Apunts de Matemàtica Discreta

Grau en Matemàtiques

Facultat de Matemàtiques i Estadística. UPC.

Mercè Mora Giné

Departament de Matemàtica Aplicada II

Universitat Politècnica de Catalunya

Barcelona, 14 d'abril de 2012

Aquests apunts corresponen a l'assignatura Matemàtica Discreta del Grau en Matemàtiques impartida a la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC els cursos 2009-2010, 2010-2011 i 2011-2012.

Índex

Capítol 1

Combinatòria enumerativa

1.1 Principis bàsics d'enumeració

1.1.1 Principi de les caselles

Proposició 1 (Principi de les caselles). *Si distribuïm n objectes en m capses i $n > m$, almenys una capsa contindrà dos o més objectes.*

Proposició 2 (Principi de les caselles generalitzat). *Si distribuïm n objectes en m capses i $n > rm$, almenys una capsa contindrà r+1 o més objectes.*

Exemples.

(1) A un conjunt de 13 persones, almenys dues han nascut el mateix mes.

(2) A un conjunt de 57 persones, almenys 5 han nascut el mateix mes

(3) Si prenem 5 punts d'un triangle equilàter de costat 1, almenys n'hi ha un parell que disten com a molt 1/2.

(4) A un conjunt de 6 persones qualssevol sempre n'hi ha 3 que es coneixen dos a dos o bé 3 que no es coneixen dos a dos.

Demostració. Considerem una persona P qualsevol i repartim les 5 restants en dos grups segons si coneixen o no P. Almenys un dels dos grups conté 3 o més persones.

Suposem que hi ha almenys 3 persones que coneixen P. Si aquestes 3 no es coneixen 2 a 2, es compleix el que volíem demostrar i, en cas contrari, almenys n'hi ha dues que es coneixen que, juntament amb P, formen el grup de 3 que es coneixen 2 a 2.

Suposem ara que n'hi ha almenys 3 que no coneixen P. Si aquestes 3 es coneixen dos a dos es compleix el que volíem demostrar i en cas contrari n'hi ha almenys un parell que no es coneixen que, juntament amb P, formen el grup de 3 que no es coneixen 2 a 2. $\square$

Proposició 3 (Erdös-Szekeres, 1935). *Tota successió de n^2+1 nombres reals diferents conté una subsuccessió estrictament creixent de longitud $n+1$ o bé una subsuccessió estrictament decreixent de longitud $n+1$.*

Demostració. Considerem la successió $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n^2+1}$ de nombres reals diferents. Per a cada a_i, sigui c_i la longitud de la subsuccessió estrictament creixent més llarga que comença a a_i i d_i la longitud de la subsuccessió estrictament decreixent més llarga que comença a a_i. Si $c_i > n$ o bé $d_i > n$ per a algun $i \in [n^2+1]$, aleshores hi ha una subsuccessió estrictament creixent o bé una subsuccessió estrictament decreixent de longitud $\geq n+1$ que comença a a_i.

Suposem ara que $c_i \leq n$ i $d_i \leq n$ per a tot $i \in [n^2+1]$. En aquest cas, els n^2+1 parells ordenats $(c_1, d_1), (c_2, d_2), \ldots, (c_{n^2+1}, d_{n^2+1})$ estan formats per nombres enters entre 1 i n. Com a molt hi ha n^2 parells ordenats diferents amb elements entre 1 i n. Pel principi de les caselles, hi haurà almenys dos parells ordenats iguals. Suposem que $(c_i, d_i) = (c_j, d_j)$, on $i, j \in [n^2+1]$, $i < j$. Si $a_i < a_j$, afegim a_i a la subsuccessió estrictament creixent de longitud c_j que comença a a_j i obtenim una subsuccessió estrictament creixent de longitud c_j+1 que comença a a_i, és a dir, $c_i \geq c_j+1$, la qual cosa contradiu que $c_i = c_j$. Anàlogament, si $a_i > a_j$, afegim a_i a la subsuccessió estrictament decreixent de longitud d_j que comença a a_j i obtenim una subsuccessió estrictament decreixent de longitud d_j+1 que comença a a_i, és a dir, $d_i \geq d_j+1$, la qual cosa contradiu que $d_i = d_j$. □

Exercici. Per a tot enter $n \geq 2$, doneu una successió de n^2 nombres reals diferents que no contingui cap subsuccessió estrictament creixent o estrictament decreixent de longitud $n+1$.

Solució. Considerem la successió:

$$\underbrace{n, n-1, \ldots, 2, 1}_{n)}, \underbrace{2n, 2n-1, \ldots, n+2, n+1}_{n)}, \ldots, \underbrace{n^2, n^2-1, \ldots, (n-1)n+1}_{n)}$$

1.1.2 Principi de doble recompte

Proposició 4. *Considerem dos conjunts finits A, B i un subconjunt S, $S \subseteq A \times B$. Si per a tot $a \in A$ i per a tot $b \in B$ definim*

$$f_a(S) = |\{b \in B : (a, b) \in S\}|$$
$$c_b(S) = |\{a \in A : (a, b) \in S\}|$$

aleshores

$$|S| = \sum_{a \in A} f_a(S) = \sum_{b \in B} c_b(S).$$

Exemple. A una classe de 57 estudiants cada noi coneix exactament 8 noies i cada noia coneix exactament 11 nois. Quants nois i noies hi ha?

Solució. Si m és el nombre de noies i n el nombre de nois, sabem que $11m = 8n$ i $m + n = 57$, d'on deduïm que hi ha 33 nois i 24 noies.

1.2 Seleccions

En aquesta secció comptarem el nombre de maneres de triar k elements d'un conjunt de n elements amb dos criteris addicionals: si l'ordre en que triem els elements és rellevant o no, i si es poden repetir o no els elements. Identificarem aquestes seleccions amb altres objectes matemàtics ja coneguts.

1.2.1 Seleccions ordenades amb repetició

Definició. Una *k-permutació amb repetició* d'un n-conjunt A és una selecció ordenada de k elements no necessàriament diferents de A.

Notació. $PR(n,k)$ denota el nombre de k-permutacions amb repetició d'un n-conjunt.

Proposició 5. *$PR(n,k) = n^k$, si $k \geq 1$.*

Exemples.

(1) El nombre de possibles números de telèfon de 9 xifres és 10^9.

(2) El nombre d'aplicacions $f : A \longrightarrow B$, on $|A| = k$ i $|B| = n$, és n^k.

(3) El nombre de paraules binàries de longitud n és 2^n.

(4) El nombre de subconjunts d'un n-conjunt és 2^n.

(5) El nombre de paraules de longitud k que es poden formar amb un alfabet de n lletres és n^k.

(6) El nombre de maneres de repartir k boles numerades en n capses numerades és n^k.

1.2.2 Seleccions ordenades sense repetició

Definició. Una *k-permutació* d'un n-conjunt A és una selecció ordenada de k elements diferents de A.

Notació. $P(n,k)$ denota el nombre de k-permutacions d'un n-conjunt.

Proposició 6. *$P(n,k) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$, si $1 \leq k \leq n$; $P(n,k) = 0$, si $k > n$.*

Cas particular: $n = k$**.** Una n-permutació d'un n-conjunt A s'anomena *permutació* de A. El nombre de permutacions d'un n-conjunt és $P(n,n) = n^{\underline{n}} = n! = P(n)$.

Exemples.

(1) El nombre de maneres d'ordenar una baralla de 48 cartes és

$$\begin{aligned} 48! &= 12413915592536072670862289047373375038521486354677760000000000 \\ &\approx 1.241 \times 10^{61}. \end{aligned}$$

(2) El nombre d'aplicacions injectives $f : A \to B$, on $|A| = k$ i $|B| = n$, és $P(n,k) = n^{\underline{k}}$.

(3) El nombre d'aplicacions bijectives $f : A \longrightarrow B$, on $|A| = |B| = n$, és $P(n,n) = n!$.

(4) El nombre de paraules de longitud k amb totes les lletres diferents que es poden formar amb un alfabet de n lletres és $P(n,k) = n^{\underline{k}}$.

(5) El nombre de maneres de repartir k boles numerades en n capses numerades de manera que hi hagi com a molt una bola a cada capsa és $P(n,k) = n^{\underline{k}}$.

Exercici. Calculeu la probabilitat de que en un conjunt de k persones almenys dues celebrin l'aniversari el mateix dia. Suposeu que tots els anys tenen 365 dies per a fer el càlcul. Per a quin valor de k mínim aquesta probabilitat és més gran que 0.5?

Solució. Restem de 1 la probabilitat de que això no passi, és a dir, que les k persones celebrin l'aniversari en dies diferents. Numerem les k persones i identifiquem les 365 dates de naixement possibles amb un nombre de [365]. Considerem la k-epla $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ on $x_i \in [365]$ representa la data de naixement de la persona i. El nombre de k-eples possibles és 365^k i el nombre de k-eples tals que no hi ha cap parell de dates repetides és $365^{\underline{k}}$. La probabilitat demanada és, doncs,

$$1 - \frac{365^{\underline{k}}}{365^k}.$$

Calculem alguns valors i observem que per a $k = 22$ és $0.475695 < 0.5$ i per a $k = 23$ és $0.507297 > 0.5$.

1.2.3 Seleccions no ordenades sense repetició

Definició. Una *k-combinació* d'un n-conjunt A és una selecció de k elements diferents d'A en la qual no tenim en compte l'ordre dels elements.

És a dir, una k-combinació de A és un k-subconjunt de A.

Notació. Denotarem $C(n,k)$ o bé $\binom{n}{k}$ el nombre de k-subconjunts d'un n-conjunt. Els nombres $\binom{n}{k}$ s'anomenen *binomials*.

Proposició 7. $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ *, si* $0 \leq k \leq n$.

Demostració. Observem que si permutem els k elements de tots els k-subconjunts d'un n-conjunt, obtenim totes les k-permutacions d'aquest conjunt. Per tant,

$$C(n,k) \cdot k! = P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

d'on deduïm

$$\binom{n}{k} = C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

□

Exemples.

(1) El nombre de possibles apostes a la loteria primitiva és $\binom{49}{6} = 13983816$.

(2) Amb una baralla de 48 cartes es poden formar $\binom{48}{5} = 1712304$ mans de 5 cartes.

(3) El nombre de paraules binàries de longitud n que contenen exactament k zeros és $\binom{n}{k}$.

(4) El nombre de maneres de repartir k boles indistingibles en n capses numerades de manera que a cada capsa hi hagi com a molt una bola és $\binom{n}{k}$.

(5) El nombre de k-eples $(i_1, \ldots, i_k)$ d'enters tals que $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ és $\binom{n}{k}$.

(6) El nombre de camins de longitud mínima del punt de coordenades $(0,0)$ al punt (m,n) que utilitzen només segments horitzontals i verticals de longitud 1 és $\binom{m+n}{m}$.

1.2.4 Nombres binomials

Proposició 8. *Per a tot $n \ge 0$,*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\,,$$

i per a tot $n \ge 2$, si $1 \le k \le n-1$, aleshores

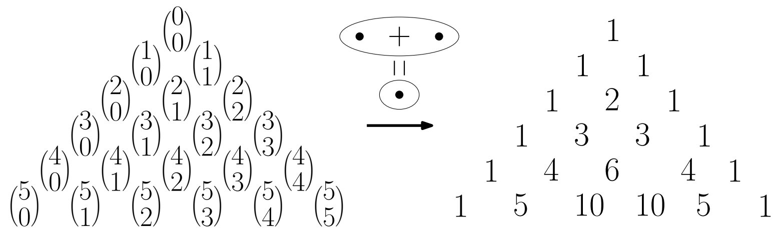
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\,.$$

Demostració. Un n-conjunt A només conté un subconjunt buit i un subconjunt amb n elements, per tant $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Fixem ara un element $a \in A$. El nombre de k-subconjunts que contenen a és $\binom{n-1}{k-1}$, ja que a més de a hem de triar $k-1$ elements dels $n-1$ elements de A que són diferents de a. El nombre de k-subconjunts que no contenen a és $\binom{n-1}{k}$, ja que dels $n-1$ elements de A que són diferents de a hem de triar-ne k. En total, el nombre de k-subconjunts del conjunt A és, doncs,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

□

L'equació recurrent de la proposició anterior ens permet construir el triangle de Tartaglia o de Pascal, on cada fila conté els nombres binomials $\binom{n}{k}$ amb n fix i $k = 0 \ldots n$. Els nombres de l'interior del triangle són la suma dels dos immediatament superiors.



Teorema 1 (Binomi de Newton)**.** *Per a tot n enter, $n \geq 0$,*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Demostració. Els termes de l'expressió

$$(a+b)^n = (a+b)\,(a+b)\,\cdots(a+b)$$

s'obtenen multiplicant de totes les maneres possibles un dels dos sumands a o b de cada factor, és a dir, són expressions de la forma $x_1 x_2 \cdots x_n$, on $x_i \in \{a, b\}$ representa el sumand de l'i-èsim factor. Si agrupem les dues variables, obtenim una expressió de la forma $a^k b^{n-k}$, on $0 \leq k \leq n$. El coeficient del terme $a^k b^{n-k}$ a $(a+b)^n$ és el nombre d'expressions $x_1 x_2 \cdots x_n$ on les variables a i b apareixen respectivament k i $n-k$ vegades. N'hi ha $\binom{n}{k}$, ja que equival a triar subconjunts de k elements de $x_1, \ldots, x_n$ que seran iguals a a i la resta d'elements de $x_1, \ldots, x_n$ seran iguals a b. $\square$

Propietats dels nombres binomials.

(1) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, si $n \geq 0$.

(2) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$, si $n \geq 0$.

(3) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, si $n \geq k \geq 0$.

(4) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, si $n \geq k \geq 1$.

(5) $\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$, si $n \geq k \geq r \geq 0$.

(6) $\binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1} = \binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}$, si $n \geq k+1 \geq 2$.

(7) $\sum_{r=0}^{k} \binom{n+r}{r} = \binom{n+k+1}{k}$, per a n, k enters no negatius (addició en paral·lel).

(8) $\sum_{r=0}^{k} \binom{n+r}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$, per a n, k enters no negatius (addició superior).

(9) $\sum_{r=0}^{k} \binom{n}{r}\binom{m}{k-r} = \binom{n+m}{k}$, si $n+m \geq k$ (Identitat de Vandermonde).

Demostració.

(1) Pel binomi de Newton,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

També es pot demostrar tenint en compte que si sumem el nombre de k-subconjunts d'un n-conjunt per a $k = 0, 1, \ldots, n$ obtenim tots els subconjunts i, per altra banda, sabem que el nombre de subconjunts d'un n-conjunt és 2^n.

(2) Pel binomi de Newton,

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

(3) Immediat aplicant la fórmula dels factorials.

(4) Immediat aplicant la fórmula dels factorials.

(5) Immediat aplicant la fórmula dels factorials.

(6) Immediat aplicant la fórmula dels factorials.

(7) Apliquem reiteradament l'equació recurrent que satisfan els nombres binomials,
$\binom{n+k+1}{k} =$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k-1} \\
&= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-1}{k-2} \\
&= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-2}{k-2} + \binom{n+k-2}{k-3} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-2}{k-2} + \cdots + \binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{0} \\
&= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-2}{k-2} + \cdots + \binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{0} \\
&= \sum_{r=0}^{k} \binom{n+r}{r}
\end{aligned}$$

(8) De la simetria dels nombres binomials i la propietat anterior deduïm:

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{n+r}{n} = \sum_{r=0}^{k} \binom{n+r}{r} = \binom{n+k+1}{k} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

(9) Considerem el conjunt $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Un k-subconjunt de X conté r elements de $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $k-r$ elements de $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ per a algun r entre 0 i k. El nombre de k-subconjunts de X amb r elements de A i $k-r$ de B és

$$\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}.$$

Per tant, el nombre de k-subconjunts de X és

$$\sum_{r=0}^{k}\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}.$$

Però sabem que el nombre de k-subconjunts de X és $\binom{n+m}{k}$, d'on se segueix la igualtat que volíem demostrar. □

Exercici. Calculeu (a) la probabilitat d'endevinar exactament 3 nombres amb una única aposta de loteria primitiva; (b) la probabilitat d'endevinar almenys 3 nombres amb una única aposta de loteria primitiva.

SOLUCIÓ.

(a) $\binom{6}{3}\binom{49-6}{3}/\binom{49}{6} = \frac{246820}{13983816} \approx 0.017650.$

(b) $(\binom{6}{3}\binom{49-6}{3} + \binom{6}{4}\binom{49-6}{2} + \binom{6}{5}\binom{49-6}{1} + \binom{6}{6}\binom{49-6}{0})/\binom{49}{6} = \frac{260624}{13983816} \approx 0.018637.$

1.2.5 Seleccions no ordenades amb repetició

Definició. Una *k-combinació amb repetició* o *k-multiconjunt* d'un n-conjunt A, és una selecció no ordenada de k elements de A no necessàriament diferents

Notació. Denotarem $CR(n,k)$ o bé $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ el nombre de k-combinacions amb repetició d'un n-conjunt, és a dir, el nombre de k-multiconjunts d'un n-conjunt. Escriurem

$$M = \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_n^{k_n}\}$$

el k-multiconjunt de $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ que conté k_i còpies de l'element a_i, per a tot $i \in [n]$, on $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$.

Proposició 9. $CR(n,k) = \left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$*, per a* $n \geq 1$*,* $k \geq 0$*.*

DEMOSTRACIÓ. Considerem un n-conjunt $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Identifiquem el k-multiconjunt $M = \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_n^{k_n}\}$ de A amb la paraula binària

$$(\underbrace{1\ldots1}_{k_1)}0\underbrace{1\ldots1}_{k_2)}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{k_n)})$$

de longitud $k+n-1$ que conté exactament k uns. Hi ha tants k-multiconjunts com paraules binàries amb aquestes característiques, és a dir, n'hi ha $\binom{k+n-1}{k}$. □

Exemples.

(1) El nombre de solucions enteres no negatives de l'equació $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ és $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$.

(2) El nombre de maneres de repartir k boles indistingibles en n capses numerades és $\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$.

(3) El nombre de k-eples $(i_1, \ldots, i_k)$ d'enters tals que $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ és $\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$.

(4) El nombre de maneres de repartir k boles indistingibles en n capses numerades de manera que cap capsa quedi buida és $\binom{k-1}{k-n}$.

(5) El nombre de solucions enteres no negatives de l'equació $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ tals que $x_i \geq r_i$, per a tot $i \in [n]$, amb $\sum_{i=1}^{n} r_i = s \leq k$ és $\binom{n+k-s-1}{k-s} = \binom{n+k-1-s}{n-1}$.

Exercici. Calculeu el nombre de k-subconjunts de $[n]$ tals que no contenen 2 enters consecutius.

SOLUCIÓ. Suposem que $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ és un k-subconjunt de $[n]$ que no conté dos enters consecutius. Considerem els nombres

$$\begin{aligned} d_1 &= x_1 \geq 1 \\ d_2 &= x_2 - x_1 \geq 2 \\ d_3 &= x_3 - x_2 \geq 2 \\ &\cdots \\ d_k &= x_k - x_{k-1} \geq 2 \\ d_{k+1} &= n - x_k \geq 0 \end{aligned}$$

Observem que els nombres d_i són enters tals que

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_k + d_{k+1} = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_k - x_{k-1}) + (n - x_k) = n$$

Per tant hi ha tants k-subconjunts de $[n]$ que no contenen 2 enters consecutius com solucions enteres no negatives de l'equació

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_k + d_{k+1} = n$$

amb les restriccions addicionals

$$d_1 \geq 1, d_2 \geq 2, \ldots, d_k \geq 2, d_{k+1} \geq 0.$$

La suma de les restriccions és $1 + 2(k-1) = 2k - 1$. Per tant, n'hi ha

$$\binom{(k+1) + n - 1 - (2k-1)}{k} = \binom{n-k+1}{k}.$$

1.2.6 Nombres multinomials

Definició. Una *permutació d'un k-multiconjunt* és una ordenació dels elements del multiconjunt.

Notació. $\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n}$ denota el nombre de permutacions d'un k-multiconjunt $M = \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \dots, a_n^{k_n}\}$, on $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$. Els nombres $\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n}$ s'anomenen *nombres multinomials.*

Proposició 10. *Si k, $k_1, \dots, k_n$ són enters no negatius tals que $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$, aleshores*

$$\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1!\, k_2!\, \dots k_n!}.$$

Demostració. Considerem el k-multiconjunt $\{1^{k_1}, \dots, n^{k_n}\}$. Una ordenació d'aquest multiconjunt queda determinada al fixar les k_1 posicions que ocuparà l'element 1, les k_2 posicions que ocuparà l'element 2, etc. Podem triar les k_1 posicions de l'1 de $\binom{k}{k_1}$ maneres; de les $k - k_1$ posicions restants podem triar les k_2 posicions que ocuparà el 2 de $\binom{k-k_1}{k_2}$ maneres; de les $k-k_1-k_2$ posicions restants, podem triar les k_3 posicions que ocuparà el 3 de $\binom{k-k_1-k_2}{k_3}$ maneres, etc. És a dir, el nombre $\binom{k}{k_1,k_2,\dots,k_n}$ d'ordenacions del multiconjunt és

$$\binom{k}{k_1}\binom{k-k_1}{k_2}\binom{k-k_1-k_2}{k_3} \cdots \binom{k-k_1-k_2-\cdots-k_{n-1}}{k_n}.$$

Si apliquem la fórmula dels factorials a l'expressió anterior obtenim el que volíem demostrar. $\square$

Exemple. Amb les lletres de la paraula MISSISSIPPI es poden formar $\dfrac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!}$ paraules.

Teorema 2 (Teorema del multinomi)**.** *Per a tot enter m, $m \geq 0$,*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r)^m = \sum_{m_1+\cdots+m_r=m} \binom{m}{m_1, m_2, \dots, m_r} a_1^{m_1} \dots a_r^{m_r}$$

Demostració. Els termes de l'expressió

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r)^m = (a_1 + a_2 + \cdots + a_r)\,(a_1 + a_2 + \cdots + a_r) \cdots (a_1 + a_2 + \cdots + a_r)$$

s'obtenen multiplicant de totes les maneres possibles un dels sumands a_1, a_2, ..., a_r de cada factor, és a dir, són expressions de la forma $x_1 x_2 \cdots x_m$, on $x_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ representa el sumand de l'i-èsim factor. Si agrupem les m variables, obtenim una expressió de la forma $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_r^{m_r}$, on $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = m$ i a més els exponents

m_i són no negatius. El coeficient del terme $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_r^{m_r}$ és el nombre d'expressions $x_1 x_2 \cdots x_n$ on les variables a_1, a_2, ..., a_r apareixen respectivament $m_1, m_2 \dots, m_r$ vegades. N'hi ha tantes com possibles ordenacions del multiconjunt $\{a_1^{m_1}, a_2^{m_2}, \dots, a_r^{m_r}\}$, és a dir, $\binom{m}{m_1, m_2, \dots m_r}$. □

1.3 Principi d'inclusió-exclusió. Aplicacions

1.3.1 Principi d'inclusió-exclusió

Considerem una família de conjunts finits, $A_1, A_2, \dots, A_n$. Una *k-intersecció* dels conjunts $A_1, A_2, \dots, A_n$ és qualsevol conjunt de la forma $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ amb $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$. Definim

$$\alpha_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|,$$

és a dir, α_k és la suma dels cardinals de totes les k-interseccions.

Proposició 11 (Principi d'inclusió-exclusió)**.** *Per a qualsevol família de conjunts finits $A_1, A_2, \dots, A_n$,*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_k.$$

Demostració. Veurem que cada element $a \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ el comptem exactament una vegada a l'expressió $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_k$. Suposem que a és exactament de r d'aquests conjunts, $0 \leq r \leq n$, és a dir, $a \in A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ i no és de la resta de conjunts. L'element a el comptem exactament r vegades a α_1, ja que és d'exactament r conjunts; el comptem exactament $\binom{r}{2}$ vegades a α_2, ja que a és d'una 2-intersecció si, i només si, es tracta de la intersecció de dos dels r conjunts als quals pertany a; el comptem exactament $\binom{r}{3}$ vegades a α_3, ja que a és d'una 3-intersecció si, i només si, es tracta de la intersecció de 3 dels r conjunts als quals pertany a. En general, el nombre de vegades que comptem l'element a a una j-intersecció és $\binom{r}{j}$, si $j \leq r$, i no és de cap k-intersecció, si $k > r$. Per tant, el nombre de vegades que comptem l'element a a l'expressió $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_k$ és

$$\begin{aligned}
& r - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \binom{r}{4} + \cdots + (-1)^{r+1} \binom{r}{r} \\
&= 1 - 1 + r - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \binom{r}{4} + \cdots + (-1)^{k+1} \binom{r}{r} \\
&= 1 - (\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} + \cdots + (-1)^{r} \binom{r}{r}) = 1
\end{aligned}$$

tal com volíem demostrar. □

1.3.2 Desarranjaments

Definició. Un *desarranjament* de $[n]$ és qualsevol permutació σ de $[n]$ tal que $\sigma(i) \neq i$ per a tot $i \in [n]$.

Notació. D_n denota el nombre de desarranjaments de $[n]$.

Proposició 12. *El nombre D_n de desarranjaments de $[n]$ és*

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

Demostració. Considerem per a $i \in [n]$ els conjunts:

$$A_i = \{\sigma : \sigma \text{ és una permutació de } [n] \text{ i } \sigma(i) = i\}.$$

Els desarranjaments són les permutacions del conjunt complementari de $A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Calculem el cardinal d'aquest conjunt utilitzant el PIE:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_k.$$

El cardinal d'una r-intersecció d'aquests conjunts, $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}$ és $(n-r)!$, ja que

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r} = \{\sigma : \sigma \text{ és una permutació de } [n] \text{ i } \sigma(i_1) = i_1, \ldots, \sigma(i_r) = i_r\}.$$

Per tant, per a qualsevol r, $1 \leq r \leq n$,

$$\alpha_r = \binom{n}{r} (n-r)! = \frac{n!}{r!},$$

d'on deduïm que el nombre de desarranjaments de $[n]$ és

$$\begin{aligned} D_n &= n! - |A_1 \cup \cdots \cup A_n| \\ &= n! - \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \alpha_r \\ &= n! - \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \frac{n!}{r!} \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \\ &= n! \sum_{r=2}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}, \end{aligned}$$

tal com volíem demostrar. □

Exercici. Calculeu la probabilitat de que una permutació qualsevol de $[n]$ sigui un desarranjament, suposant que totes les permutacions són equiprobables.

SOLUCIÓ. La probabilitat de que una permutació sigui un desarranjament s'obté dividint el nombre de desarranjaments pel nombre de permutacions, i per tant és

$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Quan n tendeix a infinit, aquest valor tendeix a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} \approx 0.367879.$$

És a dir, la proporció de desarranjaments al grup simètric S_n és del $36,78\%$.

1.3.3 Nombre d'aplicacions exhaustives

Proposició 13. *El nombre d'aplicacions exhaustives $f : A \longrightarrow B$, on $|A| = k$ i $|B| = n$, és*

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k.$$

DEMOSTRACIÓ. Suposem que $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ i definim els conjunts

$$F_i = \{f : A \longrightarrow B : f^{-1}(b_i) = \emptyset\}.$$

Les aplicacions $f : A \to B$ no exhaustives són totes les aplicacions del conjunt $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$. Els elements d'una r-intersecció d'aquests conjunts són:

$$F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_r} = \{f : A \to B : f^{-1}(i_1) = \emptyset, \ldots, f^{-1}(i_r) = \emptyset\},$$

és a dir,

$$|F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_r}| = (n-r)^k.$$

Si apliquem el PIE obtenim:

$$|F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \alpha_r = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r} (n-r)^k.$$

El nombre d'aplicacions exhaustives és, doncs:

$$\begin{aligned} n^k - |F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n| &= n^k - \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r} (n-r)^k \\ &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r} \binom{n}{r} (n-r)^k, \end{aligned}$$

i substituïm $i = n - r$ a l'expressió anterior:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r} \binom{n}{r} (n-r)^k &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{n-i} i^k \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k, \end{aligned}$$

d'on deduïm el que volíem demostar. $\square$

1.3.4 Funció Φ d'Euler

La funció Φ d'Euler compta el nombre d'enters entre 1 i n relativament primers amb n, és a dir, és la funció $\Phi : \mathbb{N}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$\Phi(n) = |\{m \ : \ 1 \leq m \leq n \text{ i } \mathrm{mcd}(m,n) = 1\}|.$$

Proposició 14.

(a) Si p és primer, $\Phi(p) = p - 1$.

(b) Si p és primer i $\alpha \geq 1$, $\Phi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$.

(c) Si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, on $p_1, p_2, \dots, p_k$ són nombres primers diferents i $\alpha_i \geq 1$ per a tot $i \in [k]$, llavors

$$\Phi(n) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1) = n \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_i})$$

Demostració. (a) És immediat ja que si p és primer tot nombre entre 1 i $p-1$ és relativament primer amb p. (b) Els nombres entre 1 i p^α no relativament primers amb p^α són els múltiples de p, és a dir, $p, 2p, 3p, \dots, p^{\alpha-1}\,p$. N'hi ha exactament $p^{\alpha-1}$. Per tant, $\Phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1)$. (c) Els nombres entre 1 i n no relativament primers amb n són els que a la seva descomposició en factors primers apareix algun p_i, $i \in [k]$. Per a tot $i \in [k]$ definim $A_i = \{m : 1 \leq m \leq n\,,\, p_i | m\}$. Llavors $\Phi(n) = n - |A_i \cup A_2 \cup \dots A_k|$. Observem que

$$\begin{aligned} |A_i| &= \frac{n}{p_i} \\ |A_i \cap A_j| &= \frac{n}{p_i\, p_j} \\ &\cdots \\ |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}| &= \frac{n}{p_{i_1}\, p_{i_2}\, \cdots p_{i_r}}. \end{aligned}$$

Apliquem el PIE i fem les manipulacions algebraiques que calgui fins obtenir la fórmula de l'enunciat. $\square$

1.4 Particions d'un conjunt

Definició. Per a k, n enters positius, una *k-partició* d'un n-conjunt A és una col.lecció $\{A_1, \ldots, A_k\}$ de subconjunts no buits de A, disjunts dos a dos tal que la unió és A. El nombre de k-particions d'un n-conjunt és el *nombre de Stirling de segon tipus* i el denotarem $S(n,k)$ o bé $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$.

Propietats.

(1) $\left\{ \begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right\} = 1;$

(2) $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = 0$, si $k > n$;

(3) $\left\{ \begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right\} = 2^{n-1} - 1;$

(4) $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\} + k \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}$, si $n \geq 3$ i $n - 1 \geq k \geq 2$.

Demostració. Les propietats 1 i 2 són immediates. Per a demostrar 3 observem que una part d'una 2-partició es un subconjunt no buit i diferent del total i l'altra part, és el seu complementari. Per tant, al comptar el nombre de subconjunts no buits i diferents del total, comptem cada 2-partició exactament dues vegades, de manera que

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1.$$

Per a demostrar 4, considerem un n-conjunt, A, i fixem un element $a \in A$. Comptarem primer les k-particions de A tals que $\{a\}$ és una part: n'hi ha $\left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\}$, ja que equival a fer $k-1$ parts amb els $n-1$ elements diferents de a. Per altra banda, una k-partició de A tal que $\{a\}$ no és una part queda determinada al donar una k-partició amb els $n-1$ elements diferents de a i assignar després aquest element a una de les k parts, és a dir, n'hi ha $k \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}$ d'aquest tipus. Per tant, el nombre de k-particions de A és $\left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\} + k \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}$. □

Proposició 15. *El nombre d'aplicacions exhaustives $f : A \longrightarrow B$, on $|A| = k$ i $|B| = n$, és* $\left\{ \begin{array}{c} k \\ n \end{array} \right\} n!$

Demostració. Una aplicació exhaustiva $f : A \longrightarrow B$ queda determinada al donar una n-partició de A,

$$\{f^{-1}(b) : b \in B\},$$

i assignar els n elements diferents de B a les n parts de la partició, ja que $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ i $\bigcup_{b\in B} f^{-1}(b) = A$. N'hi ha, doncs:

$$\left\{ \begin{array}{c} k \\ n \end{array} \right\} n!\ .$$

□

Proposició 16 (Nombres de Stirling en funció de nombres binomials)**.** *Si n, k són nombres naturals, $n \geq k \geq 1$,*

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$

Demostració. És conseqüència de les proposicions 13 i 15. □

Definició. El nombre de particions d'un n-conjunt, $n \geq 1$, és el *nombre de Bell* B_n,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}.$$

1.5 Particions d'un enter

Definició. Una *k-partició* d'un enter $n \geq 1$ és una expressió de n com a suma de k enters positius sense tenir en compte l'ordre dels sumands.

Podem identificar una k-partició de n amb una k-epla $(x_1, \ldots, x_k)$ d'enters tals que $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 1$ i $n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$.

Notació. $p_k(n)$ representa el nombre de k-particions de n i $p(n)$ el nombre de particions de n.

Exemples.

(1) $(4, 2, 1)$, $(3, 2, 2)$ són 3-particions de 7, ja que $7 = 4 + 2 + 1$, $7 = 3 + 2 + 2$.

(2) Les 3-particions de 7 són $(5, 1, 1)$, $(4, 2, 1)$, $(3, 3, 1)$, $(3, 2, 2)$, per tant $p_3(7) = 4$.

(3) Les particions de 5 són (5), $(4, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1, 1)$. Per tant, $p(5) = 7$.

El **diagrama de Ferrers** de la partició $(x_1, \ldots, x_k)$ de n és una representació gràfica que consisteix en distribuir n punts en k files amb x_i punts cadascuna alineats a l'esquerra.

Exemples.

$$9=5+3+1 \quad \begin{array}{lllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & & & & \end{array} \qquad\qquad 9=4+2+2+1 \quad \begin{array}{llll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & \\ \bullet & & & \end{array}$$

Definició. La partició *conjugada* de la partició $x = (x_1, \ldots, x_k)$ de $n = x_1 + \cdots + x_k$ és la partició de n que té per diagrama de Ferrers el que s'obté transposant el diagrama de Ferrers de la partició x.

Exemple. La partició conjugada de $(4, 2, 1)$ és $(3, 2, 1, 1)$.

$$7=4+2+1 \quad \begin{array}{llll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \\ \bullet & & & \end{array} \qquad\qquad 7=3+2+1+1 \quad \begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \\ \bullet & & \end{array}$$

Notació. x' representa la partició conjugada de x.

Definició. Una partició x és *autoconjugada* si $x' = x$, és a dir, si el diagrama de Ferrers és simètric respecte a la diagonal.

Exemple. La partició $(5, 3, 2, 1, 1)$ de 12 és autoconjugada.

$$12=5+3+2+1+1 \quad \begin{array}{lllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & & & & \\ \bullet & & & & \end{array}$$

Propietats.

(1) Si x és una partició d'un enter, aleshores $x'' = x$.

(2) Si x és una k-partició de n, x' és una partició de n amb la part més gran igual a k.

(3) El nombre de k-particions de n és igual al nombre de particions de n tals que la part més gran és igual a k

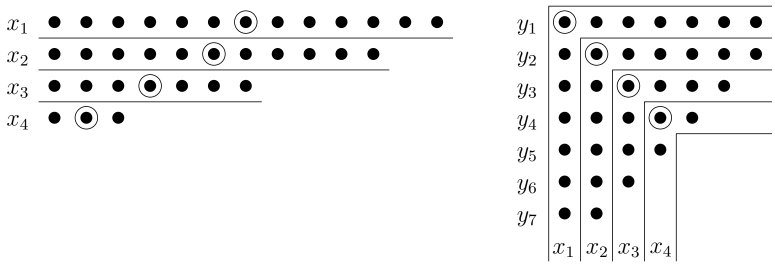
(4) El nombre de particions de n en com a molt k parts és igual al nombre de particions de n tals que la part més gran és com a molt k

(5) El nombre de particions de n en parts senars diferents és igual al nombre de particions autoconjugades de n

(6) El nombre de particions de n en parts senars és igual al nombre de particions de n en parts diferents

Demostració. Les propietats 1, 2, 3 són immediates. La propietat 4 és conseqüència de 3.

Per a demostrar la propietat 5, considerem l'aplicació del conjunt de particions de n en parts senars diferents en el conjunt de particions autoconjugades de n tal que a la partició $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) = (2j_1 - 1, 2j_2 - 1, \dots, 2j_k - 1)$, $j_1 > j_2 > \cdots > j_k$, li assigna la partició autoconjugada $y = (y_1, y_2, \dots)$ tal que les k primeres parts són $y_1 = j_1$, $y_2 = 1 + j_2$, $\dots$,$y_k = (k-1) + j_k$ i la resta s'obtenen per simetria (vegeu un exemple a la figura següent). Es pot demostrar que l'aplicació està ben definida i és bijectiva (exercici).



Finalment, per a demostrar la propietat 6, suposem que tenim una partició x de n en parts senars. Suposem que la part senar j apareix exactament m_j vegades. Escrivim m_j en base 2, és a dir, $m_j = a_0^j + a_1^j \cdot 2 + a_2^j \cdot 2^2 + \cdots$, on $a_i^j \in \{0, 1\}$. Considerem la partició y de n tal que $2^i \cdot j$ és una part de y si, i només si, j és una part senar de x i $a_i^j = 1$. Es pot comprovar que y és una partició de n en parts diferents i que l'aplicació que fa correspondre a x la partició y és una bijecció entre els conjunts de particions de n en parts senars i particions de n en parts diferents (exercici). $\square$

1.6 Nombres de Catalan

Considerem els conjunts següents per a n enter positiu:

A_n: expressions sintàcticament correctes que es poden formar amb n parells de parèntesis (), és a dir, n parèntesis que obren i n parèntesis que tanquen i no podem tancar un parèntesi que encara no hem obert.

B_n: paraules de longitud $2n$, $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$, tals que $x_i \in \{1, -1\}$, $\sum_{i=1}^k x_i \geq 0$, $\forall k \in [2n-1]$, i $\sum_{i=1}^{2n} x_i = 0$.

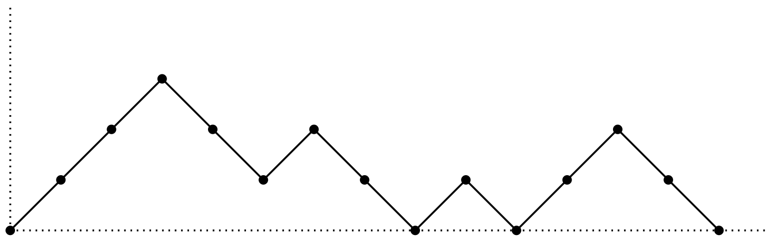
D_n: camins de longitud mínima de $(0,0)$ a $(2n, 0)$ formats per segments d'una de les dues formes següents:

$$\overline{(i,j)(i+1, j+1)} \qquad \text{(segments tipus } \diagup\text{)}$$

$$\overline{(i,j)(i+1, j-1)} \qquad \text{(segments tipus } \diagdown\text{)}$$

on i, j són enters, situats al quadrant d'ordenada no negativa (no travessen l'eix OX).

