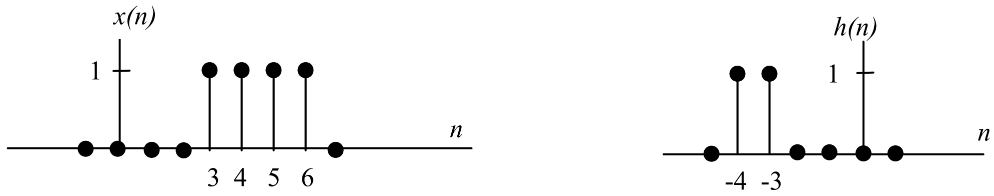
2.11 Calcule y represente las convoluciones $x(n)*h(n)$ y $h(n)*x(n)$ para las siguientes señales

a)

b)



c)



d)

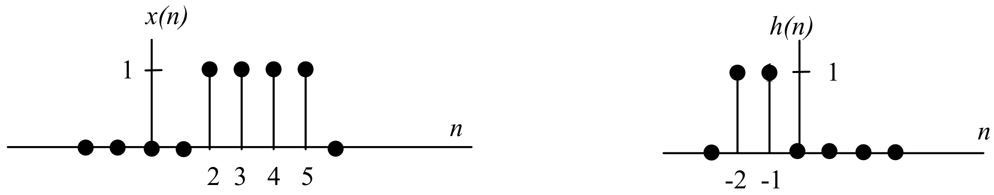


Figura 2.2.- Señales y respuestas impulsionales del ejercicio 2.11

2.12 Calcule la convolución *y(n)* correspondiente a la siguiente señal *x(n)* y respuesta impulsional del sistema *h(n)*

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n & 0 < n < 6 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \qquad h(n) = \begin{cases} 1, & -2 < n < 2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Determine *y(n)* gráficamente
b) Determine *y(n)* analíticamente

2.13 Determine la convolución *y(n)* de las siguientes señales

$$x(n) = \begin{cases} \alpha^n, & -3 < n < 5 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \qquad h(n) = \begin{cases} 1, & 0 < n < 4 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

2.14 Considere las tres operaciones siguientes:

a) Multiplique 131 por 122
b) Calcule la convolución de las señales: {1, 3, 1} * {1, 2, 2}
c) Multiplique los polinomios: $1+3z+z^2$ y $1+2z+2z^2$
d) Repita el apartado a) para los números 1.31 y 12.2
e) Comente los resultados

2.15 Sea *x(n)* la señal de entrada a un filtro discreto de respuesta impulsional $h_i(n)$ y sea $y_i(n)$ la salida correspondiente a cada uno de estos sistemas.

a) Calcule y represente en un gráfico $x(n)$ e $y_i(n)$ en los siguientes casos, utilice la misma escala en todas las figuras.

$x(n) = \{1, 4, 2, 3, 5, 3, 3, 4, 5, 7, 6, 9\}$

1.- $h_1(n) = \{1,1\}$
2.- $h_2(n) = \{1, 2, 1\}$
3.- $h_3(n) = \{½, ½\}$
4.- $h_4(n) = \{¼, ½, ¼\}$
5.- $h_5(n) = \{¼, -½, ¼\}$

Represente $x(n)$, $y_1(n)$, $y_2(n)$ en un gràfico y $x(n)$, $y_3(n)$, $y_4(n)$, $y_5(n)$ en otro gráfico

b) ¿Cuál es la diferencia entre $y_1(n)$ e $y_2(n)$? ¿Y entre $y_3(n)$ e $y_4(n)$?
c) Comente la suavidad que se observan en las formas de $y_2(n)$ e $y_3(n)$? ¿Qué factores cree que afectan a dicha suavidad?
d) Compare $y_4(n)$ con $y_5(n)$. ¿Cuál es la diferencia? ¿Puede encontrar alguna justificación?
e) Sea $h_6(n) = \{½, -½\}$. Determine $y_6(n)$. Represente $x(n)$, $y_2(n)$ e $y_6(n)$ en el mismo gráfico y comente los resultados

2.16 El siguiente sistema discreto:

$$y(n) = n\cdot y(n\text{-}1)+x(n),\ \ n\geq 0$$

se encuentra inicialmente en reposo ($y(-1) = 0$). Compruebe si el sistema es lineal, invariante en el tiempo y estable BIBO

