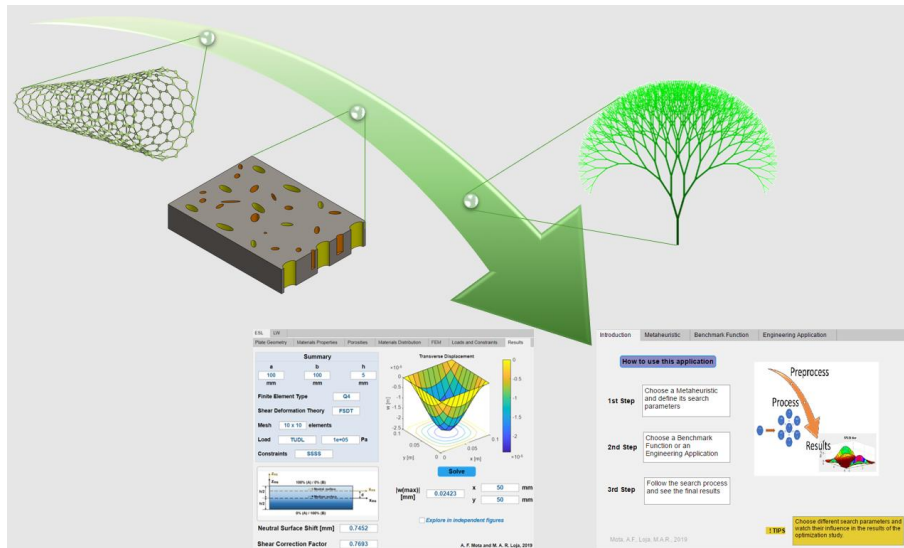




ISEL

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA
Área Departamental de Engenharia Mecânica



Modelação e Otimização de Estruturas Sandwich com Gradiente Funcional e Porosidades: Uma Abordagem Científica e Pedagógica

ANA FILIPA SANTOS DA MOTA
(Licenciada em Engenharia Física pré-Bolonha)
(Licenciada em Engenharia Mecânica pós-Bolonha)

Dissertação de natureza científica para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Mecânica

Orientador:

Professora Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Júri:

Presidente: Professor Doutor Silvério João Crespo Marques

Vogais:

Professor Doutor João Filipe Almeida Milho

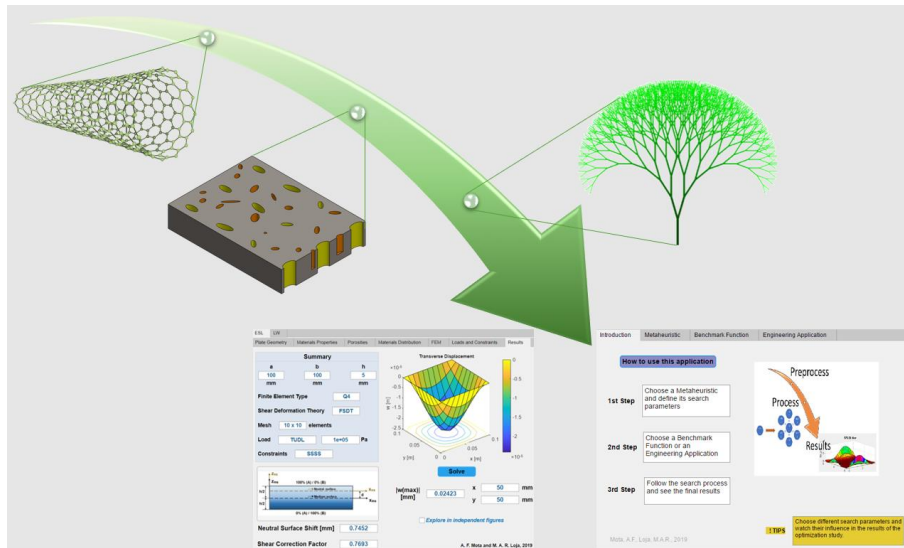
Professora Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Novembro de 2019



ISEL

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA
Área Departamental de Engenharia Mecânica



Modelação e Otimização de Estruturas Sandwich com Gradiente Funcional e Porosidades: Uma Abordagem Científica e Pedagógica

ANA FILIPA SANTOS DA MOTA
(Licenciada em Engenharia Física pré-Bolonha)
(Licenciada em Engenharia Mecânica pós-Bolonha)

Dissertação de natureza científica para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Mecânica

Orientador:

Professora Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Júri:

Presidente: Professor Doutor Silvério João Crespo Marques

Vogais:

Professor Doutor João Filipe Almeida Milho

Professora Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Novembro de 2019

Agradecimentos

No passo final desta jornada, agradeço à família, especialmente aos meus irmãos e sobrinhos, e amigos pelo apoio dado e pela compreensão. Em particular, deixo o meu enorme agradecimento à minha mãe pelo amor, carinho, compreensão, ajuda e força que me deu ao longo da minha vida. Sem ela este objetivo jamais teria sido cumprido. Obrigada MÃE.

Agradeço à minha orientadora, Professora Maria Amélia Loja, primeiro por ter aceite o meu convite para me orientar nesta fase final do Mestrado, e também e pela orientação que me foi dada. O meu muito obrigada por todo o apoio, dedicação e disponibilidade demonstrados. Estou-lhe muito grata pelas oportunidades de aprendizagem e colaboração que me proporcionou nestes dois últimos anos. Obrigada por ter estado sempre ao meu lado, nos melhores e nos meus piores momentos, conseguindo sempre acalmar-me e fazer-me acreditar nas minhas capacidades.

Deixo também o meu agradecimento a todos os Professores que acompanharam o meu percurso na Área Departamental de Engenharia Mecânica como aluna, e em particular aos Professores da Secção de Projeto Mecânico, Produção e Manutenção Industrial enquanto monitora. Enquanto aluna, estou muito grata pela partilha de conhecimentos e pela disponibilidade em esclarecer as tantas dúvidas que me surgiram ao longo de todo o percurso. Como monitora, agradeço todas as oportunidades de trabalho e aprendizagem que me permitiram evoluir, e a simpatia com que sempre fui tratada. Foi uma honra poder colaborar com pessoas que tanto admiro.

Ao Professor Joaquim Infante Barbosa, deixo o meu particular agradecimento pelos conselhos e apoio dados.

Estou muito feliz e grata pelo meu percurso na ADEM, principalmente pelas pessoas – colegas e Professores – que conheci.

Resumo

Os materiais com gradiente funcional despertam o interesse dos investigadores e da indústria pois a evolução espacial de propriedades, contínua e gradual, não só minimiza as transições bruscas de tensões comuns em compósitos laminados reforçados com fibra, como permite a sua adequação a diversas aplicações. A inclusão de nanopartículas, como os nanotubos de carbono, resultando num material multi-escala, é muito usual em situações onde um reforço extra seja vantajoso. A ocorrência de porosidades como consequência dos processos de fabrico continua a ser um defeito presente nos materiais, apesar da constante evolução tecnológica neste campo. Estas porosidades poderão, em aplicações mais específicas, não ser vistas como defeitos, mas como uma característica desejável e mesmo indispensável. No campo da biomedicina, os materiais enfrentam diversos desafios, exigindo-se o cumprimento de diversos requisitos, sendo a adequabilidade estrutural e biocompatibilidade dois exemplos. No caso dos implantes para aplicações biomédicas, as porosidades são benéficas pois promovem a biocompatibilidade.

Acompanhando a evolução tecnológica, os problemas de engenharia tornaram-se mais complexos, tornando-se importante não só solucionar determinado problema, como também encontrar a solução ótima conforme determinadas restrições e objetivos. Por este motivo, as técnicas de otimização são de relevante importância no ensino em geral, e em particular na área da engenharia.

Tendo por base os materiais compósitos com gradiente funcional, este trabalho avaliou a influência da inclusão de nanotubos de carbono como reforço e de diferentes distribuições de porosidades. Os estudos realizados neste sentido incluem diferentes abordagens e teorias de deformação de corte. No que respeita à otimização foram efetuados estudos baseados na técnica de busca fractal estocástica. Adicionalmente foram desenvolvidas duas plataformas computacionais de carácter pedagógico no âmbito dos temas abordados.

Os diferentes estudos desenvolvidos no decorrer deste trabalho foram analisados e discutidos, tendo-se registado as respetivas conclusões. A descrição das plataformas computacionais desenvolvidas é realizada por exposição das interfaces gráficas do utilizador e respetivos parâmetros disponíveis.

Palavras-chave: materiais com gradiente funcional, nanotubos de carbono, porosidades, abordagem camada única equivalente, abordagem multicamada, teorias de deformação de corte, otimização, busca fractal estocástica, plataformas computacionais pedagógicas.

Abstract

Functionally graded materials arouse the interest of researchers and industry as the continuous and gradual spatial evolution of properties not only minimizes the abrupt stress transitions, so common in fiber-reinforced laminated composites, but also allows their suitability to a wide variety of applications. The inclusion of nanoparticles such as carbon nanotubes, resulting in a multi-scale material, is very common in situations where extra reinforcement is a requirement. The occurrence of porosities as a consequence of manufacturing processes constitutes a defect in materials, despite the constant technological evolution to which they are subjected. These porosities may however not be seen as defects but as a desirable and even required characteristics, in specific application fields. In the field of biomedicine, materials face several challenges, as they are required to meet various requirements, with structural suitability and biocompatibility being two examples. In the case of implants for biomedical applications, porosities are benefic as they promote biocompatibility.

Following technological developments, engineering problems have become more complex, making it important not only to solve a given problem, but also to find the optimal solution according to certain constraints and objectives. For this reason, optimization techniques are of relevant importance in education in general, and in engineering in particular.

Based on functionally graded materials, this work evaluated the influence of the inclusion of carbon nanotubes as reinforcement and of different porosity distributions. Studies in these fields include different approaches and shear deformation theories. Regarding optimization, studies based on the stochastic fractal search technique were performed. Additionally, two computational platforms with pedagogical content were developed within the scope of the topics covered.

The different studies developed during this work were analyzed and discussed and the respective conclusions were drawn. The computational platforms developed are described by exposing the different graphical user interfaces.

Keywords: functionally graded materials, carbon nanotubes, porosities, equivalent single layer approach, multilayer approach, shear deformation theories, optimization, stochastic fractal search, pedagogical computational platforms.

Lista de Figuras

Figura 2.1. Aplicações comuns dos FGM	8
Figura 2.2. Variação na composição, ao longo da espessura, de um FGM bifásico (fases A e B): (a) evolução crescente da fase A no sentido da superfície inferior para a superior; (b) evolução crescente da fase A do centro para as faces [25]	9
Figura 2.3. Dimensões características de uma placa retangular	10
Figura 2.4. Geometria dos reforços mais comuns e respectivas razões área/volume (adaptado de [28])	12
Figura 2.5. Configurações de distribuição espacial de FGPs: (a) FGM; (b) FGP sandwich com núcleo homogéneo e faces FGM; (c) FGP sandwich com núcleo FGM e faces homogéneas	14
Figura 3.1. Variação da fração volúmica da fase A ao longo da espessura: (a) em função do expoente (p); (b) para expoente $p = 1$	16
Figura 3.2. Distribuições de porosidades: (a) <i>even</i> ; (b) <i>uneven</i> ([25])	20
Figura 4.1. Geometrias de uma secção de placa segundo os pressupostos da FSDT, antes e após deformação [46].....	24
Figura 4.2. Coordenadas normalizadas de um elemento retangular [48]	29
Figura 4.3. Representação esquemática de um elemento retangular linear da família de Lagrange e funções de forma associadas a cada nó	29
Figura 4.4 Representação esquemática de um elemento retangular quadrático da família de Lagrange e funções de forma associadas a cada nó	30
Figura 5.1. Esquema de placa sandwich com três camadas	33
Figura 6.1. Superfícies média e neutra numa placa com gradiente funcional ao longo da espessura	44
Figura 7.1. Esquema de evolução segundo o conceito de fractal	51
Figura 7.2. Esquema representativo do processo de difusão implementado no SFS	53
Figura 7.3. Fluxograma do algoritmo SFS	56
Figura 7.4. Fluxograma do processo de difusão	57
Figura 7.5. Fluxograma do processo de atualização	57
Figura 8.1. Gráfico do desvio da superfície neutra adimensionalizado (d/h) em função do expoente da lei de potência (p)	61
Figura 8.2. Gráfico da variação do fator de correção de corte em função do expoente da lei de potência	61
Figura 8.3. Evolução do fator de correção de corte em função do expoente p para diferentes razões E_c/E_m	63
Figura 8.4. Configuração geométrica e material da placa modelada no estudo de verificação	64

Figura 8.5. Evolução do fator de correção de corte em função do expoente p , para diferentes relações ec/ef	67
Figura 8.6. Configuração geométrica da distribuição material ao longo da espessura	69
Figura 8.7. Fração volúmica de zircónia em função de z/h	71
Figura 8.8. Módulo de Young do compósito Al/ZrO ₂ reforçado com MWCNTs em função de z/h , para diferentes expoentes da lei de potência: (a) $w_{MWCNTs} = 0\%$; (b) $w_{MWCNTs} = 2.5\%$; (c) $w_{MWCNTs} = 5\%$	72
Figura 8.9. Módulo de Young do compósito FGM em função de z/h , para expoente $p = 2$ e diferentes frações mássicas de MWCNTs.....	73
Figura 8.10. Gráfico do desvio da superfície neutra, relativamente à superfície média, em função do expoente da lei de potência, para diferentes frações mássicas de MWCNTs.....	74
Figura 8.11. Gráfico do fator de correção de corte em função do expoente da lei de potência, para diferentes frações mássicas de MWCNTs.....	75
Figura 8.12. Gráfico do módulo de Young do FGM Al/ZrO ₂ em função de z/h , para diferentes frações volúmicas de porosidades: (a) distribuição de porosidades tipo <i>even</i> ; (b) distribuição de porosidades tipo <i>uneven</i>	76
Figura 8.13. Deslocamento transversal máximo adimensional em função do parâmetro de carga P , para distribuições de porosidades <i>even</i> e <i>uneven</i> , considerando diferentes frações volúmicas de porosidades.....	77
Figura 8.14. Desvio da superfície neutra, relativamente à superfície média, para distribuições de porosidades do tipo <i>even</i> e <i>uneven</i> , em função do parâmetro α	78
Figura 8.15. Evolução do fator de correção de corte, considerando distribuições de porosidades do tipo <i>even</i> e <i>uneven</i> , em função da fração volúmica de porosidades.....	78
Figura 8.16. Influência da teoria de deformação de corte para diferentes relações de aspeto e teoria de deformação de corte na discretização de placas sandwich através de elementos Q9	82
Figura 8.17. Influência do tipo de elemento finito para diferentes relações de aspeto e teorias de deformação de corte, contemplando a aplicação de fator de correção de corte.....	82
Figura 8.18. Influência da teoria de deformação de corte, da relação de aspeto e do tipo de elemento finito no deslocamento transversal máximo	83
Figura 8.19. Fração volúmica da fase cerâmica do FGM em função da razão z/h , para diferentes expoentes e configurações de espessura – distribuições assimétricas.....	84
Figura 8.20. Fração volúmica da fase cerâmica do FGM em função da razão z/h , para diferentes expoentes e configurações de espessura – distribuições simétricas.....	85
Figura 8.21. Desvio da superfície neutra (adimensionalizado) em função do expoente p , para diferentes configurações em espessura	87
Figura 8.22. Fator de correção de corte aplicado às camadas FSDT em função do expoente p , para diferentes configurações em espessura	87

Figura 8.23. Gráfico da função de <i>benchmark</i> Goldstein-Price	88
Figura 8.24. Gráfico dos ótimos observados na otimização da função de <i>benchmark</i> Goldstein-Price: 1ª série.....	90
Figura 8.25. Gráfico dos ótimos observados na otimização da função de <i>benchmark</i> Goldstein-Price: 1ª e 2ª séries.....	90
Figura 8.26. Gráfico da função de <i>benchmark</i> Rastrigin, reduzida a duas variáveis	91
Figura 8.27. Gráfico dos ótimos observados na otimização da função de <i>benchmark</i> Rastrigin: 1ª série.....	92
Figura 8.28. Gráfico dos ótimos observados na otimização da função de <i>benchmark</i> Rastrigin: 1ª e 2ª séries	93
Figura 8.29. Esquema de uma mola de tensão/compressão	93
Figura 8.30. Gráfico dos ótimos observados na otimização da aplicação de engenharia (mola): 1ª série.....	96
Figura 8.31. Gráfico dos ótimos observados na otimização da aplicação de engenharia (mola): 1ª e 2ª séries	96
Figura 8.32. Diagrama de carga para ensaio de flexão em 3 pontos.....	97
Figura 8.33. Diagrama de carga para ensaio de tração.....	97
Figura 8.34. Distribuição material ao longo da espessura de acordo com o modelo A: (a) evolução da fração volúmica do alumínio; (b) evolução do módulo de Young do compósito FGM.....	98
Figura 8.35. Ilustração da obra “O Homem de Vitruvius” [75].....	99
Figura 8.36. Representação em reta real para analogia com o de número de ouro.....	100
Figura 8.37. Distribuição material ao longo da espessura de acordo com o modelo B: (a) evolução da fração volúmica do alumínio; (b) evolução do módulo de Young do compósito FGM.....	101
Figura 8.38. Gráfico do desvio da superfície neutra em relação à superfície média para a distribuição de fração volúmica definida pelo modelo B.....	102
Figura 8.39. Gráfico da evolução do fator de correção de corte em função do expoente da lei de potência para os modelos A e B de distribuição de fração volúmica.....	102
Figura 8.40. Distribuição material ao longo da espessura de acordo com o modelo C1: (a) evolução da fração volúmica do alumínio; (b) evolução do módulo de Young do compósito FGM.....	104
Figura 8.41. Distribuição material ao longo da espessura de acordo com o modelo C2: (a) evolução da fração volúmica do alumínio; (b) evolução do módulo de Young do compósito FGM.....	104
Figura 8.42. Distribuição material ao longo da espessura de acordo com o modelo C3: (a) evolução da fração volúmica do alumínio; (b) evolução do módulo de Young do compósito FGM.....	105
Figura 8.43. Gráfico do fator de correção de corte em função do expoente, p , para as distribuições de fração volúmica abordadas no modelo C.....	106
Figura 8.44. Esquema de evolução das fases materiais presentes no FGM PSU/PSU+MWCNTs	107

Figura 8.45. Evolução da fração volúmica da fase B ao longo da espessura, para diferentes expoentes da lei de potência	107
Figura 8.46. Evolução do módulo de Young do nanocompósito (E_{NC}) ao longo da espessura da FGP: (a) $w_{MWCNT} = 1\%$; (b) $w_{MWCNT} = 2\%$; (c) $w_{MWCNT} = 5\%$ [25].....	108
Figura 8.47. Módulo de Young do nanocompósito para diferentes frações mássicas de MWCNTs, com $p = 2$ [25].....	108
Figura 8.48. Deslocamento axial dos nós da malha de elementos finitos considerada	109
Figura 8.49. Gráfico do deslocamento transversal no ensaio de flexão de uma placa PSU+2%MWCNTs.....	110
Figura 8.50. Gráfico do deslocamento transversal no ensaio de flexão de uma placa PSU+2%MWCNTs isenta de poros (alçado)	110
Figura 8.51. Gráfico do deslocamento axial máximo adimensional em função do expoente da lei de potência	111
Figura 8.52. Gráfico do deslocamento transversal máximo adimensional em função do expoente da lei de potência.....	112
Figura 8.53. Evolução do módulo de Young do nanocompósito (E_{NC}) ao longo da espessura para diferentes distribuições e frações volúmicas de porosidades: (a) $p = 0.5$; (b) $p = 1$; (c) $p = 5$; (d) $p = \infty$	113
Figura 8.54. Gráfico do deslocamento axial máximo adimensional em função da fração volúmica de porosidades, para diferentes tipos de distribuição	115
Figura 8.55. Gráfico do deslocamento transversal máximo adimensional em função da fração volúmica de porosidades, para diferentes tipos de distribuição.....	116
Figura 8.56. Esquema de placa sandwich com núcleo metálico revestido por placas FGM Al/Al+2.5%MWCNTs	119
Figura 8.57. Gráfico da evolução do fator de correção de corte em função da fração volúmica de porosidades, para porosidades do tipo <i>even</i> e <i>uneven</i> ($p = 0$)	123
Figura 8.58. Gráfico da evolução do fator de correção de corte em função da fração volúmica de porosidades, para porosidades do tipo <i>even</i> e <i>uneven</i> ($p = 5$)	123
Figura 8.59. Gráfico da evolução do fator de correção de corte em função da fração volúmica de porosidades, considerando a existência de porosidades do tipo <i>even</i> nas 3 camadas	124
Figura 8.60. Gráfico do deslocamento transversal máximo em função da fração volúmica de porosidades, para porosidades do tipo <i>even</i> e <i>uneven</i> – consideração de existência de porosidades apenas nas camadas externas em igual proporção	124
Figura 8.61. Gráfico do deslocamento transversal máximo em função da fração volúmica de porosidades, para diferentes expoentes da lei de potência – consideração de existência de porosidades em todas as camadas e em igual proporção.....	125

Figura 8.62. Gráfico do deslocamento transversal máximo em função da fração volúmica de porosidades, considerando a existência de porosidades do tipo <i>even</i> , para diferentes expoentes da lei de potência	125
Figura 8.63. Gráfico do deslocamento transversal máximo em função da fração volúmica de porosidades, considerando a existência de porosidades do tipo <i>even</i> apenas nas camadas exteriores, para diferentes teorias de deformação de corte e expoentes da lei de potência.	126
Figura 9.1. Plataforma computacional I – Separador “ <i>Plate Geometry</i> ”	134
Figura 9.2. Plataforma computacional I – Separador “ <i>Materials Properties</i> ”	134
Figura 9.3. Plataforma computacional I – Separador “ <i>Porosities</i> ”	135
Figura 9.4. Plataforma computacional I – Separador “ <i>Materials Distribution</i> ”	136
Figura 9.5. Plataforma computacional I – Separador “ <i>FEM</i> ”: subseparador “ <i>Mesh</i> ”	137
Figura 9.6. Plataforma computacional I – Separador “ <i>FEM</i> ”: subseparador “ <i>Shear Deformation Theory</i> ”	137
Figura 9.7. Plataforma computacional I – Separador “ <i>Loads and Constraints</i> ”	138
Figura 9.8. Plataforma computacional I – Separador “ <i>Results</i> ”	139
Figura 9.9. Plataforma Computacional I – Separador “ <i>Results</i> ”: (a) figura independente relativa aos deslocamentos nodais; (b) figura independente com os deslocamentos nodais e malha de elementos finitos	139
Figura 9.10. Plataforma computacional II – Separador “ <i>Introduction</i> ”	141
Figura 9.11. Plataforma computacional II – Subseparador “ <i>Metaheuristic</i> ”	141
Figura 9.12. Plataforma computacional II – Separador “ <i>Metaheuristic</i> ”: subseparador “ <i>Search Parameters</i> ”	142
Figura 9.13. Plataforma Computacional II – Separador “ <i>Benchmark Function</i> ”: subseparador “ <i>Preprocess</i> ”	143
Figura 9.14. Plataforma computacional II – Separador “ <i>Benchmark Function</i> ”: subseparador “ <i>Process</i> ”	143
Figura 9.15. Plataforma computacional II – Subseparador “ <i>Process</i> ”: figuras independentes	144
Figura 9.16. Plataforma Computacional II – Separador “ <i>Benchmark Function</i> ”: subseparador “ <i>Results</i> ”	145
Figura 9.17. Plataforma computacional II – Separador “ <i>Engineering Application</i> ”: subseparador “ <i>Preprocess</i> ”	145
Figura 9.18. Plataforma computacional II – Separador “ <i>Engineering Application</i> ”: subseparador “ <i>Process</i> ”	146
Figura 9.19. Plataforma computacional II – Separador “ <i>Engineering Application</i> ”: subseparador “ <i>Results</i> ”	146

Lista de Tabelas

Tabela 8.1. Materiais considerados nos estudos de verificação e respectivas propriedades	60
Tabela 8.2. Verificação do fator de correção de corte e do desvio da superfície neutra	60
Tabela 8.3. Verificação do fator de correção de corte para diferentes relações E_c/E_m	63
Tabela 8.4. Fator de correção de corte para uma relação $ec/ef = 4$	65
Tabela 8.5. Fator de correção de corte para diferentes relações ec/ef com $E_c/E_m = 6$	66
Tabela 8.6. Deslocamento transversal, tensões no plano xy e respectivos desvios em relação à literatura [61].....	68
Tabela 8.7. Espessuras do núcleo e faces nas diferentes configurações consideradas.....	69
Tabela 8.8. Deslocamento transversal, e respectivos desvios, para diferentes configurações	70
Tabela 8.9. Propriedades, materiais e geométricas, características dos MWCNTs considerados como reforço do FGM.....	71
Tabela 8.10. Verificação do modelo para determinação de deslocamento transversal máximo aplicado a FGM com inclusões de MWCNT	74
Tabela 8.11. Deslocamento transversal e componentes de tensão adimensionalizados obtidos no estudo de verificação 9.....	80
Tabela 8.12. Desvios do deslocamento transversal máximo adimensional em relação à literatura, para diferentes elementos finitos, relações de aspecto e teorias de deformação de corte	81
Tabela 8.13. Deslocamento transversal máximo adimensionalizado – abordagem multicamada: (a) FSDT no núcleo; (b) HSDT no núcleo	86
Tabela 8.14. Resultados do estudo de verificação 10: 1ª série de corridas	89
Tabela 8.15. Resultados do estudo de verificação 10: 2ª série de corridas	89
Tabela 8.16. Resultados do estudo de verificação 11: 1ª série de corridas	91
Tabela 8.17. Resultados do estudo de verificação 11: 2ª série de corridas	92
Tabela 8.18. Resultados obtidos na resolução do problema de engenharia: 1ª série	95
Tabela 8.19. Resultados obtidos na resolução do problema de engenharia: 2ª série	95
Tabela 8.20. Fator de correção de corte e deslocamento transversal – Modelo A.....	99
Tabela 8.21. Desvio da superfície neutra, Fator de correção de corte e deslocamento transversal resultantes da aplicação do modelo B	101
Tabela 8.22. Fatores de correção de corte e deslocamentos transversais máximos adimensionalizados registados nos modelos C1, C2 e C3	105
Tabela 8.23. Massa volúmica das fases constituintes da matriz de PSU em DMF.....	109
Tabela 8.24. Propriedades materiais e geométricas dos MWCNTs.....	109
Tabela 8.25. Deslocamento axial máximo adimensional para diferentes expoentes da lei de potência	111