Observem que $|A_n| = |B_n| = |D_n|$ (identifiquem els parèntesis () amb els nombres $1, -1$ i amb els segments $\diagup$ $\diagdown$ respectivament). A la figura següent veiem un exemple d'identificació entre les configuracions anteriors:



((( )) ( )) ( ) (( ))

1 1 1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 -1

Proposició 17. $|A_n| = |B_n| = |D_n| = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

Demostració. Considerem primer tots els camins mínims de $(0,0)$ a $(2n,0)$ utilitzant segments tipus $\diagup$ i $\diagdown$. N'hi ha $\binom{2n}{n}$, ja que equival a comptar paraules de longitud $2n$ amb alfabet $\{\diagup, \diagdown\}$ que contenen exactament n segments $\diagup$ i n segments $\diagdown$ (el camí puja i baixa el mateix nombre de vegades).

Comptem ara els camins que travessen l'eix OX, és a dir, passen per algun punt d'ordenada -1. Fem correspondre a un d'aquests camins el camí de $(0,-2)$ a $(2n,0)$ que s'obté al fer una simetria respecte a la recta $y=-1$ del tros que va de $(0,0)$ al primer punt d'ordenada -1, i la resta del camí la deixem igual. Hi ha tants camins que travessen l'eix OX com camins mínims de $(0,-2)$ a $(2n,0)$ amb segments tipus $\diagup$ i $\diagdown$. D'aquests n'hi ha $\binom{2n}{n+1}$, ja que contenen exactament $n+1$ segments tipus $\diagup$ i $n-1$ segments tipus $\diagdown$ (el camí puja dues vegades més que baixa, ja que comença a un punt d'ordenada -2 i acaba en un punt d'ordenada 0).

Per tant,

$$\begin{aligned} C_n &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

□

Notació. Els nombres obtinguts, $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$, $n \geq 1$, s'anomenen *nombres de Catalan*. Els primers valors són $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$, $C_5 = 42$, $C_6 = 132$.

1.7 Resum

1.7.1 Nombre de k-seleccions d'un n-conjunt

Nombre de seleccions	sense repetició	amb repetició
ordenades	$P(n,k) = n^{\underline{k}}$	$PR(n,k) = n^k$
no ordenades	$C(n,k) = \binom{n}{k}$	$CR(n,k) = \left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$

1.7.2 Nombre d'aplicacions $f : A \longrightarrow B$, si $\vert A\vert = k \geq 1$ i $\vert B\vert = n \geq 1$

aplicacions	n^k	aplicacions exhaustives	$n! \left\{ {k \atop n} \right\}$
aplicacions injectives	$n^{\underline{k}}$	aplicacions bijectives	$\begin{cases} n!, & \text{si } n = k; \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$

1.7.3 Nombre de distribucions de n boles en k capses (Twelve-fold)

n boles	k capses	sense restriccions	mín. 1 bola per capsa	màxim 1 bola per capsa
distingibles	distingibles	k^n	$k! \left\{ {n \atop k} \right\}$	$\begin{cases} k^{\underline{n}} & , \text{ si } \; n \leq k \\ 0 & , \text{ si } \; n > k \end{cases}$
indistingibles	distingibles	$\left(\!\binom{k}{n}\!\right) = \binom{k+n-1}{n}$	$\binom{n-1}{n-k}$	$\begin{cases} \binom{k}{n} & , \text{ si } \; n \leq k \\ 0 & , \text{ si } \; n > k \end{cases}$
distingibles	indistingibles	$\sum_{i=1}^{k} \left\{ {n \atop i} \right\}$	$\left\{ {n \atop k} \right\}$	$\begin{cases} 1 & , \text{ si } \; n \leq k \\ 0 & , \text{ si } \; n > k \end{cases}$
indistingibles	indistingibles	$\sum_{i=1}^{k} p_i(n)$	$p_k(n)$	$\begin{cases} 1 & , \text{ si } \; n \leq k \\ 0 & , \text{ si } \; n > k \end{cases}$

Capítol 2

Estimació asimptòtica

2.1 Nombres harmònics

Definició. Per a n enter, $n \geq 1$, l'n-èsim *nombre harmònic* H_n, és

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Proposició 18. *Per a tot n, $n \geq 1$,*

$$\frac{1}{2}\lfloor \log_2 n \rfloor < H_n \leq \lfloor \log_2 n \rfloor + 1.$$

Demostració. Agrupem els sumands de H_n de manera que al grup k-èsim, $k \geq 1$, hi hagi els 2^{k-1} sumands $\frac{1}{i}$ tals que $\frac{1}{2^{k-1}} \geq \frac{1}{i} > \frac{1}{2^k}$.

Grup	# sumands	sumands
1	1	$\frac{1}{1}$
2	2	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$
3	4	$\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$
4	8	$\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	2^{k-1}	$\frac{1}{2^{k-1}}, \frac{1}{2^{k-1}+1}, \frac{1}{2^{k-1}+2}, \ldots, \frac{1}{2^k-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Observem que tots els sumands $\frac{1}{i}$ del grup k-èsim satisfan $\frac{1}{2^{k-1}} \geq \frac{1}{i} > \frac{1}{2^k}$, de manera que la suma és un nombre $> 2^{k-1}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$ i $\leq 2^{k-1}\frac{1}{2^{k-1}} = 1$. Aleshores, si $\frac{1}{n}$ és al grup k-èsim tenim $\frac{1}{2}(k-1) < H_n \leq k$. Però $\frac{1}{n}$ és al grup k-èsim si $2^{k-1} \leq n < 2^k$, és a dir, si $\lfloor \log_2 n \rfloor = k - 1$. Substituïm el valor de k a la desigualtat anterior i obtenim el que volíem demostrar. $\square$

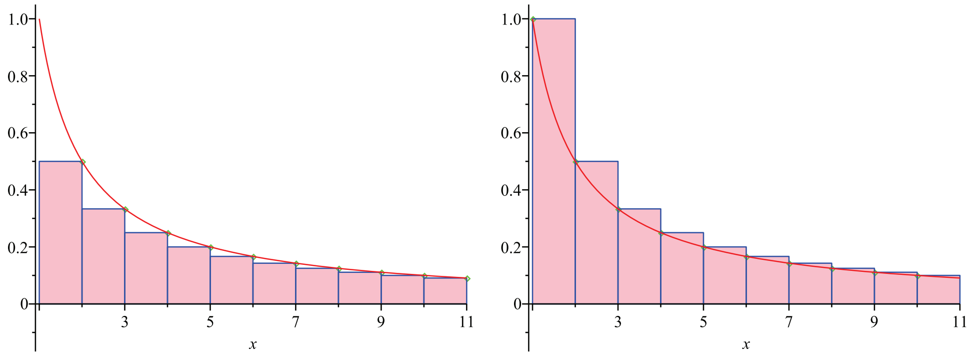


Figura 2.1: Les funcions f i h (a l'esquerra) i les funcions g i h (a la dreta) per a $n = 11$

Proposició 19. *Per a tot n, $n \geq 1$,*

$$\ln n < H_n \leq \ln n + 1.$$

Demostració. La desigualtat és certa per a $n = 1$. Si $n \geq 2$, considerem les funcions $f(x) = \frac{1}{\lceil x \rceil}$, $g(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$ i $h(x) = \frac{1}{x}$, definides en l'interval $[1, n]$ (vegeu la figura 2.1). L'àrea determinada per f i l'eix OX és $\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}$ i l'àrea determinada per g i l'eix OX és $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$. A més $f \leq h \leq g$ i, per tant, l'àrea determinada per h i l'eix OX és més gran que l'àrea determinada per f i més petita que l'àrea determinada per g. És a dir:

$$H_n - 1 = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} < \int_1^n \frac{dx}{x} < \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n.$$

Però sabem que $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x} = \ln x]_1^n = \ln n$ i si ho substituïm a l'expressió anterior obtenim la desigualtat de l'enunciat. $\square$

2.2 Comparació asimptòtica de funcions

2.2.1 Definicions

Considerem dues funcions f i g definides de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. Definim:

(i) $f \in \mathcal{O}(g)$ si existeixen una constant $C > 0$ i un enter n_0 tals que $|f(n)| \leq C \cdot |g(n)|$ per a tot $n \geq n_0$. Direm que f *és O gran de* g.

(ii) $f \in \Omega(g)$ si $g \in \mathcal{O}(f)$. Direm que f *és omega gran de* g.

(iii) $f \in \Theta(g)$ si $f \in \mathcal{O}(g)$ i $g \in \mathcal{O}(f)$. Direm que f *és theta de* g.

(iv) $f \in o(g)$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$. Direm que f *és o petita de* g.

(v) $f \sim g$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$. Direm que f *és asimptòticament igual a* g.

2.2.2 Manipulació del símbol $\mathcal{O}$

Si f, g, f_1, f_2, g_1, g_2 són funcions de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, es compleix:

(1) $f \in \mathcal{O}(f)$.

(2) Si $f \in \mathcal{O}(g)$ i c és una constant, llavors $c\, f \in \mathcal{O}(g)$.

(3) Si $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$ i $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$, llavors $f_1 + f_2 \in \mathcal{O}(|g_1| + |g_2|)$ i $f_1\, f_2 \in \mathcal{O}(g_1\, g_2)$.

(4) Si $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$ i $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$, llavors $f_1 + f_2 \in \mathcal{O}(\max\{|g_1|, |g_2|\})$.

(5) Si $f \in \mathcal{O}(g)$ i $g \in \mathcal{O}(h)$, llavors $f \in \mathcal{O}(h)$.

(6) Si $f \in \mathcal{O}(g)$, llavors $\sum_{k=1}^{n} f(k) \in \mathcal{O}(\sum_{k=1}^{n} |g(k)|)$.

(7) $f \in \mathcal{O}(1)$ és equivalent a que f es una funció fitada.

(8) $f \in o(1)$ és equivalent a $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$.

Demostració. Les propietats 1 i 2 són immediates. Per a demostrar la propietat 3, si suposem que $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$ i $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$, aleshores existeixen constants $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ i enters n_1, n_2 tals que $|f_1(n)| \le C_1\, |g_1(n)|$ per a tot $n \ge n_1$ i $|f_2(n)| \le C_2\, |g_2(n)|$ per a tot $n \ge n_2$. Per tant, si $C = \max\{C_1, C_2\}$ i $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, aleshores per a tot $n \ge n_0$ es compleix:

$$\begin{aligned}
|(f_1 + f_2)(n)| &= |f_1(n) + f_2(n)| \\
&\le |f_1(n)| + |f_2(n)| \\
&\le C_1\, |g_1(n)| + C_2\, |g_2(n)| \\
&\le C\, (\, |g_1(n)| + |g_2(n)|\,) \\
&= C\, (\, |g_1| + |g_2|\,)(n)
\end{aligned}$$

és a dir, $f_1 + f_2 \in \mathcal{O}(\, |g_1| + |g_2|\,)$.

Per altra banda, per a tot $n \ge n_0$,

$$\begin{aligned}
|(f_1\, f_2)(n)| &= |f_1(n)\, f_2(n)| \\
&= |f_1(n)|\, |f_2(n)| \\
&\le C_1\, |g_1(n)|\, C_2\, |g_2(n)| \\
&= C_1\, C_2\, |g_1(n) g_2(n)| \\
&= C_1\, C_2\, |(g_1 g_2)(n)|
\end{aligned}$$

on $C_1\, C_2 > 0$, i per tant $f_1\, f_2 \in \mathcal{O}(\, g_1\, g_2\,)$. La propietat 4 es dedueix fàcilment de la propietat 3. La demostració de la resta de propietats queda com a exercici. $\square$

2.2.3 Comparació de funcions elementals

(1) Si a, b, α, C són nombres reals positius es compleix:

(i) $n^a \in \mathcal{O}(n^b)$, si $a \leq b$.

(ii) $n^a \in \mathcal{O}(\alpha^n)$, per a tot $\alpha > 1$.

(iii) $(\ln n)^C \in \mathcal{O}(n^a)$, per a tot $a > 0$.

(2) Les funcions elementals següents, on $p > 0$ i $a > 1$, estan ordenades de forma que cadascuna és o-petita de les següents: $1,\ \ln n,\ n^p,\ a^n,\ n!,\ n^n$

2.3 Factorial

Recordem que el factorial de n, $n \geq 1$, és

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i.$$

Proposició 20. *Per a tot n, $n \geq 1$,*

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}.$$

Demostració. Observem que

$$2^{n-1} \leq \prod_{i=2}^{n} i = n! \leq \prod_{i=2}^{n} n = n^{n-1}.$$

□

Lema 1. *Per a tot parell a, b de reals no negatius, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.*

Demostració. Si a, b són reals positius, el nombre $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b}$ és no negatiu, d'on deduïm el resultat. □

Proposició 21 (Gauss)**.** *Per a tot n, $n \geq 1$,*

$$n^{n/2} \leq n! \leq \frac{(n+1)^n}{2^n}.$$

Demostració. Observem que

$$(n!)^2 = (1 \cdot n)(2 \cdot (n-1))(3 \cdot (n-2)) \dots ((n-1) \cdot 2)(n \cdot 1) = \prod_{i=1}^{n} i(n+1-i),$$

i utilitzem el lema anterior per a obtenir la fita superior:

$$n! = \sqrt{\prod_{i=1}^{n} i(n+1-i)} = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{i(n+1-i)} \le \prod_{i=1}^{n} \frac{i+(n+1-i)}{2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Per a obtenir la fita inferior, observem que $i(n+1-i) \ge n$ per a tot $i \in [n]$, ja que és trivial per a $i = 1$ i, si $2 \le i \le n-1$, un dels dos factors és $\ge \frac{n}{2}$ i l'altre és ≥ 2, és a dir, $i(n+1-i) \ge 2 \cdot n/2 = n$. Per tant,

$$(n!)^2 = \prod_{i=1}^{n} i(n+1-i) \ge n^n,$$

d'on deduïm

$$n! \ge n^{n/2}.$$

□

Lema 2. *Per a tot nombre real x, $1 + x \le e^x$.*

Demostració. Equival a demostrar que la funció $f(x) = e^x - x - 1$ és no negativa. La funció $f(x)$ és contínua, $f(0) = 0$ i té un mínim en $x = 0$. Per tant, $f(x) \ge 0$ per a tot real x. □

Proposició 22. *Per a tot n, $n \ge 1$,*

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le e\,n\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Demostració. Provarem en primer lloc la fita superior per inducció. Considerem per a tot $n \ge 1$ la desigualtat

$$P(n):\ n! \le e\,n\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Per a $n = 1$ és certa, ja que $1! = 1 \le e \cdot 1 \cdot \frac{1}{e} = 1$.

Veurem ara per a tot $n \ge 2$ que si és certa per a $n-1$ també ho és per a n. Suposem que $P(n-1)$ és certa, és a dir,

$$(n-1)! \le e\,(n-1)\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1},$$

aleshores:

$$n! = n(n-1)! \le ne\,(n-1)\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} = ne\frac{n^n}{n^n}\frac{(n-1)^n}{e^{n-1}}\frac{e}{e} = en\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n e,$$

i pel lema anterior

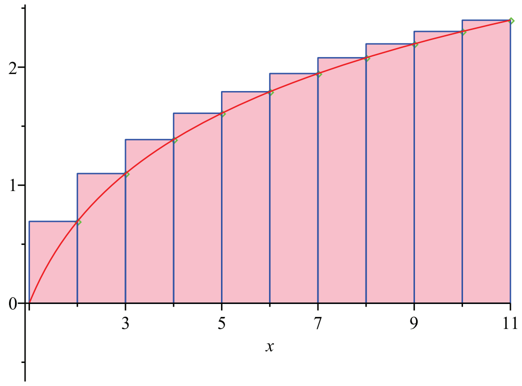


Figura 2.2: Les funcions $f(x) = \ln x$ i $g(x) = \ln\lceil x \rceil$ per a $n = 11$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1 + \left(-\frac{1}{n}\right)\right)^n \leq (e^{-\frac{1}{n}})^n = e^{-1},$$

és a dir

$$n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{-1}e = en\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Per a demostrar la fita inferior considerem les funcions $f(x) = \ln x$ i $g(x) = \ln\lceil x \rceil$ en l'interval $[1, n]$ (vegeu la figura 2.2). Per ser $f \leq g$, l'àrea determinada per f i l'eix OX és inferior a l'àrea determinada per g i l'eix OX, és a dir:

$$\int_1^n \ln x\, dx \leq \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n = \ln(n!).$$

La funció $x(\ln x - 1)$ és una primitiva de $f(x)$, per tant

$$\int_1^n \ln x\, dx = x(\ln x - 1)]_1^n = n(\ln n - 1) - 1(\ln 1 - 1) = n \ln n - n + 1,$$

d'on deduïm

$$e^{n \ln n - n + 1} \leq e^{\ln(n!)} = n!,$$

però

$$e^{n \ln n - n + 1} = n^n \frac{e}{e^n} = e\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

és a dir,

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!.$$

$\square$

Fórmula de Stirling. Si considerem la funció $f(n) = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$, aleshores $n! \sim f(n)$, és a dir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n!} = 1.$$

Exercici. Quants dígits té aproximadament 100! escrit en base 10?

Solució. El nombre de dígits d'un nombre N escrit en base 10 és aproximadament el logaritme en base 10 d'aquest nombre (en realitat és $\lfloor \log_{10} N \rfloor + 1$). Aproximem 100! amb la fórmula de Stirling i calculem el logaritme en base 10:

$$\begin{aligned}
\log_{10} 100! &\sim \log_{10}(\sqrt{2\pi 100}(\frac{100}{e})^{100}) \\
&= \frac{1}{2}(\log_{10} 2\pi + \log_{10}(100)) + 100(\log_{10}(100) - \log_{10}(e)) \\
&= \frac{1}{2}(\log_{10} 2\pi + 2) + 100(2 - \log_{10} e) \approx 157.96 \approx 158.
\end{aligned}$$

Per tant, 100! té aproximadament 158 dígits.

2.4 Nombres binomials

Per a n, k enters, $n \geq k \geq 0$, el nombre binomial $\binom{n}{k}$ es pot calcular:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Si $n \geq 1$ tenim la següent fita superior immediata:

$$\binom{n}{k} \leq n^k,$$

ja que

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \leq n^{\underline{k}} \leq n^k.$$

A continuació veurem fites més acurades dels nombres binomials.

Proposició 23. *Per a n, k enters, $n \geq k \geq 1$,*

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

Demostració. Per a demostrar la fita inferior observem que

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i},$$

i per ser $n \geq k > i \geq 0$ tenim $\frac{n-i}{k-i} \geq \frac{n}{k}$, per tant

$$\binom{n}{k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k.$$

Per a demostrar la fita superior, considerem per a $x \in \mathbb{R}$ la igualtat

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n.$$

Per a $x > 0$,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} x^i \leq \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n,$$

i si dividim la desigualtat pel nombre positiu x^k obtenim

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \frac{1}{x^{k-i}} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k}.$$

Si a més $x \leq 1$, es satisfà $\frac{1}{x^r} \geq 1$ per a tot $r \geq 0$, és a dir,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leq \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \frac{1}{x^{k-i}} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k}.$$

Si prenem $x = \frac{k}{n}$, aleshores $0 < x \leq 1$, i obtenim

$$\binom{n}{k} \leq \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leq \frac{\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}{\left(\frac{k}{n}\right)^k} = \left(1+\frac{k}{n}\right)^n \left(\frac{n}{k}\right)^k \leq (e^{\frac{k}{n}})^n \left(\frac{n}{k}\right)^k = \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

□

Observem que en realitat hem demostrat una desigualtat més forta:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

Proposició 24. *Fixat n enter, $n \geq 1$, considerem els nombres binomials $\binom{n}{k}$ com una funció de k. El valor màxim de $\binom{n}{k}$, $n \geq k \geq 0$, s'obté per a per a $k = \frac{n}{2}$, si n és parell, i per a $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil$, si n és senar.*

Demostració. Per a tot $k > 0$,

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} = \frac{n-k+1}{k}.$$

Fixat n, $\binom{n}{k} \geq \binom{n}{k-1}$ si $\frac{n-k+1}{k} \geq 1$, és a dir, per a $k \leq \frac{n+1}{2}$, i $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k-1}$ si $\frac{n-k+1}{k} \leq 1$, és a dir, per a $k \geq \frac{n+1}{2}$, d'on es dedueix el que volíem demostrar. □

Proposició 25. *Per a tot n enter, $n \geq 0$,*

$$\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq 2^n.$$

Demostració. Del binomi de Newton deduïm $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Per altra banda,

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leq (n+1) \max\{\binom{n}{k} : 0 \leq k \leq n\} = (n+1)\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor},$$

d'on deduïm l'altra desigualtat. □

Proposició 26. *Per a tot m enter, $m \geq 1$,*

$$\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \leq \binom{2m}{m} \leq \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}.$$

Demostració. Es immediat comprovar que la desigualtat és certa per a $m = 1$. Suposem que $m \geq 2$. Considerem el nombre P_m tal que

$$P_m = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2m} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2m} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdots 2m}{2 \cdot 4 \cdots 2m} = \frac{(2m)!}{(2^m \cdot m!)^2} = \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}.$$

Amb aquesta notació, la desigualtat que volem demostrar es pot escriure

$$\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \leq 2^{2m} P_m \leq \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}},$$

que equival a demostrar

$$\frac{1}{2\sqrt{m}} \leq P_m \leq \frac{1}{\sqrt{2m}}.$$

Observem que

$$\begin{aligned} 1 &> \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(2m)^2}\right) = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \frac{(2m-1)\cdot(2m+1)}{(2m)^2} \\ &= P_m^2 (2m+1) > P_m^2 \cdot 2m, \end{aligned}$$

d'on deduïm $P_m < \frac{1}{\sqrt{2m}}$.

Per altra banda, per ser $m \geq 2$,

$$\begin{aligned} 1 &> \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(2m-1)^2}\right) = \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5^2} \cdots \frac{(2m-2)\cdot(2m)}{(2m-1)^2} \\ &= \frac{1}{4m \cdot P_m^2}, \end{aligned}$$

d'on deduïm $P_m > \frac{1}{2\sqrt{m}}$. □

Observacions.

(1) Si n és parell, podem escriure la proposició anterior de la manera següent:

$$\frac{2^n}{2\sqrt{n/2}} \le \binom{n}{n/2} \le \frac{2^n}{\sqrt{n}}.$$

(2) Amb la fórmula de Stirling podem obtenir una fita més acurada:

$$\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(m!)^2} \approx \frac{\sqrt{2\pi 2m}\left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}}{\left(\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m\right)^2} = \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}.$$

Si n és parell tenim, per la proposició anterior:

$$\frac{2^n}{\sqrt{4\,\frac{n}{2}}} \le \binom{n}{n/2} \le \frac{2^n}{\sqrt{2\,\frac{n}{2}}},$$

i amb la fórmula de Stirling obtenim:

$$\binom{n}{n/2} \approx \frac{2^n}{\sqrt{\pi\,\frac{n}{2}}}.$$

(3) La desigualtat de la proposició anterior ens dóna una idea de, fixat n, quina proporció de la suma de tots els nombres binomials, $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$, correspon al nombre binomial màxim $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Capítol 3

Successions recurrents i funcions generadores

3.1 Successions recurrents

Definició. Una successió $(a_n)_{n\geq n_0}$ és *recurrent* si, llevat dels primers termes, a_n es pot obtenir en funció de n i els termes anteriors, $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n_0}$. L'*equació recurrent* d'una successió $(a_n)_{n\geq n_0}$ és una expressió $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n_0}, n)$ que es satisfà per a tot n a partir d'un determinat valor.

Exemples.

(i) La successió dels nombres factorials és recurrent ja que es pot definir com la successió $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_0 = 1$ i $a_n = n\, a_{n-1}$ per a tot $n \geq 1$.

(ii) La successió $(a_n)_{n\geq 0} = (0, 1, 6, 15, 102, \ldots)$ satisfà l'equació recurrent $a_n = a_{n-1}a_{n-2}+ 3n$ per a $n \geq 2$.

(iii) La successió $(a_n)_{n\geq 0} = (1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 9/2, \ldots)$ satisfà l'equació recurrent $a_n = a_{n-1}/a_{n-3} + a_{n-5}^2$ per a $n \geq 5$.

(iv) La successió $(a_n)_{n\geq 0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ satisfà l'equació recurrent $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ per a $n \geq 2$.

(v) La successió $(C_n)_{n\geq 0}$ dels nombres de Catalan satisfà l'equació recurrent

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_kC_{n-k-1}$$

per a tot $n \geq 1$.

Demostració. Fixat n, $n \geq 1$, considerem el conjunt A de camins de $(0, 0)$ a $(2n, 0)$ que compten els nombres de Catalan, és a dir, camins formats per $2n$ segments de tipus $\overline{(i, j)(i + 1, j + 1)}$ o bé $\overline{(i, j)(i + 1, j - 1)}$ que no contenen punts d'ordenada negativa. Sabem que $C_n = |A|$. Els punts d'ordenada 0 d'aquests camins han de tenir abscissa parella, ja que cal el mateix nombre de segments per pujar que per baixar.

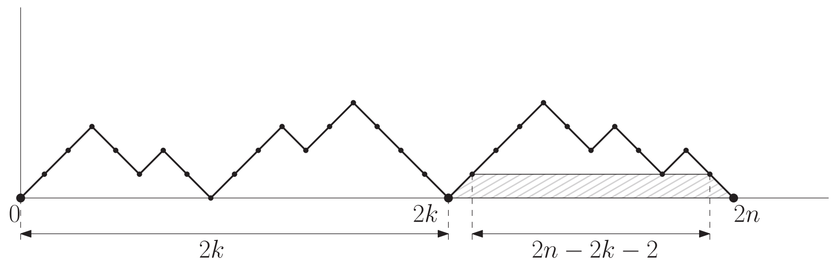


Figura 3.1: Un camí del conjunt B_k.

Classifiquem aquests camins en els conjunts B_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, de manera que B_k conté els camins tals que el punt del camí que té ordenada 0 i abscissa màxima diferent de $2n$ és $(2k, 0)$. Els conjunts $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ són disjunts dos a dos i $A = B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1}$. Observem que els camins de B_k estan formats per una part de $(0,0)$ a $(2k,0)$ que no travessa l'eix OX i una altra part de $(2k,0)$ a $(2n,0)$ que no conté punts de l'eix OX a part dels extrems. La primera part la podem construir de C_k maneres i la segona de C_{n-k-1} maneres, ja que ha de començar amb un segment tipus $\diagup$, acabar amb un segment tipus $\diagdown$ i la resta de punts d'aquest tros tenen ordenada almenys 1 (vegeu la Figura 3.1). És a dir, $|B_k| = C_k\, C_{n-k-1}$ i, per tant,

$$C_n = |A| = \sum_{k=0}^{n-1} |B_k| = \sum_{k=0}^{n-1} C_k\, C_{n-k-1}.$$

□

Definició. Una successió $(a_n)_{n \geq n_0}$ és *recurrent d'ordre* k si, excepte els k primers termes, cada terme es pot obtenir en funció dels k anteriors. És a dir, per a tot $n \geq n_0$ es satisfà una equació recurrent de tipus

$$a_{n+k} = f(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \ldots, a_n, n).$$

Direm que l'equació anterior és *recurrent d'ordre* k.

Observació. Una successió $(a_n)_{n \geq n_0}$ recurrent d'ordre k queda determinada al conèixer

- els k primers termes de la successió: $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots, a_{n_0+k-1}$ (*condicions inicials*), i
- l'equació recurrent d'ordre k que es satisfà per a tot $n \geq n_0$:

$$a_{n+k} = f(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \ldots, a_n, n).$$

Per altra banda, la condició

$$a_{n+k} = f(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \ldots, a_n, n)\,,\ \forall n \geq n_0$$

es equivalent a una expressió

$$a_n = g(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}, n)\,,\ \forall n \geq n_0 + k.$$

Per exemple, la successió de Fibonacci satisfà l'equació recurrent d'ordre 2

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\,,\ \forall n \geq 0,$$

observem que aquesta condició és equivalent a

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,,\ \forall n \geq 2.$$

Si restem els subíndexs més gran i més petit que apareixen a l'equació recurrent obtenim l'ordre de la successió recurrent.

Exemples.

(i) L'equació $a_n = a_{n-1}^2 - a_{n-2} + 2\,a_{n-3} + n$ és recurrent d'ordre 3 i es pot expressar $a_{n+3} = a_{n+2}^2 - a_{n+1} + 2\,a_n + (n+3)$.

(ii) L'equació $a_{n+2} = n\,a_{n-3}$ és recurrent d'ordre 5 i es pot expressar $a_{n+5} = (n+3)\,a_n$ o bé $a_n = (n-2)\,a_{n-5}$.

3.2 Alguns mètodes de resolució de successions recurrents

En alguns casos es pot trobar una expressió general per al terme a_n d'una successió recurrent $(a_n)_{n \geq n_0}$, és a dir, una expressió que no depengui dels termes anteriors. A continuació descrivim un parell de mètodes generals de resolució.

MÈTODE D'INDUCCIÓ. Consisteix en conjecturar una solució per al terme general i demostrar-la per inducció.

Exemple. Considerem la successió recurrent $(a_n)_{n \geq 0}$ tal que $a_0 = 0$ i, per a tot $n \geq 1$, $a_n = 2\,a_{n-1} + 1$. Apliquem l'equació recurrent per a calcular els primers termes de la successió:

$$(a_n)_{n \geq 0} = (0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, \ldots).$$

Observem que $a_n = 2^n - 1$. Demostrarem per inducció que aquesta fórmula és certa per a tot n, $n \geq 0$. Per a $n = 0$ és certa ja que $a_0 = 0$ i $2^0 - 1 = 0$. Considerem ara n, $n \geq 1$, i suposem que la fórmula és certa per a $n-1$. Veurem que també és certa per a n. Per ser $n \geq 1$ podem aplicar l'equació recurrent i la hipòtesi d'inducció, i obtenim:

$$a_n = 2\,a_{n-1} + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1.$$

Mètode d'expansió. Consisteix en aplicar repetidament l'equació recurrent fins deduir el terme general.

Exemple. Considerem la successió $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_0 = 1$ i $a_n = 3\,a_{n-1} + 1$ per a tot $n \geq 1$. Si apliquem repetidament l'equació recurrent obtenim:

$$\begin{aligned}
a_n &= 3\,a_{n-1} + 1 \\
&= 3(3\,a_{n-2} + 1) + 1 = 9\,a_{n-2} + 3 + 1 \\
&= 9(3\,a_{n-3} + 1) + 3 + 1 = 27\,a_{n-3} + 9 + 3 + 1 \\
&\ \ \ldots \\
&= 3^n\,a_0 + 3^{n-1} + \cdots + 9 + 3 + 1 = 3^n + 3^{n-1} + \cdots + 9 + 3 + 1 \\
&= \frac{3^n\,3 - 1}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.
\end{aligned}$$

El general no és fàcil resoldre una successió recurrent utilitzant algun d'aquests mètodes. Per exemple, la successió de Fibonacci és la successió $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ i $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ si $n \geq 2$. Si calculem els primers termes obtenim

$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots).$$

Quina és l'expressió del terme general?

Considerem ara el problema següent. Tenim n punts d'una circumferència i considerem totes les cordes que s'obtenen unint dos d'aquests punts. Suposem que els punts estan situats de manera que en un punt de l'interior de la circumferència es tallen com a molt dues d'aquestes cordes. En quantes regions queda dividit l'interior de la circumferència? Si a_n és el nombre de regions en cas de tenir n punts, observem que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 16$ (vegeu la Figura 3.2). Quina és l'expressió general per a a_n? Podem comprovar que $a_6 = 31$, de manera que a_n no és 2^{n-1} com

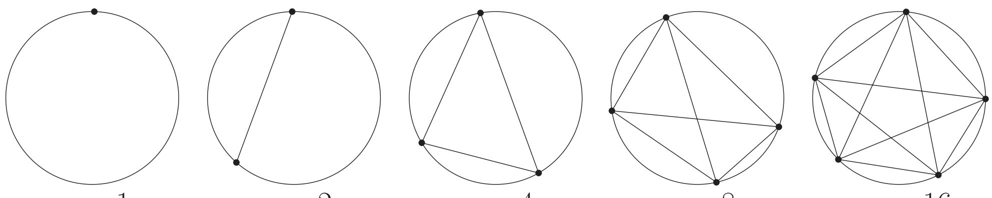


Figura 3.2: n punts de la circumferència la divideixen en a_n regions.

semblava natural conjecturar a partir dels valors anteriors. Per a trobar quina equació recurrent satisfà $(a_n)_{n\geq 0}$, suposem que tenim $n-1$ punts a la circumferència numerats de 1 a $n-1$ en sentit horari. Afegim un n-èsim punt entre $n-1$ i 1, i tracem les $n-1$ cordes entre n i $k \in [n-1]$. La corda que uneix n i k deixa $k-1$ punts a una banda i $n-1-k$ a l'altra. El nombre de regions noves que es formen al traçar aquesta corda, és el nombre de regions que travessa, és a dir, una més que el nombre d'interseccions

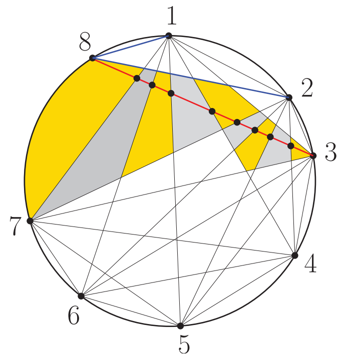


Figura 3.3: A l'afegir la corda que uneix el 8è punt amb el 3r apareixen $2 \times 4 + 1 = 9$ noves regions.

amb altres cordes a l'interior de la circumferència. El nombre d'interseccions amb altres cordes és $(k-1)(n-1-k)$.

Per tant, es satisfà la recurrència següent:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1}((k-1)(n-1-k)+1) \\
&= a_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1}(2-n+nk-k^2)) \\
&= a_{n-1} + (n-1)(2-n) + n\sum_{k=1}^{n-1}k - \sum_{k=1}^{n-1}k^2 \\
&= a_{n-1} - n^2 + 3n - 2 + n\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= a_{n-1} + \frac{n^3 - 6n^2 + 17n - 12}{6},
\end{aligned}$$

on hem aplicat la fórmula que calcula la suma dels primers dels primers quadrats,

$$\sum_{i=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Es pot comprovar que la solució és

$$a_n = \frac{1}{24}(n^4 - 6\,n^3 + 23\,n^2 - 18\,n + 24).$$

Difícilment podem trobar-la amb els mètodes donats anteriorment.

Més endavant descriurem un mètode que ens servirà per a trobar el terme general de successions com aquestes.

3.3 L'anell de les sèries formals de potències $\mathbb{C}[[x]]$

Definició. Una *sèrie formal de potències sobre* $\mathbb{C}$ és una expressió del tipus

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

on $a_n \in \mathbb{C}$ per a tot $n \geq 0$.

Notació. $\mathbb{C}[[x]]$ denota el conjunt de totes les sèries formals de potències sobre $\mathbb{C}$.

Definició. Si $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ i $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$,

la *suma* de $A(x)$ i $B(x)$ és la sèrie formal de potències

$$A(x) + B(x) = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n,$$

i el *producte* de $A(x)$ i $B(x)$ és la sèrie formal de potències

$$A(x)B(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n, \text{ on } c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}.$$

Notació. Escriurem

$$0 = \sum_{n\geq 0} 0 \cdot x^n = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \ldots$$

i

$$1 = 1 + \sum_{n\geq 1} 0 \cdot x^n = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \ldots.$$

Propietats.

(1) La suma de sèries formals de potències és commutativa i associativa.

(2) El producte de sèries formals de potències és commutatiu i associatiu.

(3) El producte és distributiu respecte a la suma.

(4) La sèrie 0 és l'element neutre de la suma.

(5) La sèrie $-A(x) = \sum_{n\geq 0} (-a_n)\, x^n$ és l'oposada de la sèrie $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$

(6) La sèrie 1 és l'element neutre del producte.

Exercici. Demostreu les propietats anteriors.

Definició. La sèrie formal de potències *inversa* de $A(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ és una sèrie $B(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ tal que $A(x)B(x) = 1$. Si $A(x)$ té inversa direm que $A(x)$ és *invertible* i escriurem

$$B(x) = \frac{1}{A(x)}.$$

Proposició 27. *La sèrie $A(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ és invertible si, i només si, $a_0 \neq 0$.*

Demostració. Suposem que $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$. Si té inversa ha de ser una sèrie $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ tal que $A(x)B(x) = 1$, és a dir:

$$\begin{aligned} 1 &= a_0\, b_0; \\ 0 &= \sum_{i=0}^{n} a_i\, b_{n-i}, \text{ si } n \geq 1. \end{aligned}$$

Per tant, $A(x)$ no té inversa si $a_0 = 0$. Si $a_0 \neq 0$, podem definir recursivament nombres $b_n \in \mathbb{C}$, de manera que es satisfacin les condicions anteriors. Per ser $a_0 \neq 0$, podem definir

$$b_0 = 1/a_0 \in \mathbb{C}.$$

Suposem ara que tenim definits nombres $b_0, \ldots, b_{n-1}$ de manera que es satisfà $\sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i} = 0$ per a tot k, $1 \leq k \leq n-1$. De la condició $\sum_{i=0}^{n} a_i\, b_{n-i} = 0$ deduïm que ha de ser

$$b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{n-i} \in \mathbb{C}.$$

□

La demostració de la proposició anterior és constructiva, és a dir, ens proporciona la manera de calcular la inversa de la sèrie $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ si $a_0 \neq 0$.

Exemple. La sèrie inversa de $\sum_{n\geq 0} x^n$ és $1-x$, ja que $(1-x)\sum_{n\geq 0} x^n = 1$. Escriurem

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Proposició 28. $(\mathbb{C}[[x]], +, .)$ *és un anell commutatiu unitari.*

Definició. El *producte* de la sèrie $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *per l'escalar* $\alpha \in \mathbb{C}$ és la sèrie

$$\alpha A(x) = \sum_{n\geq 0} (\alpha a_n) x^n.$$

Proposició 29. $\mathbb{C}[[x]]$ *és un espai vectorial.*

Definició. La *derivada* de la sèrie $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ és la sèrie

$$A'(x) = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n \in \mathbb{C}[[x]].$$

Propietats. Si $A(x), B(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ i $\alpha \in \mathbb{C}$, aleshores:

(1) $(A(x)+B(x))' = A'(x)+B'(x)$

(2) $(\alpha A(x))' = \alpha A'(x)$

(3) $(A(x)B(x))' = A'(x)B(x)+A(x)B'(x)$

(4) $(A(x)^k)' = k\,A(x)^{k-1}A'(x)$, per a tot k enter, $k \geq 1$

(5) Si $A(x)$ és invertible, $\left(\dfrac{1}{A(x)}\right)' = -\dfrac{A'(x)}{A(x)^2}$

(6) Si $A(x)$ és invertible, $\left(\dfrac{B(x)}{A(x)}\right)' = \dfrac{A(x)B'(x)-A'(x)B(x)}{A(x)^2}$

Exercici. Demostreu les propietats anteriors.

