Introducció a la Lògica

Mercè Claverol Aguas

Dept. Matemàtica Aplicada IV (UPC)

CP0 Introducció

La LÒGICA és la Ciència que s'ocupa d'estudiar la
validesa formal dels raonaments

$$\underbrace{A_1, \ldots, A_n}_{\text{Premisses}} \vdash \underbrace{B}_{\text{Conclusió}}$$

Diem que un raonament és vàlid quan n'existeix una demostració amb independència de la veritat o falsedat de les premisses i conclusió.
Sota el supòsit de premisses certes, la conclusió ha de ser certa.
Exemple:

$p \to m, p \vdash m$ és vàlid.

Si plou, el terra està mullat. Plou. Per tant, el terra està mullat.

$p \to m, m \vdash p$ és invàlid.

Si plou, el terra està mullat. El terra està mullat. Per tant, plou.

Observa que la validesa o invalidesa d'aquests raonaments no depèn de com s'interpretin p i m.

CP0 El llenguatge

CÀLCUL D'ENUNCIATS: Alfabet $\Sigma = \{a, b, c, \cdots, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, ()\}$

- Àtoms: enunciats corresponents a frases declaratives que no es poden descompondre en altres més simples $\{a, b, c, \cdots\}$
- Connectives: connectors entre els enunciats $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$
- Parèntesis: $(\,)$

Els *enunciats*, són paraules en l'alfabet Σ formades a partir de les regles recursives:

---

1. Tot àtom és un enunciat.
2. Si A és un enunciat, $\neg A$ i (A) també ho són.
3. Si A i B són enunciats, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$, també són enunciats.
4. No hi ha més enunciats.

Ordre creixent de les connectives: $\boxed{\rightarrow, \quad \{\wedge, \vee\}, \quad \{\neg\}}$

CP0 Teoria de la demostració

Vies per fer raonaments, deduccions, demostracions o càlculs:

- Teoria de la demostració
- Teoria de Models

$$\underbrace{A_1, \ldots, A_n}_{\text{Premisses}} \vdash \underbrace{B}_{\text{Conclusió}}$$

Demostració $\leftrightsquigarrow$ **Llista:**

$$\begin{array}{l} 1.\ A_1 \\ \vdots \\ n.\ A_n \\ \vdots \\ m.\ B \end{array}$$

- La llista d'enunciats d'una demostració pot tenir diferents nivells per indicar subdemostracions dins d'una demostració.
- En una demostració, cada nou enunciat és obtingut dels anteriors aplicant alguna de les regles d'un sistema deductiu, com ara la Deducció Natural (DN).

CP0 DN: Regles primàries

$$\left.\begin{cases} Premisses \\ Suposicions \end{cases}\right\} \Longleftrightarrow Hip\grave{o}tesis.$$

- *Premissa*: és qualsevol dels enunciats de partida en un raonament. Sol estar al començament de la demostració però pot ser introduïda o iterar-se a qualsevol línia de la mateixa.
- *Suposició*: enunciat que inicia una subdemostració (nivell més profund)
- *Conclusió*: és l'enunciat resultant de la demostració.
  - Està sempre al primer nivell.
  - Està sempre a l'última línia.
  - S'hi pot arribar a la conclusió de més d'una manera.

En la Deducció Natural les *regles primàries* permeten introduir hipòtesis i introduir i eliminar connectives en un raonament.

CP0 DN: Regles primàries

1. Introducció d'hipòtesi o iteració (H o bé It i) $A \vdash A$
2. Introducció de $\wedge$ (I$\wedge$ i, j) $A, B \vdash A \wedge B$
3. Eliminació de $\wedge$ (E$\wedge$ i) $A \wedge B \vdash A \qquad A \wedge B \vdash B$
4. Introducció de $\vee$ (I$\vee$ i) $A \vdash A \vee B \qquad B \vdash A \vee B$
5. Eliminació de $\vee$ o prova per casos (E$\vee$ i, j, k o bé PC)
   $A \vee B$, $\{A \vdash C\}$, $\{B \vdash C\} \vdash C$
6. Introducció de $\rightarrow$ o demostració condicional (I$\rightarrow$ i, j o bé DC)
   $\{A \vdash B\} \vdash A \rightarrow B$
7. Eliminació de $\rightarrow$ o modus ponens (E$\rightarrow$ i, j o bé MP)
   A, $A \rightarrow B \vdash B$
8. Introducció de $\neg$ o reducció a l'absurd (I$\neg$ i, j, k o bé RA)
   $\{A \vdash B, \neg B\} \vdash \neg A$
9. Eliminació de $\neg$ o doble negació (E$\neg$ i o bé DN) $\neg\neg A \vdash A$

CP0 DN: Regles primàries

1. Introducció d'hipòtesi o iteració (H o bé It i)

$$A \vdash A$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{i.} & A & \text{H} \quad \rightsquigarrow \textit{Premissa} \\
 & \vdots & \\
j. & \quad \begin{array}{|l} \underline{B} \\ \vdots \\ A \\ \vdots \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} \text{H} \quad \rightsquigarrow \textit{Suposició} \\ \\ \text{It i} \\ \\ \\ \end{array} \\
k. & & \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

CP0 DN: Regles primàries

2. Introducció de $\wedge$ (I$\wedge$ i, j)

$$A, B \vdash A \wedge B$$

i.	A	H
j.	B	H
k.	$A \wedge B$	I$\wedge$ i,j

CP0 DN: Regles primàries

3. Eliminació de $\wedge$ (E$\wedge$ i)

$$A \wedge B \vdash A \qquad A \wedge B \vdash B$$

i.	$A \wedge B$	H
j.	A	E$\wedge$ i
k.	B	E$\wedge$ i

CP0 DN: Regles primàries

4. Introducció de $\vee$ (I$\vee$ i)

$$A \vdash A \vee B \qquad B \vdash A \vee B$$

i.	A	H
j.	$A \vee B$	I$\vee$ i

CP0 DN: Regles primàries

5. Eliminació de $\vee$ o prova per casos (E$\vee\, i, j, k$ o bé PC) $A \vee B$, $\{A \vdash C\}$, $\{B \vdash C\} \vdash C$

$$
\begin{array}{lll}
 & \vdots & \\
i. & A \vee B & \\
 & \quad | \; \underline{A} & \text{H} \\
 & \quad | \; \vdots & \\
j. & \quad | \; C & \\
 & & \\
 & \quad | \; \underline{B} & \text{H} \\
 & \quad | \; \vdots & \\
k. & \quad | \; C & \\
 & & \\
 & C & \text{E}\vee\; i, j, k
\end{array}
$$

CP0 DN: Regles primàries

6. Introducció de $\rightarrow$ o demostració condicional (I$\rightarrow$ i, j o bé DC)

$$\{A \vdash B\} \vdash A \rightarrow B$$

$$\begin{array}{lll}
 & \vdots & \\
i. & \quad A & \text{H} \\
 & \quad \vdots & \\
j. & \quad B & \\
 & & \\
 & A \rightarrow B & \text{I}\rightarrow i, j
\end{array}$$

CP0 DN: Regles primàries

7. Eliminació de $\rightarrow$ o modus ponens (E$\rightarrow$ i, j o bé MP)

$$A, A \rightarrow B \vdash B$$

i.	A	H
j.	$A \rightarrow B$	H
k.	B	E$\rightarrow$ i, j

CP0 DN: Regles primàries

8. Introducció de $\neg$ o reducció a l'absurd
   (I$\neg$ i, j, k o bé RA)

$$\{A \vdash B, \neg B\} \vdash \neg A$$

$\vdots$

$i.$ | A | H

$\vdots$

$j.$ | B

$\vdots$

$k.$ | $\neg B$

$\neg A$ I$\neg$ i, j, k

 # DN: Regles primàries

9. Eliminació de $\neg$ o doble negació (E$\neg$ i o bé DN)

$$\neg\neg A \vdash A$$

i.	$\neg\neg A$	H
j.	A	E$\neg$ i

CP0 DN: Nivells

Iteració entre nivells:

Podem iterar les línies d'una demostració en una subdemostració, és a dir, iterar cap a endins a un nivell més profund, però no a l'inrevés!

$$
\begin{array}{llll}
 & \vdots & & \\
i. & A & & \\
 & \vdots & & \\
 & \vert & B & \text{H} \\
 & \vert & A & \text{It } i \\
 & \vert & \vdots & \\
j. & \vert & C & \\
 & \vdots & & \\
 & \cancel{C} & & \text{It } j
\end{array}
$$

CP0 DN: Nivells

Com sortim d'un nivell? • introduint una implicació I$\rightarrow$ i, j

• introduint una negació (reducció a l'absurd) I$\neg$ i, j, k.

La prova per casos E$\vee$ i, j, k és diferent, té dues subdemostracions.

$$
\begin{array}{lll}
 & \vdots & \\
i. & \quad | \; A & \text{H} \\
 & \quad |\overline{} & \\
 & \quad | \; \vdots & \\
j. & \quad | \; B & \\
 & A \rightarrow B & \text{I}\rightarrow i, j
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & \vdots & \\
i. & \quad | \; A & \text{H} \\
 & \quad |\overline{} & \\
 & \quad | \; \vdots & \\
j. & \quad | \; B & \\
 & \quad | \; \vdots & \\
k. & \quad | \; \neg B & \\
 & \neg A & \text{I}\neg \; i, j, k
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & \vdots & \\
i. & A \vee B & \\
 & \quad | \; A & \text{H} \\
 & \quad |\overline{} & \\
 & \quad | \; \vdots & \\
j. & \quad | \; C & \\
 & & \\
 & \quad | \; B & \text{H} \\
 & \quad |\overline{} & \\
 & \quad | \; \vdots & \\
k. & \quad | \; C & \\
 & C & \text{E}\vee \; i, j, k
\end{array}
$$

CP0 DN: Nivells

Exemple de prova per casos . $p \vee q \vdash \neg p \to q$

1.	$p \vee q$	H
2.	p	H
3.	$\neg p$	H
4.	$\neg q$	H
5.	p	It 2
6.	$\neg p$	It 3
7.	$\neg\neg q$	RA 4,5,6
8.	q	E$\neg$ 7
9.	$\neg p \to q$	I$\wedge$ 3,8
10.	q	H
11.	$\neg p$	H
12.	q	It 10
13.	$\neg p \to q$	I$\wedge$ 11,12
14.	$\neg p \to q$	E$\vee$ 1,9,13

CP0 DN: Regles Derivades

1. (QS) Quodlibet sequitur $A, \neg A \vdash B$ amb B arbitrari.
2. (SH) Sil·logisme hipotètitc $A \to B, B \to C \vdash A \to C$
3. (SD) Sil·logisme disjuntiu $A \vee B, \neg A \vdash B$
4. (MT) Modus tollens $A \to B, \neg B \vdash \neg A$
5. (RM) Resolució medieval $A \to B, \neg A \to C \vdash B \vee C$
6. (RS) Resolució $\neg A \vee B, A \vee C \vdash B \vee C$
7. (IC) Regla d'incompatibilitat $\neg(A \wedge B), A \vdash \neg B$

CP0 DN: Regles derivades QS

(QS) Quodlibet sequitur $A, \neg A \vdash B$ amb B arbitrari.