2.17 Considere la señal $\gamma(n) = a^n\cdot u(n)$, $0 < a < 1$

a) Demuestre que cualquier secuencia de $x(n)$ puede descomponerse como

$$x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \gamma(n-k)$$

y exprese c_k en términos de $x(n)$
b) Use las propiedades de linealidad e invarianza en el tiempo para expresar la salida $y(n) = T[x(n)]$ en términos de la entrada $x(n)$ y de la señal $g(n) = T[\gamma(n)]$, donde $T[\cdot]$ corresponde a un sistema LTI.
c) Exprese la respuesta impulsional $h(n) = T[\delta(n)]$ en términos de $g(n)$

2.18 Determine la respuesta $y(n)$, $n \geq 0$, del sistema descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) - 3\cdot y(n\text{-}1) - 4\cdot y(n\text{-}2) = x(n) + 2\cdot x(n\text{-}1)$$

a la entrada $x(n) = 4^n\cdot u(n)$

2.19 Determine la respuesta impulsional del sistema causal del ejercicio 2.18

2.20 Sean $x(n)$, $N_1 \leq n \leq N_2$ y $h(n)$, $M_1 \leq n \leq M_2$ dos señales de duración finita

a) Determine en términos de N_1, N_2, M_1 y M_2 el intervalo $L_1 \leq n \leq L_2$ en el que su convolución es no nula.
b) Determine los límites que habrá que utilizar en el sumatorio de la convolución en el caso de que ambas señales estén solapadas por la derecha, por la izquierda y en el caso en que se solapen completamente. Por simplicidad, suponga que $h(n)$ es más corta que $x(n)$
c) Justifique la validez de los resultados anteriores calculando la convolución de las señales

$$x(n) = \begin{cases} 1, & -2 < n < 4 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \qquad h(n) = \begin{cases} 2, & -1 < n < 2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

2.21 Considere el sistema de respuesta impulsional

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & 0 < n < 4 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Determine la entrada $x(n)$ para $0 \leq n \leq 8$ que produce la salida:

$$y(n) = \{1, 2, 2, 5, 3, 3, 3, 2, 1, 0, \ldots\}$$

2.22 Considere la interconexión de sistemas LTI que se muestra en la siguiente figura.

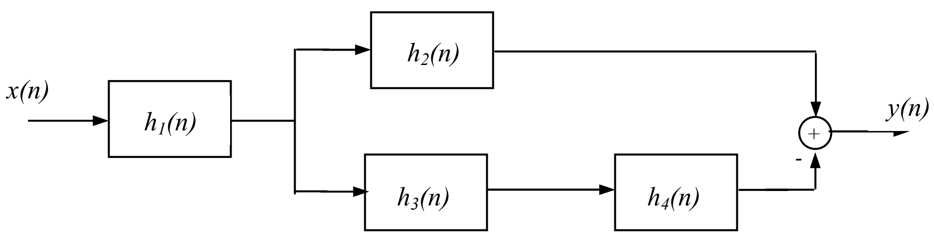


Figura 2.3.- Sistema discreto a considerar en el ejercicio 2.22

a) Exprese la respuesta impulsional global en términos de $h_1(n)$, $h_2(n)$, $h_3(n)$ y $h_4(n)$
b) Determine $h(n)$ cuando:

$h_1(n) = \{½, ¼, ½\}$
$h_2(n) = h_3(n) = (n+1)\cdot u(n)$
$h_4(n) = \delta(n-2)$

c) Determine la respuesta del sistema del apartado b) a una entrada:

$$x(n) = \delta(n+2) + 3\cdot\delta(n-1) - 4\cdot\delta(n-3)$$

2.23 Considere el sistema de la siguiente figura con $h(n) = a^n \cdot u(n)$, $-1 < a < 1$.

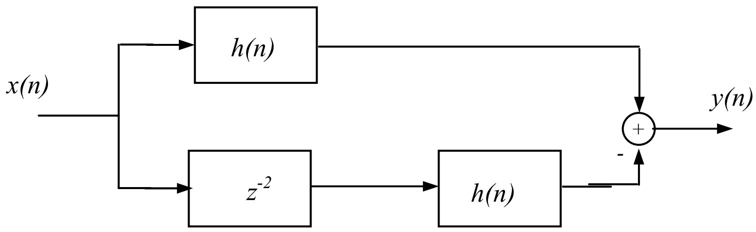


Figura 2.3.- Sistema discreto a considerar en el ejercicio 2.23

Determine la respuesta $y(n)$ del sistema con la entrada siguiente:

$$x(n) = u(n+5) - u \cdot (n - 10)$$

2.24 Determine y represente la respuesta del siguiente sistema al escalón unitario

$$y(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x(n-k)$$

2.25 Determine para qué valores del parámetro a del siguiente sistema LTI con respuesta impulsional es estable

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & n > 0,\ n \text{ par} \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