3.4 Funcions generadores

3.4.1 Funció generadora ordinària d'una successió

Definició. La *funció generadora ordinària (f.g.o.)* de la successió $(a_n)_{n\geq 0}$ és la sèrie formal de potències

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Exemples.

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n = 1+x+x^2+\cdots = \frac{1}{1-x}$ és la funció generadora ordinària de $(1,1,1,\dots)$

(ii) Per a tot enter $m \geq 0$, $(1+x)^m$ és la funció generadora ordinària de la successió de nombres binomials

$$\left(\binom{m}{0},\binom{m}{1},\binom{m}{2},\dots,\binom{m}{m},0,0,\dots\right) = \left(\binom{m}{n}\right)_{n\geq 0}.$$

3.4.2 Manipulació de funcions generadores

Si $A(x)$ i $B(x)$ són les funcions generadores ordinàries de les successions $(a_n)_{n\geq 0}$ i $(b_n)_{n\geq 0}$ respectivament i $\alpha \in \mathbb{C}$, aleshores:

(1) $A(x)+B(x)$ és la f.g.o. de la successió $(a_n+b_n)_{n\geq 0}$ (suma)

(2) $A(x)B(x)$ és la f.g.o. de la successió $(c_n)_{n\geq 0}$, on $c_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ (producte)

(3) $\alpha A(x)$ és la f.g.o. de la successió $(\alpha a_n)_{n\geq 0}$ (producte per un escalar)

(4) $A'(x)$ és la f.g.o. de la successió $((n+1)a_{n+1})_{n\geq 0} = (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$ (derivada)

(5) $x^m A(x)$és la f.g.o. de la successió:

$$(\overbrace{0,\dots,0}^{m}, a_0, a_1, \dots) = (a_{n-m})_{n\geq m}$$ (desplaçament cap a la dreta)

(6) Si $m \geq 1$, $(A(x) - a_0 - a_1x - \cdots - a_{m-1}x^{m-1})/x^m$ és la f.g.o. de la successió:

$$(a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots) = (a_{n+m})_{n\geq 0}$$ (desplaçament cap a l'esquerra)

(7) $A(\alpha x)$ és la f.g.o. de la successió:

$$(\alpha^n a_n)_{n\geq 0} = (a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots)$$ (substitució de x per αx)

(8) $A(x^m)$ és la f.g.o. de la successió

$$(a_0, \overbrace{0,\dots,0}^{m-1}, a_1, \overbrace{0,\dots,0}^{m-1}, a_2, 0\dots)$$ (substitució de x per x^m)

(9) $A(x)/(1-x)$ és la f.g.o. de la successió:

$$(a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, a_0+a_1+a_2+a_3, \dots)$$ (sumes parcials)

és a dir, de la succesió $(s_n)_{n\geq 0}$, on $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

Exemples.

(i) Funció generadora de la successió $(s_n)_{n\geq 0}$, on $s_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Amb manipulació de funcions generadores obtenim successivament:

$$(1,1,1,1,\dots) \leftrightarrow \frac{1}{1-x}$$

$$(1,2,3,4,\dots) \leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2}$$ (sumes parcials)

$$(0,1,2,3,\dots) \leftrightarrow \frac{x}{(1-x)^2}$$ (desplaçament cap a la dreta)

$$(1\cdot 1, 2\cdot 2, 3\cdot 3, 4\cdot 4, \dots) \leftrightarrow \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$ (derivada)

$$(0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots) \leftrightarrow \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$ (desplaçament cap a la dreta)

$$(0, 1^2, 1^2+2^2, 1^2+2^2+3^2, \dots) \leftrightarrow \frac{x+x^2}{(1-x)^4}$$ (sumes parcials)

És a dir, a f.g.o. de $(s_n)_{n\geq 0}$ és $S(x) = \dfrac{x+x^2}{(1-x)^4}$.

(ii) Funció generadora de la successió $(n\,3^n)_{n\geq 0}$.

Hem vist a l'exemple anterior que la f.g.o. de la successió $(n)_{n\geq 0}$ és $\dfrac{x}{(1-x)^2}$. Si substituïm x per $3x$ obtenim $\dfrac{3x}{(1-3x)^2}$ que és la f.g.o. de $(n\,3^n)_{n\geq 0}$.

(iii) Funció generadora ordinària de la successió

$$(1,1,0,-1,2,0,1,4,0,-1,8,0,\dots).$$

Amb manipulació de funcions generadores obtenim per una banda:

$(1,1,1,1,\dots) \leftrightarrow \dfrac{1}{1-x}$

$(1,-1,1,-1,1,-1,\dots) \leftrightarrow \dfrac{1}{1+x}$ (substitució de x per $-x$)

$(1,0,0,-1,0,0,1,0,0,-1,0,0\dots) \leftrightarrow \dfrac{1}{1+x^3}$ (substitució de x per x^3)

i per altra banda:

$(1,1,1,1,\dots) \leftrightarrow \dfrac{1}{1-x}$

$(1,2,4,8,\dots) \leftrightarrow \dfrac{1}{1-2x}$ (substitució de x per $2x$)

$(1,0,0,2,0,0,4,0,0,8,0,0\dots) \leftrightarrow \dfrac{1}{1-2x^3}$ (substitució de x per x^3)

$(0,1,0,0,2,0,0,4,0,0,8,0,0\dots) \leftrightarrow \dfrac{x}{1-2x^3}$ (desplaçament cap a la dreta)

i finalment,

$(1,1,0,-1,2,0,1,4,0,-1,8,0,\dots) \leftrightarrow \dfrac{1}{1+x^3} + \dfrac{x}{1-2x^3}$ (suma)

3.4.3 Nombres binomials generalitzats

Proposició 30. *Per a tot enter m, $m \geq 1$,*

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n\geq 0} \left(\!\binom{m}{n}\!\right) x^n = \sum_{n\geq 0} \binom{m+n-1}{n} x^n = \sum_{n\geq 0} \binom{m+n-1}{m-1} x^n.$$

Demostració. Escrivim

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^m = \left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)^m.$$

Obtindrem x^n en l'expressió anterior cada vegada que prenguem $x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_m}$ respectivament de cadascun dels m factors de l'expressió anterior amb $i_1+i_2+\cdots+i_m = n$, on $i_1, \dots, i_m \geq 0$. És a dir, el terme x^n apareixerà tantes vegades com solucions enteres no negatives de l'equació $z_1 + \cdots + z_m = n$. El coeficient de x^n a l'expressió $\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^m$ serà, doncs, $\left(\binom{m}{n}\right)$, que es pot calcular com $\binom{m+n-1}{n}$ o bé $\binom{n+m-1}{m-1}$. □

Si substituïm x per αx a l'expressió anterior obtenim el resultat següent.

Corol·lari 1. *Per a tot enter m, $m \geq 1$, i per a tot $\alpha \in \mathbb{C}$,*

$$\frac{1}{(1-\alpha\, x)^m} = \sum_{n \geq 0} \left(\binom{m}{n}\right) \alpha^n\, x^n = \sum_{n \geq 0} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n\, x^n = \sum_{n \geq 0} \binom{m+n-1}{m-1} \alpha^n\, x^n.$$

Observació. Fixat un enter $m \geq 1$,

$$\binom{m+n-1}{n} = \binom{m+n-1}{m-1} = \frac{(m+n-1)^{\underline{m-1}}}{(m-1)!},$$

i aquesta expressió és un polinomi en n de grau $m-1$. És a dir, $A(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha x)^m}$ és la f.g.o. d'una successió tal que el terme general es pot expressar com un polinomi en n de grau $m-1$ multiplicat per α^n.

Cas particular. Si fem $m = 2$ a la Proposició 30, obtenim que la f.g.o. de la successió $(1, 2, 3, 4, \dots)$ és

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n \geq 0} (n+1) x^n.$$

El mateix resultat es pot obtenir si tenim compte que la successió $(1, 2, 3, 4, \dots)$ està formada per les sumes parcials de la successió $(1, 1, 1, \dots)$. La funció generadora d'aquesta successió és $A(x) = \frac{1}{1-x}$ i, conseqüentment, la f.g.o. de la successió $(1, 2, 3, 4, \dots)$ és $A(x)/(1-x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

També ho podem obtenir si tenim en compte que la f.g.o. de la successió $(1, 2, 3, 4, \dots)$ és la derivada de la f.g.o. de la successió $(1, 1, 1, \dots)$. Sabem que la f.g.o. de $(1, 1, 1, \dots)$ és $\frac{1}{1-x}$ i la seva derivada és $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Definició. Si $r \in \mathbb{R}$ i n és un nombre natural, el *nombre binomial generalitzat*, $\binom{r}{n}$, és

$$\binom{r}{n} = \begin{cases} \dfrac{r^{\underline{n}}}{n!} & , \text{ si } n \geq 1 \\ 1 & , \text{ si } n = 0 \end{cases}$$

on $r^{\underline{n}} = \overbrace{r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1)}^{n \text{ factors}}$

Proposició 31 (Generalització del Binomi de Newton)**.** *Per a tot m enter, $m \geq 1$,*

$$(1+x)^{-m} = \sum_{n \geq 0} \binom{-m}{n} x^n.$$

Demostració. Sabem que

$$(1+x)^{-m} = \frac{1}{(1+x)^m} = \frac{1}{(1-(-x))^m} = \sum_{n\geq 0} \binom{m+n-1}{n} (-1)^n x^n.$$

Per altra banda,

$$\begin{aligned}
\binom{-m}{n} &= \frac{(-m)^{\underline{n}}}{n!} = \frac{(-m)(-m-1)\dots(-m-(n-1))}{n!} \\
&= \frac{(-1)^n m(m+1)\dots(m+n-1)}{n!} \\
&= (-1)^n \frac{(m+n-1)^{\underline{n}}}{n!} = (-1)^n \binom{m+n-1}{n},
\end{aligned}$$

d'on deduïm la igualtat de l'enunciat. □

3.5 Successions recurrents lineals amb coeficients constants

Definició. Una successió $(a_n)_{n\geq 0}$ és *recurrent lineal amb coeficients constants d'ordre* k si per a tot $n \geq 0$ es satisfà una equació recurrent de tipus

$$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n = f(n)$$

on $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$, $c_k \neq 0$. Si a més $f(n) = 0$ direm que la successió és *homogènia* (RLH) i si $f(n) \neq 0$ direm que és *no homogènia* (RLNH)

Exemples.

(i) La successió de Fibonacci és una successió RLH d'ordre 2, ja que per a tot $n \geq 0$,

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0.$$

(ii) La successió $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_0 = 2$, $a_1 = -3$, $a_2 = 1$, i per a tot $n \geq 0$,

$$a_{n+3} - 2\,a_{n+2} + 5\,a_n = n^2 + 1,$$

és RLNH d'ordre 3.

3.5.1 Resolució de successions recurrents lineals homogènies

Proposició 32. *Si $(a_n)_{n\geq 0}$ és una successió que té per funció generadora*

$$A(x) = \frac{P(x)}{(1-\alpha_1\,x)^{m_1}\dots(1-\alpha_r\,x)^{m_r}},$$

on $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ són diferents, $m_1, \ldots, m_r \geq 1$, $m = m_1 + \cdots + m_r$, i $P(x)$ és un polinomi de grau més petit que m, aleshores el terme general de la successió és de la forma

$$a_n = p_1(n)\, {\alpha_1}^n + \cdots + p_r(n)\, {\alpha_r}^n \,,$$

on $p_i(n)$ és un polinomi en n de grau més petit que m_i.

DEMOSTRACIÓ. Si fem la descomposició en fraccions simples de $A(x)$ tenim que

$$A(x) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{b_{ij}}{(1-\alpha_i x)^j} \tag{3.1}$$

on $b_{ij} \in \mathbb{C}$ per a tot $i \in [r]$ i $j \in [m_i]$.

Pel Corol·lari 1, cadascun dels sumands que apareix a l'expressió anterior és de la forma:

$$\frac{b_{ij}}{(1-\alpha_i x)^j} = \sum_{n\geq 0} q_{ij}(n) \alpha_i^n\, x^n$$

on $q_{ij}(n)$ és un polinomi en n de grau $j-1 \leq m_i - 1$. Fixat $i \in [r]$,

$$\sum_{j=1}^{m_i} \frac{b_{ij}}{(1-\alpha_i x)^j} = \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{n\geq 0} q_{ij}(n)\alpha_i^n\, x^n = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{j=1}^{m_i} q_{ij}(n) \right) \alpha_i^n\, x^n,$$

si fem $p_i(n) = \sum_{j=1}^{m_i} q_{ij}(n)$, $p_i(n)$ és un polinomi en n de grau més petit que m_i tal que

$$A(x) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{n\geq 0} p_i(n)\alpha_i^n\, x^n = \sum_{n\geq 0} \sum_{i=1}^{r} p_i(n)\alpha_i^n\, x^n,$$

d'on deduïm que el terme general de $(a_n)_{n\geq 0}$ és de la forma

$$a_n = \sum_{i=1}^{r} p_i(n)\alpha_i^n,$$

on $p_i(n)$ és un polinomi en n de grau més petit que m_i. □

Proposició 33. *La funció generadora de la successió $(a_n)_{n\geq 0}$ que satisfà l'equació RLH*

$$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n = 0\,,\ \forall n \geq 0,\ c_k \neq 0$$

és de la forma

$$A(x) = \frac{P(x)}{1 + c_1\, x + c_2\, x^2 + \cdots + c_k\, x^k}\ ,$$

on $P(x)$ és un polinomi de grau més petit que k.

Demostració. Per ser $(a_{n+k}+c_1a_{n+k-1}+\cdots+c_ka_n)_{n\geq 0}=(0)_{n\geq 0}$, la funció generadora de $(a_{n+k}+c_1a_{n+k-1}+\cdots+c_ka_n)_{n\geq 0}$ és 0. Per altra banda, si $0\leq i\leq k-1$, la f.g.o. de la successió $(a_{n+k-i})_{n\geq 0}$ és

$$\frac{A(x)-(a_0+a_1x+\cdots+a_{k-i-1}x^{k-i-1})}{x^{k-i}},$$

i, si fem $c_0=1$, la funció generadora de la successió $(a_{n+k}+c_1a_{n+k-1}+\cdots+c_ka_n)_{n\geq 0}$ és

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{c_i\,A(x)-c_i(a_0+a_1x+\cdots+a_{k-i-1}x^{k-i-1})}{x^{k-i}}+c_kA(x),$$

i per tant

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{c_i\,A(x)-c_i(a_0+a_1x+\cdots+a_{k-i-1}x^{k-i-1})}{x^{k-i}}+c_kA(x)=0. \tag{3.2}$$

Si multipliquem l'expressió anterior per x^k obtenim

$$\sum_{i=0}^{k-1}\Big(c_i\,x^i\,A(x)-c_i\,x^i\,(a_0+a_1x+\cdots+a_{k-i-1}x^{k-i-1})\Big)+c_k\,x^k\,A(x)=0,$$

és a dir,

$$(1+c_1\,x+c_2\,x^2+\cdots+c_k\,x^k)A(x) \quad = \quad \sum_{i=0}^{k-1}c_i\,x^i\,(a_0+a_1x+\cdots+a_{k-i-1}x^{k-i-1}).$$

L'expressió

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{i=0}^{k-1}c_i\,x^i\,(a_0+a_1x+\cdots+a_{k-i-1}x^{k-i-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1}c_i\,(a_0\,x^i+a_1\,x^{i+1}+\cdots+a_{k-i-1}x^{k-1}) \end{aligned}$$

és un polinomi en x de grau més petit que k, de manera que

$$A(x)=\frac{P(x)}{1+c_1\,x+c_2\,x^2+\cdots+c_k\,x^k}.$$

on $P(x)$ és un polinomi de grau més petit que k. □

Lema 3. *Si $c_1,\ldots,c_k\in\mathbb{C}$, aleshores*

$$1+c_1x+c_2x^2+\cdots c_{k-1}x^{k-1}+c_kx^k=(1-\alpha_1\,x)^{m_1}\ldots(1-\alpha_r\,x)^{m_r}$$

si, i només si,

$$x^k+c_1x^{k-1}+c_2x^{k-2}+\cdots c_{k-1}x+c_k=(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\ldots(x-\alpha_i)^{m_i}.$$

Demostració. Si fem el canvi de variable $y = \frac{1}{x}$ a una de les dues igualtats, obtenim l'altra. □

Definició. L'*equació característica* d'una successió que satisfà l'equació RLH

$$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n = 0\,,\ \forall n \geq 0,$$

amb $c_k \neq 0$, és

$$x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots c_{k-1} x + c_k = 0.$$

Proposició 34. *Si $(a_n)_{n\geq 0}$ és una successió que satisfà l'equació RLH*

$$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n = 0\,,\ \forall n \geq 0,\ c_k \neq 0$$

aleshores el terme general de la successió és de la forma

$$a_n = p_1(n) {\alpha_1}^n + \cdots + p_r(n) {\alpha_r}^n\ ,$$

on $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ són les arrels de multiplicitat $m_1, \ldots, m_r$ respectivament de l'equació característica de la successió i, per a tot $i \in [r]$, $p_i(n)$ és un polinomi en n de grau més petit que m_i.

Demostració. És conseqüència de les Proposicions 32, 33 i del Lema 3. □

Mètode de resolució de successions RLH.

Tenint en compte els resultats anteriors podem descriure un mètode per a calcular el terme general d'una successió recurrent lineal amb coeficients constants homogènia d'ordre k, $k \geq 1$. Suposem que $(a_n)_{n\geq 0}$ és una successió RLH d'ordre k definida per:
$a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ (condicions inicials)
$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n = 0$, $\forall n \geq 0$, amb $c_k \neq 0$,
aleshores,

(1) *Calculem les arrels de l'equació característica de la successió:*
$q(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1} x + c_k = \prod_{i=1}^{r} (x - \alpha_i)^{m_i}$, amb $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ diferents.

(2) *Expressem el terme general de la successió:*
$a_n = \sum_{i=1}^{r} p_i(n)\, \alpha_i^n$, on $p_i(n)$ polinomi en n de grau $m_i - 1$ amb coeficients a determinar.

(3) *Determinem els coeficients dels polinomis $p_i(n)$:* resolem el sistema de k equacions lineals i k incògnites que s'obté a l'imposar les condicions inicials.

Exemple. Terme general de la successió RLH d'ordre 3 definida per:
- $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1$
- $a_{n+3} + 2a_{n+2} - 5a_{n+1} - 6a_n = 0$, $\forall n \geq 0$

(1) Equació característica: $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x-2)(x+1)(x+3) = 0$. Arrels: $2, -1, -3$ de multiplicitat 1.

(2) Terme general: $a_n = A_1 2^n + A_2(-1)^n + A_3(-3)^n$, on A_1, A_2, A_3 són constants a determinar.

(3) Imposem que a_n satisfà les condicions inicials:
$$\begin{cases} a_0 = A_1 + A_2 + A_3 = 1 \\ a_1 = 2A_1 - A_2 - 3A_3 = 1 \\ a_2 = 4A_1 + A_2 + 9A_3 = 1 \end{cases}$$
Solució del sistema: $A_1 = 8/15, A_2 = 2/3, A_3 = -1/5$.

Solució: $a_n = \frac{8}{15}2^n + \frac{2}{3}(-1)^n - \frac{1}{5}(-3)^n$

Exemple. (Successió de Fibonacci) Terme general de la successió RLH d'ordre 2 definida per:
- $a_0 = 0, a_1 = 1$
- $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$, $\forall n \geq 0$

(1) Equació característica: $x^2 - x - 1 = (x-r)(x-s) = 0$, on $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $s = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Arrels: r, s de multiplicitat 1.

(2) Terme general: $a_n = A_1\, r^n + A_2\, s^n$ on A_1, A_2 són constants a determinar.

(3) Imposem que a_n satisfà les condicions inicials:
$$\begin{cases} a_0 = A_1 + A_2 = 0 \\ a_1 = A_1\, r + A_2\, s = 1 \end{cases}$$
Solució del sistema: $A_1 = \frac{1}{r-s} = \frac{1}{\sqrt{5}}, A_2 = \frac{1}{s-r} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Solució: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

Exemple. Terme general de la successió RLH d'ordre 5 definida per:
- $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 0, a_4 = 1$
- $a_{n+5} - 7a_{n+4} + 10a_{n+3} + 18a_{n+2} - 27a_{n+1} - 27a_n = 0$, $\forall n \geq 0$

(1) Equació característica: $x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 18x^2 - 27x - 27 = (x-3)^3(x+1)^2 = 0$. Arrels: 3 de multiplicitat 3 i -1 de multiplicitat 2.

(2) Terme general:
$$a_n = p_1(n)3^n + p_2(n)(-1)^n = (A_1 + A_2 n + A_3 n^2)3^n + (A_4 + A_5 n)(-1)^n,$$
on A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 són constants a determinar.

(3) Imposem que a_n satisfà les condicions inicials:

$$\begin{cases} a_0 = A_1 + A_4 = 0 \\ a_1 = 3A_1 + 3A_2 + 3A_3 - A_4 - A_5 = 1 \\ a_2 = 9A_1 + 18A_2 + 36A_3 + A_4 + 2A_5 = -1 \\ a_3 = 27A_1 + 81A_2 + 243A_3 - A_4 - 3A_5 = 0 \\ a_4 = 81A_1 + 324A_2 + 1296A_3 + A_4 + 4A_5 = 1 \end{cases}$$

Solució del sistema:

$$A_1 = \tfrac{93}{256}, A_2 = -\tfrac{7}{24}, A_3 = \tfrac{5}{96}, A_4 = -\tfrac{93}{256}, A_5 = -\tfrac{17}{64}$$

Solució:

$$a_n = \left(\frac{93}{256} - \frac{7}{24}n + \frac{5}{96}n^2\right)3^n + \left(-\frac{93}{256} - \frac{17}{64}n\right)(-1)^n$$

3.5.2 Resolució de successions recurrents lineals no homogènies

Proposició 35. *La funció generadora de la successió $(n^{t-1}\,\beta^n)_{n\geq 0}$, on $\beta \in \mathbb{C}$ i t és un enter, $t \geq 1$, és de la forma*

$$\frac{Q(x)}{(1-\beta x)^t}\,,$$

on $Q(x)$ és un polinomi de grau més petit que t.

Demostració. Ho demostrarem per inducció sobre $t \geq 1$. Per a $t = 1$ és cert ja que la f.g.o. de la successió $(\beta^n)_{n\geq 0}$ és $\frac{1}{1-\beta\,x}$. Veurem ara que si es satisfà per a $t \geq 1$, també es satisfà per a $t+1$. Considerem la successió $(n^t\,\beta^n)_{n\geq 0}$, $t \geq 1$. Per hipòtesi d'inducció, la f.g.o. de la successió $(n^{t-1}\,\beta^n)_{n\geq 0}$ és de la forma

$$A_0(x) = \frac{Q_0(x)}{(1-\beta x)^t}\,,$$

on $Q_0(x)$ és un polinomi de grau més petit que t. La derivada de $A_0(x)$ és la f.g.o. de la successió $((n+1)(n+1)^{t-1}\beta^{n+1})_{n\geq 0} = ((n+1)^t\beta^{n+1})_{n\geq 0}$, i si la multipliquem per x obtenim la f.g.o. de la successió $(n^t\beta^n)_{n\geq 0}$. És a dir, la f.g.o. de la successió $(n^t\beta^n)_{n\geq 0}$ és

$$\begin{aligned} x\,A_0'(x) &= x\left(\frac{Q_0(x)}{(1-\beta x)^t}\right)' \\ &= x\frac{(1-\beta x)^t\,Q_0'(x) + \beta\,t\,(1-\beta x)^{t-1}\,Q_0(x)}{(1-\beta x)^{2t}} \\ &= \frac{x\,((1-\beta x)\,Q_0'(x) + \beta t\,Q_0(x))}{(1-\beta x)^{t+1}}. \end{aligned}$$

Si fem

$$Q(x) \;=\; x\,(1-\beta x)\,Q_0'(x) + \beta t\,x\,Q_0(x),$$

$Q(x)$ és un polinomi de grau com a molt $\max\{2+(t-1)-1, 1+(t-1)\} = t$ i obtenim que la f.g.o. de la successió $(n^t\beta^n)_{n\geq 0}$ és

$$A(x) = \frac{Q(x)}{(1-\beta x)^{t+1}}$$

on $Q(x)$ és un polinomi de grau més petit que $t+1$. $\square$

Exemple. La f.g.o. de la successió $(n^2\, 5^n)_{n\geq 0}$ és de la forma $\dfrac{a+bx+cx^2}{(1-5x)^3}$, $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Corol·lari 2. *La funció generadora de la successió $(q(n)\beta^n)_{n\geq 0}$, on $\beta \in \mathbb{C}$ i $q(n)$ és un polinomi en n de grau $t-1$, és de la forma*

$$\frac{Q(x)}{(1-\beta x)^t}\ ,$$

on $Q(x)$ és un polinomi de grau més petit que t.

Demostració. Expressem $q(n)\,\beta^n = b_0\,\beta^n + b_1\,n\,\beta^n + \cdots + b_{t-1}\,n^{t-1}\,\beta^n$ i, si apliquem la Proposició 35 a cadascun dels sumands, tenim que la f.g.o. de $(q(n)\beta^n)_{n\geq 0}$ és de la forma:

$$\frac{Q_0(x)}{1-\beta x} + \frac{Q_1(x)}{(1-\beta x)^2} + \cdots + \frac{Q_{t-1}(x)}{(1-\beta x)^t}$$

on $Q_i(x)$ és un polinomi en n de grau com a molt i, i per tant la suma és:

$$\frac{Q_0(x)(1-\beta x)^{t-1} + Q_1(x)(1-\beta x)^{t-2} + \cdots + Q_{t-1}(x)}{(1-\beta x)^t}.$$

Si fem

$$Q(x) = Q_0(x)(1-\beta x)^{t-1} + Q_1(x)(1-\beta x)^{t-2} + \cdots + Q_{t-1}(x),$$

$Q(x)$ és un polinomi de grau més petit que t i la f.g.o. de la successió $(q(n)\beta^n)_{n\geq 0}$ és

$$\frac{Q(x)}{(1-\beta x)^t}\ .$$

$\square$

Exemple. La f.g.o. de la successió $((n-1)^4\, 3^n)_{n\geq 0}$ és de la forma $\dfrac{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}{(1-3x)^5}$, on $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$.

Corol·lari 3. *La funció generadora de la successió* $(q_1(n)\beta_1^n + \cdots + q_s(n)\beta_s^n)_{n\geq 0}$*, on* $\beta_1, \ldots \beta_s \in \mathbb{C}$ *i* $q_i(n)$ *és un polinomi en* n *de grau* $t_i - 1$ *per a tot* $i \in [s]$*, és de la forma*

$$\frac{Q(x)}{\prod_{i=1}^{s}(1-\beta_i x)^{t_i}}\ ,$$

on $Q(x)$ *és un polinomi de grau més petit que* $t = \sum_{i=1}^{s} t_i$*.*

Demostració. Fixat $i \in [s]$, la f.g.o. de la successió $(q_i(n)\beta_i^n)_{n\geq 0}$ és, pel Corol·lari 2,

$$A_i(x) = \frac{Q_i(x)}{(1-\beta_i x)^{t_i}}$$

on $Q_i(x)$ és un polinomi de grau més petit que t_i. La f.g.o. de la successió

$$(q_1(n)\beta_1^n + \cdots + q_s(n)\beta_s^n)_{n\geq 0}$$

és

$$\sum_{i=1}^{s} A_i(x) = \sum_{i=1}^{s} \frac{Q_i(x)}{(1-\beta_i x)^{t_i}} = \frac{\sum_{i=1}^{s}\left(Q_i(x)\prod_{j\neq i}(1-\beta_j x)^{t_j}\right)}{\prod_{i=1}^{s}(1-\beta_i x)^{t_i}},$$

on $Q(x) = \sum_{i=1}^{s}\left(Q_i(x)\prod_{j\neq i}(1-\beta_j x)^{t_j}\right)$ és un polinomi de grau més petit o igual que

$$\max_{i\in[s]}\{t_i - 1 + \sum_{j\neq i} t_j\} = \sum_{j=1}^{s} t_j - 1 = t - 1.$$

□

Exemple. La f.g.o. de la successió $(n^2 5^n - (n+1)(-3)^n + n^2)_{n\geq 0}$ és de la forma

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + hx^7}{(1-5x)^3(1+3x)^2(1-x)^3},$$

on $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{C}$.

Proposició 36. *Considerem* $(a_n)_{n\geq 0}$ *successió RLNH d'ordre* k *que satisfà l'equació recurrent*

$$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n = f(n),\ \forall n \geq 0,\ c_k \neq 0,$$

aleshores la funció generadora $A(x)$ *de la successió* $(a_n)_{n\geq 0}$ *és de la forma*

$$A(x) = \frac{P(x) + x^k F(x)}{1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k}$$

on $P(x)$ *és un polinomi de grau més petit que* k *i* $F(x)$ *és la funció generadora de la successió* $(f(n))_{n\geq 0}$*.*

Demostració. Si considerem $c_0 = 1$, la f.g.o. de la successió $(a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + \cdots + c_k a_n)_{n\geq 0}$ és per una banda, tal com hem vist a la demostració de la Proposició 33,

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{c_i\, A(x) - c_i(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-i-1}x^{k-i-1})}{x^{k-i}} + c_k A(x).$$

i per altra banda és la f.g.o. de la successió $(f(n))_{n\geq 0}$, és a dir:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{c_i\, A(x) - c_i(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-i-1}x^{k-i-1})}{x^{k-i}} + c_k A(x) = F(x). \tag{3.3}$$

Si multipliquem l'expressió anterior per x^k obtenim

$$\sum_{i=0}^{k-1} \Big(c_i\, x^i\, A(x) - c_i\, x^i\, (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-i-1}x^{k-i-1})\Big) + c_k\, x^k\, A(x) = x^k\, F(x).$$

Si fem $P(x) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i\, x^i\, (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-i-1}x^{k-i-1})$ obtenim

$$(1 + c_1\, x + c_2\, x^2 + \cdots + c_k\, x^k)A(x) - P(x) = x^k\, F(x)$$

d'on deduïm

$$A(x) = \frac{P(x) + x^k\, F(x)}{1 + c_1\, x + c_2\, x^2 + \cdots + c_k\, x^k},$$

on $P(x)$ és un polinomi de grau més petit que k. □

Proposició 37. *Considerem $(a_n)_{n\geq 0}$ successió RLNH d'ordre k que satisfà l'equació recurrent d'ordre k:*

$$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n = f(n),\ \forall n \geq 0,\ c_k \neq 0,$$

amb

$$f(n) = q_1(n)\, \beta_1^n + \cdots + q_s(n)\, \beta_s^n,$$

on $\beta_1, \ldots, \beta_s \in \mathbb{C} - \{0\}$, diferents, $q_i(n)$ és un polinomi en n de grau $n_i - 1$ per a tot $i \in [s]$, i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ són les arrels de multiplicitat $m_1, \ldots, m_r$ respectivament de l'equació característica $x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1}x + c_k = 0$, aleshores el terme general de la successió $(a_n)_{n\geq 0}$ és de la forma

$$a_n = r_1(n)\lambda_1^n + \cdots + r_t(n)\lambda_t^n,$$

on $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ són nombres diferents de manera que

$$\prod_{i=1}^{t}(1 - \lambda_i x)^{d_i} = \prod_{i=1}^{r}(1 - \alpha_i x)^{m_i} \prod_{i=1}^{s}(1 - \beta_i x)^{n_i}$$

i $r_i(n)$ és un polinomi en n de grau $d_i - 1$.

Demostració. Pel Corol·lari 3, la f.g.o. de la successió $(f(n))_{n\geq 0}$ és de la forma

$$F(x) = \frac{Q(x)}{\prod_{i=1}^{s}(1-\beta_i x)^{n_i}}\,,$$

on $Q(x)$ és un polinomi de grau més petit que $\sum_{i=1}^{s} n_i$. Pel Lema 3,

$$1 + c_1\, x + c_2\, x^2 + \cdots + c_k\, x^k = \prod_{i=1}^{r}(1-\alpha_i x)^{m_i},$$

amb $\sum_{i=1}^{r} m_i = k$. Per la Proposició 36, la f.g.o. de la successió $(a_n)_{n\geq 0}$ és de la forma

$$A(x) = \frac{P(x) + x^k\, F(x)}{1 + c_1\, x + c_2\, x^2 + \cdots + c_k\, x^k}$$

on $P(x)$ és un polinomi de grau més petit que k.

Per tant,

$$A(x) = \frac{P(x)\prod_{i=1}^{s}(1-\beta_i x)^{n_i} + x^k\, Q(x)}{\prod_{i=1}^{r}(1-\alpha_i x)^{m_i}\prod_{i=1}^{s}(1-\beta_i x)^{n_i}}$$

on

$$R(x) = P(x)\prod_{i=1}^{s}(1-\beta_i x)^{n_i} + x^k\, Q(x)$$

és un polinomi de grau com a molt

$$k - 1 + \sum_{i=1}^{s} n_i = \sum_{i=1}^{r} m_i + \sum_{i=1}^{s} n_i - 1.$$

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ són nombres diferents tals que

$$\prod_{i=1}^{t}(1-\lambda_i x)^{d_i} = \prod_{i=1}^{r}(1-\alpha_i x)^{m_i}\prod_{i=1}^{s}(1-\beta_i x)^{n_i},$$

aleshores

$$d = \sum_{i=1}^{t} d_i = \sum_{i=1}^{r} m_i + \sum_{i=1}^{s} n_i$$

i $R(x)$ és un polinomi de grau més petit que d. Per la Proposició 32, el terme general de la successió $(a_n)_{n\geq 0}$ és de la forma

$$a_n = \sum r_i(n)\lambda_i^n,$$

on $r_i(n)$ són polinomis en n de grau més petit que d_i, per a tot $i \in [t]$. $\square$

Mètode de resolució de successions RLNH.

Tenint en compte els resultats anteriors podem descriure un mètode per a calcular el terme general d'una successió recurrent lineal amb coeficients constants no homogènia d'ordre $k \in \mathbb{N}$ si sabem expressar $f(n)$ com a suma de polinomis en n per constants elevades a n. Suposem que $(a_n)_{n\geq 0}$ és una successió RLNH d'ordre k definida per:
$a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ (condicions inicials)
$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n = f(n)$, $\forall n \geq 0$, amb $c_k \neq 0$,
aleshores

(1) *Determinem* $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ *i* $d_1, \dots, d_t$.

(a) *Determinem* $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ *i* $m_1, \dots, m_r$.
Calculem les arrels de l'equació característica $x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1}x + c_k = 0$:
$q(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1}x + c_k = (x-\alpha_1)^{m_1} \dots (x-\alpha_r)^{m_r}$,
$\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$, diferents.

(b) *Determinem* $\beta_1, \dots, \beta_s$ *i* $n_1, \dots, n_s$.
Expressem $f(n) = q_1(n)\,{\beta_1}^n + \cdots + q_s(n)\,{\beta_s}^n$, on $q_i(n)$ és un polinomi en n de grau $n_i - 1$ per a tot $i \in [s]$, d'on deduïm els valors corresponents.

Considerem totes les α's i totes les β's obtingudes anteriorment, és a dir, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_t\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \cup \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$, amb $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ diferents, i per a cada λ_h calculem d_h segons el cas que correspongui:
$d_h = m_i + n_j$, si $\lambda_h = \alpha_i = \beta_j$
$d_h = m_i$, si $\lambda_h = \alpha_i$ i $\lambda_h \notin \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$,
$d_h = n_j$, si $\lambda_h = \beta_j$ i $\lambda_h \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$

(2) *Expressem el terme general de la successió:*

$$a_n = \sum_{h=1}^{t} r_h(n)\,\lambda_h^n \text{ , on } r_h(n) \text{ polinomi en } n \text{ de grau } d_h - 1$$

(3) *Determinem els coeficients dels polinomis* $r_h(n)$ *:* resolem el sistema de d equacions lineals i d incògnites obtingut a partir dels d primers termes de la successió, on $d = d_1 + \cdots + d_t$ (coneixem els k primers termes (condicions inicials) i els $d - k$ següents els generem a partir de les condicions inicials i l'equació recurrent).

Observació.

Si la successió recurrent és de la forma $(a_n)_{n\geq n_0}$, $n_0 \neq 0$, els mètodes donats per a resoldre successions recurrents lineals amb coeficients constants també són vàlids. En aquest cas els primers termes de la successió són a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, etc. i l'equació característica es pot calcular substituint els termes a_h per x^h a l'equació recurrent i dividint per la màxima potència possible de x, de manera que el resultat sigui un polinomi amb terme independent diferent de zero.

Exemple. Terme general de la successió RLNH d'ordre 2 definida per:
- $a_0 = 1, a_1 = 0$
- $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 8a_n = n$, $\forall n \geq 0$

(1) *Determinem $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ i $d_1, \ldots, d_t$.*

(a) *Determinem $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ i $m_1, \ldots, m_r$.*
L'equació característica de la successió és $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2) = 0$, d'on deduïm $\alpha_1 = 4$, $m_1 = 1$; $\alpha_2 = -2$, $m_2 = 1$.

(b) *Determinem $\beta_1, \ldots, \beta_s$ i $n_1, \ldots, n_s$.*
Expressem $f(n) = n = n\,1^n$, d'on deduïm $\beta_1 = 1$, $n_1 = 2$.

Per tant, $\lambda_1 = 4$, $d_1 = 1$; $\lambda_2 = -2$, $d_2 = 1$; $\lambda_3 = 1$, $d_3 = 2$.

(2) Terme general: $a_n = A_1 4^n + A_2(-2)^n + (A_3 + A_4\, n)1^n$, on A_1, A_2, A_3, A_4 són constants a determinar.