Tabela 8.26. Deslocamento transversal máximo adimensional para diferentes expoentes da lei de potência.....	112
Tabela 8.27. Deslocamento axial máximo adimensional observado com diferentes distribuições de porosidades.....	115
Tabela 8.28. Deslocamento transversal máximo adimensional observado com diferentes distribuições de porosidades.....	116
Tabela 8.29. Deslocamento axial máximo adimensional considerando porosidades distribuídas segundo o modelo <i>even</i>	117
Tabela 8.30. Deslocamento axial máximo adimensional considerando porosidades distribuídas segundo o modelo <i>uneven</i>	117
Tabela 8.31. Deslocamento transversal máximo adimensional considerando porosidades distribuídas segundo o modelo <i>even</i>	118
Tabela 8.32. Deslocamento transversal máximo adimensional considerando porosidades distribuídas segundo o modelo <i>uneven</i>	119
Tabela 8.33. Deslocamento transversal máximo de uma placa FGM com configuração 1-2-1, determinado de acordo com a abordagem FSDT-FSDT-FSDT.....	121
Tabela 8.34. Deslocamento transversal máximo de uma placa FGM com configuração 1-2-1, determinado de acordo com a abordagem FSDT-HSDT-FSDT.....	122
Tabela 8.35. Caracterização dos ótimos atingidos em cada corrida (caso de estudo 9).....	127
Tabela 8.36. Caracterização dos ótimos atingidos em cada corrida (caso de estudo 10).....	128
Tabela 8.37. Caracterização dos ótimos atingidos em cada corrida (caso de estudo 11).....	129
Tabela 8.38. Caracterização dos ótimos atingidos em cada corrida (caso de estudo 12).....	130
Tabela 8.39. Caracterização dos ótimos atingidos em cada corrida (caso de estudo 13).....	131
Tabela 8.40. Caracterização dos ótimos atingidos em cada corrida (caso de estudo 14).....	132

Nomenclatura

Acrónimos

2D	Bidimensional
3D	Tridimensional
ABC	<i><u>A</u>rtificial <u>B</u>ee <u>C</u>olony</i>
ACO	<i><u>A</u>nt <u>C</u>olony <u>O</u>ptimization</i>
ASTM	<u>A</u> merican <u>S</u> ociety for <u>T</u> esting and <u>M</u> aterials
BP	Melhor Indivíduo (<i><u>B</u>est <u>P</u>oint</i>)
CNT	<u>N</u> ano <u>T</u> ubos de <u>C</u> arbono
CSA	<i><u>C</u>uckoo <u>S</u>earch <u>A</u>lgorithm</i>
ESL	Camada Única Equivalente (<i><u>E</u>quivalent <u>S</u>ingle <u>L</u>ayer</i>)
FDA	<i><u>F</u>ractal <u>D</u>ecomposition based <u>A</u>lgorithm</i>
FEM	<u>M</u> étodo dos <u>E</u> lementos <u>F</u> initos
FGM	<u>M</u> aterial com <u>G</u> radiente <u>F</u> uncional
FGP	<u>P</u> laca com <u>G</u> radiente <u>F</u> uncional
FS	Busca Fractal (<i><u>F</u>ractal <u>S</u>earch</i>)
FSDT	Teoria de Deformação de Corte de Primeira ordem (<i><u>F</u>irst order <u>S</u>hear <u>D</u>eformation <u>T</u>heory</i>)
GA	<u>A</u> lgoritmo <u>G</u> enético
GSA	<i><u>G</u>ravitational <u>S</u>earch <u>A</u>lgorithm</i>
GW1	<i><u>G</u>aussian <u>W</u>alk <u>1</u></i>
GW22	<i><u>G</u>aussian <u>W</u>alk <u>2</u></i>
HSDT	Teoria de deformação de ordem superior (<i><u>H</u>igh order <u>S</u>hear <u>D</u>eformation <u>T</u>heory</i>)
LB	Limite Inferior (<i><u>L</u>ower <u>B</u>ound</i>)
LW	Multicamada (<i><u>L</u>ayer<u>W</u>ise</i>)
MDN	<u>N</u> úmero <u>M</u> áximo de <u>D</u> ifusões
MWCNT	Nanotubos de Carbono de Parede Múltipla (<i><u>M</u>ulti-<u>W</u>alled <u>C</u>arbon <u>N</u>ano<u>T</u>ubes</i>)
PSO	<i><u>P</u>article <u>S</u>warm <u>O</u>ptimization</i>
Q4	Elemento finito retangular, com quatro nós, da família de Lagrange
Q9	Elemento finito retangular, com nove nós, da família de Lagrange
SFS	Busca Fractal Estocástica (<i><u>S</u>tochastic <u>F</u>ractal <u>S</u>earch</i>)
SWCNT	Nanotubos de Carbono de Parede Simples (<i><u>S</u>ingle-<u>W</u>alled <u>C</u>arbon <u>N</u>ano<u>T</u>ubes</i>)
UB	Limite Superior (<i><u>U</u>pper <u>B</u>ound</i>)

Subscritos

1	Direção 1 no referencial local
(1)	Camada 1
2	Direção 2 no referencial local
(2)	Camada 2
3	Direção 3 no referencial local
(3)	Camada 3
adim	Adimensionalização
c	Componente de corte
(k)	Camada k
m	Componente de membrana
ms	Superfície média
ns	Superfície neutra

Sobrescritos

* Associação à solução ótima

Fórmulas/Símbolos Químicos

Acrónimo	Nome do Elemento/Composto Químico	Símbolo/Fórmula
---	Hidroxiapatite	$\text{Ca}_{10-x}(\text{PO}_4)_{6-x}(\text{OH})_{2-x} \cdot n\text{H}_2\text{O}$
---	Alumina	Al_2O_3
---	Alumínio	Al
DMF	Dimetilformamida	$\text{C}_3\text{H}_7\text{NO}$
---	Zircónia	ZrO_2
---	Zircónia estabilizada com ítrio	Y-ZrO ₂
PSU	Polisulfona	$[\text{C}_6\text{H}_4-4-\text{C}(\text{CH}_3)_2\text{C}_6\text{H}_4-4-\text{OC}_6\text{H}_4-4-\text{SO}_2\text{C}_6\text{H}_4-4-\text{O}]_n$
PEG	Polietilenoglicol	$\text{C}_{2n+2}\text{H}_{4n+6}\text{O}_{n+2}$

Simbologia Dimensional

Símbolo	Propriedade	Unidade SI
L	Comprimento	[m]
M	Massa	[kg]
T	Tempo	[s]

Símbolos Gregos

Símbolo	Descrição	Dimensão	Unidade SI
α	Fração volúmica de porosidades	adimensional	
β_{ad}	Variável auxiliar ao cálculo do módulo de Young do nanocompósito ($E_{(NC)}$)	adimensional	
β_{dl}	Variável auxiliar ao cálculo do módulo de Young do nanocompósito ($E_{(NC)}$)	adimensional	
γ_{ij}	Componente ij de distorção, $ij = \{xy, yz, xz\}$	adimensional	
$\varepsilon, \varepsilon', \hat{\varepsilon}$	Número aleatório uniformemente distribuído no intervalo [0,1]	adimensional	
ε_{ij}	Componente ij de extensão, $ij = \{xx, yy, zz\}$	adimensional	
η	Coordenada no referencial do elemento finito		
θ_x	Rotação na normal transversal em torno da direção Oy	adimensional	
θ_y	Rotação na normal transversal em torno da direção Oy	adimensional	
μ_{BP}	Parâmetro associado ao processo de difusão no SFS	adimensional	
μ_P	Parâmetro associado ao processo de difusão no SFS	adimensional	
$\nu_{(CNT)}$	Coefficiente de Poisson dos nanotubos de carbono	adimensional	
ν_{FGM}	Coefficiente de Poisson do compósito FGM	adimensional	
$\nu_{(M)}$	Coefficiente de Poisson da matriz de um compósito	adimensional	
$\nu_{(NC)}$	Coefficiente de Poisson de um nanocompósito	adimensional	
ξ	Coordenada no referencial do elemento finito		
ρ	Massa volúmica	$M.L^{-3}$	[kg.m ⁻³]
ρ_A	Massa volúmica da fase A de um FGM bifásico	$M.L^{-3}$	[kg.m ⁻³]
ρ_B	Massa volúmica da fase B de um FGM bifásico	$M.L^{-3}$	[kg.m ⁻³]
$\rho_{(CNT)}$	Massa volúmica dos nanotubos de carbono	$M.L^{-3}$	[kg.m ⁻³]
$\rho_{(M)}$	Massa volúmica da matriz de um compósito	$M.L^{-3}$	[kg.m ⁻³]

σ_{ij}	Componente ij de tensão normal, $ij = \{xx, yy, zz\}$	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$[N.m^{-2}]$
τ_{ij}	Componente ij de tensão de corte, $ij = \{xy, yz, xz\}$	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$[N.m^{-2}]$
Ω	Potencial de forças		

Símbolos Romanos

Símbolo	Descrição	Dimensão	Unidade SI
a	Comprimento de uma placa segundo a direção Ox	L	[m]
b	Comprimento de uma placa segundo a direção Oy	L	[m]
B	Matriz que relaciona o campo de deslocamentos com o vetor dos graus de liberdade		
C	Encastramento		
d	Desvio da superfície neutra relativamente à superfície média	L	[m]
$d_{(CNT)}$	Diâmetro externo dos nanotubos de carbono	L	[m]
E	Módulo de Young	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$[N.m^{-2}]$
e_{bf}	Espessura da camada inferior de uma placa sandwich	L	[m]
e_c	Espessura do núcleo de uma placa sandwich	L	[m]
E_c	Módulo de Young da fase cerâmica	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$[N.m^{-2}]$
$E_{(CNT)}$	Módulo de Young dos nanotubos de carbono	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$[N.m^{-2}]$
e_f	Espessura das faces de uma placa sandwich	L	[m]
E_{FGM}	Módulo de Young do compósito FGM	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$[N.m^{-2}]$
E_m	Módulo de Young da fase metálica	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$[N.m^{-2}]$
$E_{(M)}$	Módulo de Young da matriz	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$[N.m^{-2}]$
$E_{(NC)}$	Módulo de Young do nanocompósito	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$[N.m^{-2}]$
e_{tf}	Espessura da camada superior de uma placa sandwich	L	[m]
f	Vetor de forças		
F	Livre		
g	Geração	adimensional	
G	Módulo de corte	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$[N.m^{-2}]$
G_{FGM}	Módulo de corte do compósito FGM	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$[N.m^{-2}]$

gl	Vetor com os graus de liberdade de um dado campo de deslocamentos		
h	Comprimento de uma placa segundo a direção Oz (espessura)	L	[m]
k	Fator de correção de corte	adimensional	
K	Matriz de rigidez		
$l_{(CNT)}$	Comprimento dos nanotubos de carbono	L	[m]
N	Número total de indivíduos de uma população	adimensional	
N_i	Função de forma associada ao nó i		
p	Expoente da lei de potência	adimensional	
P	Parâmetro de carga	adimensional	
$P_{(A)}$	Propriedade material da fase A do FGM bifásico		
$P_{(B)}$	Propriedade material da fase B do FGM bifásico		
P_{FGM}	Propriedade material do FGM		
P_i	i -ésimo indivíduo de uma população		
q_0	Intensidade de carga uniformemente distribuída	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$[N.m^{-2}]$
Q	Matriz dos coeficientes de rigidez elástica	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$[N.m^{-2}]$
\bar{Q}	Matriz dos coeficientes de rigidez elástica transformados	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$[N.m^{-2}]$
Q_{ij}	Componente ij da matriz dos coeficientes de rigidez elástica	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$[N.m^{-2}]$
\bar{Q}_{ij}	Componente ij da matriz dos coeficientes de rigidez elástica transformados	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$[N.m^{-2}]$
S	Apoio simples		
$t_{(CNT)}$	Espessura da parede dos nanotubos de carbono	L	[m]
u	Deslocamento segundo a direção Ox	L	[m]
U	Energia elástica de deformação		
$\{u\}$	Vetor de deslocamentos nodais		
u_0	Deslocamento de um ponto genérico da superfície neutra segundo a direção Ox	L	[m]
v	Deslocamento segundo a direção Oy	L	[m]
V	Energia potencial total		
v_0	Deslocamento de um ponto genérico da superfície neutra segundo a direção Oy	L	[m]
$V_{f(A)}$	Fração volúmica da fase A de um FGM bifásico	adimensional	
$V_{f(Al)}$	Fração volúmica de alumínio num FGM bifásico	adimensional	

$V_{f(B)}$	Fração volúmica da fase B de um FGM bifásico	adimensional	
$V_{f(CNT)}$	Fração volúmica dos nanotubos de carbono num nanocompósito	adimensional	
$V_{f(metal)}$	Fração volúmica da fase metálica de um FGM bifásico	adimensional	
w	Deslocamento segundo a direção Oz (deslocamento transversal)	L	[m]
\bar{w}	Deslocamento transversal máximo adimensionalizado	adimensional	
w_0	Deslocamento de um ponto genérico da superfície neutra segundo a direção Oz	L	[m]
$w_{(CNT)}$	Fração mássica de nanotubos de carbono	adimensional	
w_{MWCNTs}	Fração mássica de nanotubos de carbono de parede múltipla	adimensional	
x	Coordenada no referencial espacial cartesiano (eixo Ox)	L	[m]
\mathbf{x}	Vetor com as variáveis de projeto associadas a um problema de otimização		
y	Coordenada no referencial espacial cartesiano (eixo Oy)	L	[m]
z	Coordenada no referencial espacial cartesiano (eixo Oz)	L	[m]

Índice

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	xiii
Nomenclatura	xv
1. Introdução.....	1
1.1. Motivação	1
1.2. Objetivos.....	1
1.3. Enquadramento.....	2
1.4. Estrutura da dissertação	5
2. Materiais Compósitos.....	7
2.1. Materiais compósitos	7
2.2. Materiais compósitos com gradiente funcional.....	7
2.3. Nanocompósitos	11
2.3.1. Compósitos reforçados com nanotubos de carbono.....	12
2.4. Materiais compósitos laminados e sandwich	13
3. Propriedades Materiais Efetivas.....	15
3.1. Materiais compósitos com gradiente funcional.....	15
3.2. Materiais compósitos reforçados com partículas.....	17
3.3. Materiais compósitos reforçados com nanotubos de carbono.....	18
3.4. Materiais compósitos com porosidades	19
4. Leis Constitutivas.....	23
4.1. Teorias de deformação de corte.....	23
4.1.1. Teoria de deformação de corte de primeira ordem	23
4.1.2. Teoria de deformação de corte de ordem superior.....	26
4.2. Método dos elementos finitos	28
5. Abordagens Aplicadas.....	31
5.1. Abordagem camada única equivalente	31
5.2. Abordagem multicamada.....	32

5.2.1.	FSDT-FSDT-FSDT	33
5.2.2.	FSDT-HSDT-FSDT	37
6.	Fator de Correção de Corte.....	43
6.1.	Abordagem camada única equivalente	43
6.2.	Abordagem multicamada.....	45
7.	Otimização.....	47
7.1.	Otimização	47
7.2.	Busca fractal.....	50
7.3.	Busca fractal estocástica	53
8.	Aplicações Numéricas	59
8.1.	Estudos de verificação	59
8.1.1.	Abordagem camada única equivalente.....	59
8.1.1.1.	Desvio da superfície neutra e fator de correção de corte.....	60
8.1.1.2.	Deslocamento transversal e tensões	67
8.1.1.3.	Compósitos reforçados com nanotubos de carbono	71
8.1.1.4.	Compósitos com porosidades	75
8.1.2.	Abordagem multicamada	79
8.1.2.1.	Compósitos sandwich com gradiente funcional.....	83
8.1.2.2.	Compósitos com porosidades	87
8.1.3.	Otimização	88
8.2.	Casos de estudo: Abordagem camada única equivalente.....	96
8.2.1.	Compósitos com gradiente funcional.....	97
8.2.2.	Compósitos reforçados com nanotubos de carbono.....	106
8.2.3.	Compósitos com porosidades	112
8.3.	Casos de estudo: Abordagem multicamada	119
8.3.1.	Compósitos com porosidades	119
8.4.	Otimização	126
9.	Plataformas Computacionais	133
9.1.	Plataforma computacional I – Análise estática de placas	133
9.1.1.	Separador “ <i>Plate Geometry</i> ”	133
9.1.2.	Separador “ <i>Materials Properties</i> ”	133
9.1.3.	Separador “ <i>Porosities</i> ”	135
9.1.4.	Separador “ <i>Materials Distribution</i> ”	135
9.1.5.	Separador “ <i>FEM</i> ”	136
9.1.6.	Separador “ <i>Loads and Constraints</i> ”	138

9.1.7.	Separador “ <i>Results</i> ”	138
9.2.	Plataforma computacional II - Otimização	140
9.2.1.	Separador “ <i>Introduction</i> ”	141
9.2.2.	Separador “ <i>Metaheuristic</i> ”	141
9.2.3.	Separador “ <i>Benchmark Funtion</i> ”	142
9.2.4.	Separador “ <i>Engineering Application</i> ”	145
10.	Conclusões.....	147
11.	Desenvolvimentos Futuros	153
	Referências	155

1. Introdução

Neste capítulo, que inicia a presente dissertação, apresenta-se a motivação que conduziu à escolha do tema assim como os objetivos propostos. De modo a enquadrar o tema da dissertação, expõem-se ainda, de forma breve e global, os assuntos subjacentes ao mesmo, sendo que estes serão aprofundados nos capítulos correspondentes. Por fim, encontra-se uma secção onde se apresenta a estrutura do trabalho.

1.1. Motivação

Ao longo do meu percurso académico, que passou por uma licenciatura em Engenharia Física e, mais recentemente, a licenciatura e componente curricular do Mestrado em Engenharia Mecânica, cumulativamente com a atividade profissional no campo do ensino das ciências de Matemática e Físico-Química, o gosto pela Física e pela Matemática foi uma constante. Particularmente, a última licenciatura despertou em mim um enorme interesse pela Mecânica de Materiais. Nos mais recentes anos de estudo foi-me dada a conhecer a vasta gama de soluções que se podem encontrar para estruturas mecânicas com recurso a materiais compósitos. Sendo que a evolução dos materiais compósitos passa pela sua otimização com fim a aplicações específicas de engenharia, a conjugação destes dois temas num contexto pedagógico permitiu ir ao encontro dos meus interesses científicos e profissionais.

1.2. Objetivos

De modo a concretizar as motivações que levaram à escolha do tema desta dissertação, os objetivos principais do trabalho que neste documento será exposto envolvem o estudo da resposta em regime estático de placas compósitas e sua otimização em função de diferentes parâmetros, assim como o desenvolvimento de plataformas computacionais com carácter pedagógico para apoio à compreensão dos conceitos inerentes aos estudos efetuados.

Para concretizar o primeiro destes objetivos, os estudos realizados englobaram diferentes materiais compósitos, entre os quais se destacam os que consideram a existência de reforço com nanotubos de carbono e/ou inclusão de partículas cerâmicas. Adicionalmente, foram levados a cabo estudos acerca da influência da existência de porosidades na resposta dos mesmos quando sujeitos a diferentes tipos de carga estática. Estes estudos diferem entre si não só pelos materiais considerados e cargas consideradas, como também pelas diferentes abordagens e leis constitutivas aplicadas. Por fim, realizaram-se estudos de otimização, com diferentes variáveis de projeto, com o objetivo de minimizar o deslocamento transversal máximo de placas compósitas.

No que concerne às plataformas computacionais, os objetivos incluíram a criação de duas plataformas distintas: uma para desenvolvimento do estudo da resposta de placas através do método dos elementos finitos, e uma outra para os estudos de otimização. Com estas plataformas pretende-se abordar pedagogicamente as características dos estudos numéricos efetuados, de modo a promover não só o interesse pelos temas como também a sua compreensão e exploração de uma forma interativa.

1.3. Enquadramento

A compreensão e manipulação de materiais ao longo do tempo têm desempenhado um papel fundamental no desenvolvimento tecnológico [1]. Os materiais compósitos são considerados materiais avançados na medida em que são resultantes da combinação de um ou mais materiais, imiscíveis, com propriedades materiais distintas. Usufruindo do melhor de cada material, os materiais compósitos possuem propriedades resultantes da combinação destes, apresentando na maioria das vezes, um menor peso. A madeira, composta por fibras de celulose numa matriz de linina, é um exemplo de material compósito presente na Natureza [2]. Entre a vasta gama de materiais compósitos, o presente trabalho concentra-se nos materiais com gradiente funcional (FGMs – *Functionally Graded Materials*).

Os FGMs representam um excelente exemplo no que diz respeito à inovação na área da ciência de materiais na medida em que são projetados para cumprir determinados objetivos impostos pelos componentes nos quais irão ser aplicados. A característica singular que torna estes materiais inovadores e diversificados é o facto de possuírem uma variação gradual de composição e/ou de microestrutura de acordo com uma determinada lei, variação essa que pode ocorrer em uma ou mais direções espaciais ([1], [3]).

No final dos anos 80, durante o desenvolvimento de novos revestimentos para efeitos de isolamento térmico, surge o primeiro FGM. Os materiais com gradiente funcional são uma realidade presente na Natureza desde sempre. A nível de fauna e flora os exemplos são diversos, como o bambu ou as conchas dos moluscos com a estrutura hierárquica que as caracteriza. Já no domínio do corpo humano pode-se destacar a pele, que com as suas três camadas, designadamente a epiderme, derme e hipoderme, constitui um sistema multicamada com gradiente funcional. Este que é o maior órgão do corpo humano desempenha várias funções, entre as quais se encontram a proteção do corpo humano dos mais diversos perigos, tais como impactos mecânicos, oscilações de temperatura, microrganismos e radiação, entre outros. Outro exemplo de FGM presente no corpo humano é o dente, cuja superfície é constituída por esmalte de elevada dureza com inclusões de cristais de hidroxiapatite, ao passo que a camada inferior de dentina é composta por fibras de colagénio e hidroxiapatite. A transição entre estas duas constituições distintas é gradual, o que faz do dente um FGM natural. O osso humano é outro excelente exemplo de um FGM existente no

corpo humano. Tratando-se de materiais de abundante presença no corpo humano, estes têm sido vastamente desenvolvidos com bio-inspiração para aplicações biomédicas [1].

Desde o seu surgimento os FGMs têm evoluído de forma surpreendente, sendo que uma das suas características de destaque está relacionada com a minimização de descontinuidades de tensões, comuns nos materiais compósitos laminados [4]. Entre as diversas vantagens dos FGMs destacam-se algumas, tais como a minimização de variações bruscas das tensões, minimização de tensões residuais, elevada resistência térmica, baixa condutividade térmica (em particular quando constituídos por materiais cerâmicos) e elevada resistência à fratura. Outro facto que privilegia os FGMs perante os típicos compósitos laminados está relacionado com a inexistência de tensões interlaminares elevadas, facto explicado pela suave variação gradual que estes materiais apresentam na sua composição [5].

Os FGMs apresentam vantagens também no campo das vibrações, nomeadamente na redução de vibrações mecânicas. A este respeito, Catania e Strozzi [6] estudaram um modelo de viga multicamada, considerando um núcleo metálico revestido por finas camadas de rigidez variável, do qual concluíram que o amortecimento da mesma pode ser influenciado pelos revestimentos superficiais. Outro estudo no domínio do amortecimento de sistemas mecânicos revestidos, realizado por Yu et al. [7], revelou a existência de uma espessura ótima de revestimento que permite uma relação ótima rigidez-amortecimento, tendo-se verificado ainda que quanto maior o afastamento entre os módulos de Young do núcleo e do revestimento, melhor a rigidez e o amortecimento do sistema resultante. O amortecimento de vibrações mecânicas constitui um fator relevante e vantajoso no que diz respeito a sistemas mecânicos, dado que conduz a um aumento do tempo de vida útil, ao qual se alia uma redução de peso. Num trabalho mais recente, Loja [8] desenvolveu um estudo no qual se inclui uma viga de material compósito sandwich composta por um núcleo macio revestido por um FGM, mais concretamente nanocompósitos com gradiente metal-grafeno. A razão para a escolha desta configuração de materiais é fundamentada pelo facto de núcleos macios e leves permitirem um amortecimento viscoelástico. Este comportamento é muito desejado em grande parte das aplicações de engenharia uma vez que não só propicia a atenuação de vibrações mecânicas, como também proporciona boa resistência à fadiga e ao impacto.

Nos últimos anos, a redução no consumo energético tem sido uma das prioridades no campo industrial, desempenhando a massa estrutural um fator preponderante na eficiência energética. Apresentando pesos reduzidos e elevadas relações rigidez/massa, as estruturas sandwich têm sido cada vez mais opção para aplicação em muitas áreas da indústria, das quais são exemplo a mecânica e a aeroespacial. O projeto de placas sandwich envolve várias variáveis, destacando-se a massa total, as propriedades mecânicas e o isolamento acústico. No entanto, estas variáveis entram muitas vezes em conflito nos projetos de engenharia obrigando a um balanceamento das mesmas de acordo com as exigências impostas. A necessidade de conjugar estas variáveis de forma a obter o melhor desempenho possível constitui o motor da otimização das estruturas sandwich no que respeita às

suas propriedades materiais e geométricas. Este desafio no projeto de estruturas sandwich tem sido alvo da atenção dos investigadores e da indústria, sendo que o principal foco tem sido a otimização destas estruturas no que respeita a resistência mecânica, rigidez, massa, custo e propriedades acústicas. Os trabalhos existentes no domínio da otimização de estruturas são diversos, encontrando-se na literatura revista referência a estudos de otimização de diferentes tipos de placas sandwich, nomeadamente de minimização de massa ou peso com/sem imposição de restrições acústicas e estruturais. Mais recentemente a otimização multiobjectivo de placas sandwich tem conquistado maior atenção, havendo referência a trabalhos envolvendo objetivos tais como custo, transmissão acústica e deflexão a meio vão [9].