1.	A	H
2.	$\neg A$	H
3.	$\quad\vert\ \neg B$	H
4.	$\quad\vert\ A$	It 1
5.	$\quad\vert\ \neg A$	It 2
6.	$\neg\neg B$	RA 3,4,5
7.	B	E$\neg$ 6

CP0 DN: Regles derivades SH

(SH) Sil·logisme hipotètitc $A \to B, B \to C \vdash A \to C$

1.	$A \to B$	H
2.	$B \to C$	H
3.	$\quad A$	H
4.	$\quad A \to B$	It 1
5.	$\quad B$	E$\to$ 3,4
6.	$\quad B \to C$	It 2
7.	$\quad C$	E$\to$ 5,6
8.	$A \to C$	I$\wedge$ 3,7

CP0 DN: Regles derivades SD

(SD) Sil·logisme disjuntiu $A \vee B, \neg A \vdash B$

1.	$A \vee B$	H
2.	$\neg A$	H
3.	$\mid A$	H
4.	$\mid \mid \neg B$	H
5.	$\mid \mid A$	It 3
6.	$\mid \mid \neg A$	It 2
7.	$\mid \neg\neg B$	RA 4,5,6
8.	$\mid B$	E$\neg$ 7
9.	$\mid B$	H
10.	$\mid B$	It 9
11.	B	E$\vee$ 1,6,10

CP0 DN: Regles derivades MT

(MT) Modus tollens $A \to B, \neg B \vdash \neg A$

1.	$A \to B$	H
2.	$\neg B$	H
3.	$\quad A$	H
4.	$\quad A \to B$	It 1
5.	$\quad B$	E$\wedge$ 3,4
6.	$\quad \neg B$	It 2
7.	$\neg A$	RA 3,5,6

CP0 DN: Regles derivades RM

(RM) Resolució medieval $A \to B, \neg A \to C \vdash B \lor C$

1.	$A \to B$	H
2.	$\neg A \to C$	H
3.	$A \lor \neg A$	T
4.	A	H
5.	$A \to B$	It 1
6.	B	E$\land$ 4,5
7.	$B \lor C$	I$\lor$ 6
8.	$\neg A$	H
9.	$\neg A \to C$	It 2
10.	C	E$\land$ 8,9
11.	$B \lor C$	I$\lor$ 10
12.	$B \lor C$	E$\lor$ 3,7,11

CP0 DN: Regles derivades RM

1.	$A \rightarrow B$	H
2.	$\neg A \rightarrow C$	H
3.	$\neg(B \vee C)$	H
4.	B	H
5.	$B \vee C$	I$\vee$ 4
6.	$\neg(B \vee C)$	It 3
7.	$\neg B$	RA 4,5,6
8.	$A \rightarrow B$	It 1
9.	$\neg A$	MT 7,8
10.	$\neg A \rightarrow C$	It 2
11.	C	E$\wedge$ 10,9
12.	$B \vee C$	I$\vee$ 11
13.	$\neg\neg(B \vee C)$	RA 3,12,3
14.	$B \vee C$	E$\neg$ 13

CP0 DN: Regles derivades RS

(RS) Resolució $\neg A \vee B, A \vee C \vdash B \vee C$

1.	$\neg A \vee B$	H
2.	$A \vee C$	H
3.	$\quad A$	H
4.	$\quad \neg A \vee B$	It 1
5.	$\quad B$	SD 3,4
6.	$\quad B \vee C$	I$\vee$ 5
7.	$\quad C$	H
8.	$\quad B \vee C$	I$\vee$ 7
9.	$B \vee C$	E$\vee$ 2,6,8

CP0 DN: Regles derivades IC

(IC) Regla d'incompatibilitat $\neg(A \wedge B), A \vdash \neg B$

1.	$\neg(A \wedge B)$	H
2.	A	H
3.	$\quad B$	H
4.	$\quad A$	It 2
5.	$\quad A \wedge B$	I$\wedge$ 3,4
6.	$\quad \neg(A \wedge B)$	It 1
7.	$\neg B$	RA 3,5,6

CP0 Teoremes

1. Principi d'identitat: $\vdash p \to p$ i també $\vdash A \to A$
2. Principi de no contradicció: $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$ i també $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$
3. Principi del tercer exclòs: $\vdash p \vee \neg p$ i també $\vdash A \vee \neg A$
4. $\vdash A \to (B \to A)$
5. $\vdash (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
6. $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
7. $\vdash \neg\neg A \to A$
8. $\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
9. $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
10. $\vdash (A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow C)$
11. Simplificació:
    $\vdash (A \wedge B) \to A$
    $\vdash A \to (A \vee B)$
12. $\vdash ((A \wedge B) \to C) \leftrightarrow (A \to (B \to C))$
13. Dilema constructiu: $\vdash ((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C)) \to C$
14. Dilema destructiu: $\vdash (\neg A \vee \neg B) \wedge (C \to A) \wedge (D \to B) \to (\neg C \vee \neg D)$

CP0 Teoremes

Els Teoremes *són enunciats que es poden demostrar sense cap premissa.* *Aquest tipus d'enunciats veurem que són sempre certs i en direm* tautologies*.*

Ex. Demostració del teorema $p \vee \neg p$

$\vdash p \vee \neg p$

1.	$\neg(p \vee \neg p)$	H
2.	p	H
3.	$p \vee \neg p$	I$\vee$ 2
4.	$\neg(p \vee \neg p)$	It 1
5.	$\neg p$	RA 2,3,4
6.	$p \vee \neg p$	I $\vee$ 5
7.	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	RA 1,6
8.	$p \vee \neg p$	E$\neg$ 8

CP0 Teoremes

Ex. Demostració del teorema $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

$$\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$$

1.	$A \to B$	H
2.	$A \to \neg B$	H
3.	A	H
4.	$A \to B$	It 1
5.	B	E$\wedge$ 3,4
6.	$A \to \neg B$	It 2
7.	$\neg B$	E$\wedge$ 3,6
8.	$\neg A$	RA 3,5,7
9.	$(A \to \neg B) \to \neg A$	I$\wedge$ 2,8
10.	$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$	I$\wedge$ 1,9

CP0 Equivalències Deductives ED

A i B són *deductivament equivalents*

$$\boxed{A \dashv\vdash B \quad \text{si i només si} \quad A \vdash B \text{ i } A \dashv B}$$

Si $A \dashv\vdash B$, en una demostració podem escriure:

$$\begin{array}{lll} & \vdots & \\ i. & A & \\ & \vdots & \\ j. & B & \text{ED } i \\ & \vdots & \end{array}$$

- Tots els teoremes són ED i els notem: $\blacksquare$.
- Totes les contradiccions són ED i les notem: $\square$.
- $A \wedge \neg A \dashv\vdash \square \qquad A \vee \neg A \dashv\vdash \blacksquare \qquad \square \vdash A \qquad A \vdash \blacksquare$
- Totes les lleis de les àlgebres de Boole són ED.

CP0 ED: Exemples

Lleis de les Àlgebres de Boole

1. Idempotència. $A \wedge A \dashv\vdash A, \quad A \vee A \dashv\vdash A$
2. Conmutativitat. $A \wedge B \dashv\vdash B \wedge A, \quad A \vee B \dashv\vdash B \vee A$
3. Associativitat.
   $A \wedge (B \wedge C) \dashv\vdash (A \wedge B) \wedge C, \quad A \vee (B \vee C) \dashv\vdash (A \vee B) \vee C$
4. Absorció. $A \wedge (B \vee A) \dashv\vdash A, \quad A \vee (B \wedge A) \dashv\vdash A$
5. Distributivitat.
   $A \wedge (B \vee C) \dashv\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \quad A \vee (B \wedge C) \dashv\vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
6. Elements neutres. $A \vee \square \dashv\vdash A \wedge \blacksquare \dashv\vdash A$
7. $A \wedge \square \dashv\vdash \square \quad A \vee \blacksquare \dashv\vdash \blacksquare$
8. Complementarietat. $A \wedge \neg A \dashv\vdash \square, \quad A \vee \neg A \dashv\vdash \blacksquare$
9. Cancel·lació. Si $A \wedge C \dashv\vdash B \wedge C$ i $A \vee C \dashv\vdash B \vee C$ aleshores $A \dashv\vdash B$

CP0 ED: Exemples

10. De Morgan. $\neg(A \wedge B) \dashv\vdash \neg A \vee \neg B, \quad \neg(A \vee B) \dashv\vdash \neg A \wedge \neg B$
11. Involució. $\neg\neg A \dashv\vdash A$
12. $\neg(A \to B) \dashv\vdash A \wedge \neg B$
13. $A \to B \dashv\vdash \neg A \vee B \dashv\vdash \neg B \to \neg A \dashv\vdash \neg(A \wedge \neg B)$
14. $A \wedge B \to C \dashv\vdash \neg A \vee \neg B \vee C$
15. $A \to (B \to C) \dashv\vdash B \to (A \to C)$
16. $A \wedge B \to C \vee D \dashv\vdash \neg A \vee \neg B \vee C \vee D \dashv\vdash A \wedge \neg C \to \neg B \vee D$
17. $\neg A \dashv\vdash A \to \neg A$

CP0 ED: Lleis de De Morgan

$\boxed{\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B}$

$$
\begin{array}{rlll}
1. & \neg(A \vee B) & & \text{H} \\
2. & \quad A & & \text{H} \\
3. & \quad A \vee B & & \text{I}\vee\ 2 \\
4. & \quad \neg(A \vee B) & & \text{It } 1 \\
5. & \neg A & & \text{RA } 2,3,4 \\
6. & \quad B & & \text{H} \\
7. & \quad A \vee B & & \text{I}\vee\ 6 \\
8. & \quad \neg(A \vee B) & & \text{It } 1 \\
9. & \neg B & & \text{RA } 2,3,4 \\
10. & \neg A \wedge \neg B & & \text{I}\wedge\ 5,9
\end{array}
$$

CP0 ED: Lleis de De Morgan

$\boxed{\neg(A \vee B) \dashv \neg A \wedge \neg B}$

1.	$\neg A \wedge \neg B$	H
2.	$\quad A \vee B$	H
3.	$\quad \neg A \wedge \neg B$	It 1
4.	$\quad \neg A$	E$\wedge$ 3
5.	$\quad B$	SD 2,4
6.	$\quad \neg B$	E$\wedge$ 3
7.	$\neg(A \vee B)$	RA 2,5,6

CP0 ED: Lleis de De Morgan

$\boxed{\neg(A \land B) \vdash \neg A \lor \neg B}$

1.	$\neg(A \land B)$	H
2.	$A \lor \neg A$	T
3.	$\quad A$	H
4.	$\quad \neg(A \land B)$	It 1
5.	$\quad \neg B$	IC 3,4
6.	$\quad \neg A \lor \neg B$	I$\lor$ 5
7.	$\quad \neg A$	H
8.	$\quad \neg A \lor \neg B$	I$\lor$ 7
9.	$\neg A \lor \neg B$	E$\lor$ 2,6,8

CP0 ED: Lleis de De Morgan

$$\boxed{\neg(A \wedge B) \dashv \neg A \vee \neg B}$$

1.	$\neg A \vee \neg B$	H
2.	$\quad A \wedge B$	H
3.	$\quad A$	E$\wedge$ 2
4.	$\quad \neg A \vee \neg B$	It 1
5.	$\quad B$	E$\wedge$ 2
6.	$\quad \neg B$	SD 3,4
7.	$\neg(A \wedge B)$	RA 2,5,6

CP0 ED: Lleis distributives

$\boxed{A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$

1.	$A \vee (B \wedge C)$	H
2.	A	H
3.	$A \vee B$	I $\vee$ 2
4.	$A \vee C$	I $\vee$ 2
5.	$B \wedge C$	H
6.	B	E $\wedge$ 5
7.	$A \vee B$	I $\vee$ 6
8.	C	E $\wedge$ 5
9.	$A \vee C$	I $\vee$ 8
10.	$A \vee B$	E$\vee$ 1,3,7
11.	$A \vee C$	E$\vee$ 1,4,9
12.	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	I $\wedge$ 10,11