(3) Tenim 4 constants a determinar. Calculem els termes

$$a_2 = 2\,a_1 + 8\,a_0 + 0 = 8,\ a_3 = 2\,a_2 + 8\,a_1 + 1 = 17$$

i plantegem un sistema:

$$\begin{cases} a_0 = A_1 + A_2 + A_3 = 1 \\ a_1 = 4A_1 - 2A_2 + A_3 + A_4 = 0 \\ a_2 = 16A_1 + 4A_2 + A_3 + 2A_4 = 8 \\ a_3 = 64A_1 - 8A_2 + A_3 + 3A_4 = 17 \end{cases}$$

Solució del sistema: $A_1 = \frac{19}{54}, A_2 = \frac{35}{54}, A_3 = 0, A_4 = -\frac{1}{9}$.

Solució:

$$a_n = \frac{19}{54}4^n + \frac{35}{54}(-2)^n - \frac{1}{9}\,n$$

Exemple. Terme general de la successió RLNH d'ordre 1 definida per:
- $a_1 = 1$
- $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2$, $\forall n \geq 1$

(1) *Determinem $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ i $d_1, \ldots, d_t$.*

(a) *Determinem $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ i $m_1, \ldots, m_r$.*
L'equació característica de la successió és $x - 1 = 0$, d'on deduïm $\alpha_1 = 1$, $m_1 = 1$.

(b) *Determinem $\beta_1, \ldots, \beta_s$ i $n_1, \ldots, n_s$.*
Expressem $f(n) = (n+1)^2 = (1+2n+n^2)\,1^n$, d'on deduïm $\beta_1 = 1$, $n_1 = 3$.

Per tant, $\lambda_1 = 1$, $d_1 = 1 + 3 = 4$.

(2) Terme general: $a_n = (A_1 + A_2\, n + A_3\, n^2 + A_4\, n^3)1^n$, on A_1, A_2, A_3, A_4 són constants a determinar.

(3) Tenim 4 constants a determinar. Calculem els termes
$a_2 = a_1 + 4 = 5$, $a_3 = a_2 + 9 = 14$, $a_4 = a_3 + 16 = 30$
i plantegem un sistema:

$$\begin{cases} a_1 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1 \\ a_2 = A_1 + 2A_2 + 4A_3 + 8A_4 = 5 \\ a_3 = A_1 + 3A_2 + 9A_3 + 27A_4 = 14 \\ a_4 = A_1 + 4A_2 + 16A_3 + 64A_4 = 30 \end{cases}$$

Solució del sistema: $A_1 = 0, A_2 = \frac{1}{6}, A_3 = \frac{1}{2}, A_4 = \frac{1}{3}$.

Solució:

$$a_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$

Exemple. Terme general de la successió RLNH d'ordre 2 definida per:
- $a_0 = 1, a_1 = 2$
- $a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 2^{n+2} - 1$, $\forall n \geq 0$

(1) *Determinem* $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ *i* $d_1, \ldots, d_t$.

(a) *Determinem* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *i* $m_1, \ldots, m_r$.
L'equació característica de la successió és $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3) = 0$, d'on deduïm $\alpha_1 = 2$, $m_1 = 1$; $\alpha_2 = -3$, $m_2 = 1$.

(b) *Determinem* $\beta_1, \ldots, \beta_s$ *i* $n_1, \ldots, n_s$.
Expressem $f(n) = 2^{n+2} - 1 = 4 \cdot 2^n + (-1)\,1^n$, d'on deduïm $\beta_1 = 2$, $n_1 = 1$; $\beta_2 = 1$, $n_2 = 1$.

Per tant, $\lambda_1 = 2$, $d_1 = 1 + 1 = 2$; $\lambda_2 = -3$, $d_2 = 1$; $\lambda_3 = 1$, $d_3 = 1$.

(2) Terme general: $a_n = (A_1 + A_2\, n)\, 2^n + A_3\, (-3)^n + A_4\, 1^n$,
on A_1, A_2, A_3, A_4 són constants a determinar.

(3) Tenim 4 constants a determinar. Calculem els termes
$a_2 = -a_1 + 6\, a_0 + 2^2 - 1 = 6 - 2 + 4 - 1 = 7$,
$a_3 = -a_2 + 6\, a_1 + 2^3 - 1 = -7 + 12 + 8 - 1 = 12$

i plantegem un sistema:

$$\begin{cases} a_0 = A_1 + A_3 + A_4 = 1 \\ a_1 = 2A_1 + 2A_2 - 3A_3 + A_4 = 2 \\ a_2 = 4A_1 + 8A_2 + 9A_3 + A_4 = 7 \\ a_3 = 8A_1 + 24A_2 - 27A_3 + A_4 = 12 \end{cases}$$

Solució del sistema: $A_1 = \frac{16}{25}, A_2 = \frac{2}{5}, A_3 = \frac{11}{100}, A_4 = \frac{1}{4}$.

Solució:

$$a_n = (\frac{16}{25} + \frac{2}{5}\, n)\, 2^n + \frac{11}{100}\, (-3)^n + \frac{1}{4}\, 1^n$$

Exemple. Terme general de la successió RLNH d'ordre 1 definida per:
- $a_1 = 1$
- $a_n = a_{n-1} + \frac{n^3-6n^2+17n-12}{6}$, $\forall n \geq 2$.

Aquesta és la successió que compta el nombre de regions en que queda dividit l'interior d'una circumferència al traçar totes les cordes possibles entre n punts de la circumferència situats en posició general.

(1) *Determinem $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ i $d_1, \dots, d_t$.*

(a) *Determinem $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ i $m_1, \dots, m_r$.*
L'equació característica de la successió és $x - 1 = 0$, d'on deduïm $\alpha_1 = 1$, $m_1 = 1$.

(b) *Determinem $\beta_1, \dots, \beta_s$ i $n_1, \dots, n_s$.*
Expressem $f(n) = \frac{n^3-6n^2+17n-12}{6} = \frac{n^3-6n^2+17n-12}{6} \cdot 1^n$, d'on deduïm $\beta_1 = 1$, $n_1 = 4$.

Per tant, $\lambda_1 = 1$, $d_1 = 1 + 4 = 5$.

(2) Terme general: $a_n = (A_1 + A_2\, n + A_3\, n^2 + A_4\, n^3 + A_5\, n^4)\, 1^n$,
on A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 són constants a determinar.

(3) Tenim 5 constants a determinar que determinem a partir dels 5 primers termes de la successió: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 16$. Plantegem un sistema:

$$\begin{cases} a_1 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 1 \\ a_2 = A_1 + 2A_2 + 4A_3 + 8A_4 + 16A_5 = 2 \\ a_3 = A_1 + 3A_2 + 9A_3 + 27A_4 + 81A_5 = 4 \\ a_4 = A_1 + 4A_2 + 16A_3 + 64A_4 + 256A_5 = 8 \\ a_4 = A_1 + 5A_2 + 25A_3 + 125A_4 + 625A_5 = 16 \end{cases}$$

Solució del sistema: $A_1 = 1, A_2 = -\frac{3}{4}, A_3 = \frac{23}{24}, A_4 = -\frac{1}{4}, A_5 = \frac{1}{24}$.

Solució:

$$a_n = \frac{1}{24}(24 - 18\, n + 23\, n^2 - 6\, n^3 + n^4)$$

3.6 Funció generadora del nombre de particions d'un enter

Proposició 38. *La funció generadora de la successió $(p(n))_{n\geq 0}$, on $p(n)$ és el nombre de particions d'un enter $n \geq 1$ i $p(0) = 1$, és*

$$P(x) = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1 - x^i}.$$

Demostració. Una partició de n queda determinada a l'indicar el nombre de vegades que apareix la part 1, la part 2, la part 3, etc. És as dir, una partició de n és de la forma

$$\begin{aligned} n &= \overbrace{(1+\cdots+1)}^{k_1}+\overbrace{(2+\cdots+2)}^{k_2}+\overbrace{(3+\cdots+3)}^{k_3}+\cdots \\ &= k_1\cdot 1+k_2\cdot 2+k_3\cdot 3+\cdots \end{aligned}$$

on $k_1, k_2, k_3, \ldots$ son enters no negatius, i la podem identificar amb la successió d'enters no negatius $(k_1, k_2, k_3, \ldots)$, on k_i indica el nombre de vegades que apareix la part i.

Considerem

$$P(x) = \prod_{i\geq 1}(1+x^i+x^{2i}+x^{3i}+x^{4i}+\cdots). \tag{3.4}$$

Obtindrem el terme x^n a l'expressió anterior cada vegada que prenguem el terme $x^{k_i\cdot i}$ del factor i-èsim de manera que

$$x^{k_1\cdot 1}\,x^{k_2\cdot 2}\,x^{k_3\cdot 3}\cdots = x^{k_1\cdot 1+k_2\cdot 2+k_3\cdot 3+\cdots} = x^n$$

o, el que és el mateix, cada vegada que prenguem enters $k_1, k_2, k_3, \ldots$ de manera que

$$k_1\cdot 1+k_2\cdot 2+k_3\cdot 3+\cdots = n,$$

és a dir, tantes vegades com el nombre de particions de n. El coeficient de x^n a $P(x)$ és, doncs, el nombre de particions de n, p_n. A més, per a tot $i\geq 1$,

$$\frac{1}{1-x^i} = 1+x^i+x^{2i}+x^{3i}+\cdots,$$

i si ho substituïm a l'expressió 3.4 obtenim que

$$P(x) = \prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x^i}.$$

$\square$

Observació. Considerar l'expressió $P(x) = \prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x^i}$ com una funció generadora és un abús de llenguatge, ja que només hem definit el producte de dues sèries formals de potències, és a dir, només sabem multiplicar un nombre finit de sèries formals de potències. Quan escrivim l'expressió anterior, entenem que per a calcular un valor concret només cal multiplicar un nombre finit de factors, ja que si volem calcular el nombre de particions de n amb determinades restriccions, les parts seran com a molt n.

Proposició 39. *La funció generadora del nombre de particions d'un enter n ...*

(1) *... en parts $\leq k$ és* $P_{\leq k}(x) = \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-x^i}$

(2) *... en parts diferents és* $P_d(x) = \prod_{i\geq 1}(1+x^i)$

(3) *... en parts senars és* $P_s(x) = \prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x^{2i-1}}$

(4) *... en parts parelles és* $P_p(x) = \prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x^{2i}}$

Demostració.

(1) A l'expressió 3.4 prenem només els factors $\frac{1}{1-x^i}$ tals que $i \leq k$, ja que les parts només poden ser com a molt k.

(2) De cada factor de l'expressió 3.4 prenem només els termes $1 + x^i$, ja que la part i o bé no apareix o bé apareix exactament una vegada.

(3) A l'expressió 3.4 prenem només els factors $\frac{1}{1-x^i}$ tals que i és un nombre senar i observem que

$$\prod_{i\geq 1,\ \text{senar}} \frac{1}{1-x^i} = \prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x^{2i-1}}.$$

(4) A l'expressió 3.4 prenem només els factors $\frac{1}{1-x^i}$ tals que i és un nombre parell i observem que

$$\prod_{i\geq 1,\ \text{parell}} \frac{1}{1-x^i} = \prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x^{2i}}.$$

□

Proposició 40. *El nombre de particions de n en parts diferents és igual al nombre de particions de n en parts senars.*

Demostració. La f.g.o. de la successió que compta el nombre de particions de n en parts diferents és

$$P_d(x) = \prod_{i\geq 1}(1+x^i)$$

i la f.g.o. de la successió que compta el nombre de particions de n en parts senars és

$$P_s(x) = \prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x^{2i-1}}.$$

Les dues funcions generadores són iguals, ja que:

$$\begin{aligned} P_d(x) &= \prod_{i\geq 1}(1+x^i) = \prod_{i\geq 1}(1+x^i)\frac{1-x^i}{1-x^i} \\ &= \prod_{i\geq 1}\frac{1-x^{2i}}{1-x^i} = \frac{\prod_{i\geq 1}(1-x^{2i})}{\prod_{i\geq 1}(1-x^i)} \\ &= \prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x^{2i-1}} = P_s(x), \end{aligned}$$

per tant, les dues successions considerades són iguals. □

Capítol 4

Probabilitat discreta

4.1 Espais de probabilitat discreta

4.1.1 Successos i probabilitat

En aquest capítol considerarem només un cas molt concret d'espais de probabilitat.

Definició. Un *espai de probabilitat discreta* és una terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on

1. Ω és un conjunt numerable.
2. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
3. $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ és una *mesura de probabilitat*:
   (a) $P(\Omega) = 1$;
   (b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si A, B són disjunts;
   (c) $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, si $A_1, A_2, \ldots$ són disjunts dos a dos.

Els elements de Ω s'anomenen *resultats* i els elements de $\mathcal{A}$, *successos*. Observem que per a tot $\omega \in \Omega$ els subconjunts $\{\omega\}$ són elements de $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. En aquest cas, identificarem $\{\omega\}$ amb ω. Aquests successos els anomenarem *elementals*. De la definició deduïm que l'aplicació P queda determinada al conèixer $P(\omega)$ per a tot $\omega \in \Omega$, ja que

$$P(A) = P(\cup_{\omega \in A}\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

A més, Ω no pot ser buit, ja que si $\Omega = \emptyset$ arribem a una contradicció:
$$1 = P(\Omega) = P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) = 1 + 1 = 2.$$

Comentaris sobre la definició. En general, per a definir un espai de probabilitat no és necessari que $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, si no que $\mathcal{A}$ ha de ser una σ-*àlgebra* de parts de Ω, és a dir, un subconjunt de $\mathcal{P}(\Omega)$ que conté el conjunt $\emptyset$ i és tancat per complementació i unions numerables. A més, el conjunt Ω no ha de ser necessàriament numerable. Si considerem Ω numerable i $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, l'espai és discret finit o discret infinit, segons si Ω és finit o infinit respectivament.

Proposició 41. *Per a* $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ *successos qualssevol,*

(1) $P(\emptyset) = 0$

(2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(3) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(5) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

(6) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

(7) Si $A \subseteq B$*, llavors* $P(A) \leq P(B)$

Demostració. Tenint en compte la definició d'espai de probabilitat tenim:

(1) $1 \stackrel{3(a)}{=} P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) \stackrel{3(b)}{=} P(\Omega) + P(\emptyset) \stackrel{3(a)}{=} 1 + P(\emptyset)$, d'on deduïm $P(\emptyset) = 0$.

(2) $1 \stackrel{3(a)}{=} P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \stackrel{3(b)}{=} P(A) + P(\overline{A})$, d'on deduïm $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(3) $P(A) = P((A \setminus B) \cup (A \cap B)) \stackrel{3(b)}{=} P(A \setminus B) + P(A \cap B)$, per tant $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

(4) Tenint en compte l'apartat anterior,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P((A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)) \\ &\stackrel{3(b)}{=} P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

(5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$

(6) Es demostra per inducció sobre n, $n \geq 2$. Per a $n = 2$ és la propietat de l'apartat anterior. Suposem ara que $n \geq 2$ i que és certa per a $n - 1$, aleshores

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= P((\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \cup A_n) \stackrel{(5)}{\leq} P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) \\ &\stackrel{\text{H.I.}}{\leq} \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \end{aligned}$$

(7) Si $A \subseteq B$, llavors $P(B) = P((B \setminus A) \cup A) \stackrel{3(b)}{=} P(B \setminus A) + P(A) \geq P(A)$.

□

Exemples.

(i) Llancem una moneda i observem si surt cara o creu:
$\Omega = \{\bigcirc, \times\}$, $P(\bigcirc) = P(\times) = \frac{1}{2}$

(ii) Llancem una moneda fins que surti cara:
$\Omega = \{\bigcirc, \times\bigcirc, \times\times\bigcirc, \times\times\times\bigcirc, \times\times\times\times\bigcirc, \dots\}$, $P(\underbrace{\times\times\cdots\times\bigcirc}_{(n)}) = \frac{1}{2^n}$

(iii) Llancem un dau i observem la puntuació de la cara superior:
$\Omega = [6]$, $P(i) = \frac{1}{6}$, per a tot $i \in [6]$.

(iv) Llancem dos daus i observem les puntuacions de les cares superiors.

Podem considerar $\Omega = [6] \times [6]$, $P(i, j) = \frac{1}{36}$, per a tot $i, j \in [6]$ (ens podem imaginar que els daus són de diferent color, verd i vermell, i el primer valor del parell ordenat correspon a la puntuació del dau verd i el segon a la del dau vermell, però nosaltres som daltònics i no els distingim).

També podem considerar que Ω està format per tots els 2-multiconjunts de [6]. En aquest cas, la probabilitat d'un element de Ω és $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ si el multiconjunt conté dos elements diferents de [6] i $\frac{1}{36}$ si el multiconjunt conté dues còpies d'un element de [6].

(v) Triar un número entre 1 i 100 a l'atzar: $\Omega = [100]$, $P(i) = \frac{1}{100}$, per a tot $i \in [100]$.

Combinatòria i probabilitat Si $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ és un espai de probabilitat tal que Ω és un conjunt finit i els elements de Ω són equiprobables, llavors $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ per a tot $\omega \in \Omega$. En aquest cas, la probabilitat d'un succés $A \in \mathcal{A}$ es pot calcular dividint el cardinal de A (casos favorables) entre el cardinal de Ω (casos possibles), $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. Per tant, calcular la probabilitat d'un succés es redueix a comptar cardinals de conjunts, i d'aquí la relació d'aquests espais de probabilitat amb la combinatòria.

4.1.2 Probabilitat condicionada.

Definició. Si $A, B \in \mathcal{A}$ són dos successos tals que $P(B) \neq 0$, la *probabilitat de A condicionada a B* és $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Fixat un succés $B \in \mathcal{A}$ tal que $P(B) \neq 0$, es pot comprovar fàcilment que l'aplicació $P' : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ tal que $P'(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ és una mesura de probabilitat en $(\Omega, \mathcal{A})$ i per tant $(\Omega, \mathcal{A}, P')$ és un espai de probabilitat. El que fem al considerar P' és restringir-nos als resultats del conjunt B.

Exemple. Suposem que en Pep i en Quim llancen un dau de 6 cares cadascú. Calculeu la probabilitat de que en Pep hagi tret un 5 si sabem que ha tret una puntuació més alta que en Quim. Calculeu la probabilitat de que en Pep hagi tret una puntuació més alta que en Quim, si sabem que ha tret un 5.

Solució. Podem considerar $\Omega = [6] \times [6]$, on els components d'un parell ordenat de Ω representen la puntuació obtinguda per en Pep i en Quim respectivament. Tots els parells ordenats són equiprobables, és a dir $P(i,j) = \frac{1}{36}$. En aquest cas, podem calcular la probabilitat d'un succés dividint el nombre de casos favorables per casos possibles. Si A és el succés "en Pep ha tret un 5" i B, "en Pep ha obtingut una puntuació més alta que en Quim", llavors

$$\begin{aligned}
A &= \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}\\
B &= \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),\\
&\qquad (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}\\
A \cap B &= \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}
\end{aligned}$$

d'on deduïm els cardinals $|\Omega| = 36$, $|A| = 6$, $|B| = 15$, $|A \cap B| = 4$ i per tant:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{18}\ ,\ P(B) = \frac{15}{36}\ ,\ P(A \cap B) = \frac{4}{36}$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4}{15}\ ,\ P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3}.$$

Aquest últim valor el podem deduir també directament, ja que si en Pep ha tret un 5, obtindrà una puntuació més alta que en Quim si aquest treu un valor més petit que 5, és a dir, un valor entre 1 i 4, i per tant $P(B|A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Principi de les probabilitats composades. Si $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ i $P(B) \neq 0$, llavors

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B).$$

Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ i $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \neq 0$, llavors

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

Demostració. La primera fórmula és conseqüència de la definició de probabilitat condicionada. La segona fórmula es pot demostrar per inducció sobre n. Sabem que la fórmula és certa per a $n = 1, 2$. Si $n \geq 3$, aleshores per definició de probabilitat condicionada i aplicant la hipòtesi d'inducció obtenim:

$$\begin{aligned}
P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) &= P((\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n)\\
&= P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)\ P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)\\
&\overset{\text{HI}}{=} P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_{n-1}|\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i)\ P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i),
\end{aligned}$$

com volíem demostrar. $\square$

Exemple. Si traiem 3 cartes d'una baralla de 48 cartes, quina és la probabilitat de treure 3 espases?

SOLUCIÓ. Podem pensar-ho de diferents maneres.

Primer imaginem que traiem les catres d'una en una: una primera carta, una segona i una tercera, sense reposició. Denotem A_i el succés que la carta i-èsima és una espasa i fem $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Volem calcular $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ i pel principi de probabilitats composades és

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{12}{48} \cdot \frac{11}{47} \cdot \frac{10}{46} = \frac{12^{\underline{3}}}{48^{\underline{3}}} = 0.0127 \end{aligned}$$

També ho podem calcular directament, sense utilitzar el principi de probabilitats composades. Si identifiquem les 3 cartes que traiem successivament amb una terna, per a calcular la probabilitat de treure 3 espases dividim casos favorables (nombre de ternes de 3 espases) per casos possibles (nombre de ternes de 3 cartes). Hi ha $12^{\underline{3}}$ ternes de 3 espases i $48^{\underline{3}}$ ternes possibles. És a dir, la probabilitat de treure 3 espases és

$$P(A) = \frac{12^{\underline{3}}}{48^{\underline{3}}}.$$

També podem pensar que traiem un grup de 3 cartes. Per simetria, tots els grups de 3 cartes tenen la mateixa probabilitat de ser extrets. Per tant, la probabilitat de treure 3 espases es pot calcular com a casos favorables dividit per casos possibles:

$$P(A) = \frac{|\text{mans de 3 espases}|}{|\text{mans de 3 cartes}|} = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{48}{3}} = \frac{12^{\underline{3}}}{48^{\underline{3}}}.$$

Llei de probabilitat total. Si $\{H_i : i \in I\}$ és una partició de Ω, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ i $P(H_i) \neq 0$ per a tot $i \in I$, aleshores

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap H_i) = \sum_{i \in I} P(H_i)P(A|H_i).$$

DEMOSTRACIÓ. Sabem que $\Omega = \bigcup_{i \in I} H_i$ i que els conjunts H_i, $i \in I$, són disjunts dos a dos, és a dir, els conjunts $A \cap H_i$, $i \in I$, també són disjunts dos a dos. Per tant:

$$\begin{aligned} P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigcup_{i \in I} H_i)) = P(\bigcup_{i \in I}(A \cap H_i)) \\ = \sum_{i \in I} P(A \cap H_i) = \sum_{i \in I} P(H_i)\ P(A|H_i). \end{aligned}$$

□

Exemples.

(1) Llancem un dau i després tantes monedes com indica la puntuació de la cara superior del dau. Quina és la probabilitat d'obtenir exactament 3 cares?

SOLUCIÓ. Considerem

$\Omega = \{(1, \bigcirc), (1, \times), (2, \bigcirc, \bigcirc), (2, \bigcirc, \times), (2, \times, \bigcirc), (2, \times, \times), (3, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc),$

$(3, \bigcirc, \bigcirc, \times), (3, \bigcirc, \times, \bigcirc), \ldots\ldots, (6, \times, \times, \times, \times, \times, \times)\}$

Si A és el succés "obtenir 3 cares" i H_i "la puntuació del dau és i", $i \in [6]$, llavors $\{H_i : i \in [6]\}$ és una partició de Ω. Per tant,

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{6} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{6} P(H_i)P(A|H_i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} P(A|H_i) \\ &= \frac{1}{6}\left(0 + 0 + \frac{1}{8} + \binom{4}{3}\frac{1}{16} + \binom{5}{3}\frac{1}{32} + \binom{6}{3}\frac{1}{64}\right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(2) *Monty Hall Problem.* En un concurs hi ha tres portes, darrere de les quals s'hi amaguen tres premis consistents en un cotxe i dos rucs. El concursant tria una porta. A continuació el presentador obre una de les dues portes que no havia triat el concursant on hi ha un ruc i li dóna al concursant l'opció de canviar de porta. Que ha de fer per a tenir més opcions de guanyar el cotxe, mantenir la porta que havia triat o canviar?

SOLUCIÓ. Si canvia té més opcions de guanyar el cotxe. Numerem les tres portes 1, 2, 3 i suposem que el cotxe és darrere la porta 1. La probabilitat d'escollir cadascuna de les tres portes és $\frac{1}{3}$. La probabilitat de guanyar el cotxe si no canvia de porta és, doncs, $\frac{1}{3}$.

Calculem ara la probabilitat de guanyar el cotxe si canvia de porta. Considerem els successos A_i, "el concursant tria d'entrada la porta i", per a $i \in [3]$, i el succés C, "el concursant tria finalment la porta 1". Volem calcular

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap A_1) + P(C \cap A_2) + P(C \cap A_3) \\ &= P(A_1)P(C|A_1) + P(A_2)P(C|A_2) + P(A_3)P(C|A_3) \\ &= \frac{1}{3}(P(C|A_1) + P(C|A_2) + P(C|A_3)). \end{aligned}$$

Però si el concursant canvia de porta en cas d'haver escollit la porta 1, segur que no guanya el cotxe, és a dir, $P(C|A_1) = 0$, i si canvia de porta després d'haver escollit la porta 2 o 3, segur que guanya el cotxe ja que en aquest cas darrere la porta que no ha obert el presentador hi ha el cotxe, és a dir, $P(C|A_2) = P(C|A_3) = 1$. Per tant,

$$P(C) = \frac{1}{3}(P(C|A_1) + P(C|A_2) + P(C|A_3)) = \frac{1}{3}(0 + 1 + 1) = \frac{2}{3}.$$

És a dir, les possibilitats de guanyar el cotxe passen de ser de $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$ si canvia de porta.

(3) Tres presoners saben que un d'ells el penjaran el dia següent. Un guàrdia de la presó ofereix dir a un dels presoners el nom d'un dels altres dos que se salva. Però el presoner li contesta que no, que en aquest cas la probabilitat de que el pengessin passaria de ser $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$. És cert?

Solució. No. Si suposem que els 3 tenen probabilitat $\frac{1}{3}$ de ser penjats, la informació que dóna el guàrdia no fa canviar aquesta probabilitat. El càlcul és similar a l'exemple anterior, quan calculem la probabilitat de guanyar el cotxe si el concursant no canvia de porta.

Fórmula de Bayes. Si $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) \neq 0$ i $P(B) \neq 0$, aleshores

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P(B|A)}{P(B)}.$$

Demostració. És conseqüència immediata de la definició de probabilitat condicionada. □

Cas particular: calcular la probabilitat de que el succés A provingui de la causa H_k. Si $\{H_i : i \in I\}$ és una partició de Ω tal que $P(H_i) \neq 0$ per a tot $i \in I$, i $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $P(A) \neq 0$, aleshores per a qualsevol $k \in I$:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)\,P(A|H_k)}{\sum_{i\in I} P(H_i)P(A|H_i)}.$$

Exemple. Una botiga d'ordinadors utilitza xips de 3 fabricants diferents en una proporció del 20%, 30% i 50%. La probabilitat de que un xip del primer fabricant (resp. segon, tercer) sigui defectuós és del 0.04 (resp. 0.03, 0.02). Hem detectat un xip defectuós. Quina és la probabilitat de que provingui del primer fabricant?
Solució. Si H_i és el succés "el xip prové i-èsim fabricant" i A el succés "el xip és defectuós", volem calcular $P(H_1|A)$. Coneixem les probabilitats següents de l'enunciat: $P(H_1) = 0.2$, $P(H_2) = 0.3$, $P(H_3) = 0.5$, $P(A|H_1) = 0.04$, $P(A|H_2) = 0.03$, $P(A|H_3) = 0.02$. Per la fórmula de Bayes,

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)} =$$

$$= \frac{0.2 \times 0.04}{0.2 \times 0.04 + 0.3 \times 0.03 + 0.5 \times 0.02} = 0.29629.$$

4.1.3 Successos independents.

Definició. Dos successos A, B són *independents* si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Observem que si $P(B) \neq 0$ i A, B són successos independents, llavors

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

És a dir, saber que s'ha donat B no canvia la probabilitat de que es doni A.

Exemples.

(1) Llancem dos cops un dau de sis cares. Considerem els successos A, "la primera puntuació és un 6" i B, " la segona puntuació és múltiple de 3". Llavors $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{18} = P(A)P(B)$. Els successos A i B són, doncs, independents.

(2) Llancem dos daus de sis cares. Considerem els successos A, "la puntuació d'un dels daus és un 6" i B, " la suma de les puntuacions dels dos daus és 10". Llavors $P(A) = \frac{11}{36}$, $P(B) = \frac{3}{36}$, ja que $10 = 4{+}6 = 6{+}4 = 5{+}5$, $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$, ja que hi ha dues maneres de que els daus sumin 10 amb almenys un 6 ($10 = 4+6 = 6+4$). Els successos A i B no són independents ja que $P(A \cap B) = \frac{2}{36} \neq \frac{11}{36}\frac{3}{36} = P(A) \cdot P(B)$.

Definició. Els successos $\{A_i : i \in I\}$ són *independents* si per a tot conjunt finit $J \subseteq I$,

$$P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Observació. Per definició, si els successos $\{A_i : i \in I\}$ són independents, llavors són dos a dos independents, però el recíproc no es cert. Hi ha famílies de successos independents dos a dos, però que no són independents, com es mostra a l'exemple següent.

Exemple. Considerem els successos següents:

A : "l'Anna i la Berta celebren l'aniversari el mateix dia"

B : "la Berta i el Carles celebren l'aniversari el mateix dia"

C : "el Carles i l'Anna celebren l'aniversari el mateix dia"

Calculem les probabilitats de totes les interseccions:

$P(A) = \frac{365}{365^2} = \frac{1}{365}$, ja que hi ha 365^2 parells ordenats amb les possibles dates de naixement de l'Anna i la Berta respectivament, dels quals els casos favorables són els 365 parells ordenats amb els dos valors repetits. Anàlogament $P(B) = P(C) = \frac{1}{365}$.

De manera semblant obtenim $P(A \cap B) = \frac{365}{365^3} = \frac{1}{365^2}$, ja que $A \cap B$ és el succés "l'Anna, la Berta i el Carles celebren l'aniversari el mateix dia", i per calcular la probabilitat podem dividir el nombre de casos favorables (ternes amb els aniversaris de l'Anna, la Berta i el Carles respectivament, que en aquest cas tindran els tres components iguals, és a dir, n'hi ha 365) per nombre de casos possibles (ternes amb els aniversaris de l'Anna, la Berta i el Carles respectivament, sense restriccions addicionals, és a dir, n'hi ha 365^3). Anàlogament $P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{1}{365^2}$.

Calculem finalment $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{365^2}$, ja que el succés $A \cap B \cap C$ és el mateix que $A \cap B$: "l'Anna, la Berta i el Carles celebren l'aniversari el mateix dia".

Observem que $P(A \cap B) = \frac{1}{365^2} = P(A)P(B)$. Anàlogament $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ i $P(A \cap C) = P(A)P(C)$.

Però $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{365^2} \neq \frac{1}{365^3} = P(A)P(B)P(C)$. Per tant, els successos A, B i C són dos a dos independents, però no són independents.

4.2 Variables aleatòries

4.2.1 Variables aleatòries discretes

Definició. Una *variable aleatòria discreta* sobre un espai $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ de probabilitat discreta és qualsevol aplicació $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Escriurem $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) = P[X = x]$ i $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P[X \leq x]$.

Comentari sobre la definició. La definició de variable aleatòria discreta no és exactament aquesta, però com que nosaltres considerem espais de probabilitat tals que Ω és numerable i $\mathcal{A} = P(\Omega)$, qualsevol aplicació $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ compleix $X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ per a tot $x \in \mathbb{R}$ (X és una de variable aleatòria) i per ser Ω numerable, el conjunt de nombres reals x tals que $P[X = x] \neq 0$ és numerable (la variable aleatòria X és discreta).

A partir d'ara, ens referirem a les variables aleatòries discretes simplement com a variables aleatòries, ja que només considerem espais de probabilitat discreta.

Definició. Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ és una variable aleatòria, la *funció de probabilitat puntual* associada a X és l'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ definida per $f(x) = P[X = x]$ i la *funció de distribució* és l'aplicació $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ definida per $F(x) = P[X \leq x]$.

Proposició 42. *Si f i F són respectivament la funció de probabilitat puntual i la funció de distribució d'una variable aleatòria X, i x, y són nombres reals qualssevol, llavors*

(1) $\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$

(2) $F(x) = \sum_{y \leq x} f(y)$

(3) $P[x < X \leq y] = F(y) - F(x)$, *per a* $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$

(4) F *és creixent: si* $x < y$, *llavors* $F(x) \leq F(y)$

(5) F *és contínua per la dreta*

(6) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Exercici. Demostreu les propietats 1 a 4 anteriors. Les demostracions de les propietats 5 i 6 requereixen més coneixements dels que donem en aquest curs.

Exemples.

(1) Considerem l'espai de probabilitat obtingut al llançar una moneda i observar si surt cara o creu: $\Omega = \{\bigcirc, \times\}$, $P(\bigcirc) = P(\times) = \frac{1}{2}$. L'aplicació $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $X(\bigcirc) = 0$, $X(\times) = 1$ és una variable aleatòria discreta.

Les funcions de probabilitat puntual i de distribució de X són:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in \{0,1\}, \\ 0 & \text{altrament}, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 \le x. \end{cases}$$

(2) Considerem l'espai de probabilitat obtingut al llançar dos daus i observar les puntuacions de les cares superiors: $\Omega = [6] \times [6]$ i $P(i,j) = \frac{1}{36}$ per a tot $(i,j) \in \Omega$. L'aplicació $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $X(i,j) = i + j$ és una variable aleatòria discreta.

La funció de probabilitat puntual i la funció de distribució són

$$f(x) = \begin{cases} 1/36 & \text{si } x \in \{2,12\}, \\ 2/36 & \text{si } x \in \{3,11\}, \\ 3/36 & \text{si } x \in \{4,10\}, \\ 4/36 & \text{si } x \in \{5,9\}, \\ 5/36 & \text{si } x \in \{6,8\}, \\ 6/36 & \text{si } x \in \{7\}, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ 1/36 & \text{si } 2 \le x < 3, \\ 3/36 & \text{si } 3 \le x < 4, \\ 6/36 & \text{si } 4 \le x < 5, \\ 10/36 & \text{si } 5 \le x < 6, \\ 15/36 & \text{si } 6 \le x < 7, \\ 21/36 & \text{si } 7 \le x < 8, \\ 26/36 & \text{si } 8 \le x < 9, \\ 30/36 & \text{si } 9 \le x < 10, \\ 33/36 & \text{si } 10 \le x < 11, \\ 35/36 & \text{si } 11 \le x < 12. \\ 36/36 = 1 & \text{si } 12 \le x \end{cases}$$

(3) Considerem l'espai de probabilitat obtingut al llançar una moneda fins que surti cara: $\Omega = \{\bigcirc, \times\bigcirc, \times\times\bigcirc, \times\times\times\bigcirc, \times\times\times\times\bigcirc, \dots\}$, $P(\underbrace{\times\times\cdots\times\bigcirc}_{(n)}) = \frac{1}{2^n}$.

L'aplicació $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $X(\underbrace{\times\times\cdots\times\bigcirc}_{(n)}) = n$ és una variable aleatòria discreta.

Les funcions de probabilitat puntual i de distribució de X són

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} & \text{si } x \ge 1,\ x \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{altrament}, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}} & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$$

Funcions de variables aleatòries. Observem que si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ és una variable aleatòria sobre l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ i $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és una aplicació, llavors $g \circ X$ és una variable aleatòria sobre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

En concret X^2 és una variable aleatòria i si $a, b \in \mathbb{R}$, llavors aX, b, $aX + b$ són variables aleatòries.

Si $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ són variables aleatòries sobre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, llavors $X + Y$, XY, $\max\{X, Y\}$, $\min\{X, Y\}$ són variables aleatòries sobre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

Exemple. Considerem el conjunt $\Omega = [6] \times [6]$ de resultats obtinguts al llançar dos daus, i les variables aleatòries $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que $X(i, j) = i$, $Y(i, j) = j$, per a tot $(i, j) \in \Omega$. Llavors $X + Y$, $X \cdot Y$, $\max\{X, Y\}$ són les variables aleatòries que assignen respectivament al resultat obtingut la suma, el producte i el màxim de les puntuacions dels dos daus.

4.2.2 Algunes distribucions de variables aleatòries discretes

A continuació es descriuen algunes de les distribucions de variables aleatòries discretes més freqüents.

(1) *Degenerada.* Existeix $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $P[X = x_0] = 1$.

(2) *Uniforme.* $\mathrm{Im}X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i $P[X = x_i] = \frac{1}{n}$ per a tot $i \in [n]$.

Per exemple, si assignem al resultat obtingut al llançar un dau de 6 cares la puntuació de la cara superior obtenim una variable aleatòria amb distribució uniforme.

(3) *Bernoulli de paràmetre p.* $P[X = 1] = p$ i $P[X = 0] = 1 - p = q$, on $0 < p < 1$.

Per exemple, suposem que tenim una moneda tal que la probabilitat de que surti cara sigui $\frac{1}{3}$ i que surti creu, $\frac{2}{3}$. Llancem la moneda una vegada i assignem un 1 al resultat que surti cara i un 0 a que surti creu, obtenim una variable aleatòria amb distribució de Bernoulli de paràmetre $\frac{1}{3}$.

(4) *Binomial $B(n, p)$.* Per a tot enter k, $0 \leq k \leq n$, $P[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, on $0 < p < 1$ i $q = 1 - p$.

Equival a repetir n vegades una experiència que segueix una distribució Bernoulli de paràmetre p. Per exemple, suposem que tenim una moneda tal que la probabilitat de que surti cara sigui $\frac{1}{3}$ i que surti creu, $\frac{2}{3}$. Llancem la moneda 10 vegades i al resultat obtingut li assignem el nombre k de cares. Obtenim una variable aleatòria amb distribució Binomial de paràmetres 10 i $\frac{1}{3}$.

(5) *Geomètrica de paràmetre p.* Per a tot enter $k \geq 1$, $P[X = k] = q^{k-1} p$, on $0 < p < 1$ i $q = 1 - p$.

Per exemple, suposem que tenim una moneda tal que la probabilitat de que surti cara sigui $\frac{1}{3}$ i que surti creu, $\frac{2}{3}$. Llancem la moneda fins obtenir una cara i assignem al resultat obtingut el nombre k de vegades que ha calgut llançar la moneda fins obtenir una cara. Obtenim una variable aleatòria amb distribució geomètrica de paràmetre $\frac{1}{3}$.

4.2.3 Esperança i variància d'una variable aleatòria.

Definició. L'*esperança* de la variable aleatòria $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida sobre l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ és $EX = \sum_{x \in \mathrm{Im} X} x\, P[X = x]$.