Nas décadas de 50 e 60 do século passado, o conceito de evolução foi investigado na ótica da otimização para a resolução de problemas de engenharia, tendo sido desenvolvidos algoritmos que se designaram de aproximados. Estes algoritmos aproximados eram então classificados em heurísticas e metaheurísticas. Originário do grego, o termo “heurística” significa “descobrir” e “orientar uma investigação”, daí as heurísticas constituírem técnicas de otimização que pretendem encontrar soluções quase ótimas com custos computacionais aceitáveis. É importante referir que estas técnicas não garantem a viabilidade ou otimização, podendo mesmo em muitos casos não ser possível aferir quão próximo a solução viável se encontra do ótimo. Contrariamente às heurísticas, que são desenvolvidas para a resolução de problemas específicos, as metaheurísticas adaptam-se a uma ampla variedade de problemas de otimização, sendo por isso técnicas mais abrangentes [10].

As metaheurísticas sofreram um enorme desenvolvimento nas duas últimas décadas graças à sua vasta aplicação nos mais diversificados campos da ciência, sendo a grande maioria baseada em fenómenos naturais. Assim sendo, o desempenho dos algoritmos metaheurísticos é fortemente influenciado pela forma como as características da Natureza são reproduzidas, especialmente pela seleção “dos mais aptos” o que mais não é do que a imitação do processo de seleção natural segundo o qual os sistemas biológicos têm evoluído ao longo de milhões de anos [10].

Na última década o grau de complexidade dos problemas de otimização aumentou, acompanhando os desenvolvimentos tecnológicos que permitem atualmente a resolução de problemas de otimização de larga escala [11]. Neste seguimento, o recurso a metaheurísticas para a resolução de problemas mais exigentes foi também crescendo, apesar de não garantirem exatidão nem rapidez de convergência [10].

A introdução e familiarização com técnicas de otimização torna-se cada vez mais necessária, devendo ser explorada a nível académico [12]. A busca por soluções ótimas deve ser acompanhada pelo conhecimento das diversas técnicas de otimização. Assim, este desafio para além de dever ser explorado em ciclos de estudo mais avançados, pode também ser introduzido em níveis académicos mais baixos, permitindo a aprendizagem por parte de alunos de licenciatura e mestrado. O desenvolvimento de novas tecnologias e a sua aplicação ao processo ensino-aprendizagem tem conduzido a novas metodologias pedagógicas [13]. Acompanhando este desenvolvimento, é

importante integrar as novas tecnologias no ensino das mais diversas temáticas [14]. Cada vez mais, os jogos podem contribuir para a aprendizagem dos jogadores. Se pensarmos nesses jogadores enquanto alunos de engenharia, os jogos podem funcionar como um parceiro no desenvolvimento das suas capacidades técnicas. Assim sendo, é importante implementar transformações a nível organizacional para o acompanhamento das tecnologias emergentes [15]. Dobrzański e Honysz [16] ao descreverem as ferramentas computacionais como auxiliares científicos, destacaram a importância destas na simulação de fenómenos que, sem tais ferramentas seria impossível de concretizar. Um Laboratório Virtual de Ciência de Materiais foi descrito por estes mesmos autores [17] como uma ferramenta científica e didática no ramo da engenharia de materiais. O uso de plataformas didáticas pode ser um elemento motivador para os alunos na exploração de diversos tópicos por diferentes perspetivas [18]. Interligar a aprendizagem a ferramentas didáticas que estimulem e acelerem os processos de compreensão pode traduzir-se em importantes resultados [12].

Todos estes assuntos, aqui expostos de uma forma breve com o objetivo de efetuar um enquadramento prévio do presente trabalho, serão abordados com maior detalhe e extensão ao longo do trabalho nas secções correspondentes.

1.4. Estrutura da dissertação

De modo a abranger os conceitos sobre os quais o tema deste trabalho incide, esta dissertação é composta por 11 capítulos. O presente capítulo introduziu de uma forma geral, contudo abrangente, os tópicos principais focados nesta dissertação, incluindo a motivação e objetivos que conduziram ao desenvolvimento deste trabalho. De uma forma mais aprofundada e direcionada para as aplicações estudadas, os fundamentos teóricos associados a estes tópicos encontram-se expostos nos capítulos 2 a 7, passando pelos materiais compósitos e suas propriedades materiais, pelas leis constitutivas e abordagens consideradas, terminando com a otimização. No capítulo 8, o mais extenso desta dissertação, encontram-se os estudos numéricos efetuados, os quais abrangem materiais compósitos com gradiente funcional, nanocompósitos reforçados com nanotubos de carbono, estudos de influência de porosidades nestes materiais e otimização de placas com diferentes constituições materiais. O capítulo 9 dedica-se à exposição das interfaces gráficas que compõem as plataformas computacionais desenvolvidas. Para finalizar, nos capítulos 10 e 11 expõem-se as conclusões a que os resultados destes estudos conduziram, assim como os futuros desenvolvimentos que poderão ser levados a cabo para dar continuidade ao tema apresentado.

2. Materiais compósitos

No presente capítulo, que se centra nos materiais compósitos, começa-se por efetuar uma abordagem generalista. Tendo em vista o foco do trabalho desenvolvido, descreve-se com maior profundidade alguns tipos de materiais compósitos em particular.

2.1. Materiais compósitos

De acordo com a norma ASTM D3787-15, um material compósito consiste numa substância composta por dois ou mais materiais, insolúveis um no outro, e que são combinados com o objetivo de obter um material de engenharia com utilidade, possuindo determinadas propriedades distintas das apresentadas pelos seus constituintes quando isolados, embora preservando a contribuição das melhores características de cada um [19]. De um modo geral, os materiais compósitos são conhecidos por oferecerem um desempenho superior em aplicações em que se requerem elevadas relações resistência/peso e rigidez/peso, quando comparados com os designados materiais tradicionais [20].

No que respeita à sua constituição, os materiais compósitos são normalmente compostos por duas fases: a matriz e o reforço. A matriz, que constitui a fase contínua, para além de dar forma ao compósito, transfere a carga aplicada para o reforço (fase descontínua). Quanto ao reforço, fase descontínua e dispersa na matriz, há que ter em conta alguns parâmetros de ordem estrutural que têm influência direta nas propriedades materiais resultantes. Entre esses parâmetros encontram-se o tipo de material do reforço, a sua concentração, dimensão e forma, a sua distribuição e a sua orientação [21].

Os materiais compósitos reforçados com fibras são sensíveis a condições de funcionamento extremas, falhando muitas das vezes por delaminação, ou seja, pela descoesão e progressiva separação entre as fibras e a matriz. Este último modo de falha é muito comum em condições de temperaturas elevadas. Um exemplo de condições de funcionamento com temperatura extrema é o de veículos espaciais que, para suportarem estas condições, exigem a inclusão de barreiras térmicas. Para contornar estes problemas e designadamente o da ocorrência de delaminação, em meados da década de 80 surgiu um material inovador, desenvolvido por investigadores no Japão, denominado de material com gradiente funcional (FGM) [2].

2.2. Materiais compósitos com gradiente funcional

Os compósitos laminados apresentam com frequência concentrações de tensões nas interfaces entre camadas adjacentes, o que é indesejável. Com o intuito de contornar esta situação, surge o conceito de material com gradiente funcional (FGM), que se trata de um material compósito

composto por duas ou mais fases, cujas propriedades materiais apresentam uma variação contínua e gradual em uma ou mais direções espaciais. É esta variação gradual e contínua das propriedades materiais a responsável pela minimização das concentrações de tensões observadas nos compósitos laminados [22].

Os FGMs são caracterizados por permitirem construir as suas propriedades materiais de acordo com os objetivos a atingir. Por este motivo, nos últimos anos têm sido alvo de pesquisa e desenvolvimento, conhecendo-se aplicações nos mais diversos campos da engenharia, dos quais são exemplo os campos energético, aeroespacial e biomedicina [3] entre outros. Na Figura 2.1 encontra-se ilustrado um leque de áreas de aplicação destes materiais, evidenciando a versatilidade que os caracteriza.



Figura 2.1. Aplicações comuns dos FGM

Como já foi referido, num FGM as propriedades evoluem gradualmente em função da posição. Esta variação das propriedades materiais decorre do facto de a composição química e/ou microestrutura dependerem das coordenadas espaciais [23]. As fases mais comumente encontradas nestes materiais são metálicas, cerâmicas ou poliméricas. A distribuição espacial das fases pode ser descrita como uma variação espacial gradual e contínua na composição do FGM, sendo responsável por morfologias e propriedades específicas [3]. Num FGM típico, a evolução da distribuição ocorre segundo a direção da espessura, podendo assumir diferentes configurações [24]. A Figura 2.2 ilustra duas distribuições distintas, para um FGM bi-fásico, ambas segundo uma única direção espacial.

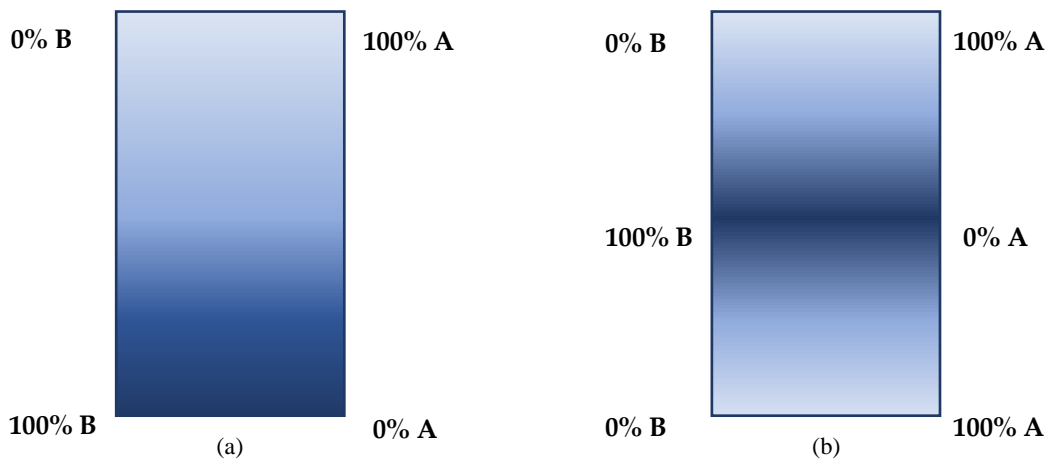


Figura 2.2. Variação na composição, ao longo da espessura, de um FGM bifásico (fases A e B): (a) evolução crescente da fase A no sentido da superfície inferior para a superior; (b) evolução crescente da fase A do centro para as faces [25]

Uma vez que as frações volúmicas das fases constituintes de um FGM e a sua microestrutura não são constantes, evoluindo de forma gradual e contínua ao longo de uma ou mais direções, as propriedades macroscópicas também vão apresentar variações contínuas e graduais. Uma das vantagens destes materiais é o facto de se poder usufruir simultaneamente na mesma estrutura das propriedades das fases presentes. No caso de um FGM composto pelas fases $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Y-ZrO}_2$ é possível observar a presença das propriedades características de ambas as fases, ou seja, a dureza da alumina (Al_2O_3) e a rigidez da zircónia (Y-ZrO_2), motivo pelo qual se trata de um FGM usualmente utilizado em diversos estudos. Um dos campos de aplicação deste compósito é o da bioengenharia, onde é utilizado em próteses da anca e joelho, tomando-se partido da sua biocompatibilidade [3].

Os FGMs são compósitos heterogéneos avançados que permitem suavizar a mudança brusca de composição existente na interface entre materiais diferentes, muito comum em compósitos laminados, através da evolução gradual e contínua de composição, o que resulta numa redução de concentrações de tensões na estrutura. Esta mudança gradual da microestrutura ocorre de acordo com uma determinada função de distribuição, em função dos requisitos impostos, podendo ocorrer em uma ou mais direções. Desde a sua primeira implementação, estes materiais têm sido objeto de estudo preferencial para uma vasta gama de campos de engenharia, para os quais o conceito dos FGMs é de extrema relevância. São exemplos de aplicações recentes as engrenagens, ferramentas de corte, entre outras. Também no campo da medicina os FGMs têm desempenhado um papel relevante, nomeadamente ao nível dos biomateriais para as mais diversas aplicações, das quais se destacam os implantes dentários e ósseos [26]. Apesar de, do ponto de vista macroscópico, estes compósitos serem fortemente heterogéneos, a idealização dos FGMs como materiais homogéneos, ponto a ponto, com propriedades mecânicas a variar de forma gradual e contínua ao longo de uma ou mais direções é de grande utilidade na simplificação da sua microestrutura heterogénea, tornando a sua análise mais eficiente [24].

A aplicação de FGMs nos mais diversos campos da engenharia tem vindo a aumentar, sendo que em muitas dessas aplicações estes materiais são modelados por elementos do tipo placa. Uma placa constituída por um FGM é comumente denominada de placa com gradiente funcional (FGP). É comum o projeto de FGPs para funcionamento a altas temperaturas, estando cumulativamente sujeitas a cargas mecânicas, pelo que estas devem ser projetadas para apresentarem bom desempenho quando sujeitas ao seu efeito combinado. Dada a versatilidade dos materiais com gradiente funcional, as FGPs permitem um projeto adaptado ao desempenho pretendido [26].

Como referido, uma placa com gradiente funcional apresenta uma composição conceptualmente baseada no conceito de FGM [26]. Na Figura 2.3 encontra-se representada uma placa retangular no sistema de coordenadas cartesiano.

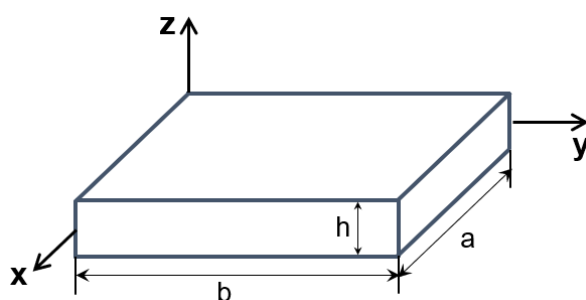


Figura 2.3. Dimensões características de uma placa retangular

As placas podem ser classificadas de acordo com a relação de aspeto em espessas, moderadamente espessas e finas. Quanto às suas dimensões as placas podem ser classificadas em nanoplacas (nano-escala), microplacas (microescala) e placas “normais”. No que diz respeito ao formato, as placas podem assumir várias formas, sendo as retangulares as mais estudadas [26].

Como as propriedades térmicas e mecânicas dos FGMs apresentam uma mudança gradual a nível macroscópico, as estruturas FGM têm sido alvo de grande interesse na medida em que abrangem uma grande diversidade de aplicações nos mais variados campos de engenharia, sendo delas exemplo, componentes estruturais de paredes finas utilizados em veículos espaciais e reatores nucleares, incluindo outras áreas de exigências térmicas elevadas [27]. A oportunidade de projetar FGMs de acordo com determinadas propriedades pré-definidas faz destes materiais alvos preferidos para o fabrico de diversos produtos [3]. Desta forma, é de extrema importância a previsão das deformações e tensões nestas estruturas a nível do seu projeto ótimo. A este respeito, vários investigadores levaram a cabo estudos baseados na teoria de elasticidade 3D para avaliar o comportamento à flexão de placas FGM. Contudo estes estudos estão restringidos a um único tipo de apoio, em particular a placas simplesmente apoiadas sujeitas a carregamentos mecânicos ou térmicos transversais de carácter sinusoidal. No que concerne ao comportamento das propriedades materiais, há referência a estudos onde a variação destas propriedades ao longo da espessura segue uma lei de potência, sendo as propriedades efetivas função das frações volúmicas das fases de acordo com a teoria de Mori-Tanaka [27].

Devido às suas características, a análise 3D de placas não é adequada quando se trata de condições de carregamento e de fronteira com maior complexidade. Por este motivo, a análise de placas isotrópicas, ortotrópicas e FGM é efetuada usualmente, tanto numérica como analiticamente, com recurso a teorias 2D segundo as quais se assume que as placas se encontram num estado de tensão plana. Apesar de este pressuposto se tratar de uma aproximação, a análise 2D permite estimar os deslocamentos globais e momentos flectores com precisão satisfatória [27]. À data do estudo publicado por Singha et al. [27], eram poucos os estudos analíticos pelo método dos elementos finitos (FEM) que abordassem a flexão de placas FGM aplicando teorias de placas 2-D. Uma característica comum a esses estudos é o facto de ter sido considerada como referência a superfície média da placa, em contexto geométrico. Estudos analíticos posteriores de placas FGM por FEM onde a referência considerada foi a superfície neutra física, revelaram diferenças em relação aos resultados obtidos com a superfície média geométrica como referência [27].

Os processos de fabrico constituem uma parte considerável da pesquisa no âmbito dos FGMs. Geralmente, os processos de fabrico destes materiais podem ser divididos em duas etapas: construção da estrutura espacialmente heterogénea – gradação – e transformação dessa estrutura num material – consolidação. A pulverometalurgia é um exemplo de processo de fabrico de FGMs. Esta técnica inclui a produção e processamento dos pós, seguidos de operações de conformação e consolidação por sinterização ou aplicação de pressão. Com este processo de fabrico é possível criar gradientes a nível das porosidades, inclusive ao nível das dimensões dos poros. A mistura de pós onde as partículas diferem em forma ou a variação dos parâmetros de deposição dos pós conduzem a gradientes de porosidades. Já os gradientes em dimensão de poros obtêm-se variando a dimensão das partículas [23]. Apesar de a existência de porosidades ser desejável e vantajosa em algumas aplicações, como por exemplo em filtros, há que ter em conta que a existência de porosidades diminui a resistência mecânica pelo que podem ser prejudiciais para aplicações estruturais [2].

Através da evolução contínua e gradual de propriedades, os FGMs eliminam a existência das típicas interfaces presentes nos laminados, zona propícia ao início de falha. Com a melhoria dos processos de fabrico os custos inerentes sofrerão uma diminuição, permitindo ampliar a aplicação destes materiais. Dada a extrema importância desta classe de materiais compósitos, as investigações têm seguido o caminho da melhoria do processamento destes materiais e suas propriedades. Em suma, os FGMs como materiais avançados que são, irão revolucionar a indústria no presente século, sendo ainda necessário vencer alguns obstáculos tais como o elevado custo [2].

2.3. Nanocompósitos

Dada a sua configuração, os nano-materiais apresentam uma elevada área superficial e, uma vez que muitas das interações químicas e físicas são influenciadas pelas superfícies, as suas propriedades podem diferir substancialmente das apresentadas pelos mesmos materiais à macro-

escala [28]. Atualmente, as nanopartículas, os nanotubos, as nano-fibras e os nano-fios, entre outros nano-materiais, têm sido alvo de investigação. Por norma, estes materiais são classificados quanto à geometria de acordo com a Figura 2.4.

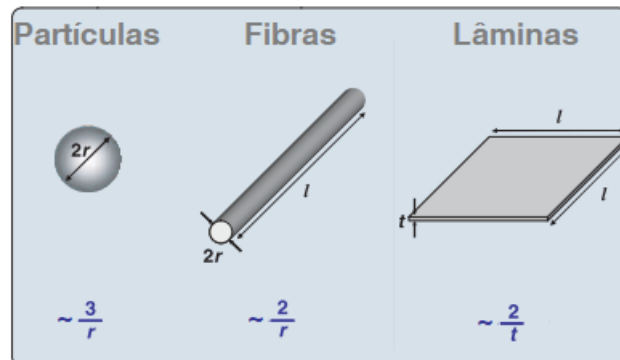


Figura 2.4. Geometria dos reforços mais comuns e respetivas razões área/volume (adaptado de [28])

Como é possível observar, tanto as partículas como as fibras apresentam uma razão área/volume inversamente proporcional ao seu raio, sendo que esta razão é inversamente proporcional à espessura no caso dos materiais em camadas. Desta forma, a alteração destas dimensões da macro para a nano-escala terá um efeito aumentativo na razão área/volume. De acordo com o exposto, as propriedades dos nanocompósitos são fortemente influenciadas pela dimensão das suas fases constituintes e pelo grau de mistura entre estas. A dispersão do reforço e a adesão na interface reforço-partícula são fatores determinantes para as propriedades mecânicas dos materiais compósitos e, em particular, dos nanocompósitos. No caso de o reforço não apresentar uma boa dispersão na matriz, o nanocompósito não apresentará as propriedades materiais que o tornam vantajoso perante os materiais compósitos convencionais. Uma boa adesão reforço-matriz conduz a propriedades melhoradas, nomeadamente no que respeita à resistência ao corte interlaminar, à delaminação, à fadiga e à corrosão [28].

A investigação na área dos nanocompósitos é muito vasta, incluindo áreas tão diversas como a eletrónica e computação, a engenharia aeroespacial, o desporto e a medicina [28]. Os processos de fabrico são um dos grandes desafios na área dos nanocompósitos, particularmente no que respeita à obtenção de uma boa dispersão e adesão. Uma fraca adesão e existência de aglomerados de partículas são fatores prejudiciais ao comportamento dos compósitos quando sujeitos a situações exigentes, como por exemplo temperaturas e pressões elevadas [29].

De acordo com diferentes estudos reportados em literatura da especialidade tem sido possível concluir que os novos materiais compósitos híbridos multi-escala que incluem nano e micro partículas de reforço, proporcionam múltiplas vantagens estruturais [30].

2.3.1. Compósitos reforçados com nanotubos de carbono

Acompanhando os avanços da nanotecnologia, o desenvolvimento de nano-materiais tem conduzido à sua aplicação nas mais variadas áreas da engenharia. Os CNTs (NanoTubos de

Carbono) inserem-se nesta classe de materiais, sendo um recurso muito comum numa grande diversidade de aplicações. No campo da biomedicina os CNTs são amplamente utilizados em aplicações multifuncionais devido às propriedades peculiares que apresentam, sendo que no domínio das aplicações terapêuticas, são utilizados como transportadores de medicamentos e/ou vacinas, em implantes neuro-prostéticos e na regeneração de tecidos, por exemplo. Já ao nível do diagnóstico, os CNTs são úteis na imagiologia. De facto os CNTs constituem um material bastante versátil para aplicação neste campo científico, sendo os biossensores outro exemplo da sua utilização [31]. SWCNTs (*Single-Walled Carbon NanoTubes*) revestidos por sílica porosa e PEGylated SWCNTs são dois materiais utilizados como agentes foto-térmicos, sendo o segundo também utilizado em imagiologia. Ambos representam apenas dois exemplos das imensuráveis e diversificadas aplicações de materiais compósitos reforçados com CNTs na biomedicina [32].

A produção de membranas para órgãos artificiais é um exemplo da aplicação biomédica de materiais compósitos com matriz polimérica. A regeneração de tecidos e de osso são duas técnicas terapêuticas onde estas membranas são utilizadas como barreiras. Tratando-se de um polímero não reabsorvível, a polisulfona (PSU) é indicada para matriz polimérica que, uma vez reforçada com CNTs, constitui um compósito com futuro promissor no fabrico de membranas para aplicações biomédicas. A este respeito verificou-se que um reforço máximo de 1,5%(m/m) de MWCNTs (*MultiWalled Carbon NanoTubes*) resulta num aumento da dimensão dos poros. Por outro lado, um valor de 4%(m/m) deste reforço aumenta o fluxo e a probabilidade de rejeição [33]. Ainda a respeito das aplicações biomédicas, os CNTs têm sido utilizados para reforçar FGMs, sendo o compósito resultante aplicado em próteses e implantes ósseos [34].

A descrição anterior evidencia a vasta gama de aplicações dos CNTs, no entanto a sua utilização encontra-se limitada devido às suas reatividade e toxicidade, resultantes dos processos de fabrico. Segundo a literatura [31], o polietilenoglicol (PEG) reforçado com MWCNTs pode ser uma alternativa quanto à redução de toxicidade, uma vez que a funcionalização com materiais biocompatíveis influencia a toxicidade. Apesar das desvantagens enunciadas, os CNTs têm sido utilizados com sucesso em várias aplicações biomédicas, recorrendo à sua funcionalização para redução da toxicidade. Uma melhor compreensão dos processos físicos, químicos e biológicos envolvendo CNTs será alcançada dando continuidade aos estudos até então efetuados. Desta forma, será possível ampliar o uso destes compósitos na biomedicina [35].

2.4. Materiais compósitos laminados e sandwich

Os materiais compósitos laminados são vastamente utilizados numa grande diversidade de áreas do conhecimento, destacando-se a indústria aeroespacial, as engenharias civil e mecânica, e a física nuclear. O motivo para tal reside nas características que se destacam nestes materiais, tais como as excelentes relações rigidez-peso e resistência-peso, às quais se acumula o baixo custo de manutenção. Contudo, a interface de ligação entre materiais distintos, característica típica dos

compósitos laminados, impõe descontinuidades nas propriedades mecânicas, resultando em concentrações de tensões nessa zona, as quais poderão contribuir para a delaminação, iniciação de fissuras ou separação da camada adesiva [22].

Como o próprio nome indica, os compósitos laminados são formados por lâminas/camadas que podem ter as mais diversas composições. Assim sendo, num mesmo laminado pode-se encontrar, por exemplo, camadas isotrópicas homogêneas, camadas reforçadas com fibras/partículas, camadas com gradiente funcional, entre outros.

A dimensão das fibras/partículas de reforço influencia as propriedades dos materiais compósitos e, conseqüentemente, o seu desempenho. Aliás, a mudança da macro-escala para a nano-escala no que a reforços diz respeito conduz a variações notáveis nas propriedades físicas dos materiais[28].

As placas com gradiente funcional podem apresentar diferentes configurações relativamente à distribuição espacial das suas fases constituintes. Na Figura 2.5 ilustram-se três exemplos típicos de configuração. As FGPs do tipo sandwich podem apresentar um núcleo homogêneo com faces FGM (Figura 2.5-b), ou um núcleo FGM com faces homogêneas (Figura 2.5-c).