CP0 ED: Lleis distributives

$\boxed{A \vee (B \wedge C) \dashv (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$

1.	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	H
2.	$A \vee B$	E $\wedge$ 1
3.	$A \vee C$	E $\wedge$ 1
4.	$\quad \neg(A \vee (B \wedge C))$	H
5.	$\quad\quad A$	H
6.	$\quad\quad A \vee (B \wedge C)$	I $\vee$ 5
7.	$\quad\quad \neg(A \vee (B \wedge C))$	It 4
8.	$\quad \neg A$	RA 5,6,7
9.	$\quad A \vee B$	It 2
10.	$\quad B$	SD 8,9
11.	$\quad A \vee C$	It 3
12.	$\quad C$	SD 8,11
13.	$\quad B \wedge C$	I $\wedge$ 10,12
14.	$\quad A \vee (B \wedge C)$	I $\vee$ 13
15.	$\neg\neg(A \vee (B \wedge C))$	RA 4,14
16.	$A \vee (B \wedge C)$	E$\neg$ 15

CP0 ED: Lleis distributives

Una altra demostració de $\boxed{A \vee (B \wedge C) \dashv (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$

1.	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	H
2.	$A \vee B$	E $\wedge$ 1
3.	$A \vee C$	E $\wedge$ 1
4.	$A \vee \neg A$	T
4.	$\quad A$	H
10.	$\quad A \vee (B \wedge C)$	I $\vee$ 5
10.		
4.	$\quad \neg A$	H
8.	$\quad A \vee B$	It 2
9.	$\quad A \vee C$	It 3
10.	$\quad B$	SD 7,8
11.	$\quad C$	SD 7,9
12.	$\quad B \wedge C$	I $\wedge$ 10,11
13.	$\quad A \vee (B \wedge C)$	I $\vee$ 12
14.	$A \vee (B \wedge C)$	E$\vee$ 4,6,13

CP0 ED: Lleis distributives

$\boxed{A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$

1.	$A \wedge (B \vee C)$	H
2.	A	E $\wedge$ 1
3.	$B \vee C$	E $\wedge$ 1
4.	$\quad\vert\ B$	H
5.	$\quad\vert\ A$	It 2
6.	$\quad\vert\ A \wedge B$	I $\wedge$ 4,5
7.	$\quad\vert\ (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	I $\vee$ 6
8.	$\quad\vert\ C$	H
9.	$\quad\vert\ A$	It 2
10.	$\quad\vert\ A \wedge C$	I $\wedge$ 8,9
11.	$\quad\vert\ (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	I $\vee$ 10
12.	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	E$\vee$ 3,7,11

CP0 ED: Lleis distributives

$\boxed{A \wedge (B \vee C) \dashv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$

1.	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	H
2.	$\quad\mid A \wedge B$	H
3.	$\quad\mid A$	E $\wedge$ 2
4.	$\quad\mid B$	E $\wedge$ 2
5.	$\quad\mid B \vee C$	I $\vee$ 4
6.	$\quad\mid A \wedge (B \vee C)$	I $\wedge$ 3,5
7.	$\quad\mid A \wedge C$	H
8.	$\quad\mid A$	E$\wedge$ 7
9.	$\quad\mid C$	E$\wedge$ 7
10.	$\quad\mid B \vee C$	I$\vee$ 9
11.	$\quad\mid A \wedge (B \vee C)$	I$\wedge$ 58,10
12.	$A \wedge (B \vee C)$	E$\vee$ 1,6,11

CP0 ED: altres lleis

$\boxed{\neg(A \to B) \vdash A \wedge \neg B}$

1.	$\neg(A \to B)$	H
2.	$\neg A$	H
3.	A	H
4.	B	QS
5.	$A \to B$	I$\wedge$ 3,4
6.	$\neg(A \to B)$	It 1
7.	$\neg\neg A$	RA 2,5,6
8.	A	E$\neg$ 7
9.	B	H
10.	A	H
11.	B	It 9
12.	$A \to B$	I$\wedge$ 10,11
13.	$\neg(A \to B)$	It 1
14.	$\neg B$	RA 9,12,13
15.	$A \wedge \neg B$	I$\wedge$ 8,14

CP0 ED: altres lleis

$\boxed{A \wedge \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)}$

1.	$A \wedge \neg B$	H
2.	A	E $\wedge$ 1
3.	$\neg B$	E $\wedge$ 1
4.	$\quad A \rightarrow B$	H
5.	$\quad A$	It 2
6.	$\quad \neg B$	It 3
7.	$\quad B$	I$\wedge$ 4,5
8.	$\neg(A \rightarrow B)$	RA 4,6,7

CP0 Teoria de la demostració

- A *és un* *enunciat inconsistent* $\Longleftrightarrow A \vdash \square$
- $\{A1, \cdots, An\}$ *és un* *conjunt inconsistent* $\Longleftrightarrow A1 \wedge \cdots \wedge An \vdash \square$

Metateoremes

- $A \vdash B \Longleftrightarrow A, \neg B \vdash \square$, és a dir, $\{A, \neg B\}$ és inconsistent.
- **Teorema de la Deducció**: $\boxed{A \vdash B \Longleftrightarrow \vdash A \to B}$

  Generalització: $A_1, \cdots, A_n \vdash B \Longleftrightarrow A_1, \cdots, A_{n-1} \vdash A_n \to B$
  $\Longleftrightarrow \quad \vdash A_1 \to (A_2 \to (\cdots \to (A_n \to B) \cdots))$
  $\Longleftrightarrow \quad \vdash A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$

  Observa que:

  - permet definir la regla d'introducció de la implicació:
    $\{A \vdash B\} \vdash A \to B$
  - Permet obtenir un teorema de cada raonament: hi ha una relació condicional entre premisses i conclusió.

CP0 Teoria de models

També podrem (in)-validar raonaments *interpretant* els enunciats.

Interpretar un enunciat és associar -li un valor de cert 1 o fals 0. Per fer-ho, només cal assignar un valor (de cert o fals) a cadascun dels seus àtoms. Un enunciat de n àtoms té 2^n interpretacions.

Quan fem un raonament $A_1, \cdots, A_n \vdash B$ les premisses i la conclusió poden ser certes o falses.
Amb un raonament vàlid, hi ha un cas impossible, quin?

Premisses	*Conclusió*	*Raonament*
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

No pot ser que de premisses certes, fent un raonament vàlid, se'n deduexi una conclusió falsa!

CP0 Teoria de models

La interpretació d'un enunciat es fa a partir de la interpretació dels seus àtoms. Veiem com s'interpreten les connectives:

- Un àtom només es pot interpretar cert 1 o fals 0
- $\neg 0 = 1, \quad \neg 1 = 0$
- $1 \wedge 1 = 1$, $\quad 0 \wedge 1 \quad = \quad 1 \wedge 0 \quad = \quad 0 \wedge 0 \quad = \quad 0$
- $0 \vee 0 = 0$, $\quad 1 \vee 1 \quad = \quad 0 \vee 1 \quad = \quad 1 \vee 0 \quad = \quad 1$
- $1 \rightarrow 0 = 0$, $\quad 1 \rightarrow 1 \quad = \quad 0 \rightarrow 1 \quad = \quad 0 \rightarrow 0 \quad = \quad 1$

Observa que: $\quad p \rightarrow q \quad$ no ens diu com s'han d'interpretar p i q.

- Dóna una relació condicional entre p i q:

  No es pot donar p sense que es doni q.

- L'única manera en què la implicació és falsa és quan es trenca la relació que hi ha entre p i q, és a dir, quan es dóna p i no q.
- El fet de no donar-se p (p fals), no contradiu la relació $p \rightarrow q$.

CP0 Teoria de models

Un model d'un enunciat és una interpretació dels àtoms que fa que l'enunciat sigui cert (si el fa fals, en direm contramodel).

Els enunciats que tenen algun model són satisfactibles (si no en tenen cap, insatisfactibles).

Tipus d'enunciats, segons la seva taula de veritat (t.v.):

- Tautologies: totes les interpretacions en són models.
  (Tot 1's en la t.v.)
- Falsedats lògiques: no tenen models (són insatisfactibles).
  (Tot 0's en la t.v.)
- Contingents: tenen almenys un model i almenys un contramodel
  (Almenys un 0 i un 1 a la t.v.)

Algorisme de QUINE (t.v. en forma d'arbre binari)

Construcció de l'arbre.

1. L'arrel és l'enunciat que es vol interpretar.
2. En un nivell, s'interpreta un dels àtoms que encara no s'han interpretat. Cada vèrtex-enunciat té dos fills, un per a cada valor possible de l'àtom que s'està interpretant.
3. Per construir els vèrtexs corresponents a un nou nivell, es substitueix l'àtom que s'interpreta pel seu valor, i s'apliquen les regles:

$$\begin{array}{ll} \neg 1 = 0, & \neg 0 = 1 \\ 1 \wedge A = A, & 0 \wedge A = 0 \\ 1 \vee A = 1, & 0 \vee A = A \\ 1 \rightarrow A = A, & 0 \rightarrow A = 1 \\ A \rightarrow 1 = 1, & A \rightarrow 0 = \neg A \end{array}$$

Arbre de l'enunciat $p \to q \wedge \neg p$, amb ordre p, q:

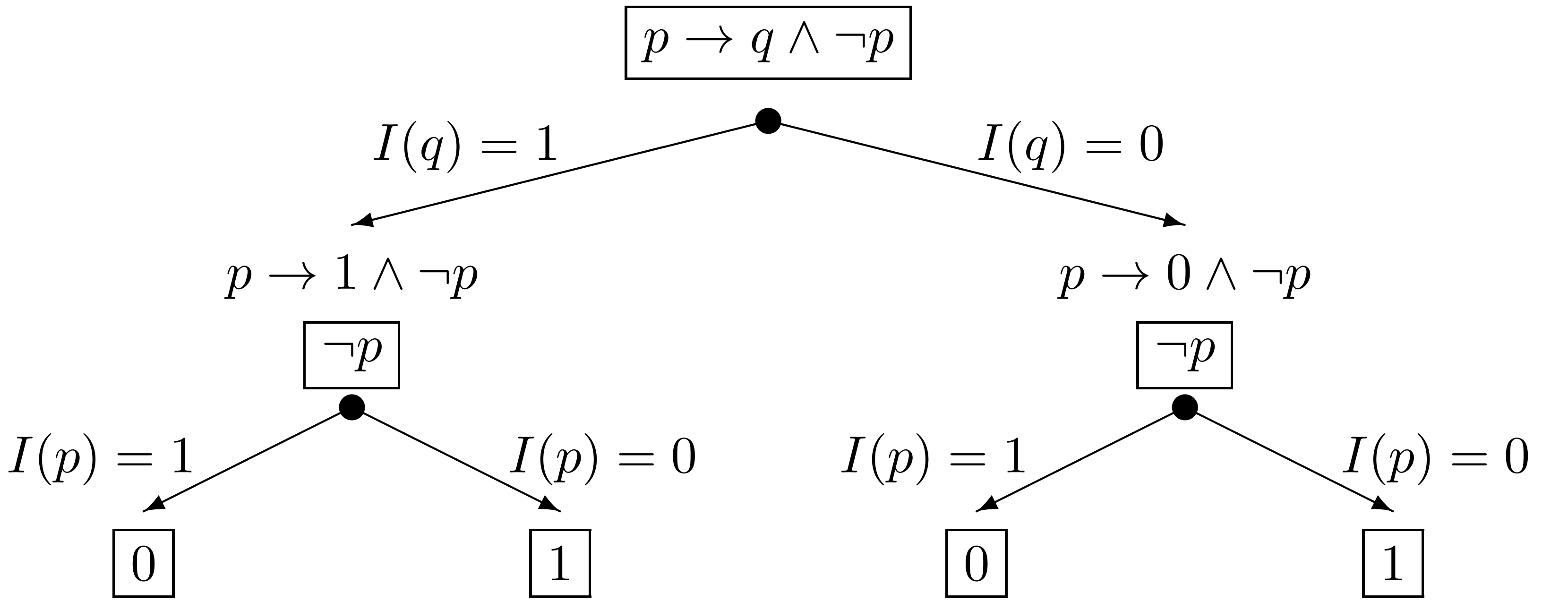
$$\begin{tikzcd} & \boxed{p \to q \wedge \neg p} \arrow[dl, "I(p) = 1"'] \arrow[dr, "I(p) = 0"] & \\ 1 \to q \wedge \neg 1 & & 0 \to q \wedge \neg 0 \\ \boxed{0} & & \boxed{1} \end{tikzcd}$$

Aquest arbre no és complet perqué arribem als valors de veritat, 0 i 1 abans d'interpretar q (això vol dir que la interpretació és la mateixa tant si q és cert com si q és fals).

p	q	$p \to q \wedge \neg p$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

CP0 Teoria de models

Podem comprovar que l'arbre que s'obté fent les interpretacions en l'ordre invers, q, p, és diferent. Però la taula de veritat és la mateixa!