2.26 Determine la respuesta del sistema con respuesta impulsional

$$h(n) = a^n \cdot u(n)$$

a la señal de entrada

$$x(n) = u(n) - u(n-10)$$

Nota: Es posible obtener rápidamente la solución utilizando las propiedades de linealidad e invarianza impulsional en el tiempo al resultado del ejemplo 2.25

2.27 Determine la respuesta del sistema en reposo caracterizado por la respuesta impulsional

$$h(n) = (½)^n \cdot u(n)$$

a las siguientes señales de entrada:

a) $x(n) = 2^n \cdot u(n)$
b) $x(n) = u(-n)$

2.28 Tres sistemas con respuestas impulsionales: $h_1(n) = h_2(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$ y $h_3(n) = u(n)$, se han conectado en serie.

a) Determine la respuesta impulsional del sistema global, $h_c(n)$
b) ¿Afecta el orden a la interconexión a la respuesta global?

2.29 Conteste los siguientes apartados

a) Pruebe y explique gráficamente la diferencia entre las relaciones:

$x(n)\cdot\delta(n-n_0) = x(n_0)\cdot\ \delta(n-n_0)$ y $x(n)*\delta(n-n_0) = x(n-n_0)$

b) Demuestre que un sistema discreto que se describe a partir de la convolución es LTI y está en reposo
c) ¿Cuál es la respuesta impulsional del sistema $y(n) = x(n-n_0)$?

2.30 Dos señales $s(n)$ y $v(n)$ se relacionan mediante las siguientes ecuaciones en diferencias

$$s(n) + a_1\cdot\ s(n-1)+\ldots+ a_N\cdot s_0(n -N) = b_0\cdot v(n)$$

Diseñe la realización de los siguientes sistemas mediante diagramas de bloques.

a) El sistema que genera $s(n)$ cuando es excitado por $v(n)$
b) El sistema que genera $v(n)$ cuando es excitado por $s(n)$
c) ¿Cuál Es la respuesta impulsional de la interconexión en serie de los sistemas planteados en a) y b)?

2.31 Considere el sistema discreto descrito por la siguiente figura

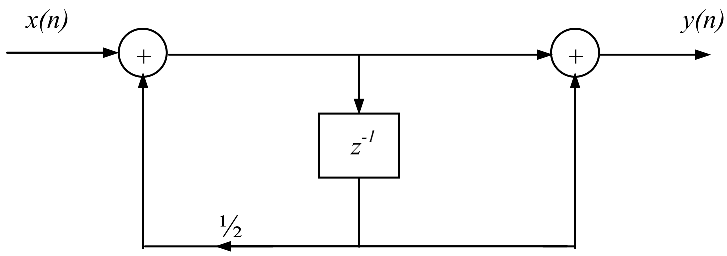


Figura 2.4.- Sistema discreto del ejemplo 2.4

a) Calcule las 10 primeras muestras de su respuesta impulsional
b) Encuentre la relación entrada-salida
c) Aplique la entrada $x(n)$ = {1, 1, 1, …} y calcule las 10 primeras muestras de la sdalida
d) Calcule las 10 primeras muestras de la salida a la entrada dada en el apartado usando convolución
e) ¿Es el sistema causal? ¿Es estable?

2.32 Un sistema descrito se implementa como indica la figura 2.5

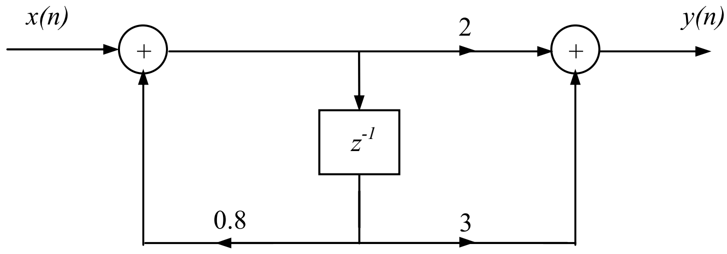


Figura 2.5.- Sistema discreto del ejemplo 2.5

a) Determine la respuesta impulsional
b) Determine la realización del sistema inverso, esto es, el sistema produce *x(n)* cuando *y(n)* es la entrada