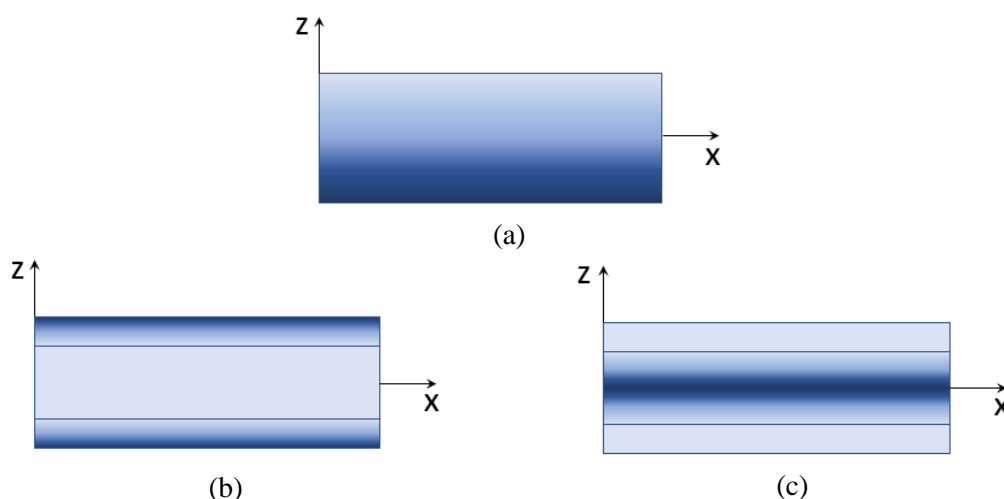


Figura 2.5. Configurações de distribuição espacial de FGPs: (a) FGM; (b) FGP sandwich com núcleo homogêneo e faces FGM; (c) FGP sandwich com núcleo FGM e faces homogêneas

As distribuições espaciais de material num FGM podem ser simétricas, como no caso das FGPs do tipo sandwich representadas na Figura 2.5-b e na Figura 2.5-c, ou antisimétricas, como o FGM ilustrado na Figura 2.5-a [26].

3. Propriedades Materiais Efetivas

Tendo em conta os diferentes materiais compósitos existentes, torna-se clara a necessidade de estimar as suas propriedades. Com este propósito o presente capítulo apresenta as abordagens aplicadas para obter, de forma estimada, as propriedades materiais efetivas dos materiais compósitos considerados nas diferentes aplicações numéricas estudadas.

3.1. Materiais compósitos com gradiente funcional

As propriedades de um FGM e, em particular de uma FGP, num determinado ponto podem ser avaliadas através de funções modelo ou modelos micromecânicos. Como a microestrutura destes materiais evolui contínua e gradualmente de uma composição A para uma composição B, segundo uma ou mais direções, esta variação pode ser modelada por funções matemáticas. As funções modelo descrevem a variação espacial das propriedades materiais ou da microestrutura. A lei de potência é a função modelo mais usual para a descrição da evolução de propriedades ou da fração volúmica de um FGM. Nos materiais com gradiente funcional será necessário recorrer a um modelo micromecânico, como por exemplo o de Voigt ou o de Mori-Tanaka, para estimar a distribuição espacial das propriedades materiais [26]. No caso de uma FGP de espessura constante h na qual a variação de fração volúmica ocorre segundo a direção da espessura (z), a lei de potência é dada pela equação (3.1), onde $V_{f(A)}(z)$ representa a fração volúmica da fase A no plano de cota z , sendo o parâmetro p o expoente da lei de potência. O parâmetro p representa o índice de gradação do material, sendo que o seu valor depende das exigências de projeto [24].

$$V_{f(A)}(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (3.1)$$

Para demonstrar o efeito do parâmetro p , na Figura 3.1-a encontra-se um gráfico da distribuição de fração volúmica da fase A, num compósito FGM, ao longo da espessura para diferentes expoentes. No caso particular em que o parâmetro p assume o valor 1, a distribuição de fração volúmica apresenta um comportamento linear, como o ilustrado na Figura 3.1-b. Quando o expoente da lei de potência é nulo, o material é homogêneo e composto unicamente pela fase A. Excetuando o caso em que $p=0$, a face localizada à cota $z = -h/2$ corresponde à fase B, e a face oposta ($z = h/2$) corresponde à fase A. No caso de um FGM bifásico, verifica-se a igualdade traduzida pela equação (3.2).

$$V_{f(A)}(z) + V_{f(B)}(z) = 1 \quad (3.2)$$

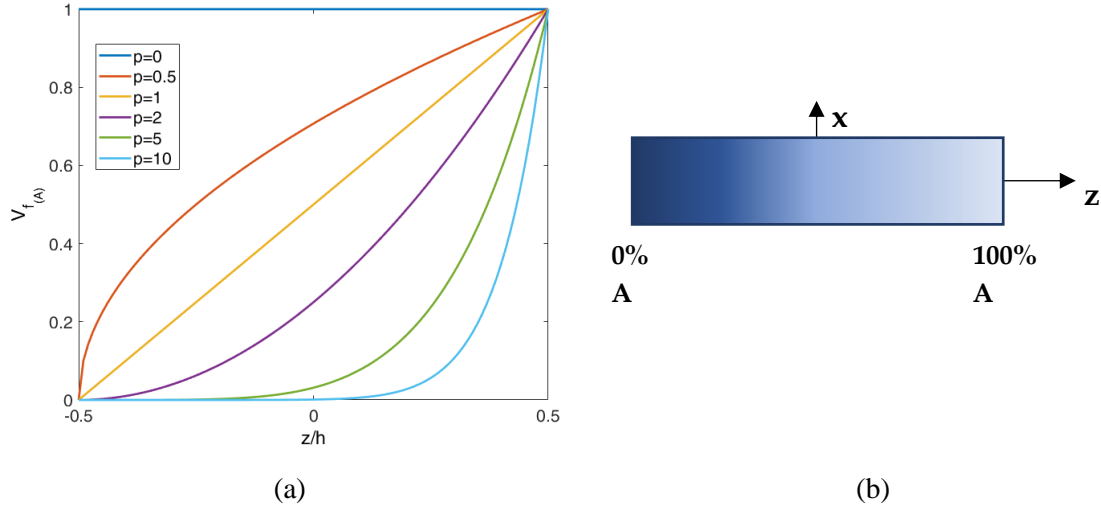


Figura 3.1. Variação da fração volúmica da fase A ao longo da espessura: (a) em função do expoente (p); (b) para expoente $p = 1$

Os modelos micromecânicos permitem estimar o comportamento espacial das propriedades materiais efetivas de um compósito, a partir das propriedades materiais das fases constituintes e respetivas frações volúmicas descritas por uma função modelo. Exemplos de modelos micromecânicos são os métodos baseados na mecânica de materiais, os métodos baseados na teoria da elasticidade e os métodos semi-empíricos [26].

Os métodos baseados na mecânica de materiais assentam no pressuposto de deformação uniforme, como é o caso do modelo de Voigt, ou de tensão uniforme como no modelo de Reuss. De acordo com o modelo de Voigt, também conhecido por regra das misturas, as propriedades efetivas de um compósito são estimadas pela equação (3.3). Segundo o modelo de Reuss, também denominado de regra das misturas inversa, as estimativas das propriedades efetivas dos compósitos são obtidas através da equação (3.4).

$$P_{FGM}(z) = P_{(A)} \cdot V_{f(A)}(z) + P_{(B)} \cdot V_{f(B)}(z), -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (3.3)$$

$$P_{FGM}(z) = \frac{1}{\frac{V_{f(A)}}{P_{(A)}} + \frac{V_{f(B)}}{P_{(B)}}}, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (3.4)$$

Em ambos os modelos $P_{FGM}(z)$ representa uma propriedade efetiva do compósito FGM à cota z , $P_{(A)}$ e $P_{(B)}$ representam essa mesma propriedade relativa às fases A e B, respetivamente, e $V_{f(A)}(z)$ e $V_{f(B)}(z)$ são as frações volúmicas correspondentes às fases A e B, respetivamente, no plano de cota z . Uma vez que se verifica a igualdade da equação (3.2), os modelos de Voigt e de Reuss podem ser reescritos nas formas expressas nas equações (3.5) e (3.6), respetivamente.

$$P_{FGM}(z) = P_{(A)} \cdot V_{f(A)}(z) + P_{(B)} \cdot (1 - V_{f(A)}(z)), -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (3.5)$$

$$P_{FGM}(z) = \frac{1}{\frac{V_{f(A)}}{P_{(A)}} + \frac{1 - V_{f(A)}}{P_{(B)}}}, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (3.6)$$

Os métodos baseados na teoria da elasticidade, como o próprio nome evidencia, aplicam a teoria da elasticidade num modelo simplificado. O método de Mori-Tanaka, incluído nesta categoria, contabiliza a aleatoriedade da distribuição de partículas incorporadas numa fase contínua. Também pertencentes a esta categoria, os métodos semi-empíricos recorrem à interpolação, apresentando melhores resultados comparativamente a outros métodos. O método de Halpin-Tsai é o método semi-empírico aplicado com maior frequência [26].

3.2. Materiais compósitos reforçados com partículas

O processo de fabrico dos FGMs pode ser descrito pela mistura de dois ou mais materiais distintos. No caso de um FGM bifásico esta mistura é composta por duas fases, muitas vezes um metal com inclusões de partículas cerâmicas. Em grande parte dos casos é difícil aferir com rigor a distribuição exata das partículas no FGM, pelo que as propriedades efetivas do compósito resultante são estimadas com base na distribuição de fração volúmica de cada uma das fases. A nível macroscópico existem vários modelos micromecânicos para a determinação, de forma estimada, das propriedades efetivas de materiais compósitos homogêneos. As abordagens analíticas, os modelos micromecânicos e os métodos de elementos finitos são muitas vezes utilizados na modelação de compósitos com gradiente funcional [24].

Um dos modelos para a estimativa de propriedades efetivas de FGMs é o modelo de Mori-Tanaka. Trata-se de um modelo adequado para compósitos onde a região com microestrutura gradual possui uma matriz bem definida e distinta da fase particulada descontínua. Neste modelo as partículas de reforço são consideradas como pequenas esferas imersas numa matriz, ou seja, a matriz (fase A) encontra-se reforçada com partículas esféricas (fase B). No que diz respeito às frações volúmicas das fases constituintes verifica-se a igualdade (3.2), pelo que, por exemplo, a massa volúmica do compósito pode ser estimada pela seguinte expressão [24]:

$$\rho = \rho_A \cdot V_{f_A} + \rho_B \cdot V_{f_B} \quad (3.7)$$

$$\rho = \rho_A \cdot V_{f_A} + \rho_B \cdot (1 - V_{f_A})$$

Os modelos micromecânicos são compostos por elementos de volume representativos, os quais podem ser construídos por simulações de elementos finitos para materiais compósitos isotrópicos

ou ortotrópicos. Os métodos de elementos finitos pretendem simular com precisão a microestrutura real desses elementos de volume, para o cálculo da resposta termomecânica à aplicação de cargas, sendo que as propriedades efetivas do material podem ser estimadas para diferentes frações volúmicas de reforço. Segundo a literatura [24], este será o método mais preciso dado que a microestrutura é modelada através de elementos finitos tridimensionais, apesar de requerer a construção de múltiplos modelos para a determinação das propriedades materiais para diferentes frações volúmicas das fases constituintes, o que pode ser compensado pela automatização do processo.

3.3. Materiais compósitos reforçados com nanotubos de carbono

Muitos dos materiais, naturais ou sintéticos, consistem numa matriz reforçada, encontrando-se esses reforços distribuídos de forma aleatória tanto bidimensional como tridimensionalmente. Estes materiais permitem a sua modelação matemática através de sistemas laminados [36].

Um sistema laminado, cujas camadas apresentem propriedades mecânicas anisotrópicas, pode constituir um material com propriedades mecânicas isotrópicas na medida em que o aumento de orientações distintas propicia a isotropia. Nestes materiais quase-isotrópicos as propriedades mecânicas são função das propriedades anisotrópicas das camadas que os constituem, sendo as propriedades das camadas anisotrópicas definidas pelas características das fases heterógenas que as constituem. Esta metodologia de estimativa de propriedades mecânicas é denominada de micromecânica [36].

Baseadas no método micromecânico desenvolvido por Hill, as equações de Halpin-Tsai surgiram da sua simplificação, permitindo assim a sua aplicação a uma grande diversidade de materiais compósitos no que respeita às características geométricas dos reforços [36]. Por este motivo, estas equações adequam-se à modelação de uma vasta gama de materiais compósitos, incluindo os reforçados com nanotubos de carbono.

No caso dos materiais compósitos reforçados com nanotubos de carbono, o módulo de elasticidade pode ser estimado recorrendo às equações de Halpin-Tsai adequadas às características destas nano-inclusões ((3.8) a (3.10)) [37]. Nestas equações tem-se que $E_{(NC)}$, $E_{(M)}$ e $E_{(CNT)}$ são os módulos de elasticidade do nanocompósito resultante, da matriz e dos nanotubos de carbono, respetivamente, e a fração volúmica dos CNTs é representada por $V_{f(CNT)}$. As características geométricas dos nanotubos de carbono, nomeadamente comprimento, diâmetro externo e espessura, encontram-se designadas por $l_{(CNT)}$, $d_{(CNT)}$ e $t_{(CNT)}$, respetivamente. Note-se que a aplicação destas equações implica a consideração dos CNTs como fibras descontínuas orientadas de forma aleatória na matriz [38].

$$E_{(NC)} = \frac{E_{(M)}}{8} \left[5 \left(\frac{1 + 2\beta_{dd}V_{f(CNT)}}{1 - \beta_{dd}V_{f(CNT)}} \right) + 3 \left(\frac{1 + 2 \left(\frac{l_{(CNT)}}{d_{(CNT)}} \right) \beta_{dl}V_{f(CNT)}}{1 - \beta_{dl}V_{f(CNT)}} \right) \right] \quad (3.8)$$

$$\beta_{dl} = \frac{\frac{E_{(CNT)}}{E_{(M)}} - \frac{d_{(CNT)}}{4t_{(CNT)}}}{\frac{E_{(CNT)}}{E_{(M)}} + \frac{l_{(CNT)}}{2t_{(CNT)}}} \quad (3.9)$$

$$\beta_{dd} = \frac{\frac{E_{(CNT)}}{E_{(M)}} - \frac{d_{(CNT)}}{4t_{(CNT)}}}{\frac{E_{(CNT)}}{E_{(M)}} + \frac{d_{(CNT)}}{2t_{(CNT)}}} \quad (3.10)$$

A fração volúmica dos CNTs é dada pela equação (3.11), onde $w_{(CNT)}$ e $\rho_{(CNT)}$ representam a fração mássica e a massa volúmica dos CNTs, sendo $\rho_{(M)}$ a massa volúmica da matriz.

$$V_{f(CNT)} = \frac{w_{(CNT)}}{w_{(CNT)} + \frac{\rho_{(CNT)}}{\rho_{(M)}}(1 - w_{(CNT)})} \quad (3.11)$$

O coeficiente de Poisson do nanocompósito ($\nu_{(NC)}$) é estimado através da regra das misturas de Voigt, de acordo com a equação (3.12) onde $\nu_{(M)}$ e $\nu_{(CNT)}$ correspondem aos coeficientes de Poisson da matriz e dos CNTs, respetivamente[39].

$$\nu_{(NC)} = \nu_{(CNT)}V_{f(CNT)} + \nu_{(M)}(1 - V_{f(CNT)}) \quad (3.12)$$

A estimativa do módulo de Young do nanocompósito pressupõe que os CNTs se encontram bem dispersos na matriz, o que é indispensável para assegurar uma resposta mecânica satisfatória por parte do material compósito. Assumindo o nanocompósito como material isotrópico, este pressuposto é cumprido considerando valores reduzidos para a fração mássica dos CNTs [39].

3.4. Materiais compósitos com porosidades

Os materiais porosos com gradiente funcional pertencem à classe dos materiais compósitos, sendo que têm a particularidade de combinarem as vantagens dos FGMs com as características dos materiais porosos. De facto, estes materiais apresentam características notáveis, entre as quais se destaca a razão rigidez-peso. Uma vez que proporcionam propriedades mecânicas únicas apresentando uma massa relativamente baixa, os FGMs porosos constituem um dos materiais vastamente implementados nos mais diversos campos da engenharia, nos quais se incluem, por exemplo, a mecânica e a biomédica. Devido à diversidade de sistemas nos quais é passível de ser

aplicado, este material tem captado o interesse de vários grupos de investigação, em particular no que respeita ao desenvolvimento e implementação de soluções para aplicação na vida real ([4], [40], [25]).

Os processos de fabrico de FGMs constituem uma área em constante desenvolvimento. De entre os diferentes processos existentes, o mais usual é o de sinterização por apresentar uma relação custo-benefício atrativa, apesar de se tratar de um processo que promove a formação de porosidades e vazios. Tratando-se de uma área onde se tem verificado recentes avanços e melhorias, as porosidades continuam a surgir frequentemente como um defeito consequente dos processos de fabrico dos FGMs ([4], [25]). Contudo, as porosidades podem ser uma consequência benéfica e desejável num material. Veja-se o exemplo da engenharia de tecidos, onde as estruturas poliméricas porosas são de particular interesse [3]. Os materiais porosos apresentam a capacidade de replicar diferentes tecidos, por este motivo representam um campo recente de investigação em diferentes áreas da ciência e engenharia. De facto, alguns trabalhos ([1], [41]) mencionam não só a importância da fração de porosidades como também da dimensão, forma e distribuição dos poros nas propriedades mecânicas dos materiais.

No campo da biomedicina, apesar dos materiais porosos apresentarem menor módulo de Young comparativamente aos materiais vastamente utilizados, mostram-se vantajosos perante estes últimos pois asseguram uma melhor integração no corpo humano [42]. Neste campo de aplicação, a hidroxiapatite, composto cerâmico produzido por sinterização, possui uma estrutura porosa muito idêntica à do osso humano, motivo pelo qual tem sido usada em implantes ósseos, tratando-se de mais um caso onde as porosidades são necessárias e benéficas. Como as superfícies metálicas porosas permitem uma fixação mais rápida e forte, esta cerâmica tem sido utilizada como revestimento, revelando melhorias a este nível [43].

Sendo uma consequência do processo de fabrico, as porosidades resultam numa diminuição da resistência do material, motivo pelo qual este tipo de defeito merece particular atenção e deve ser tido em conta, em particular, em estudos que envolvam o comportamento mecânico de estruturas FGM. Neste contexto, N. V. Nguyen et al. [44] desenvolveram estudos acerca da resposta mecânica de placas FGM porosas, onde consideraram duas distribuições de porosidades distintas ao longo da espessura da placa, designadas por *even* e *uneven*. A Figura 3.2 ilustra ambas as distribuições numa placa FGM bifásica, idêntica à ilustrada na Figura 2.5-a.

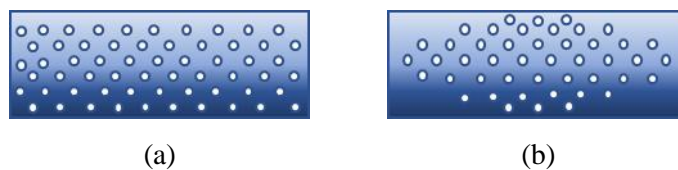


Figura 3.2. Distribuições de porosidades: (a) *even*; (b) *uneven* ([25])

De forma análoga à regra das misturas (equação (3.3)), a evolução das propriedades efetivas do material FGM poroso ao longo da espessura, considerando a existência de porosidades do tipo *even*, pode ser descrita pela seguinte equação:

$$P_{FGM}(z) = (P_{(A)} - P_{(B)}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_{(B)} - \frac{\alpha}{2} (P_{(A)} + P_{(B)}) \quad (3.13)$$

No caso de se considerar uma distribuição de porosidades do tipo *uneven* ao longo da espessura, as propriedades efetivas do FGM podem ser determinadas da seguinte forma:

$$P_{FGM}(z) = (P_{(A)} - P_{(B)}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_{(B)} - \frac{\alpha}{2} (P_{(A)} + P_{(B)}) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (3.14)$$

Em ambas as equações – (3.13) e (3.14) – o parâmetro α representa a fração volúmica de porosidades, pelo que se tem $0 \leq \alpha < 1$. O caso em que $\alpha = 0$ corresponde a uma placa FGM sem porosidades, sendo usualmente denominada de placa FGM perfeita ([44], [25]). Também no contexto das porosidades, J. Kim et al. [40] referem a importância da inclusão de distribuições de porosidades no estudo de FGMs, mais concretamente no estudo da resposta mecânica de vigas, placas e cascas, na medida em que constituem elementos fundamentais de sistemas estruturais e mecânicos, entre outros [25].

As estruturas porosas têm sido alvo de estudo por parte de alguns investigadores, entre os quais Kiran e Kattimani [4] que estudaram a influência da distribuição de porosidades no comportamento de placas estruturais, tendo concluído que as porosidades têm um efeito significativo nos deslocamentos, tensões e frequências naturais. Mais recentemente, S. Merdaci e H. Belghoul [45] investigaram o comportamento, mais concretamente a nível da flexão, de placas FGM porosas, onde partículas cerâmicas de alumina reforçavam uma matriz de alumínio. Neste trabalho, constataram que a inclusão de um parâmetro que traduz a existência de porosidades resulta num aumento não só do deslocamento transversal da placa como também das tensões transversais de corte, verificando-se uma diminuição das tensões axiais, reforçando a importância da consideração dos efeitos das porosidades no projeto de componentes FGM. Verifica-se, portanto, a relevância que deve ser dada à continuidade de estudos neste campo.

4. Leis Constitutivas

Para exposição das leis constitutivas, essenciais para o desenvolvimento do trabalho, este capítulo encontra-se dividido em duas secções. Numa primeira secção abordam-se as teorias de deformação de corte e respetivos campos de deslocamentos, deformações e tensões. De seguida, expõem-se os principais tópicos acerca do método dos elementos finitos (FEM).

4.1. Teorias de deformação de corte

Nesta primeira secção, descrevem-se duas teorias de corte aplicadas nos estudos realizados expostos no capítulo 8, nomeadamente as teorias de deformação de corte de primeira ordem e de ordem superior. Para tal serão formulados os campos de deslocamentos, de deformações e de tensões associadas a cada uma destas teorias.

4.1.1. Teoria de deformação de corte de primeira ordem

Pertencente ao conjunto de teorias ESL (*Equivalent Single Layer*), a teoria de deformação de corte de primeira ordem (FSDT - *First order Shear Deformation Theory*) para análise de estruturas do tipo placa, constitui uma extensão da teoria de vigas de Timoshenko, segundo a qual o campo de deslocamentos é dado pelas equações expostas em (4.1), onde u , v e w representam os deslocamentos num ponto genérico de coordenadas (x, y, z) segundo as direções oX , oY e oZ , respetivamente, e u_0 , v_0 e w_0 representam os deslocamentos de um ponto genérico (x, y) da superfície média da placa nas direções oX , oY e oZ , respetivamente. Os termos θ_x e θ_y representam as rotações da normal transversal em torno das direções oY e oX , respetivamente [26]. Trata-se, portanto, de um campo de deslocamentos com cinco graus de liberdade: $gl = \{u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y\}$. De acordo com a FSDT, as normais transversais não permanecem perpendiculares à superfície média após a deformação (Figura 4.1), motivo pelo qual esta teoria considera a existência de deformações de corte transversais e naturalmente inclui as correspondentes tensões de corte transversais. Adicionalmente, e de acordo com esta teoria verifica-se a inextensibilidade na direção da espessura. Assim para um qualquer ponto da placa caracterizado pelas coordenadas (x, y, z) , o seu deslocamento transversal w coincide com o de um ponto localizado na superfície média, $(x, y, z = 0)$, i.e. o deslocamento transversal w não depende da coordenada z [46].

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \cdot \theta_x(x, y) \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \cdot \theta_y(x, y) \\w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\tag{4.1}$$

No caso de placas finas, ou seja, quando a razão de aspeto a/h for significativamente superior a 10, as rotações θ_x e θ_y aproximam-se dos respectivos declives do deslocamento transversal. Nestas condições, as deformações de corte transversais são desprezáveis, e o nosso estudo pode ser simplificado assumindo o enunciado da Teoria Clássica de flexão de placas. As rotações são então descritas por:

$$\begin{aligned}\theta_x &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \theta_y &= -\frac{\partial w_0}{\partial y}\end{aligned}\quad (4.2)$$

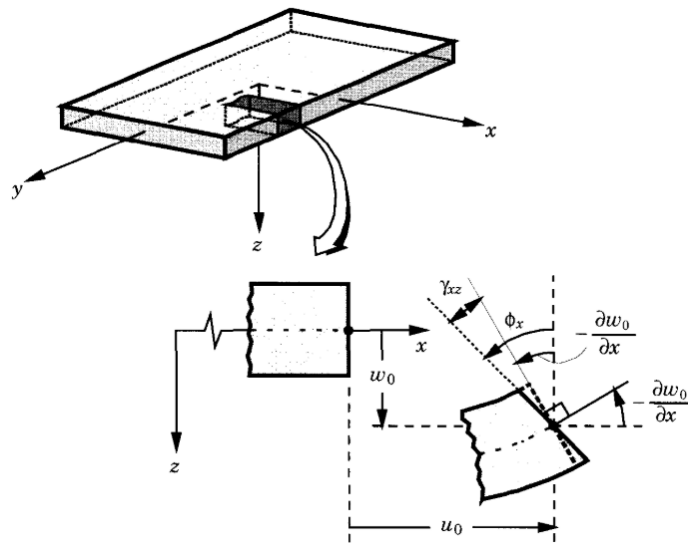


Figura 4.1. Geometrias de uma secção de placa segundo os pressupostos da FSDT, antes e após deformação [46]

O campo de deformações (extensões e distorções) associado à FSDT, considerando que o domínio deste estudo se enquadra no âmbito da Teoria da Elasticidade para pequenas deformações, vem dado pelas equações (4.3).

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\end{aligned}\quad (4.3)$$

No caso da FSDT, que considera um estado de tensão plana, o campo de tensões relaciona-se com o campo de deformações através da matriz de coeficientes de rigidez elástica transformados ($[\bar{Q}]$), de acordo com a relação (4.4), em que os coeficientes de rigidez elástica transformados (\bar{Q}_{ij}) são função dos coeficientes de rigidez elástica (Q_{ij}), sendo dados pelas expressões (4.5) e (4.6), onde $m = \cos \theta$ e $n = \sin \theta$.

$$\{\sigma\} = [\bar{Q}] \cdot \{\varepsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}; & Q_{22} &= \frac{E_2}{(1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21})} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12} \cdot E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} = \frac{\nu_{21} \cdot E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \\ Q_{44} &= G_{23}; & Q_{55} &= G_{13}; & Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cdot m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + Q_{22} \cdot n^4 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cdot m^3 \cdot n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cdot m \cdot n^3 \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \cdot n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + Q_{22} \cdot m^4 \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cdot m \cdot n^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cdot m^3 \cdot n \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cdot m^2 + Q_{55} \cdot n^2; & \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cdot m \cdot n; & \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cdot m^2 + Q_{44} \cdot n^2 \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + Q_{66}(m^4 + n^4) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Note-se, contudo, que a FSDT considera uma situação em que a tensão normal transversal (ao plano da placa) é nula. Tratando-se de um FGM, material isotrópico ponto a ponto, os coeficientes de rigidez elástica, que intervirão na relação constitutiva serão:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E_{FGM}}{1 - \nu_{FGM}^2} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{FGM} \cdot E_{FGM}}{(1 - \nu_{FGM}^2)} \\ Q_{44} &= Q_{55} = Q_{66} = G_{FGM} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nas placas constituídas por material compósito, as tensões de corte transversais (τ_{xz} e τ_{yz}) variam, no mínimo, quadraticamente com a espessura. A discrepância entre o estado de tensão real e o estado de tensão constante pressuposto na FSDT deve então ser corrigida. Essa correção é concretizada multiplicando as componentes de corte transversais da matriz dos coeficientes de rigidez elástica por um fator k , denominado por fator de correção de corte, o que altera a rigidez de corte transversal da placa, no sentido de conferir ao modelo uma capacidade de modelação da deformação da estrutura mais próxima da realidade. O cálculo do fator de correção de corte será abordado de forma mais aprofundada no capítulo 6, reservado precisamente para este efeito.