Sovint s'utilitza μ per a denotar l'esperança d'una variable aleatòria.
Observem que

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{x \in \mathrm{Im} X} x\, P[X = x] = \sum_{x \in \mathrm{Im} X} \left(x \sum_{\omega : X(\omega) = x} P(\omega) \right) \\ &= \sum_{x \in \mathrm{Im} X} \sum_{\omega : X(\omega) = x} x\, P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega). \end{aligned}$$

El resultat anterior és molt útil per a calcular l'esperança d'algunes variables aleatòries.

Exemples.

(1) L'esperança de la variable aleatòria que assigna la puntuació obtinguda al llançar un dau de sis cares és

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 7/2.$$

(2) L'esperança de la variable aleatòria que assigna la suma de les puntuacions obtingudes al llançar dos daus és

$$EX = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7.$$

(3) L'esperança de la variable aleatòria que assigna el nombre de cares obtingudes al llançar 10 vegades una moneda és

$$EX = \sum_{k=0}^{10} k \binom{10}{k} \frac{1}{2^{10}} = 5.$$

Proposició 43. *Si X és una variable aleatòria i $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicació, llavors*

$$E(g \circ X) = \sum_{x \in ImX} g(x) P[X = x].$$

Demostració.

$$\begin{aligned} E(g \circ X) &= \sum_{\omega \in \Omega} (g \circ X)(\omega) P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} g(X(\omega)) P(\omega) = \sum_{x \in \mathrm{Im} X} \sum_{\omega : X(\omega) = x} g(x) P(\omega) \\ &= \sum_{x \in \mathrm{Im} X} \left(g(x) \sum_{\omega : X(\omega) = x} P(\omega) \right) = \sum_{x \in \mathrm{Im} X} g(x) P[X = x]. \end{aligned}$$

Com a casos particulars d'aquesta proposició s'obté que si X és una variable aleatòria i $a \in \mathbb{R}$, llavors $E(aX) = a\,EX$ i $E(X+a) = EX + a$, ja que

$$\begin{aligned} E(aX) &= \sum_{x \in \mathrm{Im}X} axP[X=x] = a \sum_{x \in \mathrm{Im}X} xP[X=x] = a\,EX \\ E(X+a) &= \sum_{x \in \mathrm{Im}X} (x+a)P[X=x] = \sum_{x \in \mathrm{Im}X} xP[X=x] + \sum_{x \in \mathrm{Im}X} aP[X=x] \\ &= EX + a \sum_{x \in \mathrm{Im}X} P[X=x] = EX + a. \end{aligned}$$

Proposició 44. *Si $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ són variables aleatòries sobre l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, llavors $E(X+Y) = EX + EY$.*

DEMOSTRACIÓ.

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega)P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega))P(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)P(\omega) = EX + EY. \end{aligned}$$

□

Exemple. Podem calcular l'esperança de la variable aleatòria que assigna la suma de les puntuacions obtingudes al llançar un daus dues vegades de la manera següent. Considerem les variables aleatòries X i Y que assignen la puntuació del primer dau i la puntuació del segon dau respectivament. L'esperança d'aquestes variables aleatòries és, tal com hem vist abans, $7/2$. La variable aleatòria $Z = X + Y$ assigna a cada resultat la suma de les dues puntuacions obtingudes i l'esperança és

$$EZ = EX + EY = 7/2 + 7/2 = 7.$$

Variables aleatòries independents. En general, NO es compleix

$$E(X \cdot Y) = EX \cdot EY.$$

Es pot comprovar que la igualtat anterior és certa si es compleix

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ P[X = x \text{ i } Y = y] = P[X=x] \cdot P[Y=y]. \tag{4.1}$$

Definició. Dues variables aleatòries X, Y són *independents* si satisfan la condició 4.1.

A continuació tenim un exemple de variables aleatòries per a les quals no es compleix la igualtat $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$.

Exemple. Considerem el conjunt de resultats obtinguts al llançar una moneda dues vegades, és a dir, $\Omega = \{\bigcirc\bigcirc, \bigcirc\times, \times\bigcirc, \times\times\}$ i els quatre resultats són equiprobables amb probabilitat $\frac{1}{4}$. Definim les variables aleatòries X i Y que assignen a cada resultat el nombre de cares i el nombre de creus respectivament. Llavors

$$EX = 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Anàlogament, $EY = 1$. Però

$$E(XY) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq 1 = EX \cdot EY.$$

Proposició 45 (Desigualtat de Markov)**.** *Si X és una variable aleatòria i a un nombre real positiu, llavors*

$$P[|X| \geq a] \leq \frac{E|X|}{a}.$$

Demostració.

$$\begin{aligned} E|X| &= \sum_{x \in \mathrm{Im} X} |x|\, P[X = x] = \sum_{x:|x| \geq a} |x|\, P[X = x] + \sum_{x:|x|<a} |x|\, P[X = x] \\ &\geq \sum_{x:|x| \geq a} |x|\, P[X = x] \geq \sum_{x:|x| \geq a} a\, P[X = x] = a \sum_{x:|x| \geq a} P[X = x] = aP[|X| \geq a]. \end{aligned}$$

□

Observació. La desigualtat de Markov es pot escriure també

$$P[|X| \geq a\, E|X|] \leq \frac{1}{a}.$$

Definició. Si X és una variable aleatòria, definim la *variància* de X,

$$\mathrm{var}(X) = E(X - EX)^2.$$

L'arrel quadrada de la variància s'anomena *desviació típica* i la denotarem σ.

Proposició 46. *Si X és una variable aleatòria, llavors* $\mathrm{var}(X) = E(X^2) - (EX)^2$.

Demostració. Si $EX = \mu$,

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) = E(X - \mu)^2 &= E(X^2 - 2\,\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu EX + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2. \end{aligned}$$

Variància de la suma de variables aleatòries. En general, NO es compleix $\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$. Es pot comprovar que aquesta igualtat és certa si les variables aleatòries són independents.

Proposició 47 (Desigualtat de Txebyxev)**.** *Si X és una variable aleatòria i ϵ un nombre real positiu, llavors*

$$P[|X - EX| \geq \epsilon] \leq \frac{\mathrm{var(X)}}{\epsilon^2}.$$

Demostració. Considerem la variable aleatòria $Y = (X - EX)^2$, de manera que $Y = (X - EX)^2 \geq \epsilon^2$ és equivalent a $|X - EX| \geq \epsilon$ i $EY = \mathrm{var}(X)$. Llavors, com a conseqüència de la desigualtat de Markov per a la variable aleatòria Y, tal que $Y = |Y|$, i $a = \epsilon^2$ obtenim

$$P[|X - EX| \geq \epsilon] = P[Y \geq \epsilon^2] \leq \frac{EY}{\epsilon^2} = \frac{\mathrm{var}(X)}{\epsilon^2}.$$

□

Observació. La desigualtat de Txebyxev es pot escriure també

$$P[|X - EX| \geq \epsilon\sigma] \leq \frac{1}{\epsilon^2}.$$

La desigualtat Txebyxev no dóna en general una fita ajustada, com veurem més endavant.

Esperança i variància d'algunes distribucions de variables aleatòries discretes.

Calculem l'esperança i la variància de les variables aleatòries discretes descrites a la secció anterior. Resumim primer els resultats a la taula següent i després fem els càlculs corresponents.

Variable aleatòria	EX	$\mathrm{var}(X)$
Degenerada	x_0	0
Uniforme	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i (= \mu)$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$
Bernoulli	p	pq
Binomial	np	npq
Geomètrica	$1/p$	q/p^2

(1) *Degenerada.*

$$\begin{aligned} EX &= x_0\, P[X = x_0] = x_0 \\ E(X^2) &= x_0^2\, P[X = x_0] = x_0^2 \\ \mathrm{var}(X) &= E(X^2) - (EX)^2 = x_0^2 - x_0^2 = 0. \end{aligned}$$

(2) *Uniforme.*

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{i=1}^{n} x_i\, P[X = x_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \\ \mathrm{var}(X) &= E(X - EX)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P[X = x_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \end{aligned}$$

(3) *Bernoulli de paràmetre p.*

$$\begin{aligned} EX &= 0 \cdot P[X = 0] + 1 \cdot P[X = 1] = p \\ E(X^2) &= 0^2 \cdot P[X = 0] + 1^2 \cdot P[X = 1] = p \\ \mathrm{var}(X) &= E(X^2) - (EX)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq. \end{aligned}$$

(4) *Binomial $B(n, p)$.*

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot P[X = k] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = \\ &= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} q^{n-(j+1)} \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{n-1-j} = np(p+q)^{n-1} = np \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot P[X = k] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = \\ &= n \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = n \sum_{k=1}^{n} (k - 1 + 1) \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = \\ &= n \left(\sum_{k=1}^{n} (k-1) \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \right) \\ &= n \left(\sum_{k=2}^{n} (k-1) \frac{n-1}{k-1} \binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} q^{n-(j+1)} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= n\left((n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}q^{n-k} + p\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^j q^{n-1-j}\right)\\
&= n\left((n-1)p^2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^j q^{n-j-2} + p(p+q)^{n-1}\right)\\
&= n\big((n-1)p^2(p+q)^{n-2}+p\big) = n(n-1)p^2+np
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2)-(EX)^2 = n(n-1)p^2+np-(np)^2 = -np^2+np = np(-p+1) = npq.$$

(5) *Geomètrica.*

Utilitzarem que si $0<x<1$, llavors:

$$\sum_{k\geq 1} x^k = \frac{x}{1-x} \quad , \quad \sum_{k\geq 1} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \quad , \quad \sum_{k\geq 1} k^2x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Les dues últimes igualtats es dedueixen tenint en compte que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geq 1} kx^{k-1} &= \left(\sum_{k\geq 1} x^k\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}\\
\sum_{k\geq 1} k(k-1)x^{k-2} &= \left(\sum_{k\geq 1} x^k\right)'' = \left(\frac{x}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}.
\end{aligned}
$$

d'on deduïm:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geq 1} k\,x^k &= x\sum_{k\geq 1} kx^{k-1} = \frac{x}{(1-x)^2}\\
\sum_{k\geq 1} k^2x^k &= \sum_{k\geq 1}(k(k-1)+k)x^k = x^2\sum_{k\geq 1} k(k-1)x^{k-2} + x\sum_{k\geq 1} kx^{k-1}\\
&= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}
\end{aligned}
$$

Per tant,

$$
\begin{aligned}
EX &= \sum_{k\geq 1} k\,P[X=k] = \sum_{k\geq 1} k\,q^{k-1}\,p = \frac{p}{q}\sum_{k\geq 1} kq^k = \frac{p}{q}\frac{q}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}\\
E(X^2) &= \sum_{k\geq 1} k^2\,P[X=k] = \sum_{k\geq 1} k^2\,q^{k-1}\,p = \frac{p}{q}\sum_{k\geq 1} k^2\,q^k = \frac{p}{q}\frac{q(1+q)}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{p^2}\\
\mathrm{var}(X) &= E(X^2)-(EX)^2 = \frac{1+q}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2}
\end{aligned}
$$

Exemple. *La fita donada per la desigualtat de Txebyxev no és gaire acurada.* Llancem una moneda 100 vegades. Utilitzeu la desigualtat de Txebyxev per donar una fita de la probabilitat de que el nombre de cares obtingudes es desviï del valor esperat m o més unitats en els casos $m = 10$ i $m = 5$. Compareu el valor obtingut amb la probabilitat real de que això passi.

SOLUCIÓ. La variable aleatòria que compta el nombre de cares obtingudes segueix una distribució binomial $B(100, \frac{1}{2})$, amb esperança $100 \cdot \frac{1}{2} = 50$ i variància $100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25$.

Si $m = 10$, amb la desigualtat de Txebyxev obtenim:

$$P[|X - 50| \geq 10] \leq \frac{25}{10^2} = 0.25$$

En canvi si calculem el valor exacte obtenim:

$$\begin{aligned} P[|X - 50| \geq 10] &= 1 - P[|X - 50| \leq 9] \\ &= 1 - P[-9 \leq X - 50 \leq 9] \\ &= 1 - P[41 \leq X \leq 59] \\ &= 1 - \sum_{k=41}^{59} \binom{100}{k} \frac{1}{2^{100}} \approx 0.056 \end{aligned}$$

Si $m = 5$, amb la desigualtat de Txebyxev obtenim:

$$P[|X - 50| \geq 5] \leq \frac{25}{5^2} = 1$$

És evident que la fita obtinguda amb la desigualtat de Txebyxev no ens aporta cap informació. El valor exacte és:

$$\begin{aligned} P[|X - 50| \geq 5] &= 1 - P[|X - 50| \leq 4] \\ &= 1 - P[-4 \leq X - 50 \leq 4] \\ &= 1 - P[46 \leq X \leq 54] \\ &= 1 - \sum_{k=46}^{54} \binom{100}{k} \frac{1}{2^{100}} \approx 0.368 \end{aligned}$$

4.2.4 Variable aleatòria indicadora.

Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, l'aplicació $I_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la manera següent:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A; \\ 0, & \text{altrament,} \end{cases}$$

és una variable aleatòria que anomenem *variable aleatòria indicadora* de A. De fet, qualsevol variable aleatòria X que prengui només els valors 0 i 1 es pot considerar com una variable indicadora: només cal considerar $A = \{\omega : X(\omega) = 1\} \subseteq \Omega$.

L'esperança de la variable aleatòria indicadora I_A és

$$EI_A = \sum_{\omega \in \Omega} I_A(\omega) P(\omega) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = P(A).$$

El càlcul de l'esperança d'una variable aleatòria X es pot simplificar molt si X es pot expressar com a suma de variables aleatòries indicadores i tenint en compte que l'esperança de la suma de variables aleatòries és la suma de les esperances d'aquestes variables aleatòries, com veurem en els exemples següents.

Exemples.

(1) Prenem 5 cartes d'una baralla de 48 cartes. Quin és el nombre esperat d'espases que traurem?

Solució.

(i) *Amb variables indicadores.* Imaginem que traiem primer una carta, després una segona sense reposició, etc. fins tenir 5 cartes. Definim les variables aleatòries X_i, $i \in [5]$:

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si la carta i-èsima és espasa;} \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Observem que X_i és la variable indicadora I_{A_i} del succés

$$A_i = \{\text{la carta i-èsima és espasa}\}.$$

La variable aleatòria $X = \sum_{i=1}^{5} X_i$ assigna a cada resultat el nombre d'espases. L'esperança és

$$EX = \sum_{i=1}^{5} E(X_i) = \sum_{i=1}^{5} P(A_i).$$

Però $P(A_i) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$, ja que les 48 cartes tenen la mateixa probabilitat de ser extretes en el lloc i-èsim i hi ha 12 espases. Per tant, $EX = 5\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

(ii) *Directament.* Identifiquem els resultats possibles amb subconjunts de 5 cartes. Considerem la variable aleatòria X que assigna a cada resultat el nombre d'espases. La variable X pot prendre els valors 0, 1, 2, 3, 4 i 5. L'esperança és:

$$EX = \sum_{k=0}^{5} k \cdot P[X = k].$$

Calculem

$$P[X = k] = \frac{\binom{12}{k} \cdot \binom{36}{5-k}}{\binom{48}{5}}.$$

Per tant,

$$EX = \sum_{k=0}^{5} k \cdot \frac{\binom{12}{k} \cdot \binom{36}{5-k}}{\binom{48}{5}} = \cdots = \frac{5}{4}.$$

(2) Repartim n boles en m capses a l'atzar. Quin és el nombre esperat de capses que quedaran buides?

Solució.

(i) *Amb variables indicadores.* Numerem les m capses de 1 a m. Per a cada $i \in [m]$ considerem la variable aleatòria X_i definida per:

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si la capsa } i \text{ queda buida;} \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

En realitat, X_i és la variable indicadora del succés $A_i = \{\text{ la capsa } i \text{ queda buida }\}$. La variable aleatòria $X = \sum_{i=1}^m X_i$ compta el nombre de capses que han quedat buides. El nombre esperat de capses buides és, doncs,

$$EX = E(\sum_{i=1}^m X_i) = \sum_{i=1}^m E(X_i) = \sum_{i=1}^m P(A_i).$$

Però $P(A_i) = (1 - \frac{1}{m})^n$, ja que equival a calcular la probabilitat de que cap bola vagi a parar a la capsa i i la probabilitat de que una bola determinada no vagi a parar a la capsa i és $1 - \frac{1}{m}$. Per tant, $EX = m(1 - \frac{1}{m})^n$.

(ii) *Directament.* Numerem les boles de 1 a n i les capses de 1 a m. Una distribució de les n boles en les m capses es pot identificar amb una aplicació $f : [n] \to [m]$. Suposem que totes les distribucions de boles en capses són equiprobables. Considerem la variable aleatòria X que assigna a cada distribució el nombre de capses que han quedat buides. La variable aleatòria X pot prendre els valors $0, 1, 2, \ldots, m$. Calculem la probabilitat de que X prengui el valor k. Ho podem fer dividint casos favorables entre casos possibles. El nombre de casos possibles és igual al nombre d'aplicacions $f : [n] \to [m]$, és a dir, m^n. El nombre de casos favorables equival a comptar el nombre d'aplicacions tals que el conjunt $f([n])$ té cardinal $m - k$: podem triar el conjunt A dels k elements de $[m]$ que no tenen cap antiimatge de $\binom{m}{k}$ maneres i multipliquem després pel nombre d'aplicacions exhaustives $f : [n] \to [m] \setminus A$, que és $\left\{ {n \atop m-k} \right\} (m-k)!$. Per tant,

$$P[X = k] = \frac{\binom{m}{k} \left\{ {n \atop m-k} \right\} (m-k)!}{m^n},$$

i l'esperança és

$$EX = \sum_{k=0}^m k\, P[X = k] = \sum_{k=0}^m \frac{k \binom{m}{k} \left\{ {n \atop m-k} \right\} (m-k)!}{m^n}.$$

No és fàcil comprovar que aquesta expressió coincideix amb la fórmula obtinguda amb variables aleatòries indicadores. Es pot verificar per a valors concrets de m, n que els resultats coincideixen.

Casos concrets. Si $m = n = 365$, l'esperança és 134. Ho podem interpretar de la manera següent: si es reuneixen 365 persones a l'atzar, el nombre esperat de dies de l'any en que ningú celebrarà l'aniversari és 134. Si $m = 365$ i $n = 50$, l'esperança és 318.21, i per a $m = 365$ i $n = 150$, és 241: el nombre esperat de dies en que algú celebrarà l'aniversari si es reuneixen 50 persones a l'atzar és $365 - 318.21 = 46.78$ i si se'n reuneixen 150 és $365 - 241 = 123$.

(3) Suposem que Noè va recollir n parelles d'animals, però durant els 40 dies van morir m animals. Si tots els grups de m animals tenen la mateixa probabilitat de morir, quin és el nombre esperat de parelles completes que van quedar?

Solució. Numerem les parelles de 1 a n. Definim les variables aleatòries

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si la parella } i \text{ queda completa;} \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Per tant, $X_i = I_{A_i}$, on A_i és el succés "la parella i queda completa". La probabilitat de A_i és

$$\frac{\binom{2n-2}{m}}{\binom{2n}{m}} = \frac{(2n-m)(2n-m-1)}{2n(2n-1)} = \left(1 - \frac{m}{2n}\right)\left(1 - \frac{m}{2n-1}\right),$$

ja que hi ha $\binom{2n}{m}$ grups possibles de m animals que moren, dels quals n'hi ha $\binom{2n-2}{m}$ tals que els dos animals de la parella i sobreviuen. Observem que també podem calcular la probabilitat de A_i utilitzant el principi de probabilitats composades: la probabilitat de que una parella sobrevisqui és el producte de la probabilitat de que no es mori un dels dos animals, multiplicat per la probabilitat de que l'altre animal de la parella no es mori, condicionat a que la seva parella ha sobreviscut, és a dir,

$$P(A_i) = \frac{2n-m}{2n}\,\frac{2n-1-m}{2n-1}.$$

La variable aleatòria $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ compta el nombre de parelles que van quedar completes. L'esperança és

$$EX = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = n\left(1 - \frac{m}{2n}\right)\left(1 - \frac{m}{2n-1}\right).$$

Per exemple, si hi havia 1000 parelles (en total 2000 animals) i es van morir 500 animals, el nombre esperat de parelles completes que van sobreviure és 562.

(4) Extraiem cartes sense reemplaçament d'una baralla de 48 cartes. Quin és el nombre esperat de cartes que traurem abans d'obtenir un as?

Solució. Considerem un possible ordre d'extracció de les 48 cartes. Els 4 asos divideixen aquesta ordenació en 5 grups de manera que cadascuna de les 44 cartes restants és a un d'aquests 5 grups. Per simetria, la probabilitat de que una carta es trobi a un d'aquests 5 grups és la mateixa, és a dir $\frac{1}{5}$. Numerem les 44 cartes que no són asos de 1 a 44. Per a cada $i \in [44]$ definim la variable aleatòria X_i tal que $X_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si la carta } i \text{ és al primer grup;} \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$ És a dir, $X_i = I_{A_i}$, on A_i és el succés "la carta i és al primer grup". La variable aleatòria $X = \sum_{i=1}^{44} X_i$ compta el nombre de cartes que hi ha al primer grup. Calculem

$$EX = E(\sum_{i=1}^{44} X_i) = \sum_{i=1}^{44} E(X_i) = \sum_{i=1}^{44} P(A_i) = \sum_{i=1}^{44} 1/5 = 44/5 \approx 8.8\,.$$

(5) Una multinacional regala a cada caixa de cereals un ninot. Hi ha n models diferents. Suposem que la probabilitat d'obtenir cadascun dels n models és la mateixa. Quin és el nombre esperat de caixes que cal comprar fins tenir-ne un de cada?

Solució. Definim les variables aleatòries X_i, $i = 1, \dots, n$ de la manera següent: $X_i = k$ si comprem k capses de cereals mentre tenim exactament $i - 1$ models diferents. Veurem primer quina distribució segueixen aquestes variables aleatòries.

Si no tenim cap model, hem de comprar una capsa i ja en tindrem un. Per tant, X_1 només pren el valor 1 amb probabilitat 1.

Mentre tenim un model comprarem capses fins obtenir-ne un de diferent. Podria passar que sempre ens sortís el mateix model, per tant, X_2 pren valors enters $k \geq 1$. La variable X_2 pren el valor k si ens surt $k-1$ vegades el model que ja teníem i al final un nou model. La probabilitat de que això passi és $(\frac{1}{n})^{k-1}\frac{n-1}{n}$.

Mentre tenim dos models diferents, comprarem capses fins tenir-ne 3 de diferents. Podria passar que sempre ens sortissin els dos models anteriors, per tant, X_3 pren valors enters $k \geq 1$. La variable X_3 pren el valor k si ens surt $k-1$ vegades un dels dos models que ja teníem i al final un nou model. La probabilitat de que això passi és $(\frac{2}{n})^{k-1}\frac{n-2}{n}$.

Observem, doncs, que en general per a $i \in \{2, \dots, n\}$, la variable X_i segueix una distribució geomètrica de paràmetre $p_i = \frac{n-(i-1)}{n}$.

La variable aleatòria $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ compta el nombre de capses que cal comprar fins tenir els n models diferents.

L'esperança és

$$\begin{aligned} EX = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) &= \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\frac{n-(i-1)}{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} \\ &= n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-i+1} = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n\,H_n \end{aligned}$$

on H_n és l'n-èsim nombre harmònic.

Si hi ha 5 models diferents, l'esperança és 11.4. Si hi ha 10 models diferents, l'esperança és 29.28.

4.3 El mètode probabilístic

Si $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ és un espai de probabilitat, aleshores

(1) Si $A \subseteq \Omega$ tal que $P(A) > 0$, llavors $A \neq \emptyset$.

(2) Si X és una variable aleatòria definida sobre Ω amb esperança $EX = \mu$, llavors

$$P[X \geq \mu] > 0 \qquad \text{i} \qquad P[X \leq \mu] > 0.$$

La primera propietat és immediata. Per a demostrar la segona, si no fos cert que $P[X \geq \mu] > 0$ tindríem $P[X \geq \mu] = 0$. Però en aquest cas

$$\mu = \sum_{x \in \mathrm{Im} X} x\, P[X = x] = \sum_{x<\mu} x\, P[X = x] < \sum_{x<\mu} \mu\, P[X = x] = \mu \sum_{x<\mu} P[X = x] = \mu,$$

que és una contradicció. Anàlogament es demostra $P[X \leq \mu] > 0$.

Aquests resultats ens permeten fer demostracions no constructives de l'existència o no de determinats objectes. A continuació veurem un exemple.

Exemple. Fita dels nombres de Ramsey $r(t,t)$.
Per a $s, t \geq 2$, enters, podem definir el nombre de Ramsey $r(s,t)$ com el mínim nombre n de persones que calen per assegurar que almenys s es coneguin dos a dos o bé almenys t no es coneguin dos a dos. És immediat comprovar que $r(s,2) = s$, $r(2,t) = t$ i ja vam veure al capítol de combinatòria enumerativa que $r(3,3) = 6$. A continuació donarem una fita inferior per als nombres de Ramsey $r(t,t)$, si $t \geq 4$.

Proposició 48. *Per a tot enter $t \geq 4$, $r(t,t) \geq 2^{t/2}$.*

Demostració. Suposem que es reuneixen n persones. Les identificarem amb n punts del pla etiquetats amb els elements de $[n]$ i unirem els punts i, j amb un segment blau si les persones corresponents es coneixen i amb un segment vermell si no es coneixen. Construïm un espai de probabilitat discreta on el conjunt Ω està format per totes les maneres possibles de pintar de color blau o vermell els $\binom{n}{2}$ segments que uneixen els n punts dos a dos (és a dir, totes les possibles relacions de coneixença entre les n persones).

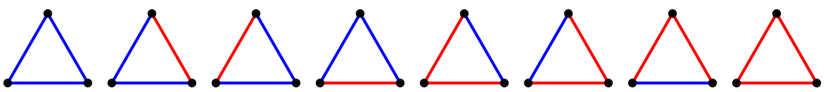


Figura 4.1: El conjunt Ω per a $n = 3$.

Suposem que la probabilitat de que el segment $\overline{ij}$ sigui blau és $\frac{1}{2}$ i la probabilitat de que sigui vermell és $\frac{1}{2}$, amb independència del color de la resta de segments. D'aquesta manera podem calcular la probabilitat de cada element $\omega \in \Omega$,

$$P(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}}.$$

Demostrarem que, si $n < 2^{t/2}$, hi ha almenys un element de Ω tal que no conté cap subconjunt de t punts connectats 2 a 2 amb segments del mateix color (és a dir, hi ha la posibilitat de que es reuneixin n persones de manera que a tot conjunt de t persones n'hi hagi almenys dues que es coneguin i almenys dues que no es coneguin).

Per a cada subconjunt $S \subseteq [n]$ de cardinal t considerem el succés $A_S =$"tots els punts de S estan connectats dos a dos per segments del mateix color". La probabilitat de cadascun d'aquests successos és $P(A_S) = 2 \cdot (\frac{1}{2})^{\binom{t}{2}}$. A més, en total hi ha $\binom{n}{t}$ subconjunts de $[n]$ de cardinal t. Per tant,

$$P(\bigcup_{|S|=t} A_S) \leq \sum_{|S|=t} P(A_S) = \binom{n}{t} 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{t}{2}}.$$

Si tenim en compte la desigualtat $\binom{n}{t} \leq \frac{n^t}{2^{t-1}}$ a l'expressió anterior, obtenim:

$$P(\bigcup_{|S|=t} A_S) \leq \binom{n}{t} 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{t}{2}} \leq \frac{n^t}{2^{t-1}} 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{t}{2}}.$$

Si suposem $n < 2^{t/2}$, llavors $n^t < 2^{t^2/2}$, i obtenim:

$$P(\bigcup_{|S|=t} A_S) \leq \frac{n^t}{2^{t-1}} 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{t}{2}} < \frac{2^{t^2/2}}{2^{t-1}} 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{t(t-1)/2} = 2^{2-t/2}$$

Però $2^{2-t/2} \leq 1$ per ser $t \geq 4$. Per tant,

$$P(\bigcup_{|S|=t} A_S) < 1$$

d'on deduïm que la probabilitat del succés complementari és

$$P\left(\overline{\bigcup_{|S|=t} A_S}\right) > 0,$$

és a dir,

$$\overline{\bigcup_{|S|=t} A_S} = \bigcap_{|S|=t} \overline{A_S} \neq \emptyset,$$

o equivalentment, hi ha almenys un element $\omega \in \bigcap_{|S|=t} \overline{A_S}$. Aquest element satisfà que per a tot subconjunt S de cardinal t, hi ha almenys un parell d'elements connectats amb un segment blau i almenys un parell connectats amb un segment vermell, tal com volíem demostrar.

$\square$

Capítol 5

Teoria de Grafs

5.1 Conceptes bàsics de grafs

5.1.1 Vèrtexs i arestes. Ordre i mida.

Definició. Un *graf* G, $G = (V, A)$, està format per dos conjunts disjunts V i A tals que V és finit no buit i tot element de A és un subconjunt de cardinal 2 de V.

Notacions i terminologia.

- Els elements de V s'anomenen *vèrtexs* i els elements de A, *arestes*. Si $\{u, v\} = a \in A$, escriurem $a = uv$.
- Observem que dos grafs $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$ són iguals si, i només si, $V_1 = V_2$ i $A_1 = A_2$.
- Si $a = uv$ és una aresta de G, direm que els vèrtexs u, v són *adjacents* i que el vèrtex u (o bé v) i l'aresta a són *incidents*. Si u, v són adjacents, ho escriurem també $u \sim v$.
- L'*ordre* d'un graf $G = (V, A)$ és el nombre de vèrtexs del graf, $|V|$. La *mida* d'un graf $G = (V, A)$ és el nombre d'arestes del graf, $|A|$.

Propietats.

(1) Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, aleshores $m \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

(2) Hi ha $\binom{n(n-1)/2}{m}$ grafs diferents de mida m amb conjunt de vèrtexs $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

(3) Hi ha $2^{n(n-1)/2}$ grafs diferents amb conjunt de vèrtexs $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

DEMOSTRACIÓ.

(1) El graf G té com a molt tantes arestes com subconjunts de V de cardinal 2, és a dir, $\binom{n}{2}$.

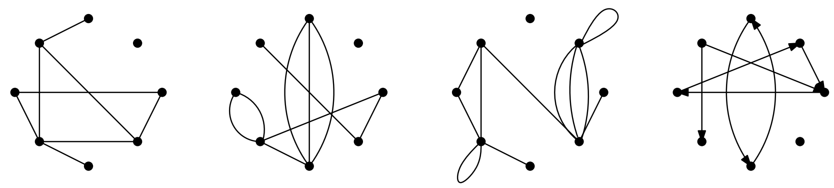
(2) Un graf amb conjunt de vèrtexs $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ i mida m queda determinat al donar un subconjunt de m arestes del conjunt de $\binom{n}{2}$ arestes possibles. Per tant, hi ha tants grafs diferents de mida m com m-subconjunts d'un conjunt de cardinal $\binom{n}{2}$, és a dir, n'hi ha $\binom{\binom{n}{2}}{m} = \binom{n(n-1)/2}{m}$.

(3) Un graf amb conjunt de vèrtexs $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ queda determinat al donar un subconjunt del conjunt de $\binom{n}{2}$ arestes possibles. Per tant, hi ha tants grafs diferents com subconjunts d'un $\binom{n}{2}$-conjunt, és a dir, n'hi ha $2^{n(n-1)/2}$.

$\square$

Variants de la definició de graf.

- *Multigraf:* admet arestes múltiples (més d'una aresta connectant dos vèrtexs).
- *Pseudograf:* admet llaços (aresta que uneix un vèrtex amb ell mateix) i arestes múltiples
- *Digraf, graf dirigit:* es tenen *arcs* enlloc d'arestes. Un *arc* és un parell ordenat de vèrtexs (és a dir, una aresta orientada).



$graf$ $multigraf$ $pseudograf$ $digraf$

Figura 5.1: Variants de la definició de graf.

5.1.2 Graus

Definicions. Si $G = (V, A)$ és un graf i $u \in V$,

- el *grau* de u és el nombre d'arestes incidents a u, $g(u) = |\{a \in A : u, a \text{ són incidents}\}|$;
- el *grau mínim* de G, $\delta(G)$, és el mínim de tots els graus dels vèrtexs de G, és a dir, $\delta(G) = \min\{\, g(u) \mid u \in V\}$;
- el *grau màxim* de G, $\Delta(G)$, és el màxim de tots els graus dels vèrtexs de G, és a dir, $\Delta(G) = \max\{\, g(u) \mid u \in V\}$;
- la *seqüència de graus* de G és la successió dels n graus dels vèrtexs de G, que normalment donarem en ordre decreixent.

Propietats.

(1) Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, aleshores $0 \leq g(u) \leq n - 1$ per a tot $u \in V$.

(2) No hi ha cap graf d'ordre n, $n \geq 2$, amb tots els graus dels vèrtexs diferents. És a dir, si $n \geq 2$, a la seqüència de graus hi ha almenys un valor repetit.

(3) *Lema de les encaixades.* Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, aleshores

$$\sum_{u \in V} g(u) = 2m.$$

(4) *Conseqüència del lema de les encaixades.* Tot graf conté un nombre parell de vèrtexs de grau senar.

DEMOSTRACIÓ.

(1) És immediat, ja que el grau és un enter no negatiu i a més un vèrtex és adjacent com a molt als $n-1$ vèrtexs restants.

(2) El grau d'un vèrtex és un enter entre 0 i $n-1$, és a dir, només hi ha n possibles valors diferents. Si suposem que tots els graus dels n vèrtexs són diferents, aquests valors han de ser $0, 1, \ldots, n-1$. Això implica que hi ha un vèrtex de grau 0 i un de grau $n-1$. Però si hi ha un vèrtex adjacent als $n-1$ restants i $n \geq 2$, vol dir que tot vèrtex té grau almenys 1, contradicció.

(3) Si sumem els graus de tots els vèrtexs, comptem dues vegades el nombre d'arestes, ja que cada aresta és incident en exactament 2 vèrtexs.

(4) Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m,

$$2m = \sum_{u \in V} g(u) = \sum_{u \in V : g(u) \text{ parell}} g(u) + \sum_{u \in V : g(u) \text{ senar}} g(u),$$

per tant, $\sum_{u \in V : g(u) \text{ senar}} g(u)$ ha de ser parell, però això només és possible si el nombre de sumands és parell.

□

5.1.3 Matriu d'adjacència i d'incidència

Definició. La *matriu d'adjacència* d'un graf $G = (V, A)$ d'ordre n i mida m, on $V = \{u_1, \ldots, u_n\}$, és la matriu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ quadrada $n \times n$ tal que l'element de la fila i i columna j és

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } u_i u_j \in A, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Propietats. La matriu d'adjacència d'un graf satisfà:

(1) És una matriu binària (de zeros i uns) simètrica, amb zeros a la diagonal principal, i no és única: depèn de l'ordenació escollida al conjunt de vèrtexs del graf.

(2) La suma dels elements de la fila o de la columna i-èsima és el grau del vèrtex u_i.

Definició. La *matriu d'incidència* d'un graf $G = (V, A)$ d'ordre n i mida m, $m \geq 1$, on $V = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $A = \{a_1, \ldots a_m\}$ és la matriu $\mathbf{M} = (m_{ij})$ de dimensions $n \times m$ tal que l'element de la fila i i columna j és

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } u_i \text{ i } a_j \text{ són incidents,} \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Propietats. La matriu d'incidència d'un graf satisfà:

(1) És una matriu binària (de zeros i uns) i no és única: depèn de l'ordenació escollida als conjunts de vèrtexs i d'arestes del graf.

(2) Cada columna conté exactament dos 1's.

(3) La suma dels elements de la fila i-èsima és el grau del vèrtex u_i.

5.1.4 Isomorfia de grafs

Definició. Dos grafs $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$ són *isomorfs* si existeix una aplicació bijectiva $f : V_1 \longrightarrow V_2$ tal que:

$$\forall u, v \in V_1 \ , \ uv \in A_1 \Longleftrightarrow f(u)f(v) \in A_2.$$

Si G_1 i G_2 són isomorfs, escriurem $G_1 \cong G_2$. Direm que l'aplicació f és un *isomorfisme de grafs* entre G_1 i G_2.

La isomorfia de grafs defineix una relació d'equivalència en el conjunt de tots els grafs (es comprova fàcilment que és una relació binària reflexiva, simètrica i transitiva). Cadascuna de les classes d'equivalència que determina aquesta relació és una *classe d'isomorfia*. Tenim, doncs, una partició del conjunt de tots els grafs en classes d'isomorfia.

Si dos grafs són isomorfs, tenen el mateix ordre, la mateixa mida, i la mateixa seqüència de graus. El recíproc no és cert. A la figura següent en tenim un contraexemple.

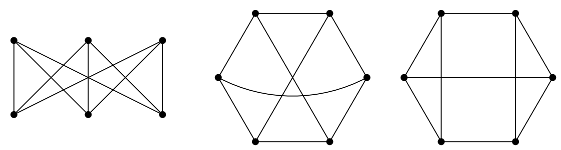


Figura 5.2: Tres grafs amb la mateixa seqüència de graus. Els dos grafs de l'esquerra són isomorfs, però no són isomorfs al de la dreta.

Definició. Un *automorfisme* d'un graf G, $G = (V, A)$, és una aplicació bijectiva $f : V \longrightarrow V$ tal que:

$$\forall u, v \in V \ , \ uv \in A \Longleftrightarrow f(u)f(v) \in A.$$

5.1.5 Tipus de grafs

(1) Graf *nul* d'ordre n, N_n, on $n \geq 1$: graf d'ordre n i mida 0.
El graf N_1 s'anomena graf *trivial*.

(2) Graf *complet* d'ordre n, K_n, on $n \geq 1$: graf d'ordre n amb totes les arestes possibles. Per tant, la mida de K_n és $\binom{n}{2}$. El graf $K_1 \cong N_1$ és el graf trivial.

(3) Graf *d-regular*: graf tal que tot vèrtex té grau d, per a algun enter $d \geq 0$. Per exemple, K_n és un graf $(n-1)$-regular.

(4) Graf *bipartit*: graf $G = (V, A)$ tal que existeix una partició del conjunt de vèrtexs en dos subconjunts, $V = V_1 \cup V_2$, de forma que totes les arestes del graf són de tipus uv amb $u \in V_1$ i $v \in V_2$ (és a dir, no hi ha arestes uv tals que $u, v \in V_1$ ni tals que $u, v \in V_2$). Els conjunts V_1 i V_2 s'anomenen *parts estables*.

(5) Graf *bipartit complet*, $K_{r,s}$, on $r, s \geq 1$: graf bipartit d'ordre $r + s$ i mida rs tal que les parts estables són V_1 i V_2, amb $|V_1| = r \geq 1$ i $|V_2| = s \geq 1$, i el conjunt d'arestes és $A = \{uv : u \in V_1, v \in V_2\}$ (és a dir, tot vèrtex de V_1 és adjacent a tot vèrtex de V_2).