CP0 Teoria de models

B *és* *consequüència lògica* *de* $A_1, \ldots, A_n$ *i ho notem* $\boxed{A_1, \ldots, A_n \models B}$ *si i només si tota interpretació que faci certs els enunciats* A_i *fa també cert l'enunciat* B*.*

Podem establir l'equivalència: $A \vdash B \iff A \models B$?

O el que és equivalent aplicant el teorema de la deducció: $A \vdash B \iff \vdash A \to B$,

$$\boxed{\vdash A \to B \iff \models A \to B}$$

Tot el que es demostra hauria de ser cert i tot el que és cert hauria de poder ser demostrat! L'equivalència ens l'afirmen els metateoremes següents:

Metateoremes

- **Teorema de completesa** : Tota tautologia és un teorema
  $\models A \to B \implies \vdash A \to B$
- **Teorema de consistència** : Tot teorema és una tautologia
  $\vdash A \to B \implies \models A \to B$

Com VALIDAR un raonament?

Comprovant que tot model de les premisses també ho és de la conclusió, és a dir, que la conclusió és conseqüència lògica de les premisses $A_1, \ldots, A_n \models B$.

Equival a veure que l'enunciat $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$ és una *tautologia.*

Exemple.

Si no corro no tinc pressa. Avui no corro. Per tant, no tinc pressa.

Formalment: $\{\neg c \to \neg p, \neg c \vdash \neg p\}$.

En aquest cas, les premisses tenen un únic model, $\{\neg c, \neg p\}$, que és model de la conclusió. Per tant, es tracta d'un raonament vàlid.

Una altra manera de demostrar-ho és comprovant que l'enunciat

$(\neg c \to \neg p) \wedge \neg c \to \neg p$ és una *tautologia*.

CP0 Teoria de models

Com INVALIDAR un raonament?

N'hi ha prou en trobar un model de les premisses que no ho sigui de la conclusió $A_1, \ldots, A_n \not\models B$

Exemple.

Si no corro no tinc pressa. Avui no tinc pressa. Per tant, no corro.

Formalment: $\{\neg c \to \neg p, \neg p \vdash \neg c\}$.

Pensem que és invàlid perquè ens podem imaginar situacions on les premisses són certes i la conclusió falsa: *Avui no tinc pressa però corro perquè algú em segueix.*

La interpretació $\{\neg p, c\}$ és un model de la situació que hem imaginat, és a dir, és model de les premisses, però no ho és de la conclusió. Per tant, es tracta d'un raonament invàlid.

Observa que també ho podria haver demostrat comprovant que l'enunciat $(\neg c \to \neg p) \wedge \neg p \to \neg c$ NO és una *tautologia*.

CP0 Teoria de models

Exemples:

Volem demostrar la validesa o invalidesa dels raonaments següents:

- $p \wedge q \wedge r \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
  La premissa té un únic model que és $\{p, q, r\}$ i també és model de la conclusió. Per tant, la conclusió és conseqüència lògica de la premissa. Es tracta doncs, d'un raonament vàlid.
- $p \vee q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
  La premissa té més d'un model però en aquest cas, en trobem almenys un que no és model de la conclusió: la interpretació $\{p, \neg q, \neg r\}$. De fet, qualsevol interpretació amb dos dels àtoms falsos i l'altre cert és model de $p \vee q \vee r$ però no ho és de $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$. Per tant, es tracta d'un raonament invàlid.

CP0 Àlgebra de proposicions

Enunciats equivalents $A \equiv B \quad \Longleftrightarrow \quad$ *Mateixa taula de veritat*

Una proposició és una classe d'equivalència segons la relació $\equiv$.
És a dir, és un conjunt d'oracions formalment diferents però que signifiquen el mateix.

Exemple. $\boxed{\neg m \vee d \equiv m \rightarrow d \equiv \neg d \rightarrow \neg m}$

Són 3 representants d'una mateixa *proposició*

No et moguis o disparo $\equiv$ *Si et mous, disparo* $\equiv$ *No disparo, per tant, no t'has mogut*

$\mathcal{P}$= conjunt de proposicions

$\mathcal{P}_n$= Conjunt de proposicions amb com a molt n àtoms

$$\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_n \subset \cdots \subset \mathcal{P}.$$

CP0 Àlgebra de proposicions: $\mathcal{P}_n$

Amb un únic àtom, p, tenim dues possibles interpretacions, i el nombre de proposicions és $2^{2^1} = 4 =$ nombre de t.v.

$$\mathcal{P}_1 = \{\square = p \wedge \neg p, p, \neg p, \blacksquare = p \vee \neg p\}$$

$I(p)$	$\square$	p	$\neg p$	$\blacksquare$
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

El nombre de proposicions amb dos àtoms, p i q, és $2^{2^2} = 16 =$nombre de t.v.

$$\mathcal{P}_2 = \{P_0 = \square,\ P_1 = p \wedge q,\ P_2 = p \wedge \neg q,\ P_3 = \neg p \wedge q,\ P_4 = \neg p \wedge \neg q,$$

$$P_5 = p,\ P_6 = \neg p,\ P_7 = q,\ P_8 = \neg q,\ P_9 = p \leftrightarrow q,\ P_{10} = p \leftrightarrow \neg q,$$

$$P_{11} = p \rightarrow q,\ P_{12} = p \rightarrow \neg q,\ P_{13} = \neg p \rightarrow q,\ P_{14} = \neg p \rightarrow \neg q,\ P_{15} = \blacksquare\}$$

Observeu que $p \dashv\vdash p \wedge (q \vee \neg q)$, és a dir, una proposició amb un àtom es pot veure també com una proposició amb dos (o més) àtoms, $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_n \subset \cdots \subset \mathcal{P}$.

CP0 Àlgebra de proposicions

Propietats de les operacions $\neg, \wedge, \vee$

1. Idempotència $A \wedge A = A, \quad A \vee A = A$
2. Conmutativitat $A \wedge B = B \wedge A, \quad A \vee B = B \vee A$
3. Associativitat $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C, \quad A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
4. Absorció $A \wedge (B \vee A) = A, \quad A \vee (B \wedge A) = A$
5. Distributivitat $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Elements universals:

Les contradiccions $\square$ (Tot zeros en la t.v.) Els teoremes $\blacksquare$ (Tot uns en la t.v.)

6. Elements neutres. $A \vee \square = A \wedge \blacksquare = A$.
7. $A \wedge \square = \square \quad A \vee \blacksquare = \blacksquare$.
8. Complementarietat. $A \wedge \neg A = \square, \quad A \vee \neg A = \blacksquare$.

Altres lleis derivades no menys importants són:

9. Cancel·lació. Si $A \wedge C = B \wedge C$ i $A \vee C = B \vee C$ aleshores $A = B$.
10. De Morgan. $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B \quad \neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$.
11. Involució. $\neg\neg A = A$.

CP0 Àlgebra de proposicions: Ordre

Per a A i $B \in \mathcal{P}$ qualssevol

$$\boxed{A \leq B \iff A \vdash B \iff t.v.(A) \leq t.v.(B)}$$

Propietats de la relació $\leq$:

- Reflexiva Per a qualsevol $A \in \mathcal{P}$, $A \leq A$.
- Antisimètrica Per a qualssevol A i $B \in \mathcal{P}$, si $A \leq B$ i $B \leq A$ aleshores $A = B$.
- Transitiva Per a qualssevol A, B i $C \in \mathcal{P}$ si $A \leq B$ i $B \leq C$ aleshores $A \leq C$.

La relació $\leq$ és un ordre *parcial* (hi ha elements que no es poden comparar)

CP0 Àlgebra de proposicions: Ordre

Exemples

1. $\square \leq \blacksquare$
2. En $\mathcal{P}_1$, l'ordre és: $\square \leq p \leq \blacksquare$ i també $\square \leq \neg p \leq \blacksquare$.
   Les proposicions p i $\neg p$ no es poden comparar.
3. En $\mathcal{P}_2$ considerem les proposicions
   $A_1 = p \vee \neg q$, $A_2 = \neg p \leftrightarrow q$, $A_3 = p \wedge q$, $A_4 = p \to \neg q$.

$I(p)$	$I(q)$	A_1	A_2	A_3	A_4
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0

- $(t.v.(A_3) \leq t.v.(A_1),\ t.v.(A_2) \leq t.v.(A_4)) \Longrightarrow (A_3 \vdash A_1,\ A_2 \vdash A_4)$
- No es poden fer més comparacions. Per exemple, A_1 i A_2 no són comparables.
- Les proposicions A_3 i A_4 són complementàries, $A_4 = \neg A_3$.

CP0 Àlg. de prop.: Ordre-Operacions

La relació d'ordre es relaciona amb les operacions per les propietats següents.

- Existència d'ínfim i suprem Per a A i $B \in \mathcal{P}$ qualssevol,
  la proposició $A \wedge B$ és la més gran d'aquest conjunt $\{C \in \mathcal{P} | C \leq A \text{ i } C \leq B\}$.

  $$\boxed{\inf\{A, B\} = A \wedge B}$$

  La proposició $A \vee B$ és la més petita del conjunt $\{C \in \mathcal{P} | A \leq C \text{ i } B \leq C\}$.

  $$\boxed{\sup\{A, B\} = A \vee B}$$

  Per exemple, les proposicions amb els àtoms p i q, tindrem $p \wedge q \leq p \leq p \vee q$ i també $p \wedge q \leq q \leq p \vee q$. També podem veure que les proposicions p i q no són comparables. Podem representar aquest ordre mitjançant un diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & p \arrow[dr, "\leq"] & \\
p \wedge q \arrow[ur, "\leq"] \arrow[dr, "\leq"'] & & p \vee q \\
 & q \arrow[ur, "\leq"'] &
\end{tikzcd}$$

- Complementació Si $A \leq B$ aleshores $\neg B \leq \neg A$.

CP0 Àlg. de prop.: Àlgebra de Boole

En el conjunt $\mathcal{P}$ tenim definides:

Operacions $\neg, \wedge, \vee$

Elements universals $\square$ i $\blacksquare$

Relació d'ordre $\leq$

Amb les propietats que compleixen l'ordre i les operacions,

l'estructura $\boxed{(\mathcal{P}, \leq, \vee, \wedge, \neg, \square, \blacksquare) \text{ és una } \textit{àlgebra de Boole}}$

Recordem que $\mathcal{P}_n$ denota el conjunt de proposicions amb com a molt n àtoms. Es compleix:

- $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_n \subset \cdots \subset \mathcal{P}$.
- $\mathcal{P}_n$ té 2^{2^n} elements.
- Cadascun dels conjunts $\mathcal{P}_n$ és també una àlgebra de Boole.