4.1.2. Teoria de deformação de corte de ordem superior

Com o intuito de modelar de forma mais representativa as deformações de uma estrutura, particularmente quando moderadamente espessa a espessa, têm surgido diferentes teorias de deformação de corte de ordem superior (HSDT – *Higher order Shear Deformation Theory*), permitindo evitar o uso de fator de correção de corte, imperativo na aplicação da FSDT. Estas teorias de ordem superior traduzem-se em resultados com maior precisão, quando comparados com os obtidos através da FSDT, mas em termos gerais apresentam também uma maior exigência computacional. Teoricamente a ordem da deformação de corte pode tomar qualquer valor em busca de resultados com maior precisão, no entanto segundo a literatura [26] a terceira ordem permite obter resultados suficientemente satisfatórios com uma exigência computacional aceitável. Entre as diferentes teorias de deformação de corte de terceira ordem, a que se destaca por ser aplicada com maior recorrência é a proposta por Reddy [26]. O campo de deslocamentos com formulação HSDT que foi considerado nos estudos levados a cabo neste trabalho é descrito por (4.8), contempla oito graus de liberdade: $gl = \{u_0, v_0, w_0, w^*, \theta_x, \theta_x^*, \theta_y, \theta_y^*\}$ e foi proposto por Kant et al. [47].

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \cdot \theta_x(x, y) + z^3 \cdot \theta_x^*(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \cdot \theta_y(x, y) + z^3 \cdot \theta_y^*(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z^2 \cdot w^*(x, y) \end{aligned} \quad (4.8)$$

De acordo com este campo de deslocamentos, o campo de deformações vem então dado por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + z^3 \cdot \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + z^3 \cdot \frac{\partial \theta_y^*}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 2z \cdot w^* \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + z^2 \cdot \frac{\partial w^*}{\partial y} + \theta_y + 3z^2 \cdot \theta_y^* \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + z^2 \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x} + \theta_x + 3z^2 \cdot \theta_x^* \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + z^3 \cdot \frac{\partial \theta_x^*}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + z^3 \cdot \frac{\partial \theta_y^*}{\partial x}\end{aligned}$$

O campo de tensões correspondente a um estado de tensão/deformação triaxial relaciona-se neste caso com o campo de deformações de acordo com a formulação (4.10), apresentando os coeficientes de rigidez elástica e de rigidez elástica transformados uma formulação mais geral. Neste caso estes coeficientes são dados pelas expressões (4.11) e (4.12) respetivamente, onde $m = \cos \theta$ e $n = \sin \theta$.

$$\{\sigma\} = [\bar{Q}].\{\varepsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}Q_{11} &= E_1 \cdot (1 - \nu_{23} \cdot \nu_{32}) / \Delta & Q_{22} &= E_2 \cdot (1 - \nu_{31} \cdot \nu_{13}) / \Delta & Q_{33} &= E_3 \cdot (1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}) / \Delta \\ Q_{12} &= E_1 \cdot (\nu_{21} + \nu_{31} \cdot \nu_{23}) / \Delta = E_2 \cdot (\nu_{12} + \nu_{32} \cdot \nu_{13}) / \Delta \\ Q_{13} &= E_1 \cdot (\nu_{31} + \nu_{21} \cdot \nu_{32}) / \Delta = E_3 \cdot (\nu_{13} + \nu_{12} \cdot \nu_{23}) / \Delta \\ Q_{23} &= E_2 \cdot (\nu_{32} + \nu_{12} \cdot \nu_{31}) / \Delta = E_3 \cdot (\nu_{23} + \nu_{21} \cdot \nu_{13}) / \Delta \\ Q_{44} &= G_{23} & Q_{55} &= G_{13} & Q_{66} &= G_{12} \\ \Delta &= 1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21} - \nu_{23} \cdot \nu_{32} - \nu_{31} \cdot \nu_{13} - 2\nu_{13} \cdot \nu_{21} \cdot \nu_{32}\end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cdot m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + Q_{22} \cdot n^4 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\ \bar{Q}_{13} &= Q_{13} \cdot m^2 + Q_{23} \cdot n^2; & \bar{Q}_{23} &= Q_{13} \cdot n^2 + Q_{23} \cdot m^2 \\ \bar{Q}_{16} &= -Q_{22} \cdot m \cdot n^3 + Q_{11} \cdot m^3 \cdot n - (Q_{12} + 2Q_{66}) \cdot m \cdot n \cdot (m^2 - n^2) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \cdot n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + Q_{22} \cdot m^4; & \bar{Q}_{33} &= Q_{33} \\ \bar{Q}_{26} &= -Q_{22} \cdot m^3 \cdot n + Q_{11} \cdot m \cdot n^3 + (Q_{12} + 2Q_{66}) \cdot m \cdot n \cdot (m^2 - n^2) \\ \bar{Q}_{36} &= (Q_{13} - Q_{23}) \cdot m \cdot n; & \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cdot m^2 + Q_{55} \cdot n^2 \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cdot m \cdot n; & \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cdot m^2 + Q_{44} \cdot n^2 \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) \cdot m^2 \cdot n^2 + Q_{66}(m^2 - n^2)^2\end{aligned} \quad (4.12)$$

Quanto aos coeficientes de rigidez elástica transformados associados a materiais compósitos com gradiente funcional mantém-se o referido para subsecção referente à FSDT. Desta forma, os coeficientes de rigidez elástica no caso de FGMs vêm dados por:

$$\begin{aligned}
Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} &= \frac{E_{FGM} \cdot (1 - \nu_{FGM}^2)}{\Delta} \\
Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} &= \frac{E_{FGM} \cdot (\nu_{FGM} + \nu_{FGM}^2)}{\Delta} \\
Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} &= G_{23} \\
\Delta &= 1 - 3\nu_{FGM}^2 - 2\nu_{FGM}^3
\end{aligned} \tag{4.13}$$

4.2. Método dos elementos finitos

No projeto de muitos componentes de engenharia em que a complexidade se pode colocar a diferentes níveis, nomeadamente ao nível geométrico, ao nível dos materiais, das condições de fronteira e mesmo das solicitações decorrentes das condições de funcionamento, é usual recorrer a métodos aproximados. Estes métodos aproximados são habitualmente baseados em modelos variacionais que aplicados às equações de governo de um dado problema (muitas vezes equações diferenciais) permitem obter uma formulação integral desse problema. Neste contexto, o método dos elementos finitos é um método numérico extensivamente utilizado em que o domínio real é aproximado por um domínio discretizado, i.e., subdividido em subdomínios elementares, os designados elementos finitos, que obedecem a requisitos de continuidade e equilíbrio entre elementos adjacentes.

O método dos elementos finitos é caracterizado por uma enorme versatilidade, aplicando-se a uma diversidade de problemas. O método baseia-se em três etapas essenciais ([48], [49]):

1. Dividir o domínio em partes representativas da geometria e solução do problema:

Neste primeiro passo o meio contínuo é dividido através de linhas imaginárias num número finito de elementos – os elementos finitos. Esses elementos pressupõem-se interligados em pontos localizados nas suas fronteiras, e por vezes no seu interior, denominados de nós. Os deslocamentos destes nós constituem as variáveis primárias, incógnitas do problema. Resumindo, numa primeira fase o componente é discretizado numa malha de elementos finitos.

2. Em cada elemento, descrever as variáveis primárias através de uma combinação linear de valores nodais dessas variáveis e funções aproximadoras, que permitirão obter a solução aproximada.

3. Proceder à “conexão” dos elementos e obter a solução $\{u\}$, vetor de deslocamentos globais, para o domínio discretizado, i.e., para o problema no seu todo:

No caso de uma análise estática linear, por exemplo, o problema é resolvido através do sistema de equações $\{f\}^{global} = [K]^{global} \cdot \{u\}$, em que o vetor $\{f\}^{global}$ contém o sistema de forças generalizadas aplicadas ao corpo deformável a analisar, e $[K]^{global}$ representa a matriz de rigidez elástica do mesmo.

Como referido, e no caso do presente trabalho, o método dos elementos finitos inicia-se com a discretização da placa, numa malha de elementos finitos. Dada a geometria retangular da placa, nos

estudos desenvolvidos a placa em questão foi discretizada em elementos finitos retangulares, como o ilustrado na Figura 4.2.

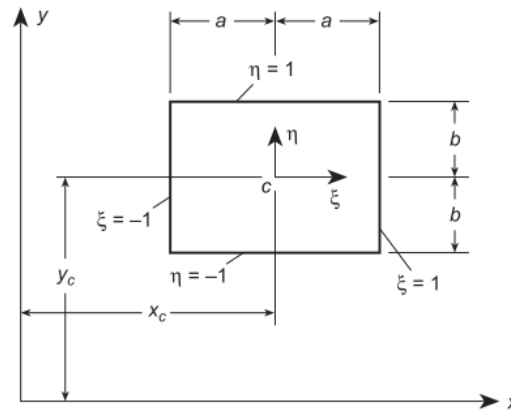


Figura 4.2. Coordenadas normalizadas de um elemento retangular [48]

Os elementos retangulares lineares, pertencentes à família de elementos retangulares de Lagrange, contêm quatro nós localizados nos quatro vértices. Assim, as funções de forma (funções aproximadoras) serão polinomiais de primeiro grau. Regra geral, um elemento retangular da família de Lagrange, de ordem p com n nós, verifica a igualdade (4.14). O elemento retangular quadrático da família de Lagrange possui nove nós, portanto as funções de forma correspondentes são polinomiais de grau 2. Na Figura 4.3 e Figura 4.4 encontram-se representados os elementos retangulares, lineares e quadráticos, da família de Lagrange, assim como as respectivas funções de forma correspondentes aos nós de cada elemento [49].

Daqui em diante, os elementos retangulares, lineares e quadráticos, da família de Lagrange serão designados por elementos Q4 e Q9, respectivamente.

$$n = (p + 1)^2 \tag{4.14}$$

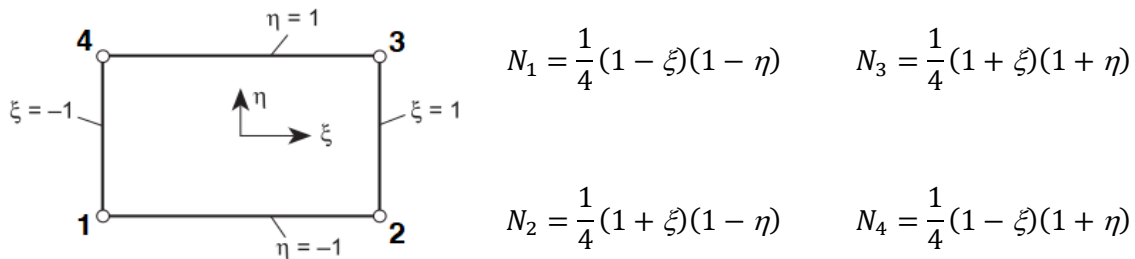
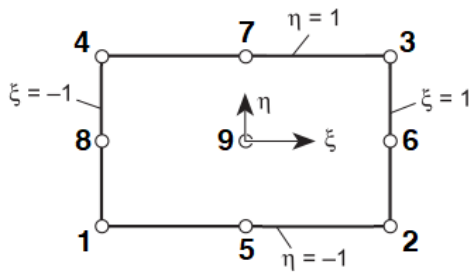


Figura 4.3. Representação esquemática de um elemento retangular linear da família de Lagrange e funções de forma associadas a cada nó



$$N_1 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta) \quad N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta) \quad N_6 = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta) \quad N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta) \quad N_8 = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2)$$

$$N_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

Figura 4.4 Representação esquemática de um elemento retangular quadrático da família de Lagrange e funções de forma associadas a cada nó

Em termos energéticos, a energia potencial total do sistema (V) é dada pela expressão (4.15), onde U e Ω representam a energia elástica de deformação e o potencial de forças, respetivamente.

$$V = U + \Omega \quad (4.15)$$

Por aplicação do princípio da energia potencial mínima, e após alguma manipulação matemática, a matriz de rigidez de um elemento finito inerente ao seu contributo para a energia elástica de deformação vem dada pelo seguinte integral de volume:

$$K = \iiint B^T \cdot \bar{Q} \cdot B \, dV \quad (4.16)$$

O potencial de forças ou o trabalho realizado pelas forças exteriores aplicadas à placa pode revestir diferentes contributos consoante a sua forma de atuação seja concentrada ou distribuída. Para efeitos ilustrativos, refira-se que, tratando-se de uma força distribuída num elemento, fd , esse contributo será dado por:

$$fd = \iint N^T p \, d \quad (4.17)$$

Estas forças distribuídas são subsequentemente introduzidas no vetor de forças global já mencionado anteriormente, onde entram diretamente forças generalizadas concentradas, isto é, forças concentradas e momentos concentrados. Os parâmetros envolvidos no cálculo da matriz de rigidez e do vetor de forças distribuídas serão oportunamente detalhados.

No capítulo seguinte são apresentadas as abordagens usadas nas análises desenvolvidas e implementadas no presente trabalho.

5. Abordagens Aplicadas

Dando continuidade ao capítulo anterior, o presente capítulo apresenta as diferentes abordagens aplicadas nos estudos efetuados. No caso do presente trabalho foram utilizadas duas abordagens distintas, nomeadamente as abordagens de camada única equivalente (ESL – *Equivalent Single Layer*) e multicamada (LW – *Layerwise*).

5.1. Abordagem camada única equivalente

Existe uma variedade de modelos para a análise de placas, donde se destacam os modelos baseados na teoria de elasticidade e os baseados em teorias de placas. A teoria de elasticidade tem como base os conceitos de equilíbrio, continuidade e relação constitutiva de material, e pode ser aplicada na análise de FGPs permitindo a obtenção de resultados com elevada precisão. Apesar de os métodos de resolução analítica e numérica requererem elevada capacidade de computação, a utilização da teoria de elasticidade para analisar placas permite obter resultados de referência para avaliar a precisão e a validade de outros métodos simplificados [26].

As teorias de placas baseiam-se na abordagem da mecânica de materiais, a qual assume hipóteses acerca da cinemática da deformação que resultam em modelos simplificados. Estes modelos incluem os modelos de camada única equivalente (ESL) e multicamada (LW) [26].

As teorias de ESL assentam na suposição de que as propriedades materiais e, consequentemente, os deslocamentos através da espessura da placa podem ser expressas por uma função matemática, a qual pode ser polinomial ou de outra natureza. A reduzida espessura quando comparada com as dimensões no plano de uma placa, permite a sua análise como se de uma estrutura bidimensional se tratasse, através de relações que descrevem o perfil das deformações e subsequentemente das tensões ao longo da espessura [26].

Como referido no capítulo anterior, a aplicação do princípio de energia mínima permite deduzir a expressão da matriz de rigidez, a qual inclui uma matriz designada por B . Esta matriz relaciona deslocamentos nodais com as correspondentes deformações, e será naturalmente dependente da teoria considerada. No caso da abordagem de camada única equivalente, e considerando FSDT, tal conduzirá às seguintes matrizes de membrana B_m e de corte B_c no i -ésimo nó do elemento finito:

$$B_m = \begin{bmatrix} u_0 & v_0 & w_0 & \theta_x & \theta_y \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & z \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & z \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & z \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & z \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} u_0 & v_0 & w_0 & \theta_x & \theta_y \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{matrix} \quad (5.1)$$

Nestas matrizes, as derivadas das funções de interpolação N surgem de forma natural tendo em consideração por um lado a definição das diferentes deformações e por outro lado a aproximação dos diferentes graus de liberdade através de combinações lineares de deslocamentos nodais e dessas funções de aproximação. O mesmo acontece quando consideramos HSDT, e para o i -ésimo nó de um elemento finito, neste caso as respetivas matrizes B_m e B_c vêm dadas por (5.2) e (5.3).

$$B_m = \begin{bmatrix} u_0 & v_0 & w_0 & w^* & \theta_x & \theta_x^* & \theta_y & \theta_y^* \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & z \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & z^3 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & z \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & z^3 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 2z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & z \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & z^3 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & z \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & z^3 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \quad (5.2)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} u_0 & v_0 & w_0 & w^* & \theta_x & \theta_x^* & \theta_y & \theta_y^* \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & z^2 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 1 & 3z^2 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & z^2 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & 1 & 3z^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{matrix} \quad (5.3)$$

5.2. Abordagem multicamada

Na modelação de placas utilizando uma abordagem multicamada, as diferentes camadas mantêm a sua individualidade na análise sendo a deformação de cada uma delas caracterizada de forma individual, mas naturalmente garantindo a compatibilidade entre camadas adjacentes. Segundo esta abordagem é possível a aplicação de diferentes teorias de deformação às diferentes camadas. Desta forma, os campos de deslocamentos e, conseqüentemente, os campos de deformações e matrizes B_m e B_c de cada camada dependem da teoria aplicada à mesma. No caso dos estudos apresentados nesta dissertação, considerou-se que as placas em causa eram constituídas por três camadas (configuração típica *sandwich*) distintas ou não entre si. No que respeita às teorias de deformação de corte, foi considerado que a deformação das camadas exteriores é descrita pela FSDT. No caso do núcleo (camada interior) foram aplicadas ambas as teorias, FSDT e HSDT. Assim sendo, os modelos desenvolvidos e implementados foram designados por FSDT-FSDT-FSDT e de FSDT-HSDT-FSDT em função da teoria de deformação de corte aplicada ao campo de deslocamentos respeitante ao núcleo. Na Figura 5.1 encontra-se esquematizada uma placa constituída por três camadas de espessura $h^{(k)}$, sendo k o índice indicativo da camada, onde se indica as correspondentes teorias de deformação de corte consideradas.

Os campos de deslocamentos e de deformações, assim como as componentes de membrana e de corte das matrizes B necessárias para o cálculo da matriz de rigidez de cada camada, encontram-

se expostos nas duas subsecções que se seguem, em função da formulação considerada, sendo identificadas de acordo com as designações utilizadas na Figura 5.1.

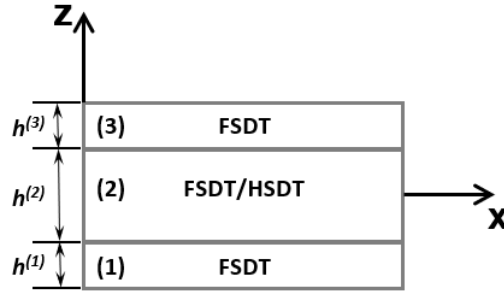


Figura 5.1. Esquema de placa sandwhich com três camadas

5.2.1. FSDT-FSDT-FSDT

Considerando a FSDT, os campos de deslocamento associados a cada uma das três camadas vêm dados por:

- **Camada 1:**

$$\begin{aligned}
 u^{(1)}(x, y, z) &= u_0^{(1)}(x, y) + \left[z - \left(-\frac{h^{(2)}}{2} - \frac{h^{(1)}}{2} \right) \right] \cdot \theta_x^{(1)}(x, y) \\
 v^{(1)}(x, y, z) &= v_0^{(1)}(x, y) + \left[z - \left(-\frac{h^{(2)}}{2} - \frac{h^{(1)}}{2} \right) \right] \cdot \theta_y^{(1)}(x, y) \\
 w^{(1)}(x, y, z) &= w_0^{(1)}(x, y)
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

- **Camada 2:**

$$\begin{aligned}
 u^{(2)}(x, y, z) &= u_0^{(2)}(x, y) + z \cdot \theta_x^{(2)}(x, y) \\
 v^{(2)}(x, y, z) &= v_0^{(2)}(x, y) + z \cdot \theta_y^{(2)}(x, y) \\
 w^{(2)}(x, y, z) &= w_0^{(2)}(x, y)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

- **Camada 3:**

$$\begin{aligned}
 u^{(3)}(x, y, z) &= u_0^{(3)}(x, y) + \left[z - \left(\frac{h^{(2)}}{2} + \frac{h^{(3)}}{2} \right) \right] \cdot \theta_x^{(3)}(x, y) \\
 v^{(3)}(x, y, z) &= v_0^{(3)}(x, y) + \left[z - \left(\frac{h^{(2)}}{2} + \frac{h^{(3)}}{2} \right) \right] \cdot \theta_y^{(3)}(x, y) \\
 w^{(3)}(x, y, z) &= w_0^{(3)}(x, y)
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Uma vez que os deslocamentos nas interfaces entre camadas adjacentes são iguais, devido a requisitos de continuidade, aplicam-se as condições de compatibilidade expressas em (5.7). Por aplicação destas condições de compatibilidade, os campos de deslocamentos das camadas 1 e 3

(camada inferior e superior, por esta ordem) vêm dados por (5.8) e (5.9) respectivamente, ao passo que o referente ao núcleo se mantém inalterado.

$$\begin{aligned}
u^{(1)}\left(z = -\frac{h^{(2)}}{2}\right) &= u^{(2)}\left(z = -\frac{h^{(2)}}{2}\right) \\
v^{(1)}\left(z = -\frac{h^{(2)}}{2}\right) &= v^{(2)}\left(z = -\frac{h^{(2)}}{2}\right) \\
w^{(1)}\left(z = -\frac{h^{(2)}}{2}\right) &= w^{(2)}\left(z = -\frac{h^{(2)}}{2}\right) \\
u^{(3)}\left(z = \frac{h^{(2)}}{2}\right) &= u^{(2)}\left(z = \frac{h^{(2)}}{2}\right) \\
v^{(3)}\left(z = \frac{h^{(2)}}{2}\right) &= v^{(2)}\left(z = \frac{h^{(2)}}{2}\right) \\
w^{(3)}\left(z = \frac{h^{(2)}}{2}\right) &= w^{(2)}\left(z = \frac{h^{(2)}}{2}\right)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
u^{(1)}(x, y, z) &= u_0^{(2)}(x, y) - \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \theta_x^{(2)} + \left(z + \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \theta_x^{(1)}(x, y) \\
v^{(1)}(x, y, z) &= v_0^{(2)}(x, y) - \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \theta_y^{(2)} + \left(z + \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \theta_y^{(1)}(x, y) \\
w^{(1)}(x, y, z) &= w_0^{(2)}(x, y)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
u^{(3)}(x, y, z) &= u_0^{(2)}(x, y) + \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \theta_x^{(2)} + \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \theta_x^{(3)}(x, y) \\
v^{(3)}(x, y, z) &= v_0^{(2)}(x, y) + \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \theta_y^{(2)} + \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \theta_y^{(3)}(x, y) \\
w^{(3)}(x, y, z) &= w_0^{(2)}(x, y)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Desta forma, está-se perante um problema com nove graus de liberdade por nó, sendo a sequência adotada: $gl = \{u_0^{(2)}, v_0^{(2)}, w_0^{(2)}, \theta_x^{(1)}, \theta_y^{(1)}, \theta_x^{(2)}, \theta_y^{(2)}, \theta_x^{(3)}, \theta_y^{(3)}\}$. Definidos os campos de deslocamentos relativos às três camadas da placa, estes, após a imposição das relações cinemáticas da Teoria da Elasticidade, conduzem aos seguintes campos de deformações:

- **Camada 1:**

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^{(1)} &= \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} + \left(z + \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial \theta_x^{(1)}}{\partial x} - \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy}^{(1)} &= \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial y} + \left(z + \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial \theta_y^{(1)}}{\partial y} - \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial y}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{zz}^{(1)} &= \frac{\partial w^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{yz}^{(1)} &= \frac{\partial v^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial y} = \theta_y^{(1)} + \frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial y} \\
\gamma_{xz}^{(1)} &= \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} = \theta_x^{(1)} + \frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial x} \\
\gamma_{xy}^{(1)} &= \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} \\
&= \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial y} + \left(z + \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial \theta_x^{(1)}}{\partial y} - \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial x} + \left(z + \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial \theta_y^{(1)}}{\partial x} - \\
&\quad - \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial x}
\end{aligned}$$

- **Camada 2:**

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^{(2)} &= \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy}^{(2)} &= \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} = \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial y} \\
\varepsilon_{zz}^{(2)} &= \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{yz}^{(2)} &= \frac{\partial v^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial y} = \theta_y^{(2)} + \frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial y} \\
\gamma_{xz}^{(2)} &= \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} = \theta_x^{(2)} + \frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial x} \\
\gamma_{xy}^{(2)} &= \frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial x}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

- **Camada 3:**

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^{(3)} &= \frac{\partial u^{(3)}}{\partial x} = \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} + \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial \theta_x^{(3)}}{\partial x} + \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy}^{(3)} &= \frac{\partial v^{(3)}}{\partial y} = \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial y} + \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial \theta_y^{(3)}}{\partial y} + \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial y} \\
\varepsilon_{zz}^{(3)} &= \frac{\partial w^{(3)}}{\partial z} = \frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{yz}^{(3)} &= \frac{\partial v^{(3)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(3)}}{\partial y} = \theta_y^{(3)} + \frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial y}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}^{(3)} &= \frac{\partial u^{(3)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(3)}}{\partial x} = \theta_x^{(3)} + \frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial x} \\ \gamma_{xy}^{(3)} &= \frac{\partial u^{(3)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(3)}}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial y} + \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial \theta_x^{(3)}}{\partial y} + \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial x} + \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial \theta_y^{(3)}}{\partial x} + \\ &\quad + \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial x}\end{aligned}$$