(6) Graf *estrella*: és el graf bipartit complet $K_{1,s}$.

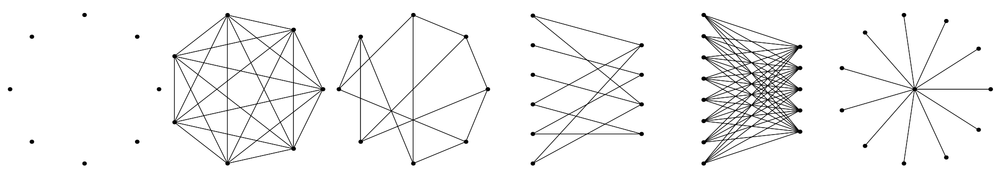


Figura 5.3: D'esquerra a dreta exemples de graf nul, complet, 3-regular, bipartit, bipartit complet, estrella.

(7) Graf *camí* d'ordre n, P_n, on $n \geq 1$: graf isomorf a $G = (V, A)$ d'ordre n i mida $n - 1$ tal que $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ i $A = \{u_1u_2, u_2u_3, \ldots, u_{n-1}u_n\}$

(8) Graf *cicle* d'ordre n, C_n, on $n \geq 3$: graf isomorf a $G = (V, A)$ d'ordre n i mida n tal que $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ i $A = \{u_1u_2, u_2u_3, \ldots, u_{n-1}u_n, u_nu_1\}$

Definició. El *girth* d'un graf G que conté algun cicle és el mínim dels ordres dels cicles continguts a G.

(9) Graf *roda* d'ordre n, W_n, on $n \geq 4$: graf isomorf a $G = (V, A)$ d'ordre n i mida $2n - 2$ tal que $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ i $A = \{u_1u_2, u_2u_3, \ldots, u_{n-2}u_{n-1}, u_{n-1}u_1\} \cup \{u_1u_n, u_2u_n, \ldots, u_{n-1}u_n\}$

(10) Graf de *Petersen*: graf 3-regular d'odre 10 i mida 15 isomorf a $G = (V, A)$ on
$V = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ i
$A = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_1\} \cup \{v_1v_3, v_3v_5, v_5v_2, v_2v_4, v_4v_1\} \cup$
$\{u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4, u_5v_5\}$

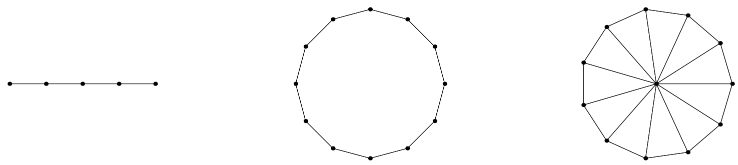


Figura 5.4: Graf camí, graf cicle i graf roda.

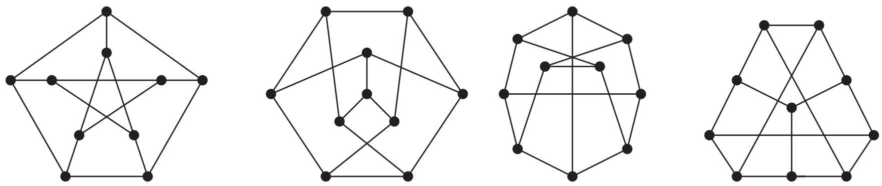


Figura 5.5: Diferents maneres de representar el graf de Petersen.

5.1.6 Subgrafs

Definició. Si $G = (V, A)$ és un graf,

(1) $H = (V', A')$ és un *subgraf* de G si H és un graf tal que $V' \subseteq V$ i $A' \subseteq A$.

(2) $H = (V', A')$ és un *subgraf generador* de G si H és un subgraf de G tal que $V' = V$.

(3) Si $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$, el *subgraf de G generat o induït per S* té S com a conjunt de vèrtexs, i el conjunt d'arestes està format per totes les arestes de G incidents en dos vèrtexs de S.

Notació: $G[S]$ (o bé $< S >$) representa el subgraf generat per $S \subseteq V$ en G. És a dir, $G[S] = (S, A')$, on $A' = \{ uv \in A \,|\, u, v \in S \}$.

(4) Si $T \subseteq A$, $T \neq \emptyset$, el *subgraf de G generat o induït per T* té com a conjunt de vèrtexs tots els vèrtexs incidents a alguna de les arestes de T i el conjunt d'arestes és T.

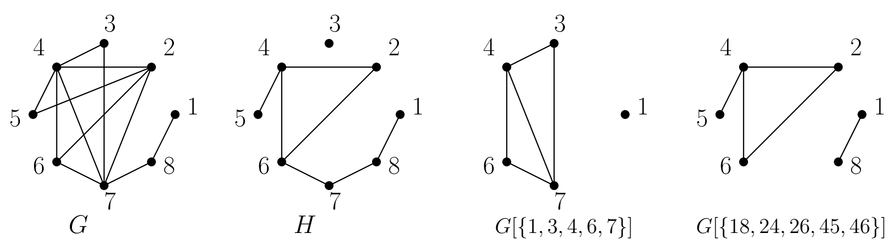


Figura 5.6: D'esquerra a dreta, un graf G i tres subgrafs de G: un subgraf generador, un subgraf generat per un conjunt de vèrtexs i un subgraf generat per un conjunt d'arestes.

5.1.7 Supressió i addició de vèrtexs i arestes

Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, considerem els grafs següents:

(1) *Supressió d'un vèrtex* $u \in V$ de G: graf que s'obté de G al suprimir el vèrtex u i totes les arestes incidents amb u, és a dir, és el graf $G - u = (V - \{u\}, A')$ on

$$A' = A - \{a \in A | a \text{ és incident amb } u\}.$$

Per tant, $G - u$ és un graf d'ordre $n - 1$ i mida $m - g(u)$.

(2) *Supressió d'una aresta* $a \in A$: graf que s'obté de G al suprimir l'aresta a, és a dir, és el graf $G - a = (V, A - \{a\})$. Per tant, $G - a$ és un graf d'ordre n i mida $m - 1$.

(3) *Addició d'una aresta* $a = uv \notin A$, $u, v \in V$: graf que s'obté de G a l'afegir una aresta a que no és de G, és a dir, és el graf $G + a = (V, A \cup \{a\})$. Per tant, $G + a$ és un graf d'ordre n i mida $m + 1$.

(4) *Contracció d'una aresta* $a = uv \in A$: graf que s'obté a l'identificar els dos vèrtexs incidents a l'aresta a, és a dir, és el graf $G \setminus a = (V - \{v\}, A')$ on

$$A' = \{\, xy \,|\, x, y \in V - \{u, v\},\ xy \in A \,\} \cup \{\, uz \,|\, z \in V - \{u, v\}\,,\ uz \in A \text{ o bé } vz \in A \,\}$$

Per tant, $G \setminus a$, $a = uv \in A$, és un graf d'ordre $n - 1$ i mida

$$m - 1 - |\{w \in V \,|\, uw \in A \text{ i } vw \in A\}|.$$

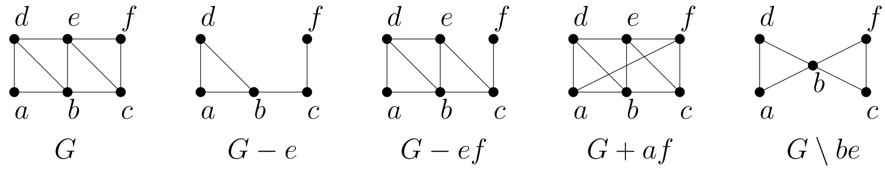


Figura 5.7: Supressió d'un vèrtex i supressió, addició i contracció d'una aresta.

5.1.8 Operacions amb grafs

Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, $G_1 = (V_1, A_1)$ és un graf d'ordre n_1 i mida m_1 i $G_2 = (V_2, A_2)$ és un graf d'ordre n_2 i mida m_2, es defineix:

(1) Graf *complementari* de G: és el graf $\overline{G} = (V, A')$ (també s'escriu G^c) on

$$A' = \{\, uv \,|\, u, v \in V \text{ i } uv \notin A \,\}.$$

Per tant, $\overline{G}$ és un graf d'ordre n, mida $\binom{n}{2} - m$, i per a tot vèrtex $u \in V$,

$$g_G(u) + g_{\overline{G}}(u) = n - 1.$$

Definició. Direm que un graf G és *autocomplementari* si $G \cong \overline{G}$.

(2) *Graf línia* de G. Si G és un graf de mida m, $m \geq 1$, definim el graf línia com el graf $L(G) = (V', A')$, on $V' = A$ i A' està definit de la forma següent: $a, b \in V' = A$, $a \neq b$, són adjacents en $L(G)$ si, i només si, a, b són arestes incidents en G.

Es compleix:

(i) $g_{L(G)}(uv) = g_G(u) + g_G(v) - 2$, on $u, v \in V$, $uv \in A$ i g_G, $g_{L(G)}$ denota respectivament el grau dels vèrtexs de G i de $L(G)$.

DEMOSTRACIÓ. Els vèrtexs de $L(G)$ són les arestes de G. Si $a = uv$ és una aresta de G, a és un vèrtex de $L(G)$ que és adjacent a les arestes de G diferents de a que són incidents a u o a v. Sense comptar a, hi ha $g_G(u) - 1$ arestes incidents a u i $g_G(v) - 1$ arestes incidents a v. No hi ha cap aresta diferent de a incident a u i a v alhora. Per tant, $g_{L(G)}(a) = g_G(u) + g_G(v) - 2$. $\square$

(ii) $L(G)$ té ordre m i mida $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{u\in V} g_G(u)^2 - m$.

DEMOSTRACIÓ. L'ordre de $L(G)$ és la mida de G, és a dir, m. Per altra banda, les arestes de $L(G)$ són de la forma $\{uv, uw\}$ on u, v, w són vèrtexs diferents de G i uv, uw són arestes de G. Fixat un vèrtex u de G, hi ha tantes arestes de la forma $\{uv, uw\}$ en $L(G)$ com parells no ordenats de vèrtexs adjacents a u. Hi ha tants vèrtexs adjacents a u en G com el grau de u en G, $g_G(u)$. Per tant hi ha $\binom{g_G(u)}{2}$ arestes en $L(G)$ de la forma $\{uv, uw\}$. La mida de $L(G)$ és, doncs,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{u\in V}\binom{g_G(u)}{2}\\
=&\sum_{u\in V}\frac{g_G(u)(g_G(u)-1)}{2}\\
=&\frac{1}{2}\sum_{u\in V} g_G(u)^2 - \frac{1}{2}\sum_{u\in V} g_G(u)\\
=&\frac{1}{2}\sum_{u\in V} g_G(u)^2 - m.
\end{aligned}
$$

$\square$

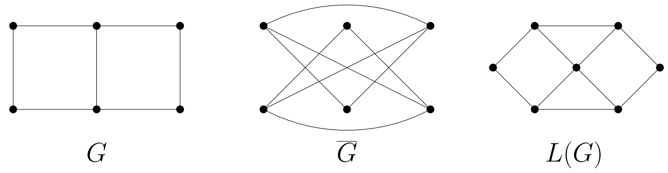


Figura 5.8: Graf complementari i graf línia.

(3) *Unió* de G_1 i G_2, si $V_1 \cap V_2 = \emptyset$: és el graf $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2)$.

Per tant, $G_1 \cup G_2$ té ordre $n_1 + n_2$ i mida $m_1 + m_2$.

(4) *Suma* de G_1 i G_2, si $V_1 \cap V_2 = \emptyset$:
és el graf $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2 \cup \{uv | u \in V_1\ ,\ v \in V_2\})$

Per tant, $G_1 + G_2$ té ordre $n_1 + n_2$ i mida $m_1 + m_2 + n_1 n_2$.

Exemples. El graf roda es pot expressar com la suma $W_n = C_{n-1} + K_1$ i el graf bipartit complet com la suma $K_{r,s} = N_r + N_s$.

(5) *Producte cartesià* de G_1 i G_2: és el graf $G_1 \Box G_2 = (V_1 \times V_2, A')$, on A' està definit de la forma següent:

$$\forall u, u' \in V_1\ ,\ \forall v, v' \in V_2\ ,\ (u,v) \sim (u',v') \Leftrightarrow u = u' \text{ i } vv' \in A_2, \text{ o bé } v = v' \text{ i } uu' \in A_1.$$

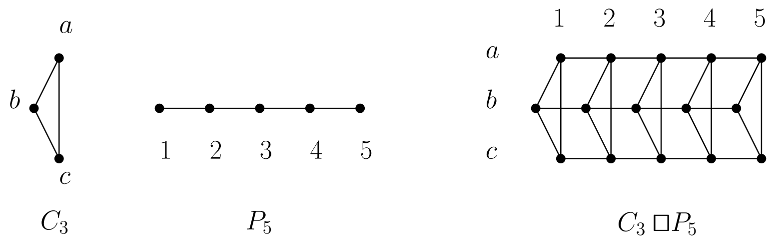


Figura 5.9: El producte cartesià de C_3 per P_5.

Es compleix:

(i) $g_{G_1 \Box G_2}(u,v) = g_{G_1}(u) + g_{G_2}(v)$, per a tot $(u,v) \in V_1 \times V_2$, on g_H denota el grau d'un vèrtex en el graf H.

DEMOSTRACIÓ. El vèrtex (u,v) és adjacent a $g_{G_2}(v)$ vèrtexs de la forma (u,v'), ja que v' ha de ser adjacent a v, i a $g_{G_1}(u)$ vèrtexs de la forma (u',v), ja que u' ha de ser adjacent a u. En total, (u,v) és adjacent a $g_{G_1}(u) + g_{G_2}(v)$ vèrtexs. $\Box$

(ii) $G_1 \Box G_2$ és un graf d'ordre $n_1 n_2$ i mida $n_1 m_2 + n_2 m_1$.

DEMOSTRACIÓ. L'ordre de $G_1 \Box G_2$ és $|V_1 \times V_2| = |V_1|\,|V_2| = n_1\,n_2$. La mida de $G_1 \square G_2$ és

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_{(u,v)\in V_1\times V_2} g_{G_1\square G_2}(u,v) \\
=&\frac{1}{2} \sum_{(u,v)\in V_1\times V_2} (g_{G_1}(u) + g_{G_2}(v)) \\
=&\frac{1}{2} \left(\sum_{(u,v)\in V_1\times V_2} g_{G_1}(u) + \sum_{(u,v)\in V_1\times V_2} g_{G_2}(v) \right) \\
=&\frac{1}{2} \left(n_2 \sum_{u\in V_1} g_{G_1}(u) + n_1 \sum_{v\in V_2} g_{G_2}(v) \right) \\
=&\frac{1}{2} (n_2\, 2m_1 + n_1\, 2m_2) = n_1 m_2 + n_2 m_1
\end{aligned}$$

□

Definició. El *producte cartesià* de r grafs, $r \geq 2$, es defineix recursivament. Per a $r = 2$ és el producte cartesià de grafs que ja hem definit. Si $r \geq 3$, $G_1, G_2, \ldots, G_r$ és el graf

$$G_1 \square G_2 \square \ldots \square G_r = (G_1 \square G_2 \square \ldots \square G_{r-1}) \square G_r.$$

El graf hipercub Q_r. Definim per a tot $r \geq 1$ el *graf hipercub*, Q_r, com el producte cartesià:

$$Q_r = \overbrace{K_2 \square \ldots \square K_2}^{(r)}.$$

El graf Q_r és r-regular d'ordre 2^r. Es pot identificar amb el graf que té per conjunt de vèrtexs $V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_r) : \forall i \in [r]\ ,\ x_i \in \{0,1\}\}$ i dos vèrtexs $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ són adjacents si, i només si, tenen exactament $r-1$ components iguals.

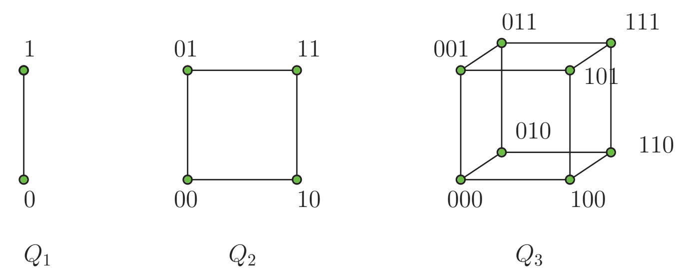


Figura 5.10: Grafs hipercub Q_1, Q_2 i Q_3.

(6) *Producte categòric* de G_1 i G_2: és el graf $G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, A')$, on A' està definit de la forma següent:

$$\forall u, u' \in V_1 \, , \, \forall v, v' \in V_2 \ , \ (u,v) \sim (u',v') \Leftrightarrow uu' \in A_1 \text{ i } vv' \in A_2$$

Es compleix:

(i) $g_{G_1 \times G_2}(u,v) = g_{G_1}(u)\, g_{G_2}(v)$, per a tot $(u,v) \in V_1 \times V_2$
(ii) $G_1 \times G_2$ és un graf d'ordre $n_1 n_2$ i mida $2m_1 m_2$

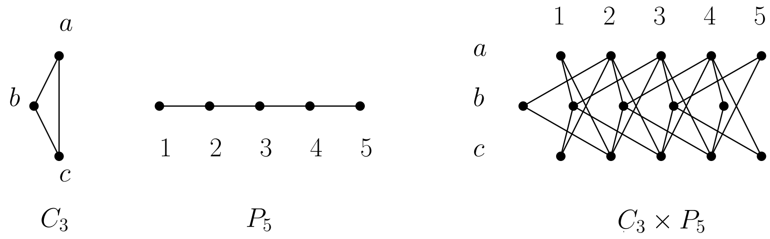


Figura 5.11: Producte categòric de C_3 per P_5.

5.2 Connexió

5.2.1 Recorreguts

Definició. Si $G = (V, A)$ és un graf i $u, v \in V$, un *u-v recorregut de longitud k, $k \geq 1$*, és una successió alternada de vèrtexs i arestes,

$$u_0, a_1, u_1, a_2, u_2, a_3, \ldots u_{k-1}, a_k, u_k$$

tal que $u = u_0$, $v = u_k$, i $a_i = u_{i-1}u_i \in A$, per a tot $i \in [k]$. Direm també que el recorregut *connecta* els vèrtexs u i v.

Si $u = v$ (resp. $u \neq v$) direm que el recorregut és *tancat* (resp. *obert*). Un vèrtex $u \in V$ es considera un *recorregut de longitud* 0.

Un recorregut queda determinat per la successió de vèrtexs $u_0, u_1, \ldots, u_k$, ja que entre dos vèrtexs adjacents només hi ha una aresta que els uneix. Per tant, sovint donarem només la seqüència de vèrtexs dels recorreguts. Un graf de mida almenys 1 conté recorreguts de longitud k, per a tot $k \geq 0$.

Definició. Tipus de recorreguts.

(1) Un *senderó* és un recorregut que no repeteix arestes.

(2) Un *circuit* és un senderó tancat.

(3) Un *camí* és un recorregut que no repeteix vèrtexs.

(4) Un *cicle* és un recorregut tancat de longitud almenys 3 amb tots els vèrtexs diferents, llevat de l'últim que coincideix amb el primer.

Propietats.

(1) Tot camí és un senderó.

(2) Tot cicle és un circuit.

(3) La longitud d'un senderó és com a molt la mida del graf.

(4) La longitud d'un camí és com a molt $n-1$, on n és l'ordre del graf.

(5) La longitud d'un cicle és com a molt l'ordre del graf.

(6) Si $G=(V,A)$ és un graf amb $V=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ i $\mathbf{A}$ és la matriu d'adjacència de G utilitzant aquesta ordenació dels vèrtexs, llavors el nombre de u_i-u_j recorreguts de longitud $k\geq 0$ és l'element de la fila i i columna j de la matriu $\mathbf{A}^k$.

Exercici. Demostreu les propietats anteriors (les propietats (1) a (5) són immediates i la propietat (6) es pot demostrar per inducció sobre k, $k\geq 0$).

Definició. Dos camins són *internament disjunts* si no tenen vèrtexs comuns, llevat potser dels extrems.

Observem que entre dos vèrtexs hi ha dos camins internament disjunts si, i només si, hi ha un cicle que els conté.

Definició. Un recorregut R conté un recorregut R' si la successió de vèrtexs i arestes del recorregut R' és una subsuccessió de la successió de vèrtexs i arestes de R.

Proposició 49. *Tot $u-v$ recorregut conté un $u-v$ camí.*

Demostració. Si $u=v$, el recorregut conté el camí de longitud 0 format pel vèrtex u. Si $u\neq v$, ho demostrarem per inducció sobre la longitud k del recorregut, $k\geq 1$. Per a $k=1$ és cert, ja que un recorregut de longitud 1 és un camí. Prenem ara $k\geq 2$ i suposem que el resultat és cert per a recorreguts de longitud menor que k. Considerem un $u-v$ recorregut de longitud k, $R=u_0,u_1,u_2,\ldots,u_{k-1},u_k$, on $u_0=u$, $u_k=v$. Si R no repeteix vèrtexs, R és un $u-v$ camí. En cas contrari, $u_i=u_j$ per a algun parell de subíndexs i,j, tals que $0\leq i<j\leq k$. Aleshores, $R'=u_0,u_1,\ldots,u_i(=u_j),u_{j+1},u_{j-2},\ldots,u_k$ és un $u-v$ recorregut de longitud $<k$, i per hipòtesi d'inducció conté un $u-v$ camí, que està contingut en R. □

Proposició 50. *Si un graf G conté dos vèrtexs u,v tals que almenys hi ha dos $u-v$ camins diferents, llavors G conté almenys un cicle.*

Demostració. Considerem dos $u-v$ camins diferents, $x_0,x_1,\ldots,x_l$ i $y_0,y_1,\ldots,y_h$, on $x_0=y_0=u$ i $x_l=y_h=v$. Per ser diferents, existeix un subíndex k, $k\geq 1$, tal que $x_k\neq y_k$ i $x_i=y_i$ per a tot i tal que $i<k$. El recorregut $x_k,x_{k+1},\ldots,x_l,y_{h-1},y_{h-2},\ldots,y_k$ conté un camí $x_k,z_1,\ldots,z_r,y_k$ que no conté $x_{k-1}(=y_{k-1})$. Per ser $x_{k-1}x_k$, $x_{k-1}y_k$ arestes del graf, $x_k,z_1,\ldots,z_r,y_k,x_{k-1},x_k$ és un cicle de G. □

Proposició 51. *Tot recorregut tancat de longitud senar conté un cicle de longitud senar.*

DEMOSTRACIÓ. Ho demostrarem per inducció sobre la longitud k del recorregut, $k \geq 3$ senar. Si $k = 3$ és cert, ja que els recorreguts tancats de longitud 3 són cicles. Suposem ara que k és senar, $k \geq 5$, i que el resultat és cert per a recorreguts tancats de longitud senar menor que k. Considerem un recorregut tancat de longitud k senar, $R = u_0, u_1, \ldots, u_k$, on $u_0 = u_k$. Si els vèrtexs $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ són diferents, R és un cicle de longitud k, senar. Si no, $u_i = u_j$ per a algun parell de subíndexs i, j tals que $0 \leq i < j \leq k-1$. Considerem els recorreguts tancats $R_1 = u_0, u_1, \ldots, u_i(= u_j), u_{j+1}, \ldots, u_k(= u_0)$ i $R_2 = u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j$. Els dos recorreguts tenen longitud almenys 1 i la suma de les dues longituds és k, senar. Per tant, almenys un dels dos té longitud senar i, per hipòtesi d'inducció, conté un cicle de longitud senar. □

El resultat anterior no és cert per a recorreguts de longitud parella. Per exemple, si u, v són dos vèrtexs adjacents, el recorregut tancat u, v, u de longitud 2 no conté cap cicle. En general, qualsevol recorregut que consisteixi en recòrrer un camí i a continuació el mateix camí en sentit invers, és un recorregut de longitud parella que no conté cap cicle.

5.2.2 Connexitat

Definició. Un graf és *connex* si per a qualsevol parell de vèrtexs del graf hi ha almenys un camí que els connecta. Un *component connex* d'un graf és un subgraf connex maximal.

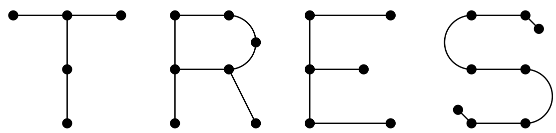


Figura 5.12: El graf de la figura té 4 components connexos.

Si considerem la relació binària en el conjunt de vèrtexs d'un graf "dos vèrtexs estan relacionats si, i només si, hi ha almenys un camí que els connecta", es pot comprovar fàcilment que és una relació d'equivalència i cada classe d'equivalència d'aquesta relació és el conjunt de vèrtexs d'un component connex del graf. És a dir, els components connexos de G són els subgrafs induïts per les classes d'equivalència d'aquesta relació.

Propietats.

(1) Un graf G connex d'ordre almenys 2 no té vèrtexs de grau zero, és a dir, $\delta(G) \geq 1$.

(2) Els vèrtexs del component connex del vèrtex u d'un graf G són tots els vèrtexs v tals que existeix almenys un $u - v$ camí en G.

(3) Si $G_1, \ldots, G_k$ són els components connexos del graf G, aleshores $G = G_1 \cup \cdots \cup G_k$.

Proposició 52. *Si $G = (V, A)$ és un graf connex i $u \in V$, llavors el graf $G - u$ té com a molt $g(u)$ components connexos.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem que $g(u) = d$ i $u_1, u_2, \dots, u_d$ són els d vèrtexs adjacents a u. Si x és un vèrtex de $G - u$, hi ha un $u - x$ camí en G que comença amb una aresta $u\,u_i$, $i \in [d]$, és a dir, hi ha un $u_i - x$ camí en $G - u$. Per tant, x és del mateix component connex que u_i en $G - u$, d'on deduïm que G_u té com a molt d components connexos, que són els components connexos dels vèrtexs u_i, $i \in [d]$. □

Proposició 53. *Si $G = (V, A)$ és un graf connex i $a \in A$, llavors el graf $G - a$ té com a molt 2 components connexos.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem $a = uv$. Si x és un vèrtex qualsevol de G, hi ha almenys un $u - x$ camí en G. Si el camí no conté a, x és del mateix component connex que u en $G - a$. Si el camí conté a, ha de començar amb l'aresta $a = uv$, de manera que hi ha un $v - x$ camí en G que no conté a. És a dir, x és del mateix component connnex que v en $G - a$. Per tant, el graf $G - a$ té com a molt dos components connexos, el component connex que conté u i el que conté v. □

Proposició 54. *Si G és un graf connex d'ordre n i mida m, aleshores $m \geq n - 1$.*

DEMOSTRACIÓ. Ho demostrarem per inducció sobre l'ordre n del graf, $n \geq 1$. Per a $n = 1$ és cert, ja que l´únic graf d'ordre 1 és el graf trivial, d'ordre 1 i mida 0, amb $0 \geq 1 - 1$. Suposem ara que $n \geq 2$ i el resultat és cert per a grafs d'ordre més petit que n. Veurem que també ho és per a grafs d'ordre n. Considerem un graf G connex d'ordre n, $n \geq 2$, i un vèrtex qualsevol, u. El graf $G - u$ té k components connexos, $G_1, G_2, \dots, G_k$, on $1 \leq k \leq g(u)$. Si G_i és un graf d'ordre n_i i mida m_i, aleshores $\sum_{i=1}^{k} n_i = n - 1 < n$ i $\sum_{i=1}^{k} m_i = m - g(u)$. Per hipòtesi d'inducció, $m_i \geq n_i - 1$, per a tot $i \in [k]$. Per tant,

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i + g(u) \overset{\text{HI}}{\geq} \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) + g(u) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k + g(u) = n - 1 + (g(u) - k) \geq n - 1.$$

□

El recíproc de la proposició anterior no és cert. Per exemple, el graf $G = K_1 \cup C_3$ té ordre 4 i mida 3. Es compleix que la mida és almenys l'ordre menys 1, però no és connex.

Corol·lari 4. *Si G és un graf d'ordre n i mida m amb exactament k components connexos, llavors $m \geq n - k$.*

Demostració. Si $G_1, \ldots, G_k$ són els components connexos de G, d'ordre n_i i mida m_i per a tot $i \in [k]$, aleshores

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i \geq \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k = n - k.$$

□

5.2.3 Distància

Definició. Si u, v són dos vèrtexs d'un graf G connectats per almenys un camí, la *distància* entre u i v és el mínim de les longituds de tots els $u - v$ camins. Si no hi ha cap $u - v$ camí, direm que la distància entre u i v és infinita. Denotarem la distància entre els vèrtexs u, v del graf G amb $d(u, v)$. És a dir:

$$d(u,v) = \begin{cases} \infty \text{, si no hi ha cap } u - v \text{ camí,} \\ \text{mínim de les longituds de tots els } u - v \text{ camins, altrament.} \end{cases}$$

La distància entre dos vèrtexs d'un graf és 1 si, i només si, són adjacents. Per altra banda, la distància entre dos vèrtexs diferents u, v és 2 si, i només si, no són adjacents i existeix un vèrtex w adjacent a u i a v.

Proposició 55. *Si $G = (V, A)$ és un graf connex i $u, v, w \in V$,*

(i) $d(u, v) \geq 0$;

(ii) $d(u, v) = 0 \iff u = v$;

(iii) $d(u, v) = d(v, u)$ *(simetria);*

(iv) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ *(desigualtat triangular).*

Demostració. Els apartats *(i), (ii), (iii)* són evidents. Per a demostrar la desigualtat triangular, considerem un $u - w$ camí de longitud $d(u, w)$ i un $w - v$ camí de longitud $d(w, v)$. Si concatenem els dos camins tenim un $u - v$ recorregut de longitud $d(u, w) + d(w, v) = l$ que conté un $u - v$ camí de longitud com a molt l. Per tant, la distància entre u i v és com a molt $l = d(u, w) + d(w, v)$. □

Definicions. Considerem un graf $G = (V, A)$.

(1) L'*excentricitat* d'un vèrtex $u \in V$, que denotarem $e(u)$, és el màxim de les distàncies entre u i tots els vèrtexs del graf:

$$e(u) = \max_{v \in V} d(u, v).$$

(2) El *diàmetre* de G, que denotarem $D(G)$, és el màxim de les excentricitats dels vèrtexs de G:
$$D(G) = \max_{u \in V} e(u) = \max_{u,v \in V} d(u,v).$$

(3) El *radi* de G, que denotarem $r(G)$, és el mínim de les excentricitats dels vèrtexs de G:
$$r(G) = \min_{u \in V} e(u).$$

(4) Un vèrtex u és *central* si té excentricitat mínima, és a dir, $e(u) = r(G)$.

(5) El *centre* de G és el subgraf generat per tots els vèrtexs centrals de G.

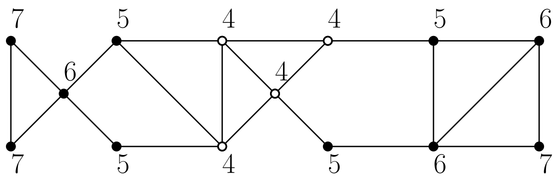


Figura 5.13: Un graf de diàmetre 7 i radi 4, amb els vèrtexs etiquetats amb l'excentricitat. Els vèrtexs blancs són centrals.

Propietats.

(1) Un graf és connex si, i només si, el diàmetre és finit.

(2) Si G és connex, llavors $r(G) \leq D(G) \leq 2\, r(G)$.

(3) Els grafs amb diàmetre 1 són els grafs complets K_n, $n \geq 2$.

(4) Els grafs d'ordre n i diàmetre $n-1$ són els grafs camí P_n.

(5) Els grafs d'ordre n, $n \geq 2$, i radi 1 són els grafs amb grau màxim $\Delta(G) = n-1$.

(6) Un graf pot contenir camins de longitud més gran que el diàmetre.

Demostració.

(1) Si un graf és connex, la distància entre dos vèrtexs és un enter no negatiu. El màxim de les distàncies entre tots els possibles parells de vèrtexs és, doncs, un enter no negatiu. Recíprocament, si el diàmetre és finit, vol dir que la distància entre dos vèrtexs qualssevol és finita, és a dir, hi ha almenys un camí que els connecta. Per tant el graf és connex.

(2) Per definició, $r(G) \leq D(G)$. Per altra banda, si u és un vèrtex central de G, aleshores $e(u) = r(G)$. Si x, y són dos vèrtexs qualssevol del graf, aleshores $d(x,y) \leq d(x,u) + d(u,y) \leq 2\, e(u) = 2\, r(G)$, d'on es dedueix $D(G) \leq 2\, r(G)$.

(3) Els grafs complets d'ordre almenys 2 tenen diàmetre 1. Recíprocament, si un graf d'ordre almenys 2 té diàmetre 1, vol dir que la distància entre dos vèrtexs diferents és 1. És a dir, tot parell de vèrtexs diferents són adjacents. L'únic graf que compleix aquesta condició és el graf és complet.

(4) Els grafs camí d'ordre n tenen diàmetre $n-1$. Recíprocament, si un graf d'ordre n té diàmetre $n-1$ vol dir que existeixen almenys un parell de vèrtexs u, v tals que $d(u, v) = n-1$. Per tant, hi ha un $u-v$ camí de longitud $n-1$ que conté els n vèrtexs del graf. El graf no pot contenir més arestes ja que si per a i, j tals que $j \geq i+2$, u_i, u_j són adjacents, la distància entre dos vèrtexs qualssevol del graf és com a molt $n-2$ i el diàmetre no seria $n-1$.

(5) Si el radi d'un graf G és 1, hi ha almenys un vèrtex u d'excentricitat 1, és a dir, $d(u, v) = 1$ per a tot vèrtex v diferent de u. Per tant, $\Delta(G) = n-1$, ja que u és adjacent als $n-1$ vèrtexs restants. Recíprocament, si $\Delta(G) = n-1$ i $n \geq 2$, hi ha un vèrtex de grau $n-1$ que és adjacent a tots els vèrtexs del graf, és a dir, té almenys un vèrtex d'excentricitat 1 i el graf té radi 1.

(6) Per exemple, un cicle d'ordre 6 té diàmetre 3 i conté camins de longitud 5.

□

Proposició 56 (Caracterització dels grafs bipartits)**.** *Un graf no trivial és bipartit si, i només si, no conté cicles de longitud senar.*

DEMOSTRACIÓ. Si un graf és bipartit, els vèrtexs d'un cicle són alternativament de les dues parts estables, d'on deduïm que el cicle té longitud parella. És a dir, el graf no té cicles de longitud senar.

Considerem ara un graf G que no tingui cicles de longitud senar. Suposem que $G = (V, A)$ és un graf connex no trivial. Fixem un vèrtex u i considerem

$$X = \{z \in V : d(u, z) \text{ és parell}\}, \; Y = \{z \in V : d(u, z) \text{ és senar}\}.$$

És evident que els conjunts X i Y són no buits i $X \cup Y = V$, $X \cap Y = \emptyset$ i $u \in X$. Sigui $a = vw \in A$. Veurem que un dels vèrtexs de $\{v, w\}$ és de X i l'altre de Y. Considerem un $u-v$ camí de longitud $d(u, v)$ i un $u-w$ camí de longitud $d(u, w)$. Si $v, w \in X$, considerem el recorregut format per l'$u-v$ camí, l'aresta vw i el $w-u$ camí obtingut al canviar el sentit de l'$u-w$ camí. Obtenim un recorregut tancat de longitud senar (parell+parell+1) que conté un cicle de longitud senar, contradicció. Anàlogament, arribem a contradicció si suposem $v, w \in Y$. Per tant, el graf és bipartit amb parts estables X i Y.

Si el graf no és connex fem el mateix raonament a cada component connex no trivial i les parts estables de G s'obtenen com a unió de parts estables dels components connexos no trivials de G i vèrtexs de grau zero. □

5.2.4 Vèrtexs de tall i arestes pont

Definició. Considerem un graf $G = (V, A)$. Un vèrtex $u \in V$ és *vèrtex de tall* si el graf $G-u$ té més components connexos que G. Una aresta $a \in A$ és *aresta pont* si el graf $G-a$ té més components connexos que G.

Un vèrtex de grau 0 no és mai un vèrtex de tall. Per altra banda, un vèrtex és de tall en un graf G si, i només si, és vèrtex de tall del component connex de G que el conté, ja que aquest vèrtex no és de cap camí que uneix vèrtexs d'altres components connexos. És a dir, si G' és el component connex d'un vèrtex u, u és vèrtex de tall en G si, i només si, $G' - u$ és un graf no connex.

Anàlogament, una aresta és pont en G si, i només si, és aresta pont del component connex de G que la conté. Si G' és el component connex que conté l'aresta a, a és aresta pont en G si, i només si, $G' - a$ és un graf no connex.

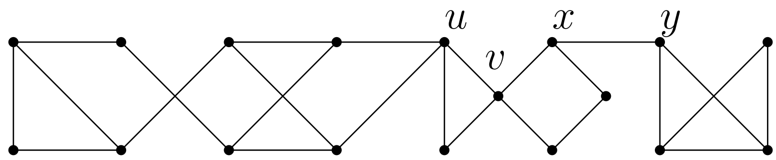


Figura 5.14: L'única aresta pont del graf de la figura és xy. Els vèrtexs de tall són u, v, x i y

Proposició 57. *Si $G = (V, A)$ és un graf connex no trivial, $u \in V$ i $a \in A$, aleshores*

(1) u és vèrtex de tall si, i només si, existeixen $x, y \in V - \{u\}$ tals que u és de tot $x - y$ camí;

(2) a és aresta pont si, i només si, existeixen $x, y \in V$ tals que a és de tot $x - y$ camí.

Demostració.

(1) Demostrarem el resultat equivalent: u no és vèrtex de tall si, i només si, per a qualsevol parell de vèrtexs $x, y \in V - \{u\}$ hi ha almenys un $x - y$ camí que no conté u.

Suposem primer que u no és vèrtex de tall. En aquest cas, $G - u$ és connex i, per tant, per a tot parell de vèrtexs x, y de $G - u$ hi ha almenys un camí que els connecta. És a dir, per a tot $x, y \in V - \{u\}$ hi ha almenys un $x - y$ camí en G que no conté u.

Recíprocament, si per a qualsevol parell de vèrtexs $x, y \in V - \{u\}$ hi ha almenys un $x - y$ camí que no conté u, aleshores hi ha almenys un x, y camí en $G - u$ per a tot parell de vèrtexs x, y de $G - u$, és a dir, $G - u$ és connex. Per tant, u no és vèrtex de tall de G.

(2) Demostrarem el resultat equivalent: a no és aresta pont si, i només si, per a tot parell de vèrtexs $x, y \in V$ existeix almenys un $x - y$ camí que no conté a.