CP0 Àlgebra de Boole: Exemples

Àlgebra de Boole	**Proposicions**	**Conjunts $\mathcal{P}(X)$**	**Divisors de m**
Ordre $\leq$	$\vdash$	$\subseteq$	divisibilitat
Operacions binàries	$\wedge, \vee$	$\cap, \cup$	Mcd, mcm
Complementari	$\neg A$	$A^c = X \setminus A$	$a^c = m/a$
Universals	$\square, \blacksquare$	$\varnothing, X$	$1, m$

CP0 Àlg. de props.: Simplificar

Utilitzarem les propietats de l'àlgebra de proposicions per simplificar enunciats:

- $A \to B \dashv\vdash \neg A \vee B \dashv\vdash \neg(A \wedge \neg B)$
- $A \dashv\vdash \neg\neg A$
- Propietats distributives.
  $A \wedge (B \vee C) \dashv\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, $A \vee (B \wedge C) \dashv\vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- Idempotència, absorció i propietats dels elements universals.
  $A \wedge A \dashv\vdash A$, $A \vee A \dashv\vdash A$
  $A \wedge (B \vee A) \dashv\vdash A$, $A \vee (B \wedge A) \dashv\vdash A$
  $A \vee \square \dashv\vdash A \wedge \blacksquare \dashv\vdash A$
  $A \wedge \square \dashv\vdash \square$, $A \vee \blacksquare \dashv\vdash \blacksquare$

Exemples

1. $p \wedge (p \to (q \wedge \neg q)) = p \wedge \neg p = \square$
2. $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) = q$
3. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) = p$
4. $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p = p \vee \neg p \vee q \vee \neg q = \blacksquare$
5. $((p \to q) \wedge \neg q) \wedge p = (\neg p \wedge p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q \wedge p) = \square$
6. $(p \wedge (q \to r)) \to s = \neg p \vee (q \wedge \neg r) \vee s = (\neg p \vee s \vee q) \wedge (\neg p \vee s \vee \neg r)$
7. $((\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee r) = ((\neg p \wedge p) \vee q) \wedge \blacksquare = (\square \vee q) \wedge \blacksquare = q$

CP0 Àlg. de props.: Formes normals

Un enunciat està en *forma normal disjuntiva o FND* quan està expressat com a disjunció de conjuncions de literals.

Un *literal* és un àtom o la negació d'un àtom.

$$\boxed{C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_k \ \text{ on } \ C_i = \ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_r}$$

S'admet el cas en què C_i és un únic literal.

Un enunciat està en *forma normal conjuntiva o FNC* quan està expressat com a conjunció de disjuncions de literals.

$$\boxed{C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k \ \text{ on } \ C_i = \ell_1 \vee \cdots \vee \ell_r}$$

S'admet el cas en que C_i és un únic literal.

Els conjuntands C_i s'anomenen *clàusules*.

Diem que un enunciat està en *forma normal* si està en forma normal disjuntiva o en forma normal conjuntiva. Les formes normals són representants especials d'una proposició qualsevol.

CP0 Àlg. de props.: Formes normals

Les formes normals no són úniques

Per obtenir-les podem aplicar les equivalències

$$A \to B \dashv\vdash \neg A \vee B \dashv\vdash \neg(A \wedge \neg B)$$

$$A \dashv\vdash \neg\neg A$$

$$A \wedge (B \vee C) \dashv\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \dashv\vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Els únics enunciats en FND i en FNC a la vegada són:

- literals,
- disjucions de literals i
- conjuncions de literals

$p \wedge q \wedge \neg r$	és FNC (tres conjuntands) i també FND (un disjuntand)

$p \vee q \vee \neg r$	és FND tres disjuntands i també FNC un conjuntand

Exemples.

1. $A = (p \vee q) \to r$
   $A = (\neg p \wedge \neg q) \vee r$ FND
   $A = (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ FNC
2. $A = (p \vee q) \to (r \wedge s)$
   $A = \neg(p \vee q) \vee (r \wedge s) = (\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s)$ FND.
   $A = ((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee s) =$
   $= (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee s)$ FNC.
3. $A = (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
   $A = (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg r)$ FNC
4. $A = p \wedge q \to r$
   $A = \neg(p \wedge q) \vee r = \neg p \vee \neg q \vee r$ FNC i FND.

CP0 Àlg. de props.: FN completes

Un enunciat de $\mathcal{P}_n$ està en *forma normal disjuntiva completa* o FNDC si està en forma normal disjuntiva on cada disjuntand conté els n àtoms.

Un enunciat de $\mathcal{P}_n$ està en *forma normal conjuntiva completa* o FNCC si està en forma normal conjuntiva on cada clàusula conté els n àtoms.

Exemple :

amb els àtoms p i q, $\boxed{(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \text{ està en FNDC}}$

amb p, q i r, $\boxed{(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \text{ està en FNCC}}$

CP0 Àlg. de props.: FN completes

- La forma normal completa requereix la restricció del nombre d'àtoms. No podem trobar formes normals completes a $\mathcal{P}$.
- Tots els enunciats, llevat de les $\square$, tenen FNDC. Això vol dir que, a partir del conjunt de totes les conjuncions possibles de literals que continguin els n àtoms, es pot construir, per disjunció, tot el conjunt $\mathcal{P}_n \setminus \{\square\}$.
- Tots els enunciats, llevat dels $\blacksquare$, tenen FNCC. Això vol dir que, a partir del conjunt de totes les disjuncions possibles de literals que continguin els n àtoms, es pot construir, per conjunció, tot el conjunt $\mathcal{P}_n \setminus \{\blacksquare\}$.
- La FNDC i la FNCC d'un enunciat són úniques. D'altra banda, les formes normals completes no sempre representen la forma més simple de donar una proposició.

Àlg. de props.: FN completes

En $\mathcal{P}_n$, l'àlgebra de proposicions de n àtoms $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$,

- L'element mínim, més petit que tots els altres, és $\Box$.
- El conjunt de generadors de $\mathcal{P}_n \setminus \{\Box\}$, amb l'operació $\vee$ és:

$$\boxed{G = \{\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \cdots \wedge \ell_n \quad / \quad \ell_i \text{ és } p_i \text{ o } \neg p_i\}}$$

Els elements de G són elements minimals de $\mathcal{P}_n \setminus \{\Box\}$,

Això vol dir que l'únic element de $\mathcal{P}_n$ més petit que $g \in G$, és $\Box$.

$g = \ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \cdots \wedge \ell_n$ té tots els valors 0, llevat d'un 1 en la t.v.

CP0 Àlg. de props.: FN completes

Quins són els generadors de les proposicions de $\mathcal{P}_2$?

p	q	$\square$	g_1	g_2	g_3	g_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1

Observa que els 16 elements de l'àlgebra $\mathcal{P}_2$ (proposicions amb 2 àtoms) es poden expressar com a disjunció d'elements del conjunt $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$:

$$g_1 = \neg p \wedge \neg q, \quad g_2 = \neg p \wedge \neg q, \quad g_3 = p \wedge q, \quad g_4 = p \wedge q$$

$$A_0 = \square$$
$$A_1 = g_1,\ A_2 = g_2,\ A_2 = g_2,\ A_3 = g_3,\ A_4 = g_4$$
$$A_5 = g_1 \vee g_2,\ A_6 = g_1 \vee g_3,\ A_7 = g_1 \vee g_4,\ A_8 = g_2 \vee g_3,\ A_9 = g_2 \vee g_4,\ A_{10} = g_3 \vee g_4$$
$$A_{11} = g_1 \vee g_2 \vee g_3,\ A_{12} = g_1 \vee g_2 \vee g_4,\ A_{13} = g_1 \vee g_3 \vee g_4,\ A_{14} = g_2 \vee g_3 \vee g_4$$
$$A_{15} = \blacksquare = g_1 \vee g_2 \vee g_3 \vee g_4$$

CP0 Àlg. de props.: FN completes

Càlcul de formes normals completes

- Per calcular la FNDC d'una proposició n'hi ha prou amb calcular la seva t.v. Els disjuntands que intervenen en la FNDC són els que corresponen a les interpretacions per les quals la proposició pren el valor 1.
  Exemple. $A_5 = g_1 \vee g_2 = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.
- Per calcular la FNCC, el més fàcil és construir la FNDC de la negació de la proposició i després aplicar les lleis de De Morgan

$$\boxed{A = \neg\neg A = \neg(FNDC de \neg A) = (FNCC de A)}$$

  Exemple.
  $A_{10} = \neg\neg A_{10} = \neg(g_1 \vee g_2) = \neg((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$.

Les contradiccions, $\square$, no tenen FNDC (no hi ha uns a la t.v.)

Els teoremes, $\blacksquare$, no tenen FNCC (no hi ha zeros a la t.v.)

$\square = p \wedge \neg p$, i $\blacksquare = p \vee \neg p$. Es poden expressar amb tants àtoms com es vulgui...

$\square = (p_1 \wedge \neg p_1) \vee (p_2 \wedge \neg p_2) \vee \cdots \vee (p_n \wedge \neg p_n)$ FND (però no és completa)

$\blacksquare = (p_1 \vee \neg p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_2) \wedge \cdots \wedge (p_n \vee \neg p_n)$ FNC (però no és no completa)

CP0 Resolució

El mètode de RESOLUCIÓ ens permet fer demostracions per *reducció a l'absurd* de manera automàtica, a partir de les FNC dels enunciats.

$$A_1, \cdots, A_n \vdash B$$

$$\Updownarrow$$

$$A_1, \cdots, A_n, \neg B \vdash \square$$

$$\Updownarrow$$

$$\{A_1, \cdots, A_n, \neg B\} \text{ insatisfactible}$$

$$\Updownarrow \text{Pas a forma clausular}$$

$$S = \{C_1, \cdots, C_m\} \text{ insatisfactible}$$

La forma clausular d'un enunciat és el conjunt de clàusules de la FNC.

Només amb la regla de resolució probarem la insatisfactibilitat de S.

CP0 Resolució: forma clausular

Exemple.
Forma clausular del conjunt $\{A_1, A_2, A_3, \neg B\}$:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= (p \vee q) \rightarrow (r \wedge s) \\
FNC(A_1) &= (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee s) \\
&= C_1 \wedge \cdots \wedge C_4 \\
A_2 &= \neg(\neg p \vee \neg r) \\
FNC(A_2) &= p \wedge r = C_5 \wedge C_6 \\
A_3 &= \neg t \rightarrow \neg(p \wedge r) \\
FNC(A_3) &= t \vee \neg p \vee \neg r = C_7 \\
\neg B &= \neg t \\
FNC(\neg B) &= \neg t = C_8 \\
S &= FC(A_1) \cup FC(A_2) \cup FC(A_3) \cup FC(\neg B) = \\
&= \{C_1, \cdots, C_4\} \cup \{C_5, C_6\} \cup \{C_7\} \cup \{C_8\} = \\
&= \{C_1, \cdots, C_8\}.
\end{aligned}
$$

CP0 Resolució: arbre de resolvents

Direem resolvent i notarem per $RS(C_i, C_j)$, *a la clàusula resultant d'aplicar la regla de resolució a les clàusules* C_i *i* C_j.

Podrem aplicar la regla de resolució a C_i i C_j si contenen a un mateix literal, afirmat en una i negat en l'altra.

En el mètode de resolució, hem de provar si un conjunt de clàusules és o no insatisfactible . Si ho és, el conjunt de totes les resolvents conté una contradicció, però aplicarem diferents estratègies per no haver de calcular-les totes.