2.33 Considere el sistema discreto mostrado en la siguiente figura

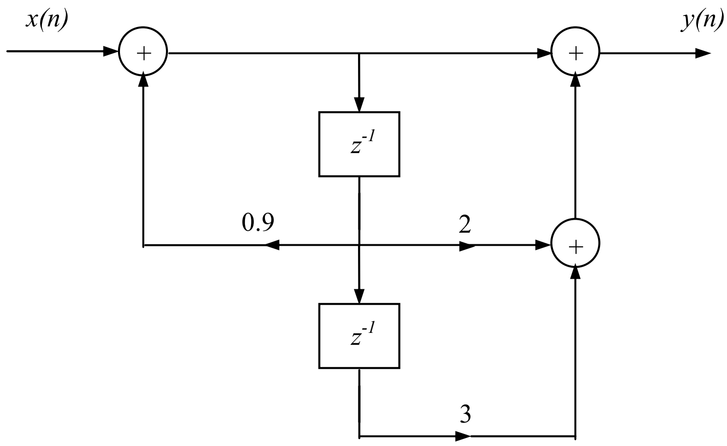
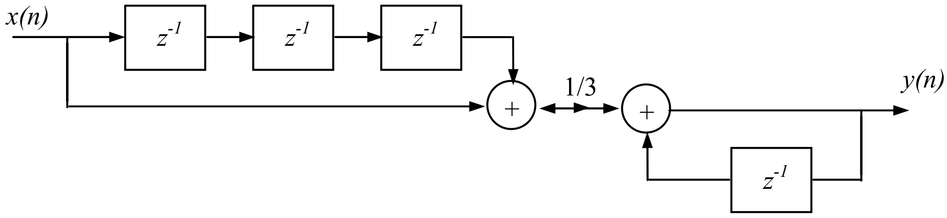


Figura 2.6.- Sistema discreto del ejemplo 2.6

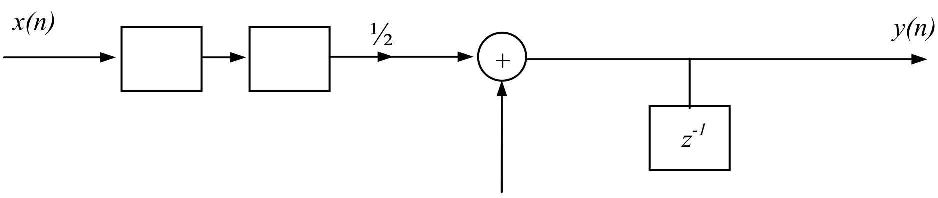
a) Calcule los seis primeros valores de la respuesta impulsional del sistema
b) Determine una expresión analítica para la respuesta impulsional del sistema

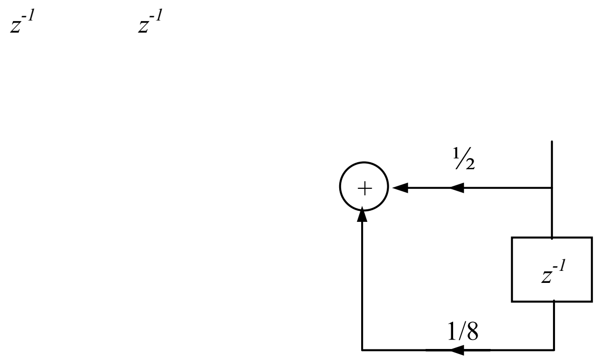
2.34 Determine y dibuje la respuesta impulsional de los siguientes sistemas para $n = 0, \ldots 9$

a)

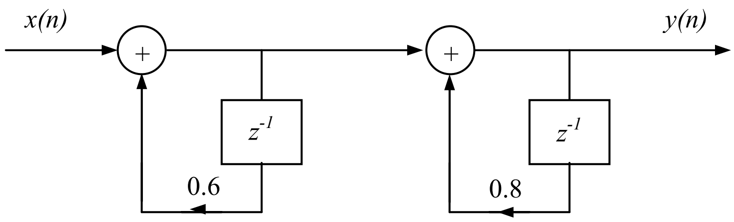


b)