Si a no és aresta pont, aleshores $G - a$ és connex, és a dir, per a tot parell de vèrtexs x, y de $G - a$ hi ha almenys un $x - y$ camí en $G - a$. Però els vèrtexs de $G - a$ són els mateixos que els vèrtexs de G. Per tant, per a tot parell de vèrtexs x, y de G hi ha almenys un $x - y$ camí en G que no conté a.

Recíprocament, si per a tot parell de vèrtexs $x, y \in V$ existeix almenys un $x - y$ camí que no conté a, aleshores per a tot parell de vèrtexs $x, y \in V$ hi ha almenys un $x - y$ camí en $G - a$. Per tant, $G - a$ és connex i a no és aresta pont.

□

Proposició 58. *Si $G = (V, A)$ és un graf i $a = uv \in A$, aleshores l'aresta a és pont si, i només si, no pertany a cap cicle.*

Demostració. Demostrarem el resultat equivalent: a no és aresta pont si, i només si, a és d'algun cicle.

Suposem que $a = uv$ és una aresta de G i G' és el component connex de G que la conté.

Si $a = uv$ no és aresta pont de G, aleshores el graf $G' - a$ és connex. Per tant, existeix un $u - v$ camí en $G' - a$, és a dir, un $u - v$ camí en G' que no conté a. Si afegim l'aresta a al camí anterior obtenim un cicle en G', i per tant un cicle en G, que conté l'aresta a.

Per a demostrar el recíproc, suposem que a és d'algun cicle. Aquest cicle només pot contenir vèrtexs de G', ja que els recorreguts de G només connecten vèrtexs d'un mateix component connex. Considerem dos vèrtexs qualssevol x, y de $G' - a$. Per ser G' connex, existeix almenys un camí que connecta x i y en G'. Si el camí no conté a, tenim un $x - y$ camí en $G' - a$. Si el camí conté a, podem substituir l'aresta a per l'altra part del cicle que conté a i que connecta els vèrtexs u i v. Obtenim un $x - y$ recorregut en $G' - a$ que conté un $x - y$ camí en $G' - a$. En qualsevol cas, obtenim un $x - y$ camí en $G' - a$, és a dir, $G' - a$ és connex. Per tant, a no és aresta pont de G. □

Propietats. Si $G = (V, A)$ és un graf, $u \in V$ i $a \in A$, aleshores

(1) si $g(u) = 1$ i $uv \in A$, llavors u no és vèrtex de tall i uv és aresta pont;

(2) si $a = uv$ és aresta pont i $g(u) \geq 2$, llavors u és vèrtex de tall.

Demostració.

(1) Si $g(u) = 1$, el vèrtex u no és de cap $x - y$ camí si $x, y \in V - \{u\}$ i per tant no és vèrtex de tall. En canvi l'aresta a és de tot $u - v$ camí, ja que $g(u) = 1$, i per tant és aresta pont.

(2) Considerem un vèrtex w, $w \neq v$, adjacent a u. Si u no fos vèrtex de tall, el component connex que conté u en G també seria un component connex de $G - u$ i hi hauria un $w - v$ camí en $G - u$. A l'afegir les arestes wu i $a = uv$ a aquest camí, obtindríem un cicle que conté a, és a dir, a no seria aresta pont.

□

Propietats. Si $G = (V, A)$ és un graf connex, $u \in V$ i $a \in A$,

(1) si u és vèrtex de tall, el nombre de components connexos de $G - u$ és almenys 2 i com a molt $g(u)$;

(2) si a és aresta pont, el nombre de components connexos de $G - a$ és exactament 2.

DEMOSTRACIÓ.

(1) Per la proposició 52, sabem que el nombre de components connexos de $G - u$ és com a molt $g(u)$. Per altra banda, per ser u vèrtex de tall d'un graf connex, el nombre de components connexos de $G - u$ és almenys 2.

(2) Per la proposició 53, sabem que el nombre de components connexos de $G - a$ és com a molt 2 i per ser a aresta pont, $G - a$ té almenys 2 components connexos.

□

Exercici. Considerem dos enters no negatius qualssevol r i s. És possible trobar un graf amb exactament r vèrtexs de tall i s arestes pont? És possible trobar un graf connex amb exactament r vèrtexs de tall i s arestes pont?

5.2.5 Connectivitat

Definició. Considerem un graf G connex no trivial. La *connectivitat per vèrtexs* o *vèrtex-connectivitat* de G, que denotarem $\kappa(G)$, és el mínim nombre de vèrtexs que cal suprimir del graf per a desconnectar-lo o reduir-lo al graf trivial. La *connectivitat per arestes* o *aresta-connectivitat* de G, que denotarem $\lambda(G)$, és el mínim nombre d'arestes que cal suprimir del graf per a desconnectar-lo. Si G és un graf no connex o trivial, llavors $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$.

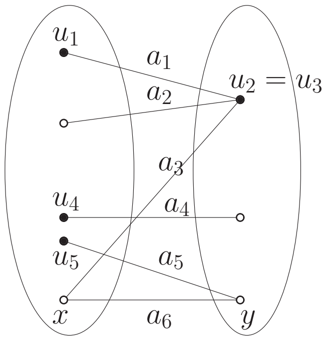
Teorema 3 (Whitney, 1932)**.** *Si G és un graf qualsevol, aleshores*

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

DEMOSTRACIÓ. Si G és un graf no connex o trivial, llavors $\kappa(G) = \lambda(G) = 0 \leq \delta(G)$. Suposem ara que G és un graf connex no trivial.

Un vèrtex u amb grau mínim δ queda aïllat al suprimir les δ arestes incidents amb u. Per tant, $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

Per a provar l'altra desigualtat, considerem un conjunt d'arestes S de cardinal r, $r = \lambda(G)$, tal que $G - S$ no sigui connex. Si $S = \{a_1, \ldots, a_r\}$, l'aresta a_r és aresta pont del graf connex $G - \{a_1, \ldots, a_{r-1}\}$ (si no fos connex, tindríem $\lambda(G) \leq r - 1$) i $G - S = (G - \{a_1, \ldots, a_{r-1}\}) - a_r$ té exactament dos components connexos. Suposem que $a_r = xy$. Per a cada aresta a_i, $1 \leq i \leq r - 1$, triem un vèrtex u_i incident amb a_i tal que $u_i \neq x, y$ (sempre és possible, ja que $a_i \neq a_r = xy$). El conjunt $W = \{u_1, \ldots, u_{r-1}\}$ té cardinal com a molt $r - 1$ (pot passar que triem un mateix vèrtex $u_i = u_j$ per a dues arestes a_i, a_j diferents).



$$S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$$

$$W = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$$
$$= \{u_1, u_2, u_4, u_5\}$$

El graf $G - W$ té ordre almenys 2, ja que x, y són vèrtexs de $G - W$.
Si $G - W$ no és connex, aleshores es satisfà

$$\kappa(G) \le |W| \le r - 1 < r = \lambda(G).$$

Si $G - W$ és connex d'ordre 2, llavors $G - (W \cup \{x\})$ és el graf trivial, i tenim que

$$\kappa(G) \le (r - 1) + 1 = r = \lambda(G).$$

Finalment, suposem que $G - W$ és un graf connex d'ordre almenys 3, es a dir, hi ha almenys un vèrtex z en $G - W$ diferent de x i de y. Observem que $G - W$ no conté cap de les arestes de $\{a_1, \ldots, a_{r-1}\}$, ja que tota aresta d'aquest conjunt té almenys un extrem a W. A més, el graf $G - S$ té exactament dos components connexos, un dels quals conté x i l'altre conté y. Si z és del mateix component connex que x en $G - S$, el graf $G - (W \cup \{x\})$ no és connex ja que aquest graf no conté cap de les arestes de S i per tant z i y queden desconnectats. Anàlogament, si z és del mateix component connex que y en $G - S$, el graf $G - (W \cup \{y\})$ no és connex ja que z i x queden desconnectats. Per tant,

$$\kappa(G) \le (r - 1) + 1 = r = \lambda(G).$$

□

Exemples.

(1) $\kappa(K_n) = \lambda(K_n) = \delta(K_n) = n - 1$, per a tot $n \ge 1$.

(2) $\kappa(P_n) = \lambda(P_n) = \delta(P_n) = 1$, per a tot $n \ge 2$.

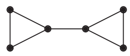
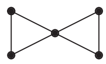
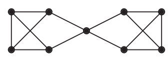
(3) $\kappa(C_n) = \lambda(C_n) = \delta(C_n) = 2$, per a tot $n \ge 3$.

(4) $\kappa(W_n) = \lambda(W_n) = \delta(W_n) = 3$, per a tot $n \ge 4$.

(5) $\kappa(K_{r,s}) = \lambda(K_{r,s}) = \delta(K_{r,s}) = s$, si $r \ge s \ge 1$.

(6) Si G és el graf de Petersen, $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G) = 3$.

(7) Es poden donar tots els casos possibles de desigualtat o igualtat a l'expressió de les desigualtats de Whitney. A la taula següent tenim exemples dels casos en que no són els tres valors iguals:

G	$\kappa(G)$	$\lambda(G)$	$\delta(G)$
	1	1	2
	1	2	2
	1	2	3

Definició. Un graf G és *k-connex* si $\kappa(G) \geq k$.

Observem que tot graf és 0-connex. Un graf és 1-connex si és connex no trivial, ja que equival a que la vèrtex-connectivitat no sigui 0. Un graf és 2-connex si la connectivitat no és ni 0, ni 1. Per tant, els grafs 2-connexos són tots els grafs connexos d'ordre $n \geq 3$ que no tenen vèrtexs de tall.

En general, un graf G connex no trivial d'ordre $n \geq 2$ és k-connex, $1 \leq k \leq n-1$, si, i només si, el graf que resulta de suprimir $k-1$ vèrtexs qualssevol és connex no trivial.

Enunciem a continuació alguns resultats interessants però no trivials sobre connectivitat. La demostració detallada es pot consultar a [2].

Teorema 4 (Menger, 1927)**.** *Considerem un parell de vèrtexs no adjacents u, v d'un graf G. El mínim nombre de vèrtexs que cal suprimir del graf per a desconnectar u i v és igual al màxim nombre de $u-v$ camins en G internament disjunts dos a dos.*

Teorema 5 (Whitney, 1932)**.** *Considerem un graf G d'ordre $n \geq 2$ i un enter k, $1 \leq k \leq n-1$. El graf G és k-connex si, i només si, per a qualsevol parell de vèrtexs diferents del graf existeixen almenys k camins internament disjunts dos a dos que els connecten.*

Teorema 6 (Dirac, 1960)**.** *Si G és un graf k-connex, amb $k \geq 2$, aleshores donats k vèrtexs qualssevol del graf existeix un cicle que els conté.*

El recíproc d'aquest últim resultat no és cert: el cicle C_n, $n \geq 3$, n'es un contraexemple, ja que per a qualsevol conjunt de n vèrtexs hi ha un cicle que els conté (el mateix graf) però $\kappa(C_n) = 2 < n$.

5.3 Arbres

5.3.1 Grafs acíclics

Definició. Un graf és *acíclic* si no conté cap subgraf isomorf a un cicle.

Proposició 59. *Si G és un graf acíclic d'ordre n i mida m, aleshores $m \leq n-1$.*

DEMOSTRACIÓ. Ho demostrarem per inducció sobre l'ordre de G.

Si $n = 1$ és cert, ja que l'únic graf acíclic d'ordre 1 és el graf trivial, d'ordre 1 i mida 0.

Suposem ara que $n \geq 2$ i el resultat és cert per a grafs acíclics d'ordre més petit que n. Considerem un graf acíclic G d'ordre n, $n \geq 2$. Si la mida de G és 0, la desigualtat és certa. Si la mida és almenys 1, prenem una aresta qualsevol a. Per ser G acíclic, a és aresta pont de G (ja que no és de cap cicle). El graf $G - a$ té, doncs, almenys dos components connexos que són grafs acíclics. Suposem que $G_1, \ldots, G_k$ són els components connexos de $G - a$. Si G_i te ordre n_i i mida m_i, aleshores $n_i < n$ i, per hipòtesi d'inducció, $m_i \leq n_i - 1$. Per tant,

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i + 1 \overset{\text{HI}}{\leq} \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) + 1 = \sum_{i=1}^{k} n_i - k + 1 = n - k + 1 \leq n - 1.$$

□

El recíproc del resultat anterior no és cert. El graf $C_3 \cup K_1$ és un contraexemple.

Corol·lari 5. *Un graf amb tots els vèrtexs de grau més gran o igual que 2 conté almenys un cicle.*

DEMOSTRACIÓ. Si el graf té ordre n i mida m, pel lema de les encaixades

$$m = \frac{1}{2} \sum_{u \in V} g(u) \geq \frac{1}{2} 2n = n > n - 1.$$

Per tant, no pot ser acíclic. □

El resultat anterior ens permet caracteritzar els grafs 2-regulars.

Corol·lari 6. *Un graf 2-regular és unió de cicles.*

DEMOSTRACIÓ. Considerem un component connex G' d'un graf 2-regular, G. Per la proposició anterior, el graf G' conté almenys un cicle. Tot vèrtex d'aquest cicle té grau exactament 2 i és adjacent a exactament dos vèrtexs del cicle, és a dir, no pot ser adjacent a cap altre vèrtex del graf. Aquest cicle ha de ser, doncs, un component connex del graf G, és a dir, G'. □

Corol·lari 7. *Els grafs connexos 2-regulars són els grafs cicle.*

5.3.2 Arbres

Definició. Un *arbre* és un graf connex i acíclic. Un *bosc* és un graf acíclic. Una *fulla* és un vèrtex de grau 1.

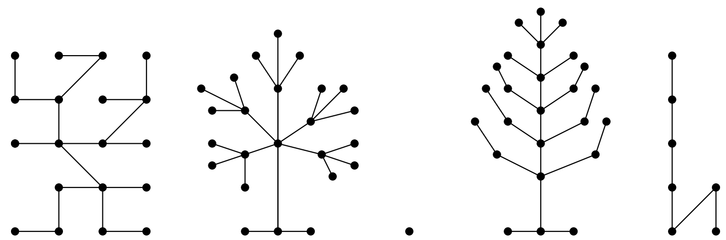


Figura 5.15: Un bosc amb 5 components connexos. Cada component connex és un arbre.

Propietats.

(1) Si T és un arbre d'ordre n i mida m, llavors $m = n - 1$.

(2) Els components connexos d'un bosc són arbres.

(3) Si G és un bosc d'ordre n i mida m amb k components connexos, llavors $m = n - k$.

(4) Tot arbre T d'ordre $n \geq 2$ té almenys dues fulles.

(5) Tot arbre és un graf bipartit.

Demostració.

(1) Per ser T connex, $m \geq n - 1$, i per ser acíclic, $m \leq n - 1$. Per tant, $m = n - 1$.

(2) Els components connexos d'un bosc són grafs connexos i acíclics, és a dir, arbres.

(3) Si G és un bosc, és unió dels seus components connexos, $G = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_k$, on cada component connex T_i és un arbre d'ordre n_i i mida $n_i - 1$. La mida de G és

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k = n - k.$$

(4) Suposem que $T = (V, A)$ és un arbre d'ordre n, $n \geq 2$, i mida m, $m = n - 1$. Per ser connex, no té vèrtexs de grau 0. Si n_1 és el nombre de vèrtexs de grau 1, pel lema de les encaixades,

$$2n - 2 = 2(n - 1) = 2m = \sum_{u \in V} g(u) = n_1 + \sum_{u : g(u) \neq 1} g(u) \geq n_1 + 2(n - n_1) = 2n - n_1.$$

Per tant, $n_1 \geq 2$.

(5) Un arbre no té cicles de longitud senar, ja que no té cicles. Per tant, és bipartit.

□

Proposició 60 (Caracterització dels arbres). *Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, aleshores són equivalents:*

(1) G és arbre;

(2) G és acíclic i $m = n - 1$;

(3) G és connex i $m = n - 1$;

(4) G és connex i tota aresta és pont;

(5) $\forall u, v \in V$, existeix un únic $u - v$ camí;

(6) G és acíclic i l'addició d'una aresta qualsevol crea exactament un cicle.

Demostració.

(1) ⇒ (2) Per definició, un arbre és un graf acíclic. Per altra banda, ja hem vist que en un arbre es satisfà $m = n - 1$.

(2) ⇒ (3) Suposem que G és acíclic i $m = n - 1$. Si G no fos connex, seria un bosc amb k components connexos, $k \geq 2$, és a dir, $m = n - k \neq n - 1$, contradicció.

(3) ⇒ (4) Si a no fos una aresta pont de G, $G - a$ seria un graf connex d'ordre n i mida $m(G - a) = m(G) - 1 = n - 2 < n - 1$, contradicció.

(4) ⇒ (5) Si G és connex, existeix un $u - v$ camí per a tot parell de vèrtexs u, v de G. Si hi hagués més d'un $u - v$ camí, el graf contindria un cicle i, per tant, alguna aresta que no seria pont.

(5) ⇒ (6) G és acíclic, ja que si G contingués algun cicle, hi hauria almenys dos camins diferents entre dos vèrtexs del cicle. Si $a = xy$ no és aresta de G, aleshores l'únic $x - y$ camí de G juntament amb l'aresta $a = xy$ és un cicle de $G + a$. Si el graf $G + a$ contingués almenys dos cicles diferents, els dos haurien de contenir l'aresta a (ja que en cas contrari hi hauria un cicle en el graf G, acíclic!) i al suprimir l'aresta $a = xy$ dels cicles s'obtindrien dos $x - y$ camins diferents.

(6) ⇒ (1) Cal veure que el graf G és connex. Considerem dos vèrtexs u, v qualssevol de G. Si uv és una aresta de G, existeix un $u - v$ camí en G. Si $a = uv$ no és aresta de G, $G + a$ conté un cicle que, per ser G acíclic, ha de contenir a. Si suprimim l'aresta a del cicle obtenim un $u - v$ camí en G. Per tant, G és connex. □

5.3.3 Arbres generadors

Definició. Un *arbre generador* d'un graf G és un subgraf generador de G que és arbre.

Exemple. Les arestes vermelles indueixen un arbre generador del graf de la figura. En total, el graf té 396 arbres generadors diferents (per què?).

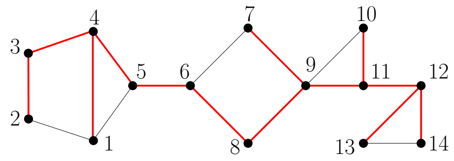


Figura 5.16: Les arestes vermelles indueixen un arbre generador del graf de la figura.

Proposició 61. *Un graf G té almenys un arbre generador si, i només si, G és connex.*

DEMOSTRACIÓ. Si un graf G té un arbre generador, és connex, ja que per a tot parell de vèrtexs hi ha un camí en l'arbre generador que els connecta i, per tant, un camí que els connecta en el graf G.

Suposem ara que G és un graf connex. El mateix graf G és un subgraf connex generador de G. Considerem un subgraf H connex i generador de G de mida mínima. Suposem que H no és arbre, és a dir, H conté algun cicle. Prenem una aresta a del cicle i considerem el subgraf $H' = H - a$. El subgraf H' és connex (ja que a no és aresta pont de H), generador de G (ja que té el mateix conjunt de vèrtexs que H i, per tant, de G) i de mida més petita que H. Això és una contradicció, ja que havíem considerat H subgraf connex generador de G de mida mínima. $\square$

Definició. La matriu $\mathbf{D} = (d_{ij})$ de graus d'un graf G amb conjunt de vèrtexs $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ és la matriu diagonal tal que l'element i-èsim de la diagonal principal és $d_{ii} = g(u_i)$. Una matriu d'*incidència orientada* d'un graf G d'ordre $n \geq 2$ i mida $m \geq 1$, és una matriu $n \times m$ que s'obté canviant a cada columna de la matriu d'incidència un 1 per un -1.

Propietats. Si $\mathbf{A}$ és la matriu d'adjacència, $\mathbf{M}$ és la matriu d'incidència, $\mathbf{N}$ una matriu d'incidència orientada i $\mathbf{D}$ la matriu de graus d'un graf G, obtingudes considerant l'ordenació $V = \{u_1, \ldots, u_n\}$ del conjunt de vèrtexs i l'ordenació $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ del conjunt d'arestes d'un graf $G = (V, A)$ d'ordre n i mida m, aleshores

(i) $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^T = \mathbf{D} + \mathbf{A}$;

(ii) $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^T = \mathbf{D} - \mathbf{A}$.

DEMOSTRACIÓ. L'element i-èsim de la diagonal de la matriu $\mathbf{D} + \mathbf{A}$ és el grau del vèrtex u_i, $g(u_i)$. Si $\mathbf{m}_{ij}$ és l'element de la fila i i columna j de la matriu $\mathbf{M}$, l'element i-èsim de la diagonal de la matriu $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^T$ és

$$(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^T)_{ii} = (\mathbf{m}_{i1}\, \mathbf{m}_{i2}\, \cdots\, \mathbf{m}_{im}) \begin{pmatrix} \mathbf{m}_{i1} \\ \mathbf{m}_{i2} \\ \vdots \\ \mathbf{m}_{im} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{m}_{ik}^2 = g(u_i),$$

ja que els elements de la fila $(\mathbf{m}_{i1}\, \mathbf{m}_{i2}\, \cdots\, \mathbf{m}_{im})$ són zeros o uns, i hi ha tants uns com el grau del vèrtex u_i.

Considerem ara $i \neq j$. L'element de la fila i i columna j de la matriu $\mathbf{D}+\mathbf{A}$ és 1 si u_i, u_j són adjacents, i 0 en cas contrari. Per altra banda, l'element de la fila i i columna j de la matriu $\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}^T$ és

$$(\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}^T)_{ij} = (\mathbf{m}_{i1}\, \mathbf{m}_{i2}\, \cdots\, \mathbf{m}_{im}) \begin{pmatrix} \mathbf{m}_{j1} \\ \mathbf{m}_{j2} \\ \vdots \\ \mathbf{m}_{jm} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{m}_{ik}\mathbf{m}_{jk}.$$

El producte $\mathbf{m}_{ik}\mathbf{m}_{jk}$ és diferent de zero si, i només si, $\mathbf{m}_{ik} = \mathbf{m}_{jk} = 1$, i això passa només quan u_i i u_j són incidents amb l'aresta a_k, és a dir, quan $a_k = u_i u_j$. Per tant, fixats i,j, com a molt un sumand de l'expressió $\sum_{k=1}^{m} \mathbf{m}_{ik}\mathbf{m}_{jk}$ és diferent de zero, i això passarà només quan u_i i u_j siguin adjacents. Conseqüentment, $\sum_{k=1}^{m} \mathbf{m}_{ik}\mathbf{m}_{jk}$ és 1 si u_i, u_j són adjacents, i 0 si no ho són.

La igualtat $\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}^T = \mathbf{D}-\mathbf{A}$ és demostra de manera anàloga. □

Definició. La matriu $\mathbf{Q} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{N}^T = \mathbf{D}-\mathbf{A}$ s'anomena *matriu laplaciana* de G.

El resultat següent, del qual ometem la demostració, ens dona una manera de calcular el nombre d'arbres generadors diferents d'un graf.

Teorema 7 (Matrix-tree Theorem)**.** *El nombre d'arbres generadors d'un graf G és igual al valor absolut del determinant de qualsevol matriu que s'obté al suprimir una fila i una columna de la matriu laplaciana* $\mathbf{Q}$.

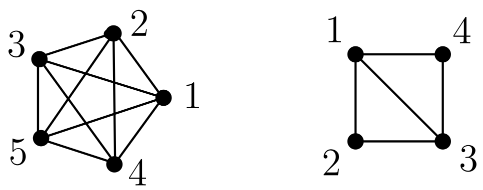


Figura 5.17: Els grafs de la figura tenen respectivament 125 i 8 arbres generadors diferents.

Exemples.

(1) Considerem el graf complet K_5 amb conjunt de vèrtexs $V = [5]$. La matriu laplaciana és

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}-\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

El nombre d'arbres generadors de K_5 és

$$\left|\det\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\right| = 125.$$

(2) Considerem el graf $G = ([4], \{12, 23, 34, 14, 13\})$. La matriu laplaciana de G és

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El nombre d'arbres generadors de G és

$$\left|\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right| = 8.$$

5.3.4 Enumeració d'arbres

Teorema 8 (Cayley, 1889)**.** *Hi ha n^{n-2} arbres diferents amb conjunt de vèrtexs $V = [n]$.*

Demostració. Per a $n = 1, 2$ el resultat és cert. Per a demostrar el resultat anterior quan $n \geq 3$ definirem la Seqüència de Prüfer d'un arbre, que ens donarà una bijecció entre el conjunt de tots els arbres diferents amb conjunt de vèrtexs $V = [n]$ i les paraules de longitud $n-2$ en l'alfabet $[n]$. Per tant, hi haurà n^{n-2} arbres diferents amb conjunt de vèrtexs $V = [n]$.

Seqüència de Prüfer d'un arbre T. [Prüfer, 1918] Si T és un arbre d'ordre $n \geq 3$ amb conjunt de vèrtexs $V = [n]$, la *seqüència de Prüfer de T* és la paraula

$$\mathcal{P}(T) = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-2})$$

de $n-2$ nombres del conjunt $V = [n]$ definida recursivament:

(i) y_1 és l'únic vèrtex adjacent a la fulla x_1 de valor mínim de l'arbre $T_1 = T$;

(ii) y_k és l'únic vèrtex adjacent a la fulla x_k de valor mínim de l'arbre $T_k = T_{k-1} - x_{k-1}$, per a tot k, $2 \leq k \leq n-2$.

Observem que la seqüència de Prüfer d'un arbre és única i per tant ens permet definir una aplicació del conjunt de tots els arbres amb conjunt de vèrtexs $V = [n]$ en el conjunt de paraules de longitud $n-2$ i alfabet $[n]$, assignant a cada arbre T la seva seqüència de Prüfer, $\mathcal{P}(T)$.

Propietats de la seqüència de Prüfer.

Si definim $T_{n-1} = T_{n-2} - x_{n-2}$, tenim que T_{n-1} és un arbre d'ordre 2 amb una única aresta $x_{n-1}y_{n-1}$, on $x_{n-1} < y_{n-1}$. Les propietats següents són immediates:

(1) (a) $y_{n-1} = n$;
(b) $A(T) = \{x_i y_i \mid 1 \leq i \leq n-1\}$;
(c) $V(T) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, n\}$;
(d) $i \in V(T)$ apareix $g(i) - 1$ vegades a $\mathcal{P}(T)$;
(e) $i \in V(T)$ no apareix a $\mathcal{P}(T) \Leftrightarrow i$ és una fulla de T;

(2) $\forall k \geq 1$, T_k és un arbre d'ordre $n-k+1$ i mida $n-k$ tal que:

(a) $\mathcal{P}(T_k) = (y_k, y_{k+1}, \ldots, y_{n-2})$;
(b) $A(T_k) = \{x_i y_i \mid k \leq i \leq n-1\}$;
(c) $V(T_k) = V \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$;
(d) $i \in V(T_k)$ apareix $g_{T_k}(i) - 1$ vegades a $\mathcal{P}(T_k)$;
(e) $i \in V(T_k)$ no apareix a $\mathcal{P}(T_k) \Leftrightarrow i$ és una fulla de T_k.

Reconstrucció d'un arbre a partir de la seqüència de Prüfer. Si la seqüència de Prüfer d'un arbre $T = (V, A)$ tal que $V = [n]$ és $\mathcal{P}(T) = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-2})$ podem determinar el conjunt d'arestes de l'arbre $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ recursivament:

$$a_1 = x_1 y_1, \text{ on } x_1 = \min([n] \setminus \{y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}\});$$

$$a_k = x_k y_k, \text{ on } x_k = \min([n] \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y_k, \ldots, y_{n-2}\}), \text{ si } 2 \leq k \leq n-2;$$

$$a_{n-1} = x_{n-1} n, \text{ on } x_{n-1} = \min([n] \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}\}).$$

Exemple. Quin és l'arbre T que té seqüència de Prüfer $\mathcal{P}(T) = (3, 2, 5, 5, 8, 2, 4)$?

La seqüència donada té longitud 7, per tant T és un arbre d'ordre 9 i mida 8 amb conjunt de vèrtexs $V = [9]$. Les arestes de l'arbre T són $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$, on:

$$\begin{array}{lll}
y_1 = 3, & x_1 = \min([9] \setminus \{3,2,5,5,8,2,4\}) = \min\{1,6,7,9\} = 1, & a_1 = 13 \\
y_2 = 2, & x_2 = \min([9] \setminus \{1,2,5,5,8,2,4\}) = \min\{3,6,7,9\} = 3, & a_2 = 23 \\
y_3 = 5, & x_3 = \min([9] \setminus \{1,3,5,5,8,2,4\}) = \min\{6,7,9\} = 6, & a_3 = 56 \\
y_4 = 5, & x_4 = \min([9] \setminus \{1,3,6,5,8,2,4\}) = \min\{7,9\} = 7, & a_4 = 57 \\
y_5 = 8, & x_5 = \min([9] \setminus \{1,3,6,7,8,2,4\}) = \min\{5,9\} = 5, & a_5 = 58 \\
y_6 = 2, & x_6 = \min([9] \setminus \{1,3,6,7,5,2,4\}) = \min\{8,9\} = 8, & a_6 = 28 \\
y_7 = 4, & x_7 = \min([9] \setminus \{1,3,6,7,5,8,4\}) = \min\{2,9\} = 2, & a_7 = 24 \\
y_8 = 9, & x_8 = \min([9] \setminus \{1,3,6,7,5,8,2\}) = \min\{4,9\} = 4, & a_8 = 49
\end{array}$$

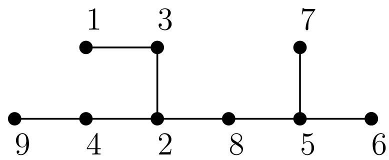


Figura 5.18: La seqüència de Prüfer de l'arbre de la figura és $(3, 2, 5, 5, 8, 2, 4)$.

Aquest procés de reconstrucció ens indica que per a tota paraula de longitud $n-2$ en l'alfabet n existeix un arbre, i només un, tal que la seva seqüència de Prüfer és la paraula considerada. Per tant, l'aplicació $\mathcal{P}$ és bijectiva. $\square$

El teorema anterior és equivalent a que per a tot $n \geq 1$, el graf complet K_n amb conjunt de vèrtexs $V = [n]$ té n^{n-2} arbres generadors diferents i es pot demostrar utilitzant el Matrix Tree Theorem, ja que equival a comptar el nombre d'arbres generadors diferents de K_n. La matriu Laplaciana de K_n és la matriu quadrada d'ordre n:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

El nombre d'arbres generadors de K_n, $\tau(K_n)$, és el determinant de la matriu que s'obté suprimint una fila i una columna de l'anterior, és a dir:

$$\tau(K_n) = \left| \det \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix} \right|$$

on la matriu té exactament $n-1$ files. Per a calcular aquest determinant sumem a la primera fila la resta de files i després restem a cada columna la primera columna:

$$\begin{aligned} \tau(K_n) &= \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & n & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix} \right| \\ &= n^{n-2}. \end{aligned}$$

5.4 Grafs eulerians i hamiltonians

5.4.1 Grafs eulerians

Definicions. Considerem un graf G connex no trivial. Un *senderó eulerià* és un senderó obert que conté totes les arestes de G. Un *circuit eulerià* és un circuit que conté totes les arestes de G. El graf G és *eulerià* si té almenys un circuit eulerià.

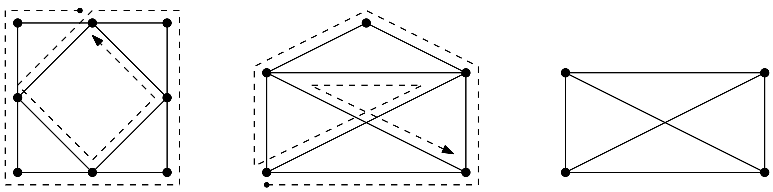


Figura 5.19: D'esquerra a dreta, un graf eulerià, un graf que conté un senderó eulerià i un graf no eulerià que no conté cap senderó eulerià

Proposició 62. *Si $G = (V, A)$ és un graf connex no trivial, són equivalents:*

(1) G és eulerià.

(2) Tot vèrtex de G té grau parell.

(3) Existeix una partició $\{A_i : i \in [r]\}$ del conjunt d'arestes de manera que el subgraf generat per A_i és un cicle, per a tot $i \in [r]$.

Demostració. Suposem que $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m.

(1) $\Rightarrow$ (2) Considerem un circuit eulerià del graf G,

$$u_0, a_1, u_1, a_2, u_2, a_3, u_3, \ldots, u_{m-2}, a_{m-1}, u_{m-1}, a_m, u_m$$

on $u_0 = u_m$ i $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Per ser G connex no trivial, tot vèrtex és incident a almenys una aresta, de manera que tot vèrtex del graf és d'aquest circuit. Hi ha tantes arestes incidents a un vèrtex u, com el doble del nombre de vegades que apareix el vèrtex a la successió $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$, ja que en el circuit apareixen totes les arestes una vegada i només una, i tot vèrtex u_i és incident a les dues arestes veïnes a_i i a_{i+1}, excepte el vèrtex $u_0 = u_m$ que és incident a les arestes a_1 i a_{m-1}. És a dir, tot vèrtex té grau parell.

(2) $\Rightarrow$ (3) Per inducció sobre m, $m \geq 3$. Si G és un graf connex de mida 3 amb tots els vèrtexs de grau parell, ha de ser el graf cicle, C_3, i la partició del conjunt d'arestes té només una part que conté les tres arestes.

Suposem ara que tenim un graf connex no trivial de mida m, $m \geq 4$, amb tots els vèrtexs de grau parell. El graf ha de contenir almenys un cicle, C'. Suposem que A' és el conjunt d'arestes del cicle C'. Considerem el graf G' generat per $A \setminus A'$. Tots els vèrtexs del graf G' tenen grau parell, ja que el grau d'un vèrtex de G' és el mateix que en el graf G, si el vèrtex no és del cicle C', i dues unitats menys que el grau en el graf G, si el vèrtex és del cicle C'. Per hipòtesi d'inducció, cadascun dels conjunts d'arestes dels components connexos no trivials del graf G' admet una partició en parts que indueixen cicles. La partició formada per totes les parts obtingudes, juntament amb el conjunt A', és una partició de A que satisfà les condicions de l'enunciat.

(3) $\Rightarrow$ (1) Construirem un circuit eulerià a partir de la partició $\{A_i : i \in [r]\}$. Sabem que $A = \cup_{i\in[r]} A_i$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$. Les arestes de A_1 determinen un cicle, C_1, que comença i acaba en un vèrtex u i conté les arestes de A_1 una vegada i només una. Per ser el graf G connex, almenys una aresta a_1, $a_1 \in A \setminus A_1$, ha de ser incident a un vèrtex u_1 del cicle C_1. Suposem que $a_1 \in A_{i_2}$. Considerem el circuit C_2 que consisteix en recórrer el circuit C_1 fins arribar al vèrtex u_1, a continuació el cicle induït per A_{i_2} que comença i acaba en u_1, i després el que queda del circuit C_1. Obtenim un circuit que conté les arestes de $A_1 \cup A_{i_2}$. Per ser el graf G connex, almenys una aresta a_2, $a_2 \in A \setminus A_1 \cup A_{i_2}$, ha de ser incident a un vèrtex u_2 del circuit C_2. Suposem que $a_2 \in A_{i_3}$. Construïm un circuit C_3 que conté les arestes de $A_1 \cup A_{i_2} \cup A_{i_3}$ de manera similar i repetim el procés fins tenir un circuit que conté totes les arestes de G. $\square$

Proposició 63. *Si G és un graf connex no trivial, G té un senderó eulerià si, i només si, té exactament dos vèrtexs de grau senar.*

Demostració. Suposem que $G = (V, A)$ conté un senderó eulerià S que comença al vèrtex u i acaba al vèrtex v, $u \neq v$. Considerem el graf G' que s'obté a l'afegir un nou vèrtex x, $x \notin V$, adjacent als vèrtex u i v. És a dir, $G' = (V', A')$ on $V' = V \cup \{x\}$ i $A' = A \cup \{xu, xv\}$. El graf G' és eulerià, ja que podem allargar el senderó S amb les arestes vx i xu fins tenir un circuit eulerià en G'. El graf G' té, doncs, tots els vèrtexs de grau parell. Si g i g' denota el grau d'un vèrtex de V en G i G' respectivament, aleshores $g'(u) = g(u) + 1$, $g'(v) = g(v) + 1$ i $g'(z) = g(z)$, si $z \in V$, $z \neq u, v$. Per tant, els vèrtexs u, v tenen grau senar en G i la resta de vèrtexs de V tenen grau parell en G.

Recíprocament, suposem que $G = (V, A)$ té exactament dos vèrtexs de grau senar, $u, v \in V$. Considerem, com al paràgraf anterior, el graf G' que s'obté a l'afegir un nou vèrtex x, $x \notin V$, adjacent als vèrtex u i v. Aleshores, $g'(u) = g(u) + 1$, parell; $g'(v) = g(v) + 1$, parell; $g'(z) = g(z)$, parell, si $z \in V$ i $z \neq u, v$; $g(x) = 2$. Per tant, tot vèrtex de G' té grau parell, de manera que G' és eulerià. Considerem un circuit eulerià en G', C. Podem suposar que el circuit comença i acaba al vèrtex x. Si suprimim x juntament amb la primera i última aresta del circuit, obtenim un senderó eulerià que comença i acaba als vèrtexs u, v. $\square$

El resultats anteriors valen també per a multigrafs.

Si $G = (V, A)$ és un graf eulerià, per a construir un circuit eulerià

$$u_0, a_1, u_1, a_2, u_2, \ldots, u_{m-1}, a_m, u_m \ , \text{ on } u_0 = u_m,$$

podem utilitzar l'algorisme de Fleury. Comencem el circuit a qualsevol vèrtex $u_0 \in V$ i afegim arestes diferents a cada pas amb una sola restricció: l'aresta a_i no pot ser aresta pont del graf $G - \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}$, excepte si és l'única aresta de $A \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}$ incident al vèrtex u_{i-1}.