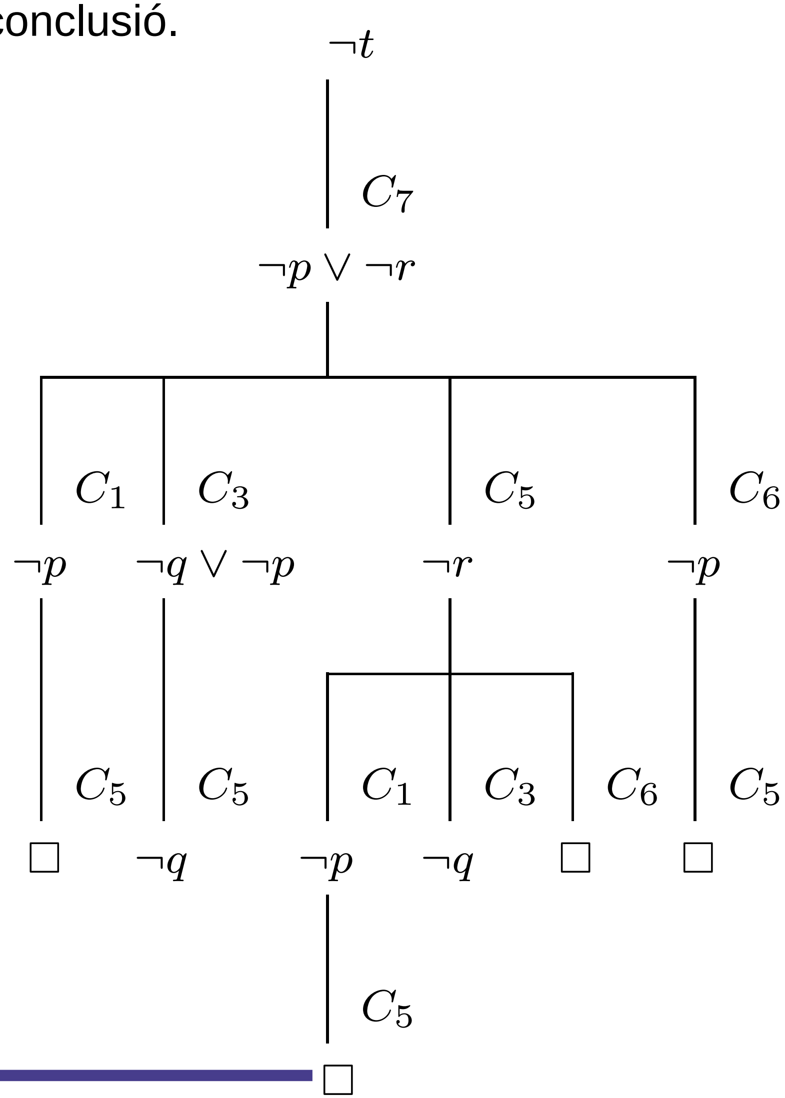
- Començarem amb les clàusules provinents de la negació de la conclusió. Amb qualsevol d'elles podem iniciar un arbre de resolvents.
- Aplicarem Resolució Lineal, on sempre s'utilitza l'última resolvent obtinguda per calcular la següent.
  La Resolució Lineal és completa, és a dir, *si el conj. de clàusules és insatisfactible, el mètode trobarà una contradicció*.

CP0 Resolució: arbre de resolvents

Exemple. (Agafem el conj S de la pàg.75).

Agafem com arrel la negació de la conclusió. Amb resolució lineal es construeix qualsevol del camins que van des de l'arrel a una fulla.

Si cap fulla fos $\square$, es provaria amb una altra arrel (si la hi ha) de les clàusules provinents de la negació de la conclusió.



CP0 Resolució: resolució lineal

Estratègia de la Resolució LINEAL:

Partim d'un conjunt de clàusules S al que anirem afegint les resolvents

$$
\begin{array}{ll}
C_1 & \\
\big| & B_1 \\
C_2 & \\
\big| & B_2 \\
\vdots & \\
\big| & B_{n-2} \\
C_{n-1} & \\
\big| & B_{n-1} \\
C_n &
\end{array}
$$

$C_1 \in S$ conjunt de clàusules inicials, i $C_{i+1} = RS(C_i, B_i)$ si:

- C_i és l'última clàusula obtinguda.
- $B_i \in S$ o és C_j per a alguna $j \in \{1, \cdots, i-1\}$.

La resolució lineal acaba quan s'obté $\Box$ o no es pot trobar més parelles per fer resolució.

Exemple.

$(p \wedge \neg q \wedge r) \rightarrow s,\ t,\ (s \wedge t) \rightarrow u,\ p \rightarrow (u \rightarrow \neg w),\ w \vdash (p \wedge r) \rightarrow q$

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \vdash B \Longleftrightarrow A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \neg B \vdash \square$$

$FC(A_1) = \{C_1\}, FC(A_2) = \{C_2\}, FC(A_3) = \{C_3\}, FC(A_4) = \{C_4\}, FC(A_5) = \{C_5\}$

$FC(\neg B) = \{C_6, C_7, C_8\}, \quad S = \{C_1, \cdots, C_8\}$

$$\begin{aligned} C_1 &= \neg p \vee q \vee \neg r \vee s \\ C_2 &= t \\ C_3 &= \neg s \vee \neg t \vee u \\ C_4 &= \neg p \vee \neg u \vee \neg w \\ C_5 &= w \\ C_6 &= p \\ C_7 &= r \\ C_8 &= \neg q \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{l}
C_6 : \quad p \\
\quad\quad\quad \Big| \; C_1 \\
C_9 : q \vee \neg r \vee s \\
\quad\quad\quad \Big| \; C_7 \\
C_{10} : q \vee s \\
\quad\quad\quad \Big| \; C_8 \\
C_{11} : \quad s \\
\quad\quad\quad \Big| \; C_3 \\
C_{12} : \neg t \vee u \\
\quad\quad\quad \Big| \; C_2 \\
C_{13} : \quad u \\
\quad\quad\quad \Big| \; C_4 \\
C_{14} : \neg p \vee \neg w \\
\quad\quad\quad \Big| \; C_5 \\
C_{15} : \neg p \\
\quad\quad\quad \Big| \; C_6 \\
C_{16} : \quad \square
\end{array}
$$

Per tant, S és insatisfactible. El raonament és vàlid.

CP1 El llenguatge

CÀLCUL DE PREDICATS: Alfabet

$$\boxed{\Sigma = \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \forall, \exists, (,)\} \cup \{P, Q, R \dots\} \cup \{x, y, z, \dots\} \cup \{a, b, c, \dots\} \cup \{f, g, h, \dots\}}$$

Variables: designen objectes *genèrics*, quantificables x, y, z, $\dots$

Constants: designen objectes *concrets*, no quantificables a, b, $\dots$

Funcions: designen objectes per mitjà d'altres objectes f, g, $\dots$

Termes: poden ser variables, constants o expressions de la forma $f(t_1, \dots, t_n)$ on f és una lletra de funció i $t_1, \dots, t_n$ són termes.

Predicats: són funcions de n variables, expressen propietats dels objectes P, Q, $\dots$

Àtoms: expressions del tipus $Pt_1 \dots t_n$ amb P predicat d'ordre n i $t_1, \dots, t_n$ termes.

Connectives: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ més els quantificadors: $\forall$ (per a tot) i $\exists$ (existeix).

CP1 El llenguatge

Les *fórmules*, són paraules en l'alfabet Σ donades per les regles recursives:

1. Tot àtom $Pt_1t_2 \ldots t_n$, amb t_i terme per a tot i, és una fórmula.
2. Si A és una fórmula, $\neg A$ i (A) també ho són.
3. Si A i B són fórmules i v és una variable, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$, $\forall v\, A$, $\exists v\, A$ també són fórmules.
4. No hi ha més fórmules.

Ordre creixent de les connectives: $\boxed{\rightarrow, \quad \{\wedge, \vee\}, \quad \{\neg, \forall, \exists\}}$

Els àtoms del càlcul d'enunciats són els predicats 0-àdics.

El domini d'una variable és el conjunt de valors que pot prendre.

El camp d'acció d'un quantificador és la fórmula sobre la que actua, quantificant totes les ocurrències lliures de la variable que quantifica.

Les diferents aparicions d'una mateixa variable en una fórmula donada s'anomenen *ocorrències*.
Si F és una fórmula i x, y són variables, $F < x/y >$ indica la fórmula que resulta de substituir en F totes les ocorrències de x per y.

Una ocorrència d'una variable es diu que és *lligada* si cau dins el camp d'un quantificador. Altrament, se'n diu *lliure*.

Una *fórmula oberta* és una fórmula que té variables lliures.
Una *fórmula tancada* és una fórmula que no té variables lliures.

- $Mab \to \exists x \, \exists y \, Mxy$ fórmula tancada
- $\forall x \, (Pxy \wedge \exists y \, Qy)$ fórmula oberta
- $Az \to \forall z \, Az$ fórmula oberta
- $\forall x \, (\exists y Mxy \to (Px \wedge Qa))$ fórmula tancada
- $\exists y \, Pxy$ fórmula oberta

CP1 Formalització: exemples

- *L'Anna està contenta* Ca
- *El pare de l'Anna està content* $Cp(a)$
- *Si plou, el meu germà agafa el paraigües* $P \rightarrow Ag(j)$
- *Tothom treballa* $\forall x\, Tx$
- *Algú treballa* $\exists x\, Tx$
- *Ningú no treballa* $\neg\exists x Tx \equiv \forall x \neg Tx$
- *Tothom treballa i estudia* $\forall x\, (Tx \wedge Ex)$
- *Tots els que treballen estudien* $\forall x\, (Tx \rightarrow Ex)$
- *Hi ha algú que treballa i estudia* $\exists x\, (Tx \wedge Ex)$
- *Cap dels que treballen no estudien* $\neg\exists x(Tx \wedge Ex) \equiv \forall x(Tx \rightarrow \neg Ex)$
- *No tots els que treballen estudien* $\neg\forall x(Tx \rightarrow Ex) \equiv \exists x(Tx \wedge \neg Ex)$

CP1 Formalització: exemples

Tots els del tipus A verifiquen B $\boxed{\forall x\,(Ax \to Bx)}$ (1)

N'hi ha del tipus A que verifiquen B $\boxed{\exists x\,(Ax \land Bx)}$ (2)

Sempre hi ha alguna pregunta que tots els alumnes saben respondre

$$\underbrace{\exists x\,(Px \land \underbrace{\forall y\,(Ay \to Sxy)}_{(1)})}_{(2)}$$

Per a qualsevol pregunta sempre hi ha algun alumne que la sap respondre

$$\underbrace{\forall x\,(Px \to \underbrace{\exists y\,(Ay \land Sxy)}_{(2)})}_{(1)}$$

Tots els estudiants del grup 1 han fet totes les pràctiques

$$\underbrace{\forall x\,(Gx \to \underbrace{\forall y\,(Py \to \neg Fxy)}_{(1)})}_{(1)} = \neg\underbrace{\exists x\,(Gx \land \underbrace{\exists y\,(Py \land \neg Fxy)}_{(2)})}_{(2)}$$