Considerando agora a formalização destas deformações tendo em consideração que qualquer grau de liberdade é descrito por uma combinação linear de funções interpoladoras N_i e o deslocamento generalizado nodal correspondente interpoladoras gl_i ($gl = \sum_{i=1}^n (gl_i \cdot N_i)$, com $n=n^\circ$ total de nós do elemento finito), tratando-se de camadas cujos deslocamentos foram definidos pela FSDT, as componentes de membrana e de corte das matrizes B de cada camada são dadas por:

- **Camada 1:**

$$B_m^{(1)} = \begin{bmatrix} u_0^{(2)} & v_0^{(2)} & w_0^{(2)} & \theta_x^{(1)} & \theta_y^{(1)} & \theta_x^{(2)} & \theta_y^{(2)} & \theta_x^{(3)} & \theta_y^{(3)} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & \left(z + \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -\frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & \left(z + \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -\frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \left(z + \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & \left(z + \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & -\frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \quad (5.13)$$

$$B_c^{(1)} = \begin{bmatrix} u_0^{(2)} & v_0^{(2)} & w_0^{(2)} & \theta_x^{(1)} & \theta_y^{(1)} & \theta_x^{(2)} & \theta_y^{(2)} & \theta_x^{(3)} & \theta_y^{(3)} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{matrix} \quad (5.14)$$

- **Camada 2:**

$$B_m^{(2)} = \begin{bmatrix} u_0^{(2)} & v_0^{(2)} & w_0^{(2)} & \theta_x^{(1)} & \theta_y^{(1)} & \theta_x^{(2)} & \theta_y^{(2)} & \theta_x^{(3)} & \theta_y^{(3)} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & z \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & z \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & z \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & z \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \quad (5.15)$$

$$B_c^{(2)} = \begin{bmatrix} u_0^{(2)} & v_0^{(2)} & w_0^{(2)} & \theta_x^{(1)} & \theta_y^{(1)} & \theta_x^{(2)} & \theta_y^{(2)} & \theta_x^{(3)} & \theta_y^{(3)} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{matrix} \quad (5.16)$$

- **Camada 3:**

$$B_m^{(3)} = \begin{bmatrix} u_0^{(2)} & v_0^{(2)} & w_0^{(2)} & \theta_x^{(1)} & \theta_y^{(1)} & \theta_x^{(2)} & \theta_y^{(2)} & \theta_x^{(3)} & \theta_y^{(3)} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \quad (5.17)$$

$$B_c^{(3)} = \begin{bmatrix} u_0^{(2)} & v_0^{(2)} & w_0^{(2)} & \theta_x^{(1)} & \theta_y^{(1)} & \theta_x^{(2)} & \theta_y^{(2)} & \theta_x^{(3)} & \theta_y^{(3)} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{matrix} \quad (5.18)$$

5.2.2. FSDT-HSDT-FSDT

Como referido anteriormente, considerou-se ainda que a deformação do núcleo poderia requerer a utilização de uma teoria de deformação de corte de ordem superior, designadamente se o núcleo for mais macio. Assim utilizando HSDT no núcleo e mantendo FSDT nas camadas exteriores, os campos de deslocamentos das três camadas virão dados por:

- **Camada 1:**

$$u^{(1)}(x, y, z) = u_0^{(1)}(x, y) + \left[z - \left(-\frac{h^{(2)}}{2} - \frac{h^{(1)}}{2} \right) \right] \cdot \theta_x^{(1)}(x, y)$$

$$v^{(1)}(x, y, z) = v_0^{(1)}(x, y) + \left[z - \left(-\frac{h^{(2)}}{2} - \frac{h^{(1)}}{2} \right) \right] \cdot \theta_y^{(1)}(x, y) \quad (5.19)$$

$$w^{(1)}(x, y, z) = w_0^{(1)}(x, y)$$

- **Camada 2:**

$$u^{(2)}(x, y, z) = u_0^{(2)}(x, y) + z \cdot \theta_x^{(2)}(x, y) + z^3 \cdot \theta_x^{*(2)}(x, y)$$

$$v^{(2)}(x, y, z) = v_0^{(2)}(x, y) + z \cdot \theta_y^{(2)}(x, y) + z^3 \cdot \theta_y^{*(2)}(x, y) \quad (5.20)$$

$$w^{(2)}(x, y, z) = w_0^{(2)}(x, y) + z^2 \cdot w^{*(2)}(x, y)$$

- **Camada 3:**

$$\begin{aligned}
 u^{(3)}(x, y, z) &= u_0^{(3)}(x, y) + \left[z - \left(\frac{h^{(2)}}{2} + \frac{h^{(3)}}{2} \right) \right] \cdot \theta_x^{(3)}(x, y) \\
 v^{(3)}(x, y, z) &= v_0^{(3)}(x, y) + \left[z - \left(\frac{h^{(2)}}{2} + \frac{h^{(3)}}{2} \right) \right] \cdot \theta_y^{(3)}(x, y) \\
 w^{(3)}(x, y, z) &= w_0^{(3)}(x, y)
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Por aplicação das condições de compatibilidade (5.7), indicadas na subsecção anterior, os campos de deslocamentos das camadas 1 e 3 vêm dados por (5.22) e (5.23), respetivamente. Novamente, mantém-se o campo de deslocamentos referente ao núcleo inalterado.

$$\begin{aligned}
 u^{(1)}(x, y, z) &= u_0^{(2)}(x, y) - \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \theta_x^{(2)} - \left(\frac{h^{(2)}}{2} \right)^3 \cdot \theta_x^{*(2)} + \left(z + \frac{h^{(2)}}{2} \right) \cdot \theta_x^{(1)} \\
 v^{(1)}(x, y, z) &= v_0^{(2)}(x, y) - \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \theta_y^{(2)} - \left(\frac{h^{(2)}}{2} \right)^3 \cdot \theta_y^{*(2)} + \left(z + \frac{h^{(2)}}{2} \right) \cdot \theta_y^{(1)}(x, y) \\
 w^{(1)}(x, y, z) &= w_0^{(2)}(x, y) + \left(\frac{h^{(2)}}{2} \right)^2 \cdot w^{*(2)}(x, y)
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
 u^{(3)}(x, y, z) &= u_0^{(2)}(x, y) + \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \theta_x^{(2)} + \left(\frac{h^{(2)}}{2} \right)^3 \cdot \theta_x^{*(2)} + \left(z - \frac{h^{(2)}}{2} \right) \cdot \theta_x^{(3)} \\
 v^{(3)}(x, y, z) &= v_0^{(2)}(x, y) + \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \theta_y^{(2)} + \left(\frac{h^{(2)}}{2} \right)^3 \cdot \theta_y^{*(2)} + \left(z - \frac{h^{(2)}}{2} \right) \cdot \theta_y^{(3)}(x, y) \\
 w^{(3)}(x, y, z) &= w_0^{(2)}(x, y) + \left(\frac{h^{(2)}}{2} \right)^2 \cdot w^{*(2)}(x, y)
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

De acordo com esta formulação são doze os graus de liberdade por nó: $gl = \{u_0^{(2)}, v_0^{(2)}, w_0^{(2)}, w^{*(2)}, \theta_x^{(1)}, \theta_y^{(1)}, \theta_x^{(2)}, \theta_x^{*(2)}, \theta_y^{(2)}, \theta_y^{*(2)}, \theta_x^{(3)}, \theta_y^{(3)}\}$. Os campos de deslocamentos assim definidos traduzem-se nos seguintes campos de deformações:

- **Camada 1:**

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^{(1)} &= \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} + \left(z + \frac{h^{(2)}}{2} \right) \cdot \frac{\partial \theta_x^{(1)}}{\partial x} - \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial x} - \left(\frac{h^{(2)}}{2} \right)^3 \cdot \frac{\partial \theta_x^{*(2)}}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy}^{(1)} &= \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial y} + \left(z + \frac{h^{(2)}}{2} \right) \cdot \frac{\partial \theta_y^{(1)}}{\partial y} - \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial y} - \left(\frac{h^{(2)}}{2} \right)^3 \cdot \frac{\partial \theta_y^{*(2)}}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\varepsilon_{zz}^{(1)} = \frac{\partial w^{(1)}}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{yz}^{(1)} = \frac{\partial v^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial y} = \theta_y^{(1)} + \frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial y} - \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\partial w^{*(2)}}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz}^{(1)} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} = \theta_x^{(1)} + \frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial x} + \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\partial w^{*(2)}}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy}^{(1)} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial y} + \left(z + \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial \theta_x^{(1)}}{\partial y} - \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial y} - \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right)^3 \cdot \frac{\partial \theta_x^{*(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial x} + \\ &+ \left(z + \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial \theta_y^{(1)}}{\partial x} - \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial x} - \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right)^3 \cdot \frac{\partial \theta_y^{*(2)}}{\partial x} \end{aligned}$$

• **Camada 2:**

$$\varepsilon_{xx}^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial x} + z^3 \cdot \frac{\partial \theta_x^{*(2)}}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy}^{(2)} = \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} = \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial y} + z^3 \cdot \frac{\partial \theta_y^{*(2)}}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz}^{(2)} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z} = 2z \cdot w^{*(2)}$$

(5.25)

$$\gamma_{yz}^{(2)} = \frac{\partial v^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial y} = \frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial y} + z^2 \cdot \frac{\partial w^{*(2)}}{\partial y} + \theta_y^{(2)} + 3z^2 \cdot \theta_y^{*(2)}$$

$$\gamma_{xz}^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial x} + z^2 \cdot \frac{\partial w^{*(2)}}{\partial x} + \theta_x^{(2)} + 3z^2 \cdot \theta_x^{*(2)}$$

$$\gamma_{xy}^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial y} + z^3 \cdot \frac{\partial \theta_x^{*(2)}}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial x} + z^3 \cdot \frac{\partial \theta_y^{*(2)}}{\partial x}$$

• **Camada 3:**

$$\varepsilon_{xx}^{(3)} = \frac{\partial u^{(3)}}{\partial x} = \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} + \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial \theta_x^{(3)}}{\partial x} + \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial x} + \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right)^3 \cdot \frac{\partial \theta_x^{*(2)}}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy}^{(3)} = \frac{\partial v^{(3)}}{\partial y} = \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial y} + \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial \theta_y^{(3)}}{\partial y} + \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial y} + \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right)^3 \cdot \frac{\partial \theta_y^{*(2)}}{\partial y}$$

(5.26)

$$\varepsilon_{zz}^{(3)} = \frac{\partial w^{(3)}}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{yz}^{(3)} = \frac{\partial v^{(3)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(3)}}{\partial y} = \theta_y^{(3)} + \frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial y} + \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\partial w^{*(2)}}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz}^{(3)} = \frac{\partial u^{(3)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(3)}}{\partial x} = \theta_x^{(3)} + \frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial x} + \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\partial w^{*(2)}}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^{(3)} &= \frac{\partial u^{(3)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(3)}}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial y} + \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial \theta_x^{(3)}}{\partial y} + \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial y} + \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right)^3 \cdot \frac{\partial \theta_x^{*(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial x} + \\ &+ \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial \theta_y^{(3)}}{\partial x} + \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial x} + \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right)^3 \cdot \frac{\partial \theta_y^{*(2)}}{\partial x} \end{aligned}$$

Conseqüentemente, as matrizes $B_m^{(k)}$ e $B_c^{(k)}$ referentes a cada camada k têm a formulação que apresentada em (5.27) a (5.32), onde se começa pelo núcleo (camada 2). Dada a extensão das matrizes $B_m^{(1)}$ e $B_m^{(3)}$, apresenta-se apenas a formulação correspondente aos elementos não nulos.

Tal como referido no capítulo antecedente, a FSDT necessita da aplicação de um fator de correção de corte, pelo que as camadas modeladas de acordo com esta teoria de deformação de corte terão os respetivos coeficientes de rigidez elástica ao corte devidamente corrigidos por este fator. Dada a sua relevância nos estudos efetuados, o capítulo que se segue dedica-se exclusivamente à determinação do fator de correção de corte.

- **Camada 2:**

$$B_m^{(2)} = \begin{bmatrix} u_0^{(2)} & v_0^{(2)} & w_0^{(2)} & w^{*(2)} & \theta_x^{(1)} & \theta_y^{(1)} & \theta_x^{(2)} & \theta_x^{*(2)} & \theta_y^{(2)} & \theta_y^{*(2)} & \theta_x^{(3)} & \theta_y^{(3)} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & z^3 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & z^3 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & z \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & z^3 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & z \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & z^3 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \quad (5.27)$$

$$B_c^{(2)} = \begin{bmatrix} u_0^{(2)} & v_0^{(2)} & w_0^{(2)} & w^{*(2)} & \theta_x^{(1)} & \theta_y^{(1)} & \theta_x^{(2)} & \theta_x^{*(2)} & \theta_y^{(2)} & \theta_y^{*(2)} & \theta_x^{(3)} & \theta_y^{(3)} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & z^2 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & z^2 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 1 & 3z^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{matrix} \quad (5.28)$$

- **Camada 1:**

$$B_{m_{1,1}}^{(1)} = B_{m_{4,2}}^{(1)} = \frac{\partial N_i}{\partial x}$$

$$B_{m_{2,2}}^{(1)} = B_{m_{4,1}}^{(1)} = \frac{\partial N_i}{\partial y}$$

$$B_{m_{1,5}}^{(1)} = B_{m_{4,6}}^{(1)} = \left(z + \frac{h^{(2)}}{2} \right) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x}$$

$$B_{m_{2,6}}^{(1)} = B_{m_{4,5}}^{(1)} = \left(z + \frac{h^{(2)}}{2} \right) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y}$$

$$B_{m_{1,7}}^{(1)} = B_{m_{4,9}}^{(1)} = -\frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x}$$

$$B_{m_{4,7}}^{(1)} = B_{m_{2,9}}^{(1)} = -\frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y}$$

$$B_{m_{1,8}}^{(1)} = B_{m_{4,10}}^{(1)} = -\left(\frac{h^{(2)}}{2} \right)^3 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x}$$

$$B_{m_{4,8}}^{(1)} = B_{m_{2,10}}^{(1)} = -\left(\frac{h^{(2)}}{2} \right)^3 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y}$$

(5.29)

$$B_c^{(1)} = \begin{matrix} & u_0^{(2)} & v_0^{(2)} & w_0^{(2)} & w^{*(2)} & \theta_x^{(1)} & \theta_y^{(1)} & \theta_x^{(2)} & \theta_x^{*(2)} & \theta_y^{(2)} & \theta_y^{*(2)} & \theta_x^{(3)} & \theta_y^{(3)} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & -\left(\frac{h^{(2)}}{2} \right)^2 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \left(\frac{h^{(2)}}{2} \right)^2 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \begin{matrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.30)$$

• **Camada 3:**

$$B_{m_{1,1}}^{(3)} = B_{m_{4,2}}^{(3)} = \frac{\partial N_i}{\partial x}$$

$$B_{m_{2,2}}^{(3)} = B_{m_{4,1}}^{(3)} = \frac{\partial N_i}{\partial y}$$

$$B_{m_{1,7}}^{(3)} = B_{m_{4,9}}^{(3)} = \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x}$$

$$B_{m_{4,7}}^{(3)} = B_{m_{2,9}}^{(3)} = \frac{h^{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y}$$

$$B_{m_{1,8}}^{(3)} = B_{m_{4,10}}^{(3)} = \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right)^3 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} \tag{5.31}$$

$$B_{m_{2,10}}^{(3)} = B_{m_{4,8}}^{(3)} = \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right)^3 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y}$$

$$B_{m_{1,11}}^{(3)} = B_{m_{4,12}}^{(3)} = \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x}$$

$$B_{m_{2,12}}^{(3)} = B_{m_{4,11}}^{(3)} = \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y}$$

$$B_c^{(3)} = \begin{matrix} & u_0^{(2)} & v_0^{(2)} & w_0^{(2)} & w^{*(2)} & \theta_x^{(1)} & \theta_y^{(1)} & \theta_x^{(2)} & \theta_x^{*(2)} & \theta_y^{(2)} & \theta_y^{*(2)} & \theta_x^{(3)} & \theta_y^{(3)} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{array} \end{matrix} \tag{5.32}$$

6. Fator de Correção de Corte

De entre as teorias de deformação de corte expostas no capítulo 3, a de deformação de corte de primeira ordem (FSDT) requer a aplicação de fator de correção de corte, contrariamente às teorias de ordem superior. Uma vez que a determinação deste fator depende da abordagem aplicada ao modelo numérico, apresentam-se neste capítulo as metodologias utilizadas para a sua determinação.

6.1. Abordagem camada única equivalente

Apesar de exigirem o uso de fator de correção de corte, os modelos baseados na FSDT continuam a ser frequentemente utilizados na modelação de estruturas devido à sua simplicidade. No caso de placas homogéneas, é consensual o uso do valor $5/6$ como fator de correção de corte [50]. De acordo com a pesquisa efetuada por T.-K. Nguyen et al. [51], o modelo de placa de Reissner-Mindlin para o cálculo de estruturas FGM tem sido proposto na literatura. Este modelo recorre ao fator de correção de corte do modelo homogéneo. Segundo estes autores, este não é o modo adequado para a aplicação do fator de correção de corte quando se trata de FGM's, pelo que propuseram uma nova abordagem na qual o fator de correção de corte resulta de considerações energéticas aplicadas às tensões de membrana. Devido à evolução gradual de propriedades ao longo de uma ou mais direções, o valor $5/6$ não se adequa às placas FGM modeladas com base na FSDT.

Segundo a abordagem de T.-K. Nguyen et al., o fator de correção de corte é determinado comparando as energias de deformação associadas às tensões de corte médias com as obtidas pelas equações de equilíbrio. Com esta abordagem, e considerando placas homogéneas, o valor obtido foi de $5/6$, o qual está de acordo com as teorias anteriores. O estudo levado a cabo por esta equipa de investigadores permitiu concluir que o fator de correção de corte no caso de FGM's difere do valor utilizado para placas homogéneas, apresentando uma variação em função da distribuição das fases existentes e, em especial, da razão entre os seus módulos de elasticidade (módulo de Young). O efeito do fator de correção de corte calculado por esta abordagem não é observável de forma significativa na deflexão de placas finas, acentuando-se no entanto o seu efeito em placas de espessura média ou ainda em placas em que a razão entre os módulos de elasticidade das fases é superior a 10. Na opinião destes autores, o facto de a sua abordagem utilizar tensões de corte “melhoradas” permite uma melhor estimativa das forças e tensões de corte transversais [51].

Como referido no capítulo 2, neste contexto encontram-se trabalhos desenvolvidos nos quais a superfície média geométrica é a superfície tomada como referência, sendo que noutros estudos considera-se como superfície de referência a superfície neutra. Um dos casos onde a superfície neutra surge como superfície de referência é o trabalho desenvolvido por Singha et al. [27]. O plano neutro, por definição, coincide com o plano onde as tensões devidas às componentes de flexão e extensões são nulas [26].

Considere-se assim, uma FGP de espessura h tal como a representada na Figura 6.1, onde z_{ms} e z_{ns} são as cotas de um determinado ponto da placa em relação às superfícies média e neutra, respetivamente.

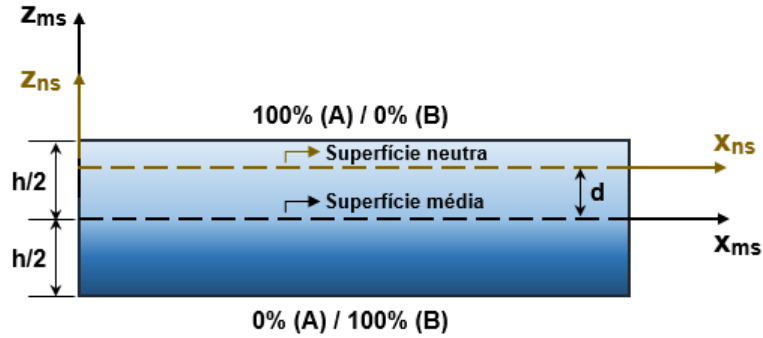


Figura 6.1. Superfícies média e neutra numa placa com gradiente funcional ao longo da espessura

No referencial da superfície média, a fração volúmica da fase A é dada pela expressão (3.1) e a evolução do módulo de Young do compósito ao longo da espessura é governada pela equação (3.3). Nas placas compostas por FGMs, a superfície neutra nem sempre coincide com a superfície média, sendo que o desvio entre estas superfícies, d , pode ser determinado pela expressão (6.1) [27]. De acordo com esta formulação, as superfícies média e neutra serão coincidentes em casos onde a distribuição de material seja simétrica em relação à superfície média, pois esta situação conduz a um desvio da superfície neutra nulo.

$$d = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) \cdot z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad (6.1)$$

A fração volúmica da fase A no referencial da superfície neutra é obtida pela translação da mesma no referencial da superfície média segundo o vetor $(0,0,-d)$, pelo que vem dada pela equação seguinte.

$$V_{f(A)}(z_{ns}) = \left(\frac{z_{ns} + d}{h} + \frac{1}{2} \right)^p, \quad -\frac{h}{2} - d \leq z_{ns} \leq \frac{h}{2} - d \quad (6.2)$$

De acordo com a abordagem de M. K. Singha et al. [27], o fator de correção de corte é obtido pelo princípio da energia equivalente, segundo o qual a energia de deformação devida à tensão de corte τ_{xz} é equivalente à energia de deformação devida à distorção de corte γ_{xz} . Como resultado da aplicação deste princípio, o fator de correção de corte, k , vem dado por:

$$k = \frac{\left[\int_{-\frac{h}{2}-d}^{\frac{h}{2}-d} \left(\int_{-\frac{h}{2}-d}^{z_{ns}} E(\xi) \cdot \xi d\xi \right) dz_{ns} \right]^2}{\left(\int_{-\frac{h}{2}-d}^{\frac{h}{2}-d} \bar{Q}_{55} dz_{ns} \right) \cdot \int_{-\frac{h}{2}-d}^{\frac{h}{2}-d} \frac{\left(\int_{-\frac{h}{2}-d}^{z_{ns}} E(\xi) \cdot \xi d\xi \right)^2}{G(z_{ns})} dz_{ns}} \quad (6.3)$$

De uma forma genérica, o fator de correção de corte, como o próprio nome induz, aplica-se às componentes de corte da matriz dos coeficientes de rigidez elástica transformados. Desta forma o campo de tensões vem dado por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & k \cdot \bar{Q}_{44} & k \cdot \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \cdot \bar{Q}_{45} & k \cdot \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

6.2. Abordagem multicamada

No âmbito da abordagem multicamada aplicada a placas com gradiente funcional, foi também considerada a utilização do fator de correção de corte, sempre que o comportamento das camadas é descrito pela FSDT.

No entanto, da pesquisa efetuada não foi possível encontrar trabalhos em que fosse efetuada a formulação deste fator, num contexto de abordagem multicamada. Por este motivo, e baseado na formulação de M. K. Singha et al. [27] exposta no âmbito da abordagem de camada única equivalente, no cálculo do fator de correção de corte considerou-se a fração volúmica da placa em causa como uma função por ramos, onde cada ramo representava a evolução material ao longo da espessura de cada camada. Desta forma, através das fórmulas (6.1) a (6.3) determinou-se o fator de correção de corte, k . Em função da teoria de deformação de corte considerada em cada camada, FSDT ou HSDT, este fator foi, ou não, aplicado.

No capítulo 8 onde se apresentam diversas aplicações numéricas referentes a diferentes estágios deste trabalho, são também apresentados estudos de verificação sobre o fator de correção de corte, para avaliar o desempenho da formulação considerada neste contexto de abordagem multicamada.

7. Otimização

Os recentes desafios dos mais diversos campos de engenharia passam frequentemente pela procura da solução ótima para um determinado problema, o qual comumente encontra-se sujeito a objetivos e constrangimentos específicos. Assim sendo, este capítulo tem o propósito de descrever a implementação da otimização na resolução de problemas de engenharia de forma genérica, abordando mais detalhadamente a técnica da busca fractal estocástica aplicada nas aplicações numéricas expostas no capítulo seguinte.

7.1. Otimização

A otimização pode ser aplicada aos mais diversos temas, pelo que o seu significado depende do campo específico de aplicação. Por exemplo, conceptualmente, otimização pode significar simplesmente a determinação do máximo (ou mínimo) de uma função $f(x)$ no domínio dos números reais. O cálculo dos extremos globais pode ser facilmente realizado pela resolução da equação $f'(x) = 0$ e pelo estudo do sinal de f'' nas soluções encontradas, quando o grau de complexidade das funções assim o permite. Contudo existem funções cujo elevado grau de não-linearidade e/ou múltiplas soluções ótimas exigem a aplicação de métodos numéricos. Adicionalmente, a dimensão do espaço, imposta pelo número de variáveis, assim como as restrições impostas tornam os problemas de otimização mais difíceis de resolver pelos métodos ditos tradicionais. Se o problema de otimização não se resumir a uma única função objetivo, mas sim a várias, ou seja, se se tratar de um problema multiobjectivo, então a complexidade do problema aumenta exponencialmente. Nestas situações os métodos analíticos são insuficientes para a determinação dos ótimos, tornando-se necessário recorrer a técnicas de otimização mais robustas, nomeadamente algoritmos numéricos [52].

Grande parte dos algoritmos de otimização tradicionais, como é o caso do método de Newton, são determinísticos no sentido em que um dado ponto de partida conduzirá sempre à mesma sequência de soluções. Já os algoritmos bio-inspirados são usualmente estocásticos ou não-determinísticos [52].

Os problemas de otimização podem ter, ou não, restrições impostas por condições de projeto. Assim, os problemas de otimização dizem-se sem restrições quando as variáveis envolvidas não se encontram sujeitas a qualquer tipo de restrição, e com restrições quando se impõe a verificação de determinadas condições às variáveis de projeto [52].

É conhecido que nos problemas de otimização sem restrições, os ótimos verificam a condição $f'(x) = 0$. No entanto esta condição não é suficiente para a distinção entre máximos e mínimos, tornando-se necessário o estudo das concavidades da função objetivo, sendo que das soluções da equação anterior corresponderão a máximos as soluções em que $f''(x^*) < 0$ e a mínimos as que

satisfazem a condição $f''(x^*) > 0$. Contudo, por vezes a segunda derivada não se encontra definida no mesmo domínio da primeira derivada, levando a casos em que não é possível determinar a segunda derivada nos pontos ótimos e, conseqüentemente, impossível de classificá-los como máximos ou mínimos.