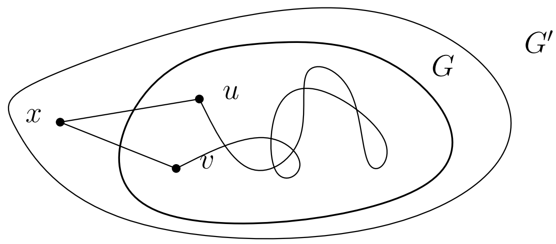


Figura 5.20: El graf G conté un senderó eulerià si, i només si, G' és eulerià

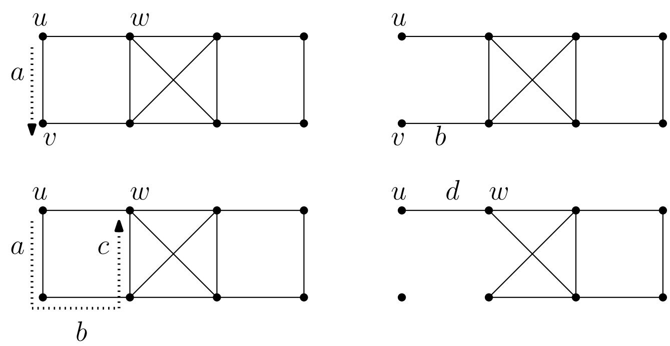


Figura 5.21: Si el circuit comença amb u, a, v, la següent aresta ha de ser b, ja que tot i ser pont en $G - a$, es l'única aresta disponible. Després podem continuar el circuit amb l'aresta c, ja que no és pont en $G - \{a, b\}$. Després de recórrer a, b, c, no podem continuar el circuit amb l'aresta d perquè és pont en $G - \{a, b, c\}$ i n'hi ha d'altres disponibles.

Si un graf té exactament dos vèrtexs de grau senar, podem aplicar el mateix algorisme començant en un dels dos vèrtexs de grau senar per a trobar un senderó eulerià.

5.4.2 Grafs hamiltonians

Definicions. Considerem un graf G. Un *camí hamiltonià* és un camí que conté tots els vèrtexs de G. Un *cicle hamiltonià* és un cicle que conté tots els vèrtexs de G. El graf G és *hamiltonià* si conté almenys un cicle hamiltonià.

No hi ha relació entre graf eulerià i hamiltonià, com podem veure a la figura següent.

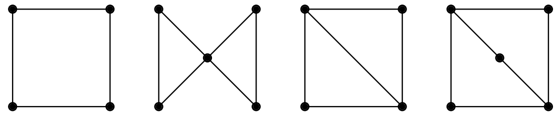


Figura 5.22: Exemple de graf eulerià i hamiltonià; eulerià no hamiltonià; hamiltonià no eulerià; ni eulerià ni hamiltonià.

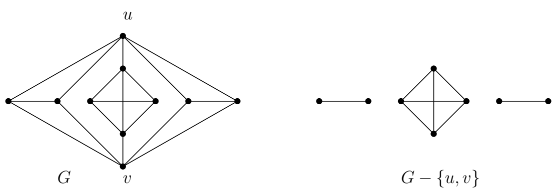


Figura 5.23: El graf de la figura no és hamiltonià, ja que al suprimir els 2 vèrtexs u, v s'obtenen 3 components connexos.

Propietats.

(1) Tot graf hamiltonià és connex.

(2) Un graf hamiltonià es pot representar amb tots els vèrtexs situats sobre una circumferència formant un cicle, i la resta d'arestes com a cordes de la circumferència.

(3) Tot graf hamiltonià té grau mínim almenys 2.

(4) Un graf hamiltonià no conté ni vèrtexs de tall ni arestes pont.

(5) Tot graf hamiltonià és 2-connex.

(6) Si un graf és hamiltonià, al suprimir $k \geq 1$ vèrtexs qualssevol de G s'obtenen com a molt k components connexos.

(7) Si G és un graf hamiltonià i u és un vèrtex de grau 2, llavors les dues arestes incidents a u són de qualsevol cicle hamiltonià.

(8) Si G és un graf hamiltonià i u un vèrtex de grau almenys 3, llavors un cicle hamiltonià conté exactament dues de les arestes incidents amb u.

Exemple. El graf de Petersen no és hamiltonià.
DEMOSTRACIÓ. Considerem el graf de Petersen de la figura i suposem que conté un cicle hamiltonià, C, d'ordre 10. Sigui C_u el cicle induït per $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$. Tot vèrtex u_i és incident a dues arestes del cicle hamiltonià i, per tant, a almenys una de les dues arestes de C_u incidents a u_i. Per tant, el cicle C ha de contenir almenys tres arestes del cicle C_u. Per altra banda, el cicle hamiltonià no pot contenir les cinc arestes de C_u, ja que un cicle no conté mai un cicle de longitud més petita.

Suposem que el cicle hamiltonià conté exactament 4 arestes del cicle C_u i que l'aresta u_1u_5 no és del cicle hamiltonià. En aquest cas, les arestes u_1v_1 i u_5v_5 han de ser de C. A més, les arestes v_1v_3 i v_5v_3 han de ser de C, ja que u_3v_3 no pot ser de C. Obtenim que C ha de contenir un cicle de longitud 8, contradicció.

Suposem que el cicle hamiltonià conté exactament 3 arestes del cicle C_u. No poden ser consecutives en C_u, ja que hi hauria un vèrtex u_i incident a dues arestes de C_u que no serien del cicle hamiltonià. Podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que les arestes u_3u_4 i u_1u_5 no són del cicle hamiltonià. En aquest cas, les arestes u_4v_4 i u_5v_5 han de ser C i l'aresta u_2v_2 no pot ser de C, de manera que C ha de contenir v_2v_4 i v_2v_5. Obtenim que C conté un cicle d'ordre 5, contradicció. $\square$

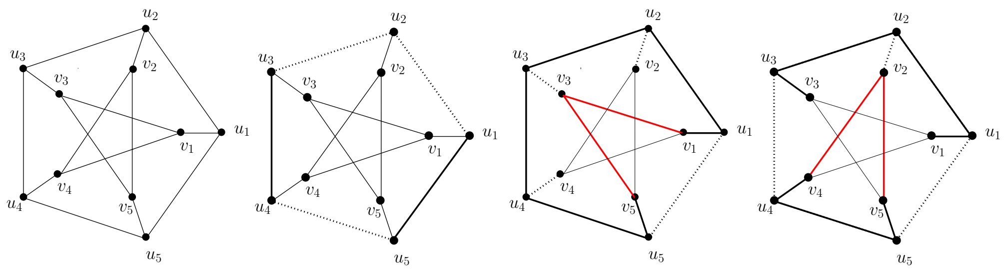


Figura 5.24: D'esquerra a dreta, el graf de Petersen; no és possible construir un cicle hamiltonià que contingui com a molt 2 arestes del cicle exterior; ni que contingui exactament 4 arestes del cicle exterior; ni que contingui exactament 3 arestes del cicle exterior

Proposició 64. *Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n, $n \geq 3$, i u, v dos vèrtexs diferents no adjacents tals que $g(u) + g(v) \geq n$, aleshores G és hamiltonià si, i només si, $G + uv$ és hamiltonià.*

DEMOSTRACIÓ. Evidentment, si G és hamiltonià també ho és $G + uv$.

Per a demostrar el recíproc, suposem que $G + uv$ és hamiltonià i G no és hamiltonià. Un cicle hamiltonià C de $G + uv$ ha de contenir l'aresta uv, ja que en cas contrari tindríem un cicle hamiltonià en G. Si suprimim l'aresta uv de C obtenim un $u - v$ camí hamiltonià en G, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on $x_1 = u$, $x_n = v$ i $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$. A més, si u és adjacent a x_i, aleshores v no pot ser adjacent a x_{i-1} en G, ja que en cas contrari

$$x_1(= u), \ldots, x_{i-1}, x_n(= v), x_{n-1}, \ldots, x_i, x_1(= u)$$

seria un cicle hamiltonià en G. Per tant, $g(v) \leq n - 1 - g(u)$, és a dir $g(u) + g(v) \leq n - 1 < n$, contradicció. □

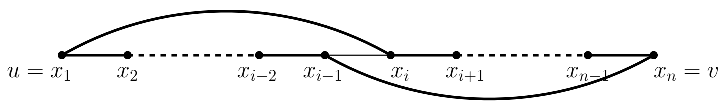


Figura 5.25: Si u fos adjacent a x_i i v a x_{i-1} hi hauria un cicle hamiltonià en G

Proposició 65. *Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n, $n \geq 3$, tal que per a qualsevol parell de vèrtexs u, v diferents i no adjacents es satisfà $g(u) + g(v) \geq n$, llavors G és hamiltonià.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem que G no és hamiltonià. Si afegim successivament arestes entre parells de vèrtexs no adjacents en G obtenim el graf complet, que és hamiltonià. És a dir, en algun moment passarem de tenir un graf no hamiltonià a tenir un graf hamiltonià afegint una aresta entre dos vèrtexs no adjacents tals que la suma dels graus és almenys n, i això contradiu la proposició anterior. □

Exemple. La desigualtat de l'enunciat de la proposició anterior es ajustada, és a dir, es poden trobar grafs no hamiltonians tals que $g(u) + g(v) \geq n - 1$ per a tot parell de vèrtexs no adjacents. Per exemple, el graf $G = K_1 + (K_{\frac{n}{2}} \cup K_{\frac{n}{2}-1})$, si n és parell, i $G = K_1 + (K_{\frac{n-1}{2}} \cup K_{\frac{n-1}{2}})$, si n és senar.

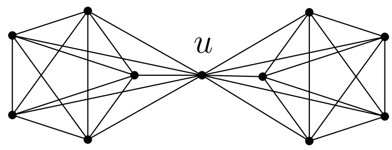


Figura 5.26: El graf de la figura té ordre 11, la suma dels graus de 2 vèrtexs no adjacents és 10 i no és hamiltonià.

Corol·lari 8. *Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre $n \geq 3$ tal que $g(u) \geq n/2$, per a tot $u \in V$, llavors G és hamiltonià.*

El recíproc no és cert: el graf cicle C_n, $n \geq 5$, és un contraexemple.

5.5 Planaritat, coloració i emparellaments

5.5.1 Planaritat

Tot graf es pot representar a l'espai de manera que les arestes no es creuin: considerem una recta i tants plans diferents que continguin la recta com arestes. Representem els vèrtexs a la recta i cada aresta en un pla diferent. En canvi no sempre és possible fer-ho al pla.

Definicions. Una *representació plana* d'un graf G és una representació del graf al pla de manera que identifiquem cada vèrtex amb un punt del pla, i cada aresta amb una línia contínua que uneix els vèrtexs corresponents de forma que les arestes no es tallin. Un graf G és *planari* si admet una representació plana.

Si tenim una representació plana d'un graf, els punts que representen els vèrtexs i les arestes delimiten diferents regions del pla. Una *cara* és una regió connexa maximal del pla que no conté cap punt utilitzat en la representació d'un vèrtex o d'una aresta. És a dir, dos punts del pla són d'una mateixa cara si, i només si, es poden unir amb una línia contínua que no passi per punts que representin vèrtexs o arestes. Tota representació plana d'un graf planari té una cara d'àrea no finita, que anomenarem cara *infinita*. Una cara finita està limitada per almenys 3 arestes. La cara infinita pot estar limitada per menys de 3 arestes, però això només és possible si el graf només té una cara, la cara infinita, i té mida com a molt 2, és a dir, el graf ha de ser K_2, P_3 o $K_2 \cup K_2$ a més de possibles vèrtexs aïllats. Una aresta pot limitar una o dues cares. Les úniques arestes que limiten una sola cara, són les arestes pont.

La fórmula d'Euler ens dóna la relació entre l'ordre, la mida i el nombre de cares d'un graf connex planari.

Teorema 9 (Euler, 1758). *Si c és el nombre de cares d'una representació plana d'un graf connex d'ordre n i mida m, aleshores $c + n = m + 2$.*

DEMOSTRACIÓ. Ho demostrarem per inducció sobre la mida del graf. Si el graf té mida 0, ha de ser el graf trivial, que té una cara i un vèrtex, de manera que es satisfà la fórmula. Suposem ara que tenim un graf connex de mida m, $m \geq 1$, i que el resultat és cert per a grafs de mida més petita que m. Si el graf no té cicles, es tracta d'un arbre, que té només una cara i $m = n - 1$. Per tant, el resultat és cert. Si el graf té algun cicle, considerem una aresta a d'un cicle. El graf $G - a$ és connex de mida $m - 1$. Per hipòtesi d'inducció, si el nombre de cares de $G - a$ és c', tenim que $c' + n = m - 1 + 2$. Per altra banda, el nombre c de cares del graf G satisfà $c = c' + 1$. Si ho substituïm a l'equació anterior obtenim $c + n = m + 2$. □

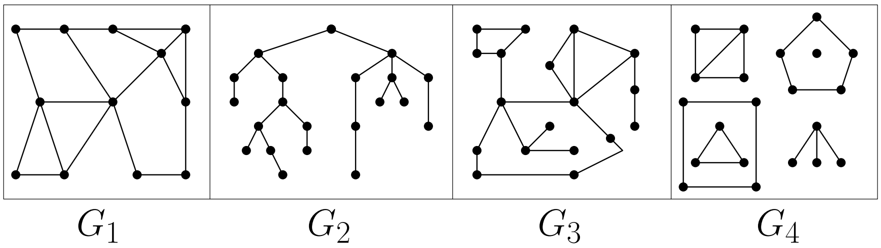


Figura 5.27: Es pot comprovar per als 4 grafs de la figura que es satisfà $c+n = m+k+1$, on c és el nombre de cares, n l'ordre, m la mida i k el nombre de components connexos.

Corol·lari 9. *Si c és el nombre de cares d'una representació plana d'un graf d'ordre n i mida m que té exactament k components connexos, aleshores $c + n = m + k + 1$.*

DEMOSTRACIÓ. Si el graf G té k components connexos, G_i, $i \in [k]$, d'ordre n_i, mida m_i i amb c_i cares, aleshores

$$c_i + n_i = m_i + 2$$

per a tot i, $i \in [k]$. El graf G satisfà

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i\,,\ m = \sum_{i=1}^{k} m_i\,,\ c = \sum_{i=1}^{k} c_i - (k-1),$$

per tant,

$$c = \sum_{i=1}^{k} (m_i + 2 - n_i) - (k-1) = m + 2k - n - (k-1),$$

d'on deduïm $c + n = m + k + 1$. □

Corol·lari 10. *Si G és un graf planari d'ordre n, $n \geq 3$, i mida m, aleshores $m \leq 3n-6$.*

Demostració. Suposem primer que el graf G és connex. Si el graf té mida com a molt 3, és cert. Suposem que $m \geq 4$. Si tenim una representació plana de G, aleshores $c + n = m + 2$. Per altra banda, si numerem les cares de la representació plana de 1 a c i f_i representa el nombre d'arestes que limiten la cara i, tenim que

$$3c \leq \sum_{i=1}^{c} f_i \leq 2m$$

ja que cada cara està limitada per almenys tres arestes i cada aresta limita com a molt dues cares. Per tant, $3(m + 2 - n) \leq 2m$, d'obtenim $m \leq 3n - 6$.

Si el graf planari no és connex, podem afegir arestes entre les diferents representacions planes dels components connexos de manera que s'obtingui una representació plana d'un graf G' connex d'ordre n i mida m', $m' \geq m$, que satisfà $m' \leq 3n - 6$. Per tant, $m \leq 3n - 6$. $\square$

Corol·lari 11. *Un graf planari té almenys un vèrtex de grau com a molt* 5.

Demostració. Si el graf té ordre 1 o 2 és evident. Suposem ara que el graf té ordre n, $n \geq 3$, i mida m. Si tot vèrtex del graf tingués grau almenys 6, pel lema de les encaixades seria

$$6n \leq \sum_{u \in V} g(u) = 2m \leq 2(3n - 6) = 6n - 12,$$

contradicció. $\square$

Corol·lari 12. *El graf K_5 no és planari.*

Demostració. Si fos planari, hauria de ser $10 = m \leq 3n - 6 = 9$, contradicció. $\square$

Corol·lari 13. *El graf $K_{3,3}$ no és planari.*

Demostració. Si fos planari, cada cara estaria limitada per almenys 4 arestes, ja que el graf no conté cicles de longitud senar. Si numerem les cares de 1 a c i f_i representa el nombre d'arestes que limiten la cara i, $i \in [c]$, aleshores

$$4c \leq \sum_{i=1}^{c} f_i \leq 2m.$$

Per altra banda, la fórmula d'Euler ens indica que hauria de tenir $c = m + 2 - n = 9 + 2 - 6 = 5$ cares, de manera que hauria de ser $4c = 4 \cdot 5 \leq 2 \cdot 9 = 18$, contradicció. $\square$

El graf K_5 és el graf no planari d'ordre mínim i el graf $K_{3,3}$ és el graf no planari de mida mínima. Els grafs planaris estan caracteritzats en funció de si contenen o no aquests subgrafs de determinada manera [Kuratowski, 1930]. Enunciarem una caracterització equivalent. Direm que un graf G és *contraïble* a H si H es pot obtenir de G per mitjà de successives contraccions d'arestes.

Teorema 10. *Un graf G és un graf planari si, i només si, no conté cap subgraf contraïble ni a K_5 ni a $K_{3,3}$.*

Exemple. El graf de Petersen no és planari, ja que és contraïble a K_5.

Altres resultats coneguts sobre planaritat són els següents.

Teorema 11 (Fáry, 1948)**.** *Tot graf planari admet una representació plana de forma que totes les arestes siguin segments rectilinis.*

Teorema 12 (Schnyder, 1990)**.** *Tot graf planari d'ordre n admet una representació plana de forma que els punts siguin elements de la graella $[n-1] \times [n-1]$ i totes les arestes siguin segments rectilinis.*

Exercici. Doneu una representació plana del graf G obtingut al suprimir una aresta de K_5 de manera que els vèrtexs siguin punts de la graella $[4] \times [4]$ i les arestes siguin segments rectilinis.
Solució. Identifiquem els extrems de l'aresta que suprimim amb els punts $(1,1)$ i $(3,3)$ i la resta de vèrtexs, amb els punts $(2,2)$, $(3,4)$ i $(4,3)$.

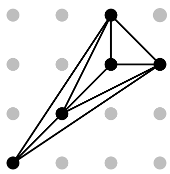


Figura 5.28: Una representació del graf que s'obté al suprimir una aresta de K_5 segons el teorema de Schnyder.

Un políedre determina un graf connex planari, per tant el nombre de cares, arestes i vèrtexs d'un políedre satisfan la fórmula d'Euler. Es pot demostrar utilitzant grafs que com a molt hi ha cinc sòlids platònics, el tetràedre, el cub, l'octàedre, el dodecàedre i l'icosàedre.

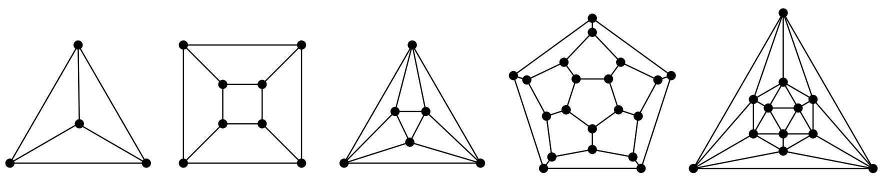


Figura 5.29: Representació plana dels grafs tetràedre, cub, octàedre, dodecàedre i icosàedre.

Exercici. [Pilota de futbol] Demostreu que si tot vèrtex d'un graf planari connex té grau 3 i totes les cares són pentàgons o hexàgons, aleshores el graf té exactament 12 pentàgons.

Solució. Suposem que el graf té ordre n, mida m, c cares de les quals p són pentàgons i h, hexàgons. Pel lema de les encaixades, $2m = \sum_{u \in V} g(u) = 3n$. Per la fórmula d'Euler, $c + n = m + 2$. A més, $c = p + h$ i si comptem el nombre d'arestes que limiten les cares, obtenim $2m = 5p + 6h$, ja que no hi ha arestes pont. Si eliminen h d'aquestes dues últimes equacions obtenim $p = 6c - 2m$. Substituïm en aquesta expressió c en funció de l'ordre i la mida (fórmula d'Euler) i obtenim $p = 4m - 6n + 12$. Finalment, per ser $2m = 3n$, obtenim $p = 12$.
Observació. La pilota de futbol té concretament 12 pentàgons i 20 hexàgons. De fet, correspon a un icosaedre truncat: un icosaedre té 20 cares triangulars i 12 vèrtexs, i a cada vèrtex incideixen exactament 5 triangles. Si trunquem tots els vèrtexs, obtenim un pentàgon per a cadascun dels 12 vèrtexs i les 20 cares de l'icosaedre passen a ser hexàgons.

Si un graf no és planari, podem considerar representacions amb el mínim nombre possible d'encreuaments.

Definició. El *nombre d'encreuaments* d'un graf G, $\text{cross}(G)$, és el mínim natural k, $k \geq 0$, tal que el graf admet una representació al pla amb k encreuaments de les arestes.

Per tant, un graf G és planari si, i només si, $\text{cross}(G) = 0$. Per a trobar una fita inferior del nombre d'encreuaments d'un graf d'ordre n, $n \geq 3$, i mida m, observem que podem suprimir $\text{cross}(G)$ arestes de G fins obtenir un graf planari G' de mida $m - \text{cross}(G)$ que satisfà $m - \text{cross}(G) \leq 3n - 6$, és a dir

$$\text{cross}(G) \geq m - 3n + 6.$$

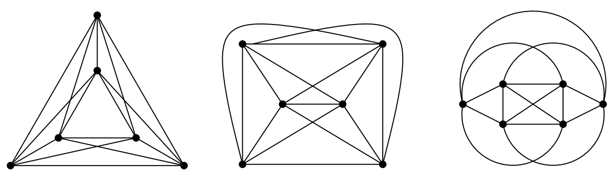


Figura 5.30: El graf complet K_6 es pot dibuixar amb 3 encreuaments.

Exemple. El nombre d'encreuaments de K_6 és 3, ja que $\text{cross}(K_6) \geq 15 - 3 \cdot 6 + 6 = 3$ i es pot trobar una representació al pla amb només 3 encreuaments.

En general per a tot graf G d'ordre n i mida m es satisfà

$$\text{cross}(G) \geq m - 3n,$$

ja que per a $n \geq 3$,

$$\text{cross}(G) \geq m - 3n + 6 \geq m - 3n$$

i si $n \leq 2$, el graf ha de ser K_1, K_2 o N_2 i en els tres casos es cert.

El resultat següent ens dóna una fita inferior del nombre d'encreuaments per a determinats grafs.

Proposició 66 (Lema dels encreuaments). *Si $G = (V, A)$ és graf d'ordre n i mida m tal que $m \geq 4n$, aleshores*

$$\mathit{cross}(G) \geq \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2}.$$

DEMOSTRACIÓ. Considerem una representació plana de G amb $\text{cross}(G)$ encreuaments. Considerem l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tal que els elements de Ω són tots els subgrafs induïts de G, és a dir, Ω conté tants elements com subconjunts S de V. La probabilitat d'un element de Ω està determinada tenint en compte que triem els vèrtexs de V de manera independent amb probabilitat p, on p és un valor entre 0 i 1 que definirem més endavant.

Considerem les variables aleatòries N, M i X que assignen respectivament a cada subgraf induït l'ordre, la mida i el nombre d'encreuaments a la representació considerada, i la variable aleatòria Y tal que $Y = X - M + 3N$.

Per a qualsevol subgraf induït $G[S]$ es compleix,

$$X(G[S]) \geq \text{cross}(G[S]) \geq m(G[S]) - 3n(G[S]),$$

per tant,

$$Y = X - M + 3N \geq 0,$$

i, conseqüentment,

$$EY = EX - EM + 3\,EN \geq 0.$$

Per altra banda, si per a cada $u \in V$ definim la variable aleatòria I_u tal que $I_u(G[S]) = 1$ si, i només si, $u \in S$, aleshores

$$EN = E(\sum_{u \in V} I_u) = \sum_{u \in V} EI_u = \sum_{u \in V} P(\{G[S] : u \in S\}) = \sum_{u \in V} p = np.$$

Si per a cada aresta $a \in A$ definim la variable aleatòria I_a tal que $I_a(G[S]) = 1$ si, i només si, a és aresta de $G[S]$, aleshores

$$EM = E(\sum_{a \in A} I_a) = \sum_{a \in A} EI_a = \sum_{a \in A} P(\{G[S] : a \in A(G[S])\}) = \sum_{a \in A} p^2 = mp^2,$$

ja que una aresta és del subgraf $G[S]$ si, i només si, els dos extrems de l'aresta són de S.

Si C és el conjunt de tots els encreuaments de la representació considerada de G, per a cada encreuament c de C definim la variable aleatòria I_c tal que $I_c(G[S]) = 1$ si, i només si, c és un encreuament a la representació de $G[S]$. Aleshores

$$\begin{aligned} EX = E(\sum_{c \in C} I_c) &= \sum_{c \in C} EI_c = \sum_{c \in C} P(\{G[S] : x \text{ encreuament de } G[S]\}) \\ &= \sum_{c \in C} p^4 = \text{cross}(G)\, p^4, \end{aligned}$$

ja que un encreuament de la representació considerada de G és a la representació del subgraf $G[S]$ si, i només si, els 4 extrems de les dues arestes que es creuen són de S.

Per tant,

$$EY = \text{cross}(G)\, p^4 - m\, p^2 + 3\, n\, p \geq 0.$$

Si prenem $p = \frac{4n}{m} \leq 1$, aleshores

$$EY = \text{cross}(G)(\frac{4n}{m})^4 - m\,(\frac{4n}{m})^2 + 3\,n\,(\frac{4n}{m}) \geq 0,$$

d'on deduïm

$$\text{cross}(G) \geq \frac{m^4}{(4n)^4}\frac{4n^2}{m} = \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2}.$$

□

Exemple. El graf complet K_{20} té ordre 20 i mida 190, amb $190 \geq 4 \cdot 20 = 80$. Pel lema dels encreuaments, $cross(G) \geq \frac{1}{64}\frac{190^3}{20^2} = 267.92$. És a dir, una representació al pla de K_{20} tindrà com a mínim 268 encreuaments.

5.5.2 Coloració

Definicions. Una *k-vèrtex-coloració* d'un graf $G = (V, A)$, és una aplicació $f : V \to [k]$ tal que $f(u) \neq f(v)$ per a tot parell de vèrtexs $u, v \in V$ adjacents. Direm que G és *k-vèrtex-colorable* si existeix una k-vèrtex-coloració de G. El *nombre cromàtic* de G, $\chi(G)$, és el mínim enter k, $k \geq 1$, tal que existeix una k-vèrtex-coloració de G.

De manera semblant es pot definir la coloració per arestes d'un graf. En aquest apartat tractarem només coloració per vèrtexs. Per tant, parlarem simplement de *coloracions* i *grafs colorables* enlloc de vèrtex-coloracions i grafs vèrtex-colorables. Podem interpretar els nombres $1, \ldots, k$ com a k colors diferents de manera que una k-coloració consisteix en pintar els vèrtexs del graf de forma que tota aresta tingui els extrems de colors diferents. És possible que no s'utilitzin tots els k colors disponibles en una k-coloració. Observem que $\chi(G) = k$ si G és k-colorable i no és $(k-1)$-colorable.

Propietats.

(1) Per a qualsevol graf d'ordre n, $1 \leq \chi(G) \leq n$.

(2) Si H és un subgraf de G, llavors $\chi(H) \leq \chi(G)$.

(3) Si $G_1, \ldots, G_r$ són els components connexos d'un graf G, llavors

$$\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \ldots, \chi(G_r)\}.$$

(4) Els grafs amb nombre cromàtic 1 són els grafs nuls.

(5) Els grafs amb nombre cromàtic 2 són els grafs bipartits no nuls.

(6) $\chi(K_n) = n$.

(7) $\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ parell,} \\ 3 & \text{si } n \text{ senar.} \end{cases}$

Demostració.

(1) Assignar colors diferents als vèrtexs d'un graf d'ordre n és una n-coloració.

(2) Una k-coloració de G restringida a qualsevol subconjunt de vèrtexs i arestes de G, determina una k-coloració en el subgraf corresponent.

(3) Amb tants colors com el màxim dels nombres cromàtics dels components connexos, podem colorar tots els components connexos del graf.

(4) Si el graf té mida 1 són necessaris 2 colors. Per tant, els únic grafs amb nombre cromàtic 1 són els grafs nuls.

(5) Si un graf té nombre cromàtic 2, ha de tenir almenys una aresta, no pot ser nul. Per altra banda, considerem els conjunts de vèrtexs V_1 i V_2 formats per tots els vèrtexs que tenen assignat el color 1 i 2, respectivament. Aleshores, $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. A més, les arestes tenen els vèrtexs extrems de diferent color, és a dir, un extrem a V_1 i un altre a V_2. Per tant, el graf és bipartit.

Recíprocament, si el graf té mida almenys 1, el nombre cromàtic és almenys 2. Si a més és bipartit i les parts estables són V_1 i V_2, podem definir l'aplicació que assigna un 1 als vèrtexs de V_1 i un 2 als vèrtexs de V_2 de manera que les arestes de G tindran els extrems de diferent color. El nombre cromàtic és, doncs, 2.

(6) Tots els vèrtexs del graf complet han de tenir color diferent, ja que en cas contrari hi hauria una aresta amb els dos extrems del mateix color.

(7) Un cicle d'ordre parell és un graf bipartit no nul, per tant el nombre cromàtic és 2. Un cicle d'ordre senar no és ni nul ni bipartit, per tant el nombre cromàtic és almenys 3 i hi ha almenys una 3-coloració que consisteix en assignar als vèrtexs en l'ordre en que es recorren en el cicle, un 1 al primer vèrtex i després 2 i 3 alternativament. □

Proposició 67. *Si G és un graf amb grau màxim Δ, aleshores $\chi(G) \leq \Delta + 1$.*

Demostració. Considerem una ordenació dels vèrtexs de G, $u_1, u_2, \ldots, u_n$, i suposem que disposem de $\Delta+1$ colors, $1, 2, \ldots, \Delta+1$. Veurem que podem definir recursivament una $(\Delta+1)$-coloració en G. Assignem el color 1 al vèrtex u_1. Per a $i = 2, \ldots, n$, suposem que hem assignat colors als vèrtexs $u_1, \ldots, u_{i-1}$ de manera que vèrtexs adjacents tinguin colors diferents. El vèrtex u_i és adjacent a com a molt Δ vèrtexs del conjunt $\{u_1, \ldots, u_{i-1}\}$. Per tant, tenim almenys un color per a assignar a u_i diferent dels colors dels vèrtexs adjacents a u_i que són del conjunt $\{u_1, \ldots, u_{i-1}\}$, de manera que vèrtexs adjacents del conjunt $\{u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i\}$ tindran colors diferents, per a tot $i \in [n]$. □

En alguns casos es pot donar una fita més ajustada del nombre cromàtic.

Teorema 13 (Brooks, 1941)**.** *Si G és un graf connex amb grau màxim Δ que no és ni complet ni un cicle d'ordre senar, aleshores $\chi(G) \leq \Delta$.*

Demostració. La demostració es pot consultar a [12]. □

La proposició anterior es pot demostrar per a grafs no regulars de manera similar a la proposició 67 utilitzant una ordenació adequada dels vèrtexs del graf.

Proposició 68. *Si G és un graf connex no regular amb grau màxim Δ, aleshores $\chi(G) \leq \Delta$.*

DEMOSTRACIÓ. Considerem una ordenació dels vèrtexs de G, $u_1, u_2, \ldots, u_n$, tal que u_n sigui un vèrtex de grau més petit que Δ (per ser G no regular, hi ha almenys un vèrtex de grau $< \Delta$) i si $d(u_i, u_n) > d(u_j, u_n)$, aleshores $i < j$. Sempre existeix almenys una ordenació amb aquestes condicions: només cal numerar els vèrtexs de 1 a $n-1$ en ordre invers segons la distància a u_n: si l'excentricitat de u_n és k, numerem primer els vèrtexs a distància màxima de k, després els vèrtexs a distància $k-1$, etc. Suposem que tenim Δ colors numerats de 1 a Δ. Definim recursivament una Δ-coloració de G: assignem el color 1 a u_1 i, un cop assignats colors als vèrtexs u_j, $j < i$, assignem al vèrtex u_i el color més petit diferent dels colors dels vèrtexs adjacents a u_i amb subíndex més petit que i. Sempre hi ha almenys un color disponible, ja que el vèrtex u_i, $i < n$, és adjacent a almenys un vèrtex amb subíndex més gran (hi ha almenys un camí de u_n a u_i, de manera que el vèrtex del camí adjacent a u_i tindrà subíndex més gran que i per ser més pròxim a u_n) de manera que haurem utilitzat com a molt $\Delta - 1$ colors diferents. Finalment, el vèrtex u_n és adjacent a com a molt $\Delta - 1$ vèrtexs. Per tant, queda almenys un color disponible. □

Proposició 69. *Si G és un graf planari, aleshores $\chi(G) \leq 6$.*

DEMOSTRACIÓ. Ho demostrarem per inducció sobre l'ordre n, $n \geq 1$. Per a $n \leq 6$ és cert. Suposem ara que tenim un graf planari d'ordre n, $n \geq 7$, i que el resultat és cert per a grafs d'ordre més petit que n. Considerem en graf $G - u$, on u és un vèrtex de grau com a molt 5. El graf $G - u$ és planari i té ordre $n - 1$. Per hipòtesi d'inducció, $G - u$ és 6-colorable. Si assignem al vèrtex u un color diferent al dels 5 vèrtexs adjacents (és possible, ja que disposem de 6 colors diferents) obtenim una 6-coloració de G. □

Teorema 14 (Heawood, 1890)**.** *Si G és un graf planari, aleshores $\chi(G) \leq 5$.*

DEMOSTRACIÓ. Ho demostrarem per inducció sobre l'ordre n, $n \geq 1$, del graf. Si $n \leq 5$ és cert.

Suposem ara que G és un graf planari d'ordre n, $n \geq 6$, i que el resultat és cert per a grafs d'ordre més petit que n. Sigui u un vèrtex de grau com a molt 5. Per hipòtesi d'inducció, el graf $G - u$ és 5-colorable, ja que és planari d'ordre $n - 1$.

Si $g(u) \leq 4$, el graf G és 5-colorable, ja que podem assignar a u un color diferent als dels 4 vèrtexs adjacents a u.

Si $g(u) = 5$ i els 5 vèrtexs adjacents a u tenen assignats com a molt 4 colors diferents, el graf G és 5-colorable, ja que podem assignar a u un color diferent als dels 4 colors assignats als 5 vèrtexs adjacents a u.

Finalment, suposem que $g(u) = 5$ i la coloració de $G - u$ assigna 5 colors diferents als vèrtexs adjacents a u. Numerem els vèrtexs adjacents a u, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, en l'ordre en que apareixen les arestes uv_i en sentit antihorari a una representació plana del graf,

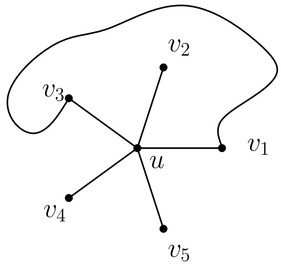


Figura 5.31: Si v_1 i v_3 són del mateix component connex en el graf G_{13}, aleshores v_2 i v_4 no poden ser del mateix component connex en el graf G_{24}.

i suposem que i és el color assignat al vèrtex u_i, per a tot $i \in [5]$. Sigui G_{ij} el subgraf de G induït pels vèrtexs de color i i j, $i \neq j$. Si v_1, v_3 són de diferent component connex en el graf G_{13}, podem intercanviar els colors 1 i 3 als vèrtexs del component connex de v_1, i ja podem assignar al vèrtex u un color diferent dels 4 colors assignats als vèrtexs adjacents a u. Si v_1 i v_3 són del mateix component connex en G_{13}, hi ha un $v_1 - v_3$ camí en $G - u$ format per vèrtexs de G_{13}. Aleshores, v_2 i v_4 no poden ser del mateix component connex en G_{24}, per tant, podem intercanviar els colors dels vèrtexs del component connex de v_2 de manera que podem assignar al vèrtex u un color diferent dels 4 colors assignats als 5 vèrtexs adjacents a u. □

Francis Guthrie va plantejar l'any 1852 el problema dels quatre colors: és possible acolorir qualsevol mapa amb només 4 colors de forma que regions adjacents rebin colors diferents? La primera demostració acceptada, després d'alguns intents fallits, es va publicar l'any 1977 i utilitzava moltes hores de càlcul amb ordinador. L'enunciat següent és equivalent al problema dels quatre colors.

Teorema 15 (Teorema dels quatre colors, Appel and Haken, 1976)**.** *Tot graf planari és 4-colorable.*

5.5.3 Emparellaments

Definicions. Un *emparellament* en un graf $G = (V, A)$ és un conjunt d'arestes $M \subseteq A$ tal que cap vèrtex és incident amb més d'una aresta de M. Un emparellament M és *perfecte* si tot vèrtex és incident amb una aresta de M.

Evidentment, si un graf té un emparellament perfecte, l'ordre del graf ha de ser parell. Però aquesta condició no és suficient per a l'existència d'emparellaments perfectes. Per exemple, $K_{1,5}$ té ordre parell però no té cap emparellament perfecte.

Definició. Considerem un graf bipartit G amb parts estables X i Y. Un emparellament en G és *complet* de X a Y si tot vèrtex de X és incident amb almenys una aresta de M.

Si $G = (V, A)$ és un graf i $x \in V$, considerem $N(x) = \{y : xy \in A\}$ i si $S \subseteq V$, $N(S) = \cup_{x \in S} N(x)$.

Teorema 16 (Hall, 1935). *Tot graf bipartit amb parts estables X i Y té un emparellament complet de X a Y si, i només si, $|N(S)| \geq |S|$ per a tot $S \subseteq X$.*

Demostració. La demostració es pot consultar a [4]. $\square$

Bibliografia

[1] Biggs, N., *Discrete Mathematics*, 2nd Edition, Oxford University Press, 2002.

[2] Chartrand, G., Lesniak, L., *Graphs and Digraphs*, Chapman and Hall/CRC, 2004.

[3] Comellas, F., Fàbrega, J., Sanchez, A., Serra, O., *Matemàtica Discreta*, Edicions UPC, 2001.

[4] Diestel, *Graph Theory*, Springer, 2005

[5] Durrett, R., *Elementary Probability for Applications*, Cambridge, 2009.

[6] Gimbert, J., Moreno, R., Ribó, J. M., Valls, M., *Apropament a la teoria de grafs i als seus algorismes*, Edicions de la Universitat de Lleida, 1998.

[7] Graham, R. L., Knuth, D. E. , Patashnik, O., *Concrete Mathematics*, Addison Wesley, 1994.

[8] Grimmett, G., Welsh, D. , *Probability. An Introduction.*, Oxford, 1986.

[9] Matousek, J., Nesetril, J., *Invitation to Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 2009.

[10] Mitzenmacher, M., Upfal, E. , *Probability and computing: randomized algorithms and probabilistic analysis*, Cambridge UP, 2005.

[11] Rosen, K., *Discrete Mathematics and its Applications*, Mc Graw-Hill, 2003.

[12] West, D. B., *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, 2001.