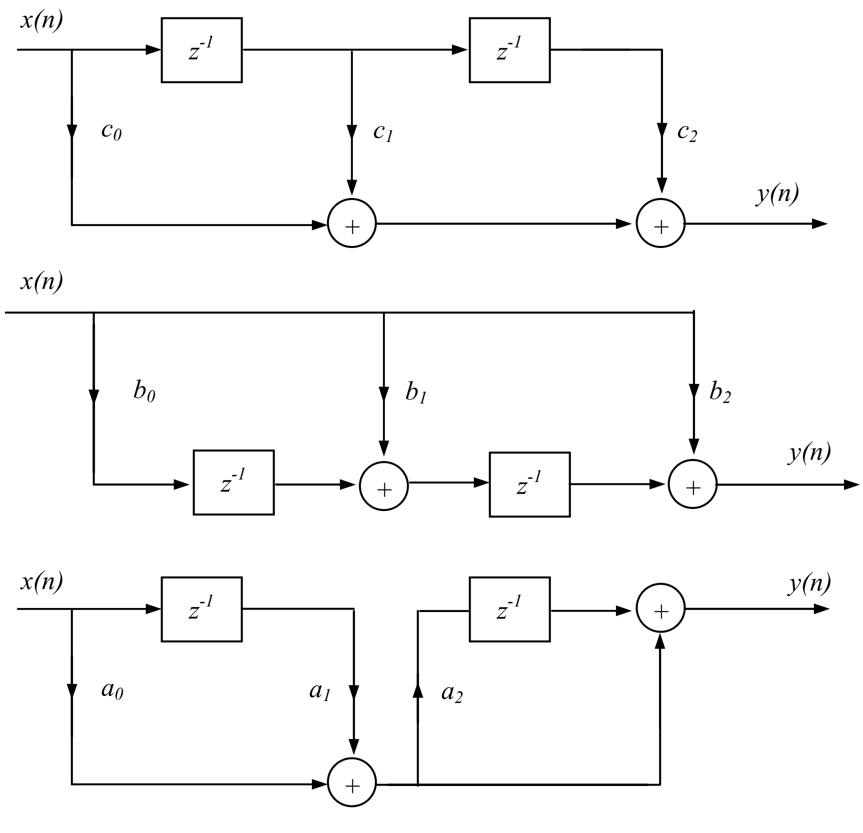




c)

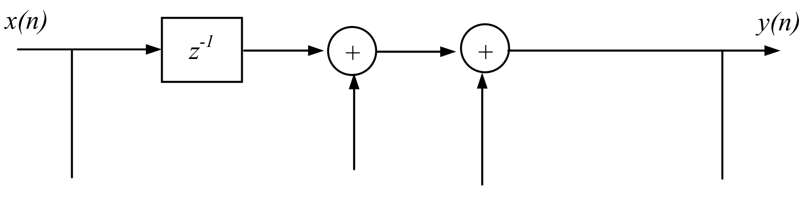


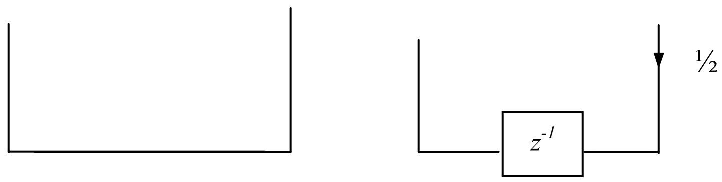
2.35 Considere los tres sistemas mostrados a continuación:



a) Determine y dibuje sus respuestas impulsionales $h_1(n)$, $h_2(n)$, $h_3(n)$.
b) ¿Es posible elegir los coeficientes de cada sistema de manera que $h_1(n) = h_2(n) = h_3(n)$?

2.36 Considere el sistema mostrado a continuación





a) Determine su respuesta impulsional *h(n)*
b) Demuestre que *h(n)* es igual a la convolución de las siguientes señales:

$$h_1(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$$
$$h_2(n) = (½)^n \cdot u(n)$$

2.37 Determine la respuesta $y(n)$, $n \geq 0$ del siguiente sistema descrito por la ecuación en diferencias de segundo orden:

$$y(n) - 4\cdot y(n-1) + 4\cdot y(n-2) = x(n) - x(n-1)$$

cuando la entrada es:

$$x(n) = (-1)^n \cdot u(n)$$

y las condiciones inicales son $y(-1) = y(-2) = 0$.

2.38 Determine la respuesta impulsional *h(n)* del sistema descrito por la ecuación en diferencias de segundo orden del ejercicio 2.37

2.39 Determine que cualquier señal discreta *x(n)* puede expresarse como

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [x(k) - x(k-1)] \cdot u(n-k)$$

donde *u(n-k)* es un escalón unitario retrasado *k* muestras en el tiempo, es decir,

$$u(n-k) = \begin{cases} 1, & n > k \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

2.40 Demuestre que la salida de un sistema LTI se puede expresar en términos de su respuesta al escalón unidad *s(n)* de la siguiente manera:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [s(k) - s(k-1)] \cdot x(n-k) =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [x(k) - x(k-1)] \cdot s(n-k)$$