Nos estudos de otimização, um problema de maximização pode ser facilmente convertido num problema de minimização pela simples troca de sinal, isto é, a maximização de $f(x)$ pode ser resolvida através da minimização de $-f(x)$. Assim sendo, os problemas de otimização podem ser expressos tanto em termos de maximização como de minimização, dependendo do contexto e da formulação utilizada.

Os problemas de otimização podem ser formalmente definidos por um vetor de variáveis de estudo também designadas variáveis de projeto, uma função objetivo e um conjunto de restrições. Estas restrições ou constrangimentos, podem se encontrar definidas na forma de igualdades ($h(x) = 0$) ou desigualdades ($g(x) \leq 0$) [53].

Regra geral, os problemas de otimização envolvendo n variáveis de estudo, m restrições de igualdade e s restrições de desigualdades, são formulados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min (\max) f(\mathbf{x}), (\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)) \\ \text{Sujeito a: } h_i(\mathbf{x}) = 0, (i = 1, 2, \dots, m) \\ g_j(\mathbf{x}) \leq 0, (j = 1, 2, \dots, s) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Em grande parte dos problemas de otimização, as funções $f(x)$, $h_i(x)$ e $g_j(x)$ são não-lineares, o que torna a sua resolução mais complexa [52].

Generalizando, a otimização consiste na procura do ótimo (máximo ou mínimo) de um determinado problema, traduzido por uma função $f(x)$, que pode ou não encontrar-se restringido por condições da mais variada ordem [54].

A otimização pode ser classificada no que respeita ao número de objetivos, distinguindo-se assim otimização de objetivo único, de otimização multiobjectivo. Por exemplo, a otimização de objetivo único de estruturas sandwich pode centrar-se na maximização do isolamento acústico ou na minimização da sua massa ou peso [9], entre outras possibilidades.

A otimização encontra-se atualmente presente nos mais diversos campos da engenharia e da ciência, surgindo sob a forma de minimização ou maximização de uma ou mais funções objetivo, as quais dependem de um conjunto de variáveis de projeto e são restringidas por determinadas condições. A resolução de um problema de otimização depende, numa fase inicial, da sua formulação na forma de um dos paradigmas de otimização padrão [53] a que se seguirá a sua implementação através de técnicas consideradas mais adequadas.

Cada vez mais se pretende minimizar tempos e custos e maximizar lucros, eficiências e qualidade. Portanto, campos como a engenharia ou a economia englobam muitos problemas desafiantes de otimização que, dada a sua complexidade, poderão não permitir uma resolução em

tempo útil apesar poderem conter uma ou mais soluções ótimas. Na realidade, a par do problema da representatividade do modelo matemático que se adota para descrever um determinado problema, com muita frequência o próprio problema apresenta um elevado grau de não-linearidade, para além do considerável número de variáveis de projeto que, não raras vezes, se encontram restringidas por determinadas condições. Estas restrições podem ser, por exemplo, uma tensão ou deflexão máxima, uma capacidade mínima e/ou máxima de carga, ou limitações geométricas. Como a dimensão do espaço de procura aumenta bruscamente, quando se trata de problemas com elevado número de variáveis os algoritmos de otimização clássicos não permitem obter uma solução adequada, sendo por isso necessário recorrer a algoritmos aproximados [10].

Apesar da vasta gama de métodos analíticos existentes, os problemas de otimização que se colocam no quotidiano e que constituem os desafios da engenharia, são multimodais e apresentam elevada não-linearidade, não sendo passíveis de resolver desta forma. Na realidade não existem métodos efetivos para a determinação de ótimos globais em problemas de elevada não-linearidade com restrições complexas. Nestes casos, a aplicação de algoritmos de otimização bio-inspirados tem demonstrado que estes podem ser uma boa alternativa [52].

Na resolução de problemas de otimização complexos com espaços de procura vastos, é frequente a aplicação de metaheurísticas. A eficiência na exploração do espaço de procura, independentemente da sua dimensão, constituiu uma vantagem das metaheurísticas face a outros tipos de algoritmos de otimização [10].

Espera-se assim que os algoritmos metaheurísticos sejam robustos, que permitam a resolução de problemas de grande dimensão, e sejam céleres. Adicionalmente, devem ainda proporcionar simplicidade de projeto e implementação, assim como versatilidade. Para cumprirem com estes requisitos as metaheurísticas devem possuir duas características primordiais: a intensificação e a diversificação. A primeira está relacionada com a pesquisa das melhores soluções atuais e com a seleção dos melhores candidatos, ao passo que a segunda implica uma melhor exploração do espaço de procura por processos aleatórios [10].

Como referido anteriormente na secção 1.3, os algoritmos metaheurísticos ganharam grande popularidade nos últimos anos devido à crescente complexidade dos problemas de otimização cuja resolução não exige soluções exatas, mas sim soluções aceitáveis que possam ser determinadas num menor intervalo de tempo. Estes algoritmos podem ser classificados em diferentes categorias consoante o critério considerado. Segundo o critério do número de soluções candidatas em cada iteração, as metaheurísticas podem ser baseadas numa solução única ou baseadas numa população [55].

No seu trabalho acerca de um algoritmo bio-inspirado, Kaedi [55] cita que a natureza estocástica dos algoritmos metaheurísticos pode constituir um fator limitante em determinados problemas de otimização, nomeadamente em aplicações onde a repetibilidade seja uma característica relevante. Algumas metaheurísticas são de difícil implementação devido à sua

complexidade, sendo por vezes impossível verificar as soluções obtidas devido à natureza estocástica das mesmas.

A lista de algoritmos metaheurísticos inspirados em processos ocorrentes na Natureza é extensa. O algoritmo genético (GA), baseado na teoria da evolução de Darwin, é talvez o mais conhecido e comumente utilizado, mas existem muitos outros. Várias metaheurísticas surgiram inspiradas na procura de alimento efetuada pelos animais. A *Particle Swarm Optimization* (PSO) é uma metaheurística inspirada no comportamento dos bandos de pássaros quando à procura de alimento. Desenvolvida por Eberhart e Kennedy [56], a PSO foi aplicada à otimização de funções não lineares. Também baseado no modo de procura de alimento, mas desta vez efetuado pelos enxames de abelhas, Karaboga [57] desenvolveu o algoritmo *Artificial Bee Colony* (ABC). Imitando a procura de alimento efetuada pelas colónias de formigas, Dorigo e Di Caro [58] introduziram a metaheurística *Ant Colony* (AC). O algoritmo *Cuckoo Search* (CSA), metaheurística bio-inspirada desenvolvida por Yang e Deb, recorre às principais características de reprodução de algumas espécies de cuco e respetiva coevolução com espécies de aves hospedeiras [59]. Com base na atração gravítica de corpos, a metaheurística *Gravitational Search Algorithm* (GSA) baseia-se nas leis de Newton do movimento e na lei da Gravitação Universal. Até à data este algoritmo foi sujeito a várias alterações no sentido da melhoria da velocidade de convergência e exatidão da solução ótima [60].

Os algoritmos referidos demonstraram elevada eficiência na resolução de diferentes problemas de otimização. Alguns dos algoritmos baseados em populações foram já aplicados na resolução de problemas de otimização de objetivo único e multiobjetivo [55].

7.2. Busca fractal

Os algoritmos evolucionários são muito conhecidos em vários campos da ciência, na medida em que permitem resolver os problemas que os tradicionais métodos matemáticos não têm capacidade de solucionar ou requerem muito tempo para tal. Atualmente existe uma vasta gama de algoritmos evolucionários, grande parte inspirados em comportamentos observados na Natureza, alguns dos quais abordados na secção 1.3 [10].

Nesta secção introduz-se uma metaheurística com inspiração em fenómenos naturais, denominada de busca fractal pois baseia-se no conceito de fractal. O termo fractal, proveniente do latim *fractus* e usado primeiramente por Benoît Mandelbrot em 1975, significa “quebrado” ou “fraturado”. Encontram-se exemplos de fractais aos mais diversos níveis, desde a microescala como são exemplo os aglomerados microscópicos, à macro-escala tal como as galáxias [10]. Na Figura 7.1 encontra-se uma ilustração criada com base no conceito de fractal, de modo a permitir uma perceção visual do mesmo.

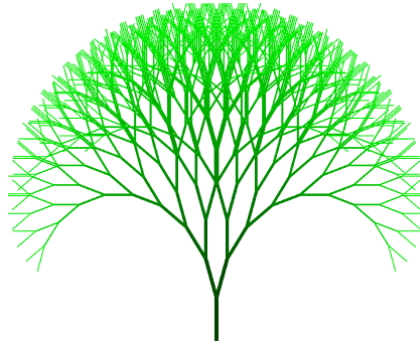


Figura 7.1. Esquema de evolução segundo o conceito de fractal

Para uma melhor contextualização do princípio de funcionamento da busca fractal, aborda-se de seguida os trabalhos desenvolvidos por alguns autores nesta matéria [[10], [55], [11]].

No seu trabalho, Salimi [10] desenvolveu um algoritmo de otimização baseado no conceito de fractal, definindo este conceito como a propriedade de um objeto responsável pelas suas próprias semelhanças a todas as escalas. Mais tarde, também outros investigadores desenvolveram algoritmos com base neste mesmo conceito. Kaedi [55] apresentou um estudo comparativo com outras metaheurísticas, tendo demonstrado que o algoritmo de busca fractal por ele desenvolvido permitia atingir com maior rapidez resultados mais exatos e precisos. O algoritmo desenvolvido por Nakib et al. [11], igualmente baseado no conceito de fractal, inclui um mecanismo de “divisão e conquista” para a exploração da região de procura delimitada pelas restrições impostas. Também este algoritmo se mostrou bastante competitivo em comparação com outros usualmente utilizados em estudos de otimização [12].

Incluído nas metaheurísticas baseadas numa população, Kaedi desenvolveu um algoritmo para resolução de problemas de otimização contínuos, ou seja, de variáveis contínuas. Neste, a procura da solução ótima ocorre através de um processo iterativo onde o espaço de busca é dividido em subespaços pelo conceito de fractal e as áreas promissoras são estimadas de modo a serem sujeitas a uma busca cada vez mais extensiva e precisa. O algoritmo proposto foi utilizado em estudos de otimização aplicados a funções de *benchmark* e, por comparação ao PSO, DE e GA, mostrou-se mais rápido e preciso. A principal vantagem deste algoritmo advém do facto de a divisão hierárquica do espaço permitir focar maior atenção nos subespaços mais promissores, permitindo uma busca mais rápida e direcionada [55].

Igualmente com o propósito da resolução de problemas de otimização contínua, Nakib et al. [11] apresentaram um novo método baseado na decomposição geométrica de acordo com o conceito de fractal, denominado de “*Fractal Decomposition based Algorithm*” (FDA). De forma muito idêntica ao método apresentado por Kaedi, o espaço de procura é dividido em subespaços com o mesmo padrão geométrico e, a cada iteração, os subespaços mais promissores são selecionados e subdivididos. Os autores referem ainda que o algoritmo desenvolvido apresenta propriedades de convergência interessantes, apesar de abranger todo o espaço de busca apenas em problemas de

reduzida dimensão, isto é, baixo número de variáveis. O desempenho do FDA foi avaliado por aplicação a funções de *benchmark* para otimização global, com dimensões compreendidas entre as 50 e as 1000 variáveis. Por comparação com outras metaheurísticas, o algoritmo revelou-se eficiente e competitivo. No entanto é importante notar que o FDA trata-se de um algoritmo metaheurístico baseado em solução única, contrariamente a algumas das metaheurísticas utilizadas como referência que são baseadas em populações [11].

Inspirado no fenómeno natural de crescimento, Salimi [10] trabalhou o conceito matemático de fractal para criar algoritmos de otimização que reproduzissem este fenómeno.

No seu trabalho Salimi [10] desenvolveu dois algoritmos para a resolução de problemas de otimização. No primeiro destes, denominado “*Fractal Search*” (FS), cada indivíduo imita a ramificação observada numa descarga eléctrica em busca da solução ótima. O segundo consiste numa versão melhorada do primeiro algoritmo e será abordado com maior detalhe na secção seguinte. Através de um processo de difusão, comum nos fractais aleatórios, os indivíduos exploram o espaço de busca de forma mais eficiente comparativamente com outras metaheurísticas.

São vários os métodos para criar um fractal, sendo o “*Random fractals*” um exemplo. Os fractais aleatórios podem ser gerados num processo estocástico iterativo tal como o “*Levy flight*” ou o “*Gaussian walk*”, entre outros. Os aglomerados que constituem as colónias de bactérias são um exemplo de fractal. Considere-se então como exemplo a formação de uma colónia de bactérias num plano a partir de uma bactéria localizada na origem de um referencial imaginário. As novas bactérias são geradas aleatoriamente em torno da bactéria inicial, num processo de difusão. A repetição deste processo leva à formação da colónia. O processo de difusão é implementado no FS através de um algoritmo matemático de movimento aleatório (“*random walk*”) [10].

Baseado nas características dos fractais e inspirado na formação aleatória de fractais por “*Diffusion Limited Aggregation*”, o FS foi desenvolvido de acordo com três regras principais:

1. Cada indivíduo possui uma determinada energia potencial eléctrica;
2. Cada indivíduo difunde, originando, de forma aleatória, novos indivíduos. A cada indivíduo, caracterizado por um conjunto de variáveis de projeto, corresponde um valor da função a otimizar, valor esse que é dividido pelos indivíduos gerados;
3. Apenas uma pequena fração dos melhores indivíduos se perpetua em cada geração, sendo os restantes descartados.

De acordo com o autor o FS conduz a bons resultados no que respeita a precisão e tempo consumido. No entanto, e apesar do algoritmo apresentar um bom desempenho na determinação do ótimo, existem algumas desvantagens tais como o número de parâmetros envolvidos e a inexistência de troca de informação entre os indivíduos. Adicionalmente, tratando-se de um algoritmo dinâmico na medida em que o número de indivíduos envolvidos na procura da solução ótima não é constante, para uma maior exatidão será necessário um maior consumo de tempo [10]. Ainda assim, entre várias metaheurísticas baseadas no conceito de decomposição geométrica do espaço de procura (GA,

PSO, FS, entre outras), o FS apresenta melhor desempenho na resolução de problemas de otimização com maior número de variáveis [11]. Sendo um conceito muito associado à decomposição geométrica de espaços, o potencial do fractal na resolução de problemas de otimização não tem sido muito explorado até à data [11].

7.3. Busca fractal estocástica

A busca fractal estocástica (SFS), desenvolvida igualmente por Salimi [10], surge da necessidade de ultrapassar as desvantagens apresentadas pelo FS. Este objetivo foi concretizado com a introdução dos processos de difusão e atualização. O processo de difusão, ilustrado na Figura 7.2, satisfaz a propriedade de intensificação através da difusão dos indivíduos em torno da sua posição atual, similarmente ao descrito no FS. Desta forma, evitando aprisionamentos em ótimos locais, a probabilidade de encontrar o ótimo global aumenta.

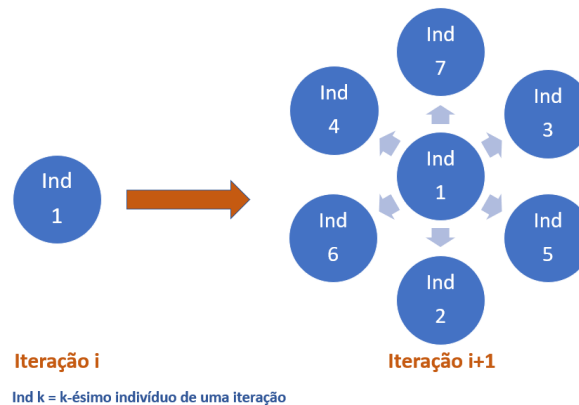


Figura 7.2. Esquema representativo do processo de difusão implementado no SFS

Ao ser dinâmico, o processo de difusão do FS conduz a um aumento significativo do número de indivíduos envolvido na busca. Para lidar com esta contrariedade, que se traduz num elevado tempo de simulação, o processo de difusão implementado no SFS é estático, ou seja, dos indivíduos gerados no processo de difusão apenas o melhor se mantém, sendo os restantes descartados.

No algoritmo proposto por Salimi [10], a geração de novos indivíduos neste novo processo de difusão ocorre segundo um de dois métodos estatísticos denominados *Gaussian Walk 1* e *Gaussian Walk 2*, de acordo com (7.2) ou (7.3) respetivamente, onde ε e ε' representam números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo $[0,1]$, e BP e P_i são os conjuntos de variáveis correspondentes ao melhor indivíduo e ao i -ésimo indivíduo da população, respetivamente. Os parâmetros μ_{BP} e μ_P , são iguais a $|BP|$ e $|P_i|$, respetivamente, e g identifica a geração. Segundo o autor, o *Gaussian Walk 2* é mais indicado em problemas de maior complexidade.

$$GW_1 = Gaussian(\mu_{BP}, \sigma) + (\varepsilon \cdot BP - \varepsilon' \cdot P_i) \quad (7.2)$$

$$GW_2 = Gaussian(\mu_P, \sigma) \quad (7.3)$$

$$\sigma = \left| \frac{\log(g)}{g} \cdot (P_i - BP) \right| \quad (7.4)$$

O termo $\log(g)/g$ surge para reduzir a extensão da “passada Gaussiana”, de forma a promover uma busca mais localizada.

Ora, para o processo de difusão ocorrer pela primeira vez no algoritmo é necessária a criação de uma população inicial. Os indivíduos que compõem esta primeira população são determinados pela equação (7.5), onde P_j representa o j -ésimo indivíduo da população inicial, LB e UB são os vetores compostos pelo limites inferiores e superiores das variáveis de projeto envolvidas, e ε é um número aleatório uniformemente distribuído pertencente ao intervalo $[0,1]$.

$$P_j = LB + \varepsilon \cdot (UB - LB) \quad (7.5)$$

Após a inicialização da população, todos os indivíduos vão ser avaliados, ou seja, a função objetivo é calculada em cada um dos indivíduos, de modo a identificar o melhor ponto. O melhor ponto corresponderá ao maior valor da função objetivo num problema de maximização, e ao menor valor da função objetivo num problema de minimização.

Após esta primeira avaliação, todos os indivíduos da população inicial são sujeitos ao processo de difusão acima descrito, seguindo-se o processo de atualização onde a posição de cada indivíduo é atualizada em função das posições dos restantes indivíduos. De acordo com a propriedade de exploração, o processo de atualização ocorre em duas etapas que consistem em procedimentos estatísticos no sentido de aumentar a exploração do espaço de busca. A primeira etapa de atualização atua em cada variável de cada indivíduo, sendo que a segunda atua sobre todos os indivíduos. Para levar a cabo a primeira etapa de atualização os indivíduos são inicialmente ordenados de acordo com os respetivos valores da função objetivo e, a cada indivíduo é atribuída uma probabilidade (Pa_i) de acordo com uma distribuição uniforme, segundo a equação (7.6) onde N representa o número total de indivíduos da população e $rank(P_i)$ representa a posição do i -ésimo ponto após a ordenação. Desta forma, aos indivíduos com melhor *fitness*, i.e., melhor valor da função objetivo, é atribuída uma maior probabilidade.

$$Pa_i = \frac{rank(P_i)}{N} \quad (7.6)$$

De seguida, se a condição $Pa_i < \varepsilon$ se verificar, a componente j do indivíduo P_i ($P'_i(j)$) é atualizada de acordo com a equação (7.7), onde P_r e P_t são indivíduos da população selecionados aleatoriamente e ε representa um número obtido aleatoriamente no intervalo $[0,1]$, a partir de uma distribuição uniforme.

$$P'_i(j) = P_r(j) - \varepsilon \cdot (P_t(j) - P_i(j)) \quad (7.7)$$

Com este primeiro procedimento estatístico a probabilidade de alterar a posição dos indivíduos com pior *fitness* (pior valor da função objetivo) aumenta, aumentando a probabilidade de indivíduos com melhor *fitness* passarem para a próxima geração/iteração. Nesta fase do processo de atualização,

a primeira etapa atuou em cada uma das variáveis dos indivíduos. De seguida, a segunda etapa de atualização atua em cada um dos indivíduos alterando a posição de cada indivíduo em função das posições dos restantes, o que permite melhorar a exploração do espaço e satisfazer a propriedade de diversificação. Tal como na primeira etapa de atualização, esta segunda etapa inicia-se com a ordenação e atribuição de uma probabilidade a cada indivíduo da população de acordo com a equação (7.6), o que significa que mais uma vez quanto melhor o *fitness* maior a probabilidade associada ao indivíduo. De forma análoga à primeira etapa de atualização, a posição de cada indivíduo será alterada em função da probabilidade que lhe foi associada. Neste sentido, na segunda etapa de atualização a posição de um indivíduo é atualizada de acordo com a equação (7.8) se a condição $Pa_i < \varepsilon'$ for verificada. Caso contrário, a posição do indivíduo manter-se-á inalterada. Relativamente à equação (7.8), P_i'' representa o *i*-ésimo indivíduo obtido a partir do indivíduo P_i' resultante da primeira etapa de atualização, P_r' e P_t' são indivíduos da população selecionados de forma aleatória, e ε' e $\hat{\varepsilon}$ são números aleatórios gerados pela distribuição Gaussiana.

$$\begin{cases} P_i'' = P_i' - \hat{\varepsilon} \cdot (P_t' - BP), \varepsilon' \leq 0.5 \\ P_i'' = P_i' + \hat{\varepsilon} \cdot (P_t' - P_r'), \varepsilon' > 0.5 \end{cases} \quad (7.8)$$

No final desta segunda etapa de atualização, o indivíduo P_i'' será substituído pelo indivíduo P_i' se o *fitness* do segundo for melhor. Em suma, o algoritmo SFS pode ser descrito pelo pseudo-código apresentado abaixo [10].

SFS Pseudo-código

Iniciar a população de N indivíduos

While $g < n^{\circ}$ máximo de gerações

Processo de Difusão	<p><i>For</i> cada indivíduo P_i da população</p> <p style="padding-left: 20px;"><i>For</i> $j=1$ até n° máximo de difusões</p> <p style="padding-left: 40px;">Criar novo indivíduo de acordo com a equação (7.2) ou (7.3)</p> <p style="padding-left: 20px;"><i>End</i></p> <p><i>End</i></p>
	<p>Ordenar os indivíduos e atribuir probabilidade de acordo com a equação (7.6)</p>
Primeira etapa de atualização	<p><i>For</i> cada indivíduo P_i</p> <p style="padding-left: 20px;"><i>For</i> cada variável</p> <p style="padding-left: 40px;">If $Pa_i < rand([0,1])$</p> <p style="padding-left: 60px;">Atualizar a variável de acordo com (7.7)</p> <p style="padding-left: 40px;">End</p> <p style="padding-left: 20px;">End</p> <p>End</p>
	<p>End</p>
	<p>Ordenar os indivíduos e atribuir probabilidade de acordo com a equação (7.6)</p>
	<p>End</p>
	<p>Ordenar os indivíduos e atribuir probabilidade de acordo com a equação (7.6)</p>

```

Segunda etapa de
atualização
    For cada indivíduo  $P'_i$ 
        If  $Pa_i < rand([0,1])$ 
            Atualizar o indivíduo de acordo com (7.8)
        End
    End
End

```

O desempenho do SFS foi avaliado por Salimi não só em diferentes funções de *benchmark* no que concerne a condições de restrição e número de soluções, como também em problemas de otimização de engenharia comuns na literatura revista neste âmbito. Relativamente à convergência e à precisão do algoritmo, e comparativamente a outras metaheurísticas tais como a PSO, a CS ou a GSA, o SFS apresentou melhor desempenho no que respeita a evitar aprisionamentos em ótimos locais e na busca do ótimo global. O SFS mostrou também que, mesmo com um reduzido número de iterações, conduz a soluções muito próximas do ótimo global teórico [10].

Sendo as metaheurísticas baseadas no conceito de fractal, muito recentes, apresenta-se adicionalmente na forma de fluxograma a metaheurística SFS nas Figura 7.3 - Figura 7.5, de modo a fornecer maior detalhe das diferentes etapas envolvidas e promover uma melhor compreensão das mesmas [12].