CP1 Formalització: exemples

- *Qualsevol clau obre alguna de les portes de l'edifici*
  $\forall x\,(Cx \to \exists y\,(Py \wedge Oxy))$
- *Alguna clau obre qualsevol de les portes de l'edifici*
  $\exists x\,(Cx \wedge \forall y\,(Py \to Oxy))$
- *No hi ha clau que obri totes les portes*
  $\neg\exists x\,(Cx \wedge \forall y\,(Py \to Oxy)) \equiv \forall x\,(Cx \to \exists y\,(Py \wedge \neg Oxy))$
- *Les claus que no obrin cap porta es poden llençar*
  $\forall x\,(Cx \wedge \neg\exists y\,(Py \wedge Oxy) \to Lx)$
- *Totes les claus mestres obren qualsevol porta*
  $\forall x\,(Cx \wedge Mx \to \forall y\,(Py \to Oxy)) \equiv \neg\exists x\,(Cx \wedge Mx \wedge \exists y\,(Py \wedge \neg Oxy))$

CP1 Equivalències deductives

1. $\forall x\, Ax \dashv\vdash \forall y\, A < x/y >$ si y no apareix lliure en Ax i el pas de Ax a $A < x/y >$ no fa aparèixer variables lligades
2. $\exists x\, Ax \dashv\vdash \exists y\, A < x/y >$ si y no apareix lliure en Ax i el pas de Ax a $A < x/y >$ no fa aparèixer variables lligades
3. Lleis de De Morgan: $\boxed{\neg\forall x\, Ax \dashv\vdash \exists x \neg Ax, \quad \neg\exists x\, Ax \dashv\vdash \forall x \neg Ax}$
4. $\forall x\, \forall y\, Axy \dashv\vdash \forall y\, \forall x\, Axy$
5. $\exists x\, \exists y\, Axy \dashv\vdash \exists y\, \exists x\, Axy$
6. Distributiva de la $\wedge$ respecte del $\forall$ $\quad \forall x\, (Ax \wedge Bx) \dashv\vdash \forall x\, Ax \wedge \forall x\, Bx$
7. Distributiva de la $\vee$ respecte del $\exists$ $\quad \exists x\, (Ax \vee Bx) \dashv\vdash \exists x\, Ax \vee \exists x\, Bx$
8. $\forall x\, Ax \to \exists x\, Bx \dashv\vdash \exists x\, (Ax \to Bx)$
9. $A \wedge \forall x\, Bx \dashv\vdash \forall x\, (A \wedge Bx) \quad A \wedge \exists x\, Bx \dashv\vdash \exists x\, (A \wedge Bx)$
10. $A \vee \forall x\, Bx \dashv\vdash \forall x\, (A \vee Bx) \quad A \vee \exists x\, Bx \dashv\vdash \exists x\, (A \vee Bx)$
11. $A \to \forall x\, Bx \dashv\vdash \forall x\, (A \to Bx) \quad A \to \exists x\, Bx \dashv\vdash \exists x\, (A \to Bx)$
12. $\forall x\, Ax \to B \dashv\vdash \exists x\, (Ax \to B) \quad \exists x\, Ax \to B \dashv\vdash \forall x\, (Ax \to B)$
13. Rebateig: $Q_1 x\, Ax * Q_2 x\, Bx \dashv\vdash Q_1 x\, Q_2 y\, (Ax * B < x/y >)$, amb $Q_1, Q_2 \in \{\forall, \exists\}$, $* \in \{\wedge, \vee\}$ si y no apareix lliure en Bx i el pas de Bx a $B < x/y >$ no fa aparèixer variables lligades

ED: distribut. de la $\wedge$ respecte del $\forall$

Distributiva de la $\wedge$ respecte del $\forall$

- *Els nous contractats són tots informàtics i els antics també.*
- *Tant els nous contractats com els antics són tots informàtics.*

$$\forall x(Nx \to Ix) \wedge \forall x(Ax \to Ix) \overset{[6]}{\dashv\vdash} \forall x((Nx \to Ix) \wedge (Ax \to Ix))$$
$$\dashv\vdash \forall x(Nx \vee Ax \to Ix)$$

NO distributiva de la $\vee$ respecte del $\forall$

- *Tothom vota a l'Anna o a la Berta.* $\forall x(Vxa \vee Vxb)$
- *Tothom vota a l'Anna o bé tothom vota a la Berta.*

$$\forall x Vxa \vee \forall x Vxb \overset{[13]}{\dashv\vdash} \forall x \forall y(Vxa \vee Vyb)$$

No és certa l'equivalència però sí una de les deduccions:

$$\forall x Vxa \vee \forall x Vxb \vdash \forall x(Vxa \vee Vxb).$$

ED: distribut. de la $\vee$ respecte del $\exists$

NO Distributiva de la $\wedge$ respecte del $\exists$

- *Hi ha un algorisme d'ordenació i hi ha un algorisme de càlcul.*
  $\exists x(Ax \wedge Ox \wedge Cx) \overset{[13]}{\dashv\vdash} \exists x \exists y(Ax \wedge Ox \wedge Ay \wedge Cy)$
- *Hi ha un algorisme d'ordenació i càlcul.*
  $\exists x(Ax \wedge Ox) \wedge \exists x(Ax \wedge Cx)$

No són equivalents però de la segona es dedueix la primera:

$$\exists x(Ax \wedge Ox \wedge Cx) \vdash \exists x(Ax \wedge Ox) \wedge \exists x(Ax \wedge Cx).$$

Distributiva de la $\vee$ respecte del $\exists$

- *Hi ha programes que funcionen però no es coneixen o hi ha programes que funcionen però no els tenim.*
- *Hi ha programes que funcionen, però no es coneixen o no els tenim.*
  $\exists x(Px \wedge Fx \wedge \neg Cx) \vee \exists x(Px \wedge Fx \wedge \neg Tx) \overset{[7]}{\dashv\vdash}$
  $\exists x((Px \wedge Fx \wedge \neg Cx) \vee (Px \wedge Fx \wedge \neg Tx))$
  $\dashv\vdash \exists x((Px \wedge Fx) \wedge (\neg Cx \vee \neg Tx))$

CP1 Formes Normals

Una fórmula A està en *forma normal prenexa*, $FNP(A)$, si tots els quantificadors estan a la capçalera:

$$FNP(A) \; \boxed{A : Q_1x_1\, Q_2x_2 \ldots Q_nx_n \;\; E(x_1, x_2 \ldots x_n)}$$

$FNPC(A)$ (forma normal prenexa conjuntiva de A), si E està en FNC.
$FNPD(A)$ (forma normal prenexa disjuntiva de A), si E està en FND.

Exemple.

$A : \forall x\, ((Px \rightarrow \exists y\, Qxy) \wedge Rx)$

FNP(A)= $\forall x\, \exists y\, ((Px \rightarrow Qxy) \wedge Rx)$

FNPC(A)= $\forall x\, \exists y\, ((\neg Px \vee Qxy) \wedge Rx)$

FNPCD(A)= $\forall x\, \exists y\, ((\neg Px \wedge Rx) \vee (Qxy \wedge Rx))$

CP1 Formes Normals

Obtenció de les formes normals:

1. S'eliminen les connectives $\leftrightarrow$ i $\rightarrow$ si n'hi ha, aplicant les equivalències deductives del càlcul d'enunciats.
   - $A \leftrightarrow B \dashv\vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
   - $A \rightarrow B \dashv\vdash \neg A \vee B$
2. S'eliminen les negacions davant de parèntesi i de quantificadors:
   - $A \dashv\vdash \neg\neg A$
   - Lleis de De Morgan:
     $\neg(A \vee B) \dashv\vdash \neg A \wedge \neg B \quad \neg(A \wedge B) \dashv\vdash \neg A \vee \neg B$
     $\neg\forall x\, Ax \dashv\vdash \exists x\, \neg Ax \qquad \neg\exists x\, Ax \dashv\vdash \forall x\, \neg Ax$
3. Es passen els quantificadors a la capçalera, fent rebateig si cal. Observació: un quantificador no pot saltar per sobre d'un altre i, sempre que sigui possible, passarem abans $\exists$ que $\forall$ fent servir la propietat conmutativa de la $\wedge$ i de la $\vee$.

CP1 Formes Normals

- $\forall x\, Ax \wedge \forall x\, Bx \dashv\vdash \forall x\, (Ax \wedge Bx)$
- $\exists x\, Ax \vee \exists x\, Bx \dashv\vdash \exists x\, (Ax \vee Bx)$
- $A \wedge Qx\, Bx \dashv\vdash Qx\, (A \wedge Bx)$ $\quad Q \in \{\forall, \exists\}$ i A no conté x lliure
- $A \vee Qx\, Bx \dashv\vdash Qx\, (A \vee Bx)$ $\quad Q \in \{\forall, \exists\}$ i A no conté x lliure
- $Q_1 x\, Ax * Q_2 x\, Bx \dashv\vdash Q_1 x\, Q_2 y\, (Ax * By)$ $\quad Q_1, Q_2 \in \{\forall, \exists\}$, $* \in \{\wedge, \vee\}$

4. Per trobar FNPC o FNPD, l'expressió sense quantificadors es passa a FNPC o FNPD, aplicant les propietats distributives de la $\wedge$ i la $\vee$.
   - Propietats distributives:
     $A \vee (B \wedge C) \dashv\vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
     $A \wedge (B \vee C) \dashv\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

CP1 Formes Normals: Exemples

Exemple. E :$\forall x\,(\exists y(Axy \wedge By) \rightarrow \exists y(Cx \wedge Dxy))$

- Treiem les implicacions,
  $\forall x\,(\neg\exists y(Axy \wedge By) \vee \exists y(Cx \wedge Dxy))$
- Eliminen les negacions davant de parèntesis o quantificadors,
  $\forall x\,(\forall y(\neg Axy \vee \neg By) \vee \exists y(Cx \wedge Dxy))$
- Apliquem la conmutativa de la $\wedge$ o de la $\vee$, si això ens permet avançar algun quantificador existencial cap a l'esquerra:
  $\forall x\,(\exists y(Cx \wedge Dxy) \vee \forall y(\neg Axy \vee \neg By))$
- Passem els quantificadors a la capçalera. En aquest cas, cal fer rebateig: $\forall x \exists y \forall z\,((Cx \wedge Dxy) \vee (\neg Axz \vee \neg Bz))$
- La matriu està en FND, per tant:

$$FNPD(E) = \forall x \exists y \forall z\,((Cx \wedge Dxy) \vee \neg Axz \vee \neg Bz)$$

Apliquem la distributiva per obtenir la FNC:

$$FNPC(E) = \forall x \exists y \forall z\,(((Cx \vee \neg Axz \vee \neg Bz) \wedge (Dxy \vee \neg Axz \vee \neg Bz)))$$

CP1 Formes Normals: Exemples

En els exemples següents, el pas a FNP ens dóna directament una FNPC, que és també una FNPD.

1. $\exists x(Px \to Qx) \vee \forall x(Rx \to Qx) \dashv\vdash \exists x(\neg Px \vee Qx) \vee \forall x(\neg Rx \vee Qx) \dashv\vdash$
   $\exists x(\neg Px \vee Qx) \vee \forall y(\neg Ry \vee Qy) \dashv\vdash \exists x \forall y(\neg Px \vee Qx \vee \neg Ry \vee Qy)$

2. $\forall x\,(Lx \to \neg\exists y\,(My \wedge Nxy)) \dashv\vdash \forall x\,(\neg Lx \vee \neg\exists y\,(My \wedge Nxy)) \dashv\vdash$
   $\forall x\,(\neg Lx \vee \forall y\,\neg(My \wedge Nxy)) \dashv\vdash \forall x\,(\neg Lx \vee \forall y\,(\neg My \vee \neg Nxy)) \dashv\vdash$
   $\forall x\,\forall y\,(\neg Lx \vee (\neg My \vee \neg Nxy)) \dashv\vdash \forall x\,\forall y\,(\neg Lx \vee \neg My \vee \neg Nxy)$

3. $\neg\forall x\,(Px \wedge \exists y\,(Qy \wedge Rxy) \to Tx) \dashv\vdash$
   $\exists x\,\neg(\neg(Px \wedge \exists y\,(Qy \wedge Rxy)) \vee Tx) \dashv\vdash$
   $\exists x\,((Px \wedge \exists y\,(Qy \wedge Rxy)) \wedge \neg Tx) \dashv\vdash \exists x\,\exists y\,(Px \wedge Qy \wedge Rxy \wedge \neg Tx)$

4. $\neg\forall x\,(\exists y\,(Py \wedge Qxy) \to Lx) \dashv\vdash \neg\forall x\,\neg(\exists y\,(Py \wedge Qxy) \wedge \neg Lx)$
   $\dashv\vdash \exists x\,(\exists y\,(Py \wedge Qxy) \wedge \neg Lx) \dashv\vdash \exists x\,\exists y\,(Py \wedge Qxy \wedge \neg Lx)$

CP1 Deducció Natural: Regles

Regles de la Deducció Natural amb quantificadors
Per formalitzar raonaments amb predicats, tenim les mateixes regles que teníem en el càlcul d'enunciats, més les que ens permetran tractar les connectives noves, que són:

10. Introducció de $\forall$ o generalització (I$\forall\, m$)
    $Au \vdash \forall x\, Ax$ sempre que u sigui una variable que no aparegui en les hipòtesis del raonament.
11. Eliminació de $\forall$ o particularització (E$\forall\, m$)
    $\forall x\, Ax \vdash At$ amb t terme qualsevol.
12. Introducció de $\exists$ o generalització existencial (I$\exists\, m$)
    $At \vdash \exists x\, Ax$ amb t terme qualsevol, sempre que x no aparegui com variable lliure en A.
13. Eliminació de $\exists$ o particularització existencial (E$\exists\, m$)
    $\exists x Ax \vdash Aa$ amb a constant nova.

CP1 Deducció Natural

Ex.1 $\forall x Ax \wedge \forall x Bx \dashv\vdash \forall x(Ax \wedge Bx)$

$\forall x Ax \wedge \forall x Bx \vdash \forall x(Ax \wedge Bx)$

1.	$\forall x Ax \wedge \forall x Bx$	H
2.	$\forall x Ax$	E$\wedge$ 1
3.	$\forall x Bx$	E$\wedge$ 1
4.	Az	E$\forall$ 2
5.	Bz	E$\forall$ 3
6.	$Az \wedge Bz$	I$\wedge$ 4,5
7.	$\forall x(Ax \wedge Bx)$	I$\forall$ 6

$\forall x Ax \wedge \forall x Bx \dashv \forall x(Ax \wedge Bx)$

1.	$\forall x(Ax \wedge Bx)$	H
2.	$Az \wedge Bz$	E$\forall$ 1
3.	Az	E$\wedge$ 2
4.	Bz	E$\wedge$ 2
5.	$\forall x Ax$	I$\forall$ 3
6.	$\forall x Bx$	I$\forall$ 4
7.	$\forall x Ax \wedge \forall x Bx$	I$\wedge$ 5,6

CP1 Deducció Natural

Ex.2 $\forall x Ax \lor \forall x Bx \vdash \forall x(Ax \lor Bx)$

1.	$\forall x Ax \lor \forall x Bx$	H
2.	$\forall x Ax$	H
3.	Az	E$\forall$ 2
4.	$Az \lor Bz$	I$\lor$ 3
5.	$\forall x(Ax \lor Bx)$	I$\forall$ 4
6.	$\forall x Bx$	H
7.	Bz	E$\forall$ 2
8.	$Az \lor Bz$	I$\lor$ 3
9.	$\forall x(Ax \lor Bx)$	I$\forall$ 4
10.	$\forall x(Ax \lor Bx)$	PC 1,5,9

CP1 Deducció Natural

Ex.3 $\exists x(Ax \wedge Bx) \vdash \exists x Ax \wedge \exists x Bx$

1.	$\exists x(Ax \wedge Bx)$	H
2.	$Aa \wedge Ba$	E$\exists$ 1
3.	Aa	E$\wedge$ 2
4.	Ba	E$\wedge$ 2
5.	$\exists x Ax$	I$\exists$ 3
6.	$\exists x Bx$	I$\exists$ 4
7.	$\exists x Ax \wedge \exists x Bx$	I$\wedge$ 5,6

CP1 Deducció Natural

Ex.4 $\exists x Ax \vee \exists x Bx \dashv\vdash \exists x(Ax \vee Bx)$

1.	$\exists x Ax \vee \exists x Bx$	H
2.	$\quad \exists x Ax$	H
3.	$\quad Aa$	E$\exists$ 2
4.	$\quad Aa \vee Ba$	I$\vee$ 3
5.	$\quad \exists x(Ax \vee Bx)$	I$\exists$ 4
6.	$\quad \exists x Bx$	H
7.	$\quad Ba$	E$\exists$ 6
8.	$\quad Aa \vee Ba$	I$\vee$ 7
9.	$\quad \exists x(Ax \vee Bx)$	I$\exists$ 8
10.	$\exists x(Ax \vee Bx)$	PC 1,5,9

$\exists x Ax \vee \exists x Bx \vdash \exists x(Ax \vee Bx)$

CP1 Deducció Natural

$\exists x Ax \vee \exists x Bx \dashv \exists x(Ax \vee Bx)$

1.	$\exists x(Ax \vee Bx)$	H
2.	$Aa \vee Ba$	E$\exists$ 1
3.	$\quad \vert\ Aa$	H
4.	$\quad \vert\ \exists x Ax$	I$\exists$ 3
5.	$\quad \vert\ \exists x Ax \vee \exists x Bx$	I$\vee$ 4
6.	$\quad \vert\ Ba$	H
7.	$\quad \vert\ \exists x Bx$	I$\exists$ 6
8.	$\quad \vert\ \exists x Ax \vee \exists x Bx$	I$\vee$ 7
9.	$\exists x Ax \vee \exists x Bx$	PC 1,5,8

CP1 Teoria de models

Interpretar una fórmula és assignar-li un valor de cert o fals. Per fer-ho, necessitarem les interpretacions.

Elements d'una interpretació:

- *domini*, D;
- interpretació dels *predicats*: per a cada predicat n-àdic, una funció $I_P : D^n \to \{cert, fals\}$, que ens indica per a cada objecte del domini, quins valors de veritat pren el predicat;
- interpretació de les *constants*: per a cada lletra de constant c, un element del domini $I_c \in D$;
- interpretació de les *funcions*: per a cada funció n-àdica f, una funció n-àdica I_f: $A \subset D^n \to D$; el conjunt A no té perquè ser tot D^n.

CP1 Teoria de models: fórmules

Un model d'una fórmula és una interpretació que la fa certa.

Exemple. La interpretació $I = \{D, I_P, I_a\}$ amb $D = \{1, 2\}$, $I_P = \{P11, P12, \neg P21, \neg P22\} = \{P11, P12\}$, i $I_a = 2$.

- És un model de les fórmules $\forall x\,\exists y\, Pyx$, $\exists x\,\exists y\, Pxy$, $\exists x\, Pxa$, $\neg Paa$, $\exists x\, Pxx$,...
- És un contramodel de les fórmules $\forall x\,\exists y\, Pxy$, $\forall x\,\forall y\, Pxy$, $\forall x\, Pxa$, $\exists x\, Pax$, Paa, $\forall x\, Pxx$,...

Diem que A és una fórmula vàlida i notem $\models A$, si és certa per a totes les seves interpretacions.
Diem que A és una fórmula insatisfactible i notem $\models \neg A$, si és falsa per a totes les seves interpretacions.

Exemple. $\models \forall x\, Px \vee \exists x\, \neg Px$ $\qquad$ $\not\models \forall x\,\exists y\, Pxy \to \exists y\,\forall x\, Pxy$

$\forall x\, Px \wedge \exists x\, \neg Px$ és insatisfactible.

CP1 Teoria de models: raonaments

Un raonament és vàlid si tota interpretació que fa certes les premisses també fa certa la conclusió.

Ex. $\forall x(Ux \wedge Ex) \vdash \forall x(Ux \rightarrow Ex) \quad \exists x(Ux \wedge Ex) \vdash \exists x(Ux \rightarrow Ex)$.

Invalidem un raonament buscant una interpretació que faci certes les premisses i falsa la conclusió.

Exemples. Invalidarem els raonaments següents buscant en cada cas una interpretació que faci certa la premissa i falsa la conclusió:

Ex.1 $\forall x(Ux \rightarrow Ex) \vdash \forall x(Ux \wedge Ex)$ invàlid

$$I = \{D = \{a\}, I_U = \{\neg Ua\}, I_E = \{Ea\}\}$$

$$I = \{D = \{a, b\}, I_U = \{\neg Ua, Ub\}, I_E = \{Ea, Eb\}\}$$

Ex.2 $\exists x(Ux \rightarrow Ex) \vdash \exists x(Ux \wedge Ex)$ invàlid,

$$I = \{D = \{a\}, I_U = \{\neg Ua\}, I_E = \{Ea\}\}$$

$$I = \{D = \{a, b, c\}, I_U = \{\neg Ua, Ub, Uc\}, I_E = \{Ea, \neg Eb, \neg Ec\}\}$$

CP1 Teoria de models: raonaments

Ex.3 $\boxed{\exists x Ax \land \exists x Bx \not\models \exists x(Ax \land Bx)}$

$I = \{D = \{a, b\}, I_A = \{Aa, \neg Ab\}, I_B = \{\neg Ba, Bb\}\}$.

Observeu que amb un domini de dos elements, com el de I:

$\exists x Ax \land \exists x Bx = (Aa \lor Ab) \land (Ba \lor Bb)$

$\exists x(Ax \land Bx) = (Aa \land Ba) \lor (Ab \land Bb)$.

Comprovem que I fa cert $\exists x Ax \land \exists x Bx$ i fals $\exists x(Ax \land Bx)$

Ex.4 $\boxed{\forall x(Ax \lor Bx) \not\models \forall x Ax \lor \forall x Bx}$

$I = \{D = \{a, b\}, I_A = \{Aa, \neg Ab\}, I_B = \{Ba, \neg Bb\}\}$.

Amb el domini de I reescribim les fórmules:

$\forall x Ax \lor \forall x Bx = (Aa \land Ab) \lor (Ba \land Bb)$

$\forall x(Ax \lor Bx) = (Aa \lor Ba) \land (Ab \lor Bb)$.

Comprovem que I fa cert $\forall x(Ax \lor Bx)$ i fals $\forall x Ax \lor \forall x Bx$

CP1 Teoria de models: raonaments

Ex.5 $\forall x\, \exists y(Pxy \wedge Qxy) \vdash \exists y\, \forall x(Pxy \vee Qxy)$ invàlid

$$I = \{D = \{a, b\}, I_P = \{Paa,\ \neg Pab,\ \neg Pba,\ Pbb, Qaa,\ \neg Qab,\ \neg Qba, Qbb\}\}$$

Ex.6 *Només els dies de pluja són tristos.*

Hi ha dies que ni plou, ni són tristos.

Per tant, no tots els dies de pluja són tristos.

$$\forall x\, (Tx \rightarrow Px),\ \exists x(\neg Px \wedge \neg Tx) \vdash \neg\forall x(Px \rightarrow Tx)$$

Es tracta d'un raonament invàlid ja que podem trobar una interpretació que fa certes les premisses i falsa la conclusió:

$$I = \{D = \{a\},\ I_P = \{\neg Pa\},\ I_T = \{\neg Ta\}\}$$

Transparències basades en el llibre:

Introducció a la Lògica

AUTORS: Lali Barrière i Mercè Claverol

ISBN: 84-8301-896-5

URL: www.edicionsupc.es