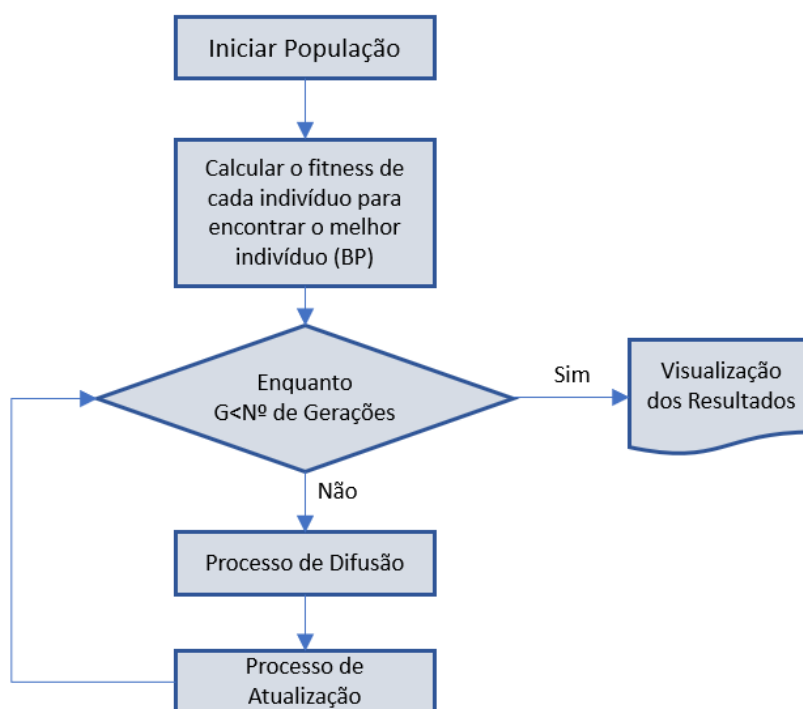


Figura 7.3. Fluxograma do algoritmo SFS

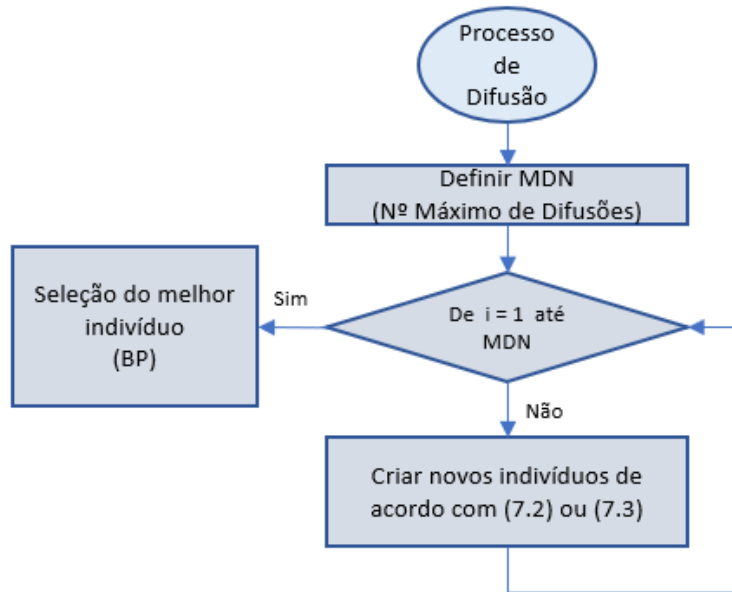


Figura 7.4. Fluxograma do processo de difusão

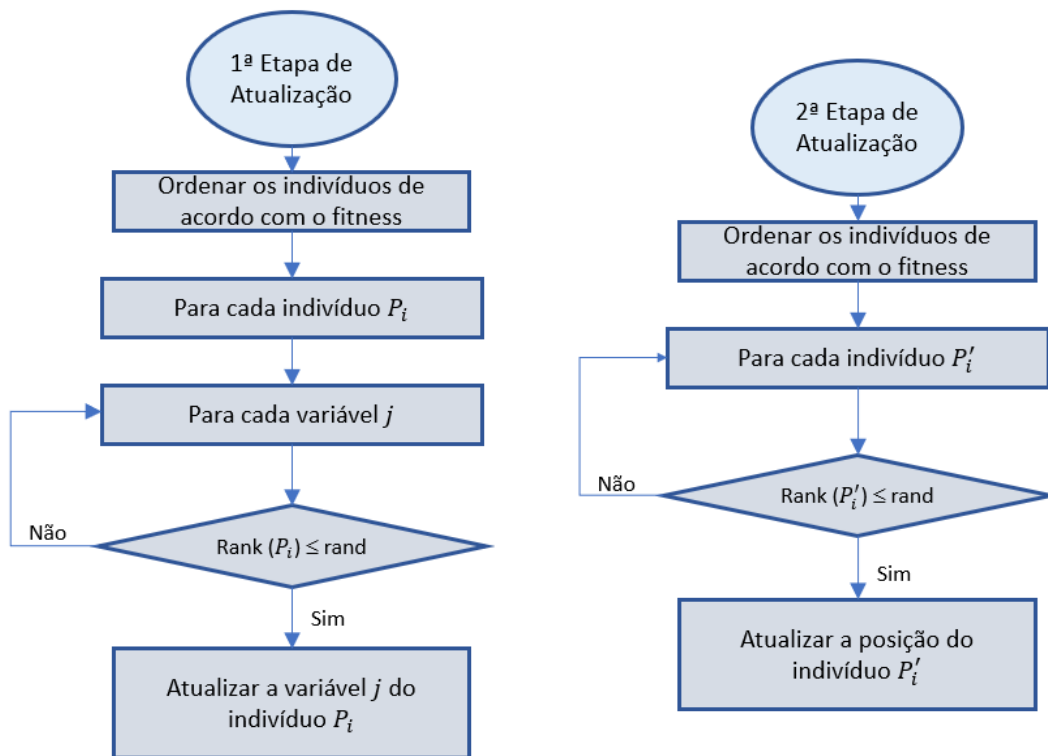


Figura 7.5. Fluxograma do processo de atualização

Os estudos de Salimi [10] revelam que o SFS pode contribuir positivamente na resolução de problemas práticos presentes nos mais diversos campos que exijam otimização, necessitando ainda de investigação acerca da sua eficiência em aplicações reais de larga escala.

8. Aplicações Numéricas

No desenvolvimento do presente trabalho foi realizado um conjunto abrangente de estudos numéricos, englobando as abordagens descritas no capítulo 5. De modo a garantir a credibilidade dos resultados obtidos, é crucial proceder à verificação dos modelos desenvolvidos e implementados, antes de os utilizar. Por conseguinte, apresentam-se numa primeira secção deste capítulo, os estudos que permitiram verificar os diferentes modelos. Nas restantes secções expõe-se um conjunto de outros estudos numéricos desenvolvidos, no âmbito da análise e otimização.

8.1. Estudos de verificação

O desenvolvimento de estudos de verificação é de extrema importância e centra-se na consideração de casos que poderão desde logo constituir casos padrão ou em problemas tipo relevantes num dado domínio. Estes estudos consistem na avaliação comparativa entre o desempenho e/ou resultados obtidos através dos modelos desenvolvidos/implementados, e os obtidos por outros autores através de abordagens analíticas e/ou numéricas. Isto complementarmente a estudos de validação em que a comparação será efetuada com resultados de natureza experimental.

Tendo em conta que o trabalho desenvolvido abrange duas abordagens distintas (ESL e LW), os estudos de verificação encontram-se expostos em duas subsecções. Em todos os estudos de verificação, os desvios calculados em relação à referência considerada foram determinados pela expressão seguinte:

$$\delta(\%) = \frac{\text{valor numérico} - \text{valor de referência}}{\text{valor de referência}} \cdot 100(\%) \quad (8.1)$$

Sempre que possível, os estudos de verificação encontram-se acompanhados de estudos paramétricos para avaliação da influência de determinados parâmetros nos resultados obtidos.

8.1.1. Abordagem camada única equivalente

Os estudos de verificação expostos nesta secção foram todos implementados considerando placas quadradas FGM de aresta unitária e razão de aspeto 100, modeladas pela abordagem de camada única equivalente. As propriedades materiais das fases consideradas nestes estudos encontram-se na Tabela 8.1, tendo-se assumido que a fração volúmica da fase cerâmica se distribui ao longo da espessura de acordo com a lei de potência expressa em (3.1), salvo indicação em contrário.

Nas subsecções que se seguem, os modelos criados foram verificados através do cálculo do desvio da superfície neutra, do fator de correção de corte, do deslocamento transversal e de tensões normais (no plano da placa).

Tabela 8.1. Materiais considerados nos estudos de verificação e respectivas propriedades

Material	Propriedades materiais		
	E [GPa]	ν	ρ [kg/m ³]
Alumina (Al ₂ O ₃)	380	0.3	3940
Zircónia (ZrO ₂)	200	0.3	5680
Alumínio (Al)	70	0.3	2700

8.1.1.1. Desvio da superfície neutra e fator de correção de corte

Uma parte dos estudos a ser efetuados no âmbito deste trabalho baseia-se na teoria de deformação de corte de primeira ordem (FSDT). Na utilização da FSDT, a aplicação do fator de corte impõe-se, pelo que a sua implementação deve ser também objeto de verificação. Neste sentido, antes de avançar para deslocamentos e tensões, é imperativo verificar o modelo de cálculo do fator de correção de corte. No presente trabalho, e no que respeita à abordagem de camada única equivalente, o modelo criado para o cálculo do fator de correção de corte segue a metodologia apresentada na secção 6.1.

- **Estudo de verificação 1:**

Num primeiro estudo foi considerada uma placa FGM bifásica (alumínio/alumina) para a verificação do modelo implementado para cálculo do desvio da superfície neutra e do fator de correção de corte. As propriedades materiais das fases consideradas podem ser consultadas na Tabela 8.1. Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 8.2 e nas Figura 8.1 e Figura 8.2. Este estudo permitiu não só verificar o modelo implementado, como os próprios resultados expostos na Tabela 8.2 o demonstram, como também analisar o comportamento do desvio da superfície neutra e do fator de correção de corte em função do expoente da lei de potência considerada.

Tabela 8.2. Verificação do fator de correção de corte e do desvio da superfície neutra

Expoente p	Desvio da superfície neutra			Fator de correção de corte		
	d/h [ref. 27]	d/h	δ (%)	k [ref. 27]	k	δ (%)
0 (Al ₂ O ₃)	0	0	0	5/6	5/6	0
0.5	0.0747	0.0747	-0.002	0.84515	0.84587	0.085
1	0.1148	0.1148	0.013	0.82921	0.83040	0.143
1.5	0.1370	0.1370	-0.025	0.80016	0.80160	0.179
2	0.1490	0.1490	0.026	0.76778	0.76928	0.195
3	0.1576	0.1576	0.017	0.71661	0.71799	0.193
3.3	0.1579	0.1580	0.034	0.70611	0.70744	0.189
4	0.1566	0.1566	-0.022	0.68888	0.69010	0.176
5	0.1517	0.1517	-0.024	0.67677	0.67785	0.159
10	0.1196	0.1196	-0.001	0.68919	0.68989	0.102

Expoente p	Desvio da superfície neutra			Fator de correção de corte		
	d/h [ref. 27]	d/h	δ (%)	k [ref. 27]	k	δ (%)
20	0.0792	0.0792	-0.004	0.74102	0.74143	0.055
∞ (Al)	0	0	0	5/6	5/6	0

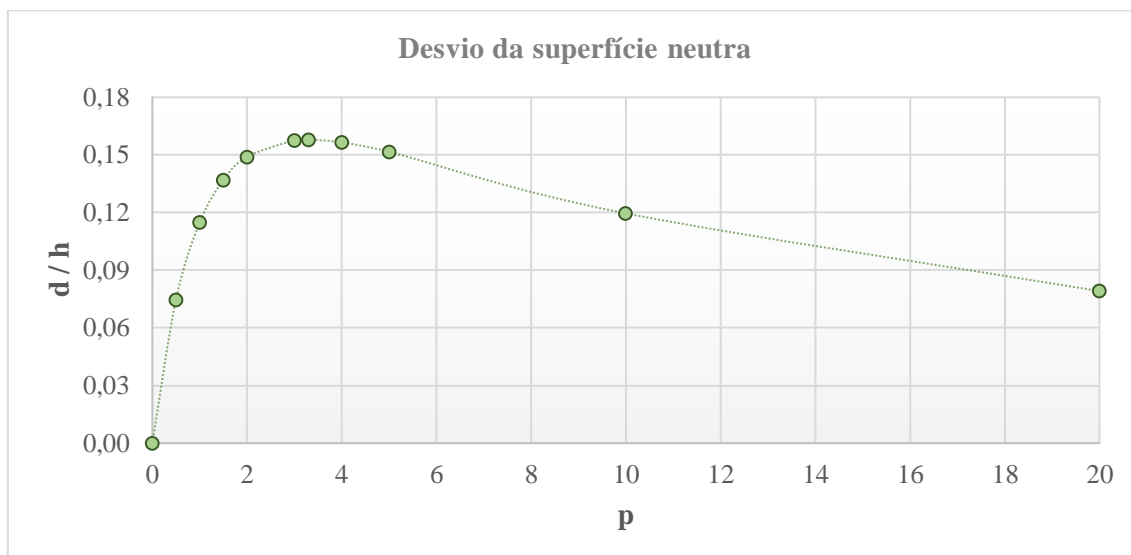


Figura 8.1. Gráfico do desvio da superfície neutra adimensionalizado (d/h) em função do expoente da lei de potência (p)

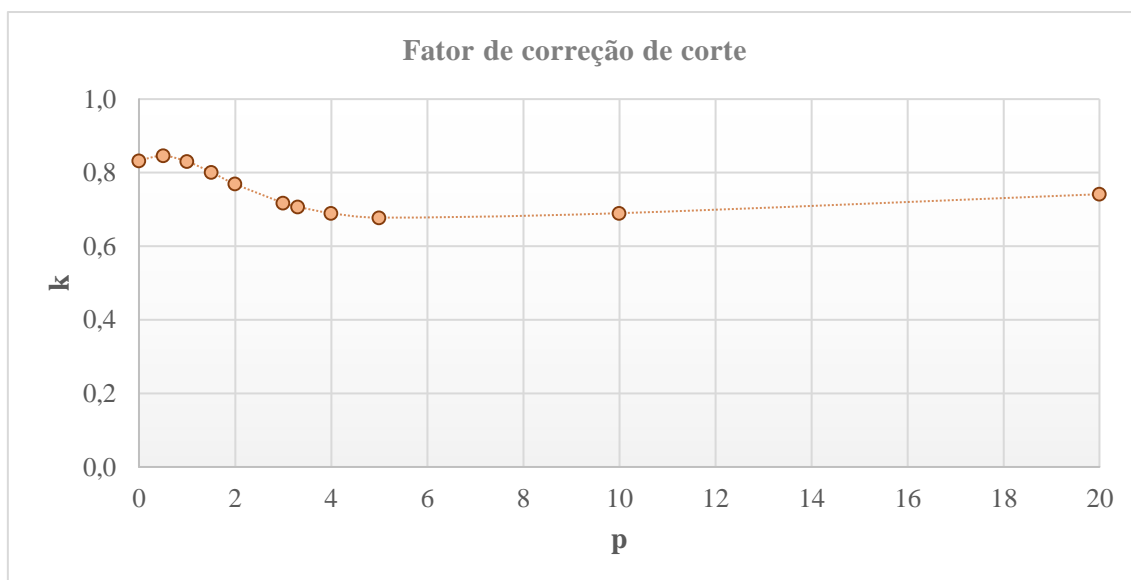


Figura 8.2. Gráfico da variação do fator de correção de corte em função do expoente da lei de potência

O gráfico da evolução do desvio da superfície neutra em relação à superfície média, exposto na Figura 8.1, permite observar que no caso em que o expoente da lei de potência é nulo, situação correspondente a uma placa homogênea composta somente por alumina, o desvio da superfície neutra é nulo. Este resultado está de acordo com o esperado para uma placa homogênea, uma vez

que nesta situação existe simetria na composição em relação ao plano médio da estrutura. Com o aumento do expoente p , também o desvio da superfície neutra aumenta, havendo um deslocamento desta no sentido da face $z = h/2$ (100% alumina). Contudo, para um expoente 3.3, o desvio da superfície neutra apresenta um máximo, valor a partir do qual este desvio diminui com o aumento do expoente. Note-se que no limite $p \rightarrow \infty$, a situação modelada corresponde ao caso de uma placa homogênea de alumínio (fase B), pelo que o desvio da superfície média tende para zero. Quanto ao comportamento do fator de correção de corte, evidenciado com o gráfico da Figura 8.2, verifica-se que no caso de uma placa homogênea composta unicamente por alumina ($p = 0$), este fator assume o valor típico de $5/6$, aumentando até $p = 0.5$. No entanto, para expoentes superiores o valor do fator de correção de corte assume valores cada vez menores até atingir um mínimo para $p = 5$. Após este valor, o fator de correção de corte volta a demonstrar um comportamento crescente, tendendo para $5/6$ na situação em que $p \rightarrow \infty$, ou seja, quando a placa é composta somente por alumínio.

- **Estudo de verificação 2:**

Com o intuito de verificar o modelo de cálculo do fator de correção de corte para diferentes propriedades materiais e diferentes distribuições das fases constituintes do FGM a nível das respetivas frações volúmicas, procedeu-se a mais um conjunto de estudos. No estudo exposto na Tabela 8.3, o fator de correção de corte foi calculado para diferentes relações E_c/E_m e para vários expoentes, sendo que E_c corresponde ao módulo de Young da fase cerâmica e E_m corresponde à propriedade análoga para a fase metálica. Para uma melhor visualização dos resultados obtidos, apresenta-se na Figura 8.3 uma representação gráfica da evolução do fator de correção de corte em função do expoente, para as diferentes razões E_c/E_m consideradas.

Os resultados demonstram uma forte concordância com os valores de referência, pelo que se confirma a verificação do modelo de cálculo deste fator. O gráfico da Figura 8.3 permite confirmar que no caso de homogeneidade correspondente ao caso $E_c/E_m = 1$, ou seja, uma única fase material, o fator de correção de corte não depende do expoente da lei de potência, tomando sempre o valor $5/6$. No entanto, para os restantes casos, com o aumento da razão E_c/E_m o fator de correção de corte sofre maiores oscilações com o aumento do expoente p , sendo que em todos estes casos se verifica um ligeiro aumento até $p = 0.5$, valor a partir do qual o fator de correção de corte apresenta um comportamento decrescente e depois crescente, sendo que esta mudança de monotonia verifica-se para expoentes cada vez maiores à medida que E_c/E_m aumenta. Contudo, em todos estes casos o fator de correção de corte tende para $5/6$ quando $p \rightarrow \infty$, uma vez que neste limite a placa será composta por uma única fase material.

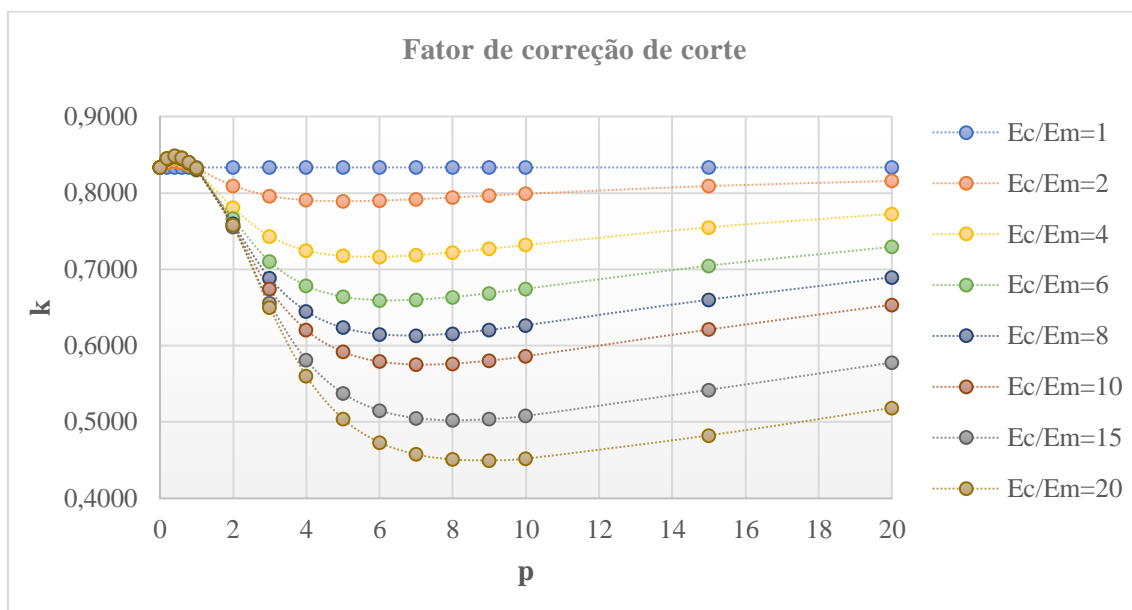


Figura 8.3. Evolução do fator de correção de corte em função do expoente p para diferentes razões E_c/E_m

Tabela 8.3. Verificação do fator de correção de corte para diferentes relações E_c/E_m

p	E_c/E_m							
	1		2		4		6	
	k [ref. 50]	k	k [ref. 50]	k	k [ref. 50]	k	k [ref. 50]	k
0	5/6	0.8333	5/6	0.8333	5/6	0.8333	5/6	0.8333
0.2	5/6	0.8333	0.8396	0.8396	0.8429	0.8429	0.8440	0.8439
0.4	5/6	0.8333	0.8411	0.8411	0.8453	0.8453	0.8467	0.8467
0.6	5/6	0.8333	0.8396	0.8396	0.8433	0.8433	0.8446	0.8446
0.8	5/6	0.8333	0.8364	0.8364	0.8381	0.8381	0.8389	0.8389
1	5/6	0.8333	0.8320	0.8320	0.8305	0.8305	0.8305	0.8305
2	5/6	0.8333	0.8095	0.8095	0.7804	0.7804	0.7662	0.7662
3	5/6	0.8333	0.7961	0.7961	0.7433	0.7433	0.7099	0.7099
4	5/6	0.8333	0.7905	0.7905	0.7248	0.7247	0.6786	0.6784
5	5/6	0.8333	0.7891	0.7891	0.7175	0.7175	0.6643	0.6641
6	5/6	0.8333	0.7899	0.7899	0.7163	0.7164	0.6595	0.6595
7	5/6	0.8333	0.7917	0.7918	0.7183	0.7185	0.6600	0.6602
8	5/6	0.8333	0.7940	0.7940	0.7221	0.7223	0.6634	0.6637
9	5/6	0.8333	0.7964	0.7965	0.7267	0.7269	0.6685	0.6688
10	5/6	0.8333	0.7989	0.7989	0.7316	0.7318	0.6743	0.6746
15	5/6	0.8333	0.8090	0.8089	0.7551	0.7549	0.7048	0.7047
20	5/6	0.8333	0.8157	0.8156	0.7729	0.7725	0.7300	0.7294

p	E_c/E_m							
	8		10		15		20	
	k [ref. 50]	k	k [ref. 50]	k	k [ref. 50]	k	k [ref. 50]	k
0	5/6	0.8333	5/6	0.8333	5/6	0.8333	5/6	0.8333
0.2	0.8445	0.8445	0.8448	0.8448	0.8453	0.8452	0.8455	0.8454
0.4	0.8474	0.8474	0.8478	0.8478	0.8483	0.8483	0.8486	0.8486
0.6	0.8453	0.8452	0.8457	0.8456	0.8461	0.8461	0.8463	0.8463
0.8	0.8395	0.8395	0.8399	0.8399	0.8404	0.8404	0.8406	0.8406
1	0.8308	0.8308	0.8312	0.8312	0.8319	0.8319	0.8323	0.8323
2	0.7593	0.7594	0.7563	0.7563	0.7555	0.7556	0.758	0.7580
3	0.6882	0.6883	0.6738	0.6739	0.6556	0.6557	0.6498	0.6500
4	0.6451	0.6450	0.6203	0.6202	0.5810	0.5811	0.5599	0.5602
5	0.6238	0.6235	0.5923	0.5919	0.5381	0.5377	0.5046	0.5043
6	0.615	0.6149	0.5794	0.5791	0.5158	0.5152	0.4741	0.4733
7	0.6132	0.6134	0.5751	0.5752	0.5053	0.5051	0.4581	0.4576
8	0.6155	0.6159	0.5759	0.5764	0.5020	0.5023	0.4508	0.4510
9	0.6202	0.6206	0.5799	0.5804	0.5032	0.5039	0.4492	0.4498
10	0.6262	0.6266	0.5856	0.5860	0.5073	0.5080	0.4513	0.4521
15	0.6602	0.6602	0.6210	0.6211	0.5419	0.5421	0.4823	0.4825
20	0.6902	0.6896	0.6540	0.6535	0.5780	0.5779	0.5183	0.5185

• **Estudo de verificação 3:**

Neste estudo e no seguinte, mudou-se a configuração da distribuição das fases ao longo da espessura, considerando-se agora uma placa com núcleo metálico, de espessura e_c revestido por camadas com gradiente funcional de espessura e_f , que evoluem da fase metálica para a fase cerâmica de acordo com (8.2). A configuração geométrica adotada nestes estudos encontra-se ilustrada no esquema da Figura 8.4.

$$V_{f(\text{metal})} = \begin{cases} \left(\frac{z + \left(\frac{e_c}{2} + e_f\right)}{e_f} \right)^p & \text{se } -\frac{e_c}{2} - e_f \leq z < -\frac{e_c}{2} \\ 1 & \text{se } -\frac{e_c}{2} \leq z \leq \frac{e_c}{2} \\ \left(\frac{z - \left(\frac{e_c}{2} + e_f\right)}{e_f} \right)^p & \text{se } \frac{e_c}{2} < z \leq \frac{e_c}{2} + e_f \end{cases} \quad (8.2)$$

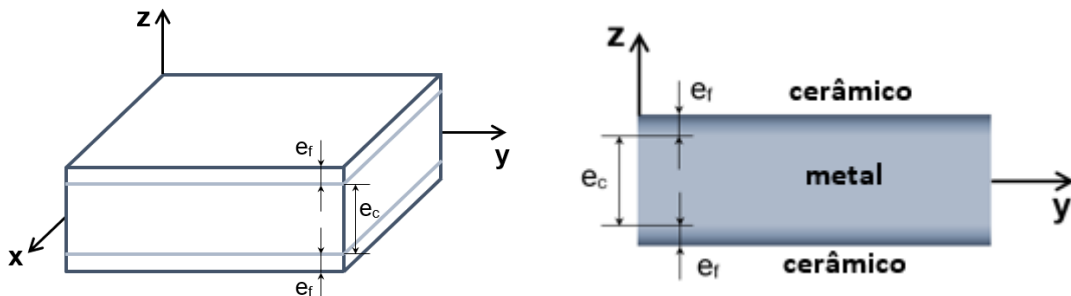


Figura 8.4. Configuração geométrica e material da placa modelada no estudo de verificação

Com esta nova configuração procedeu-se primeiramente à verificação do fator de correção de corte para diferentes razões E_c/E_m e diferentes expoentes, mantendo-se a relação $e_c/e_f = 4$, ou seja, a espessura do núcleo é quatro vezes superior à espessura de cada uma das faces. Na Tabela 8.4 encontram-se os valores registados neste estudo, verificando-se igualmente neste caso uma forte proximidade entre estes e os valores de referência, pelo que o modelo implementado é verificado inclusivamente para diferentes relações E_c/E_m .

Tabela 8.4. Fator de correção de corte para uma relação $e_c/e_f = 4$

p	E_c/E_m							
	1		2		4		6	
	k [ref. 50]	k	k [ref. 50]	k	k [ref. 50]	k	k [ref. 50]	k
0	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6
0.2	5/6	5/6	0.8137	0.8137	0.7699	0.7699	0.7262	0.7262
0.4	5/6	5/6	0.7973	0.7973	0.7214	0.7214	0.6532	0.6532
0.6	5/6	5/6	0.7843	0.7843	0.6865	0.6865	0.6051	0.6051
1	5/6	5/6	0.7654	0.7654	0.6409	0.6409	0.5464	0.5464
2	5/6	5/6	0.7395	0.7395	0.5855	0.5855	0.4805	0.4805
4	5/6	5/6	0.7184	0.7184	0.5450	0.5451	0.4353	0.4355
6	5/6	5/6	0.7093	0.7094	0.5284	0.5286	0.4175	0.4178
8	5/6	5/6	0.7043	0.7044	0.5194	0.5197	0.4078	0.4084
10	5/6	5/6	0.7011	0.7012	0.5137	0.5141	0.4018	0.4025
15	5/6	5/6	0.6966	0.6968	0.5057	0.5064	0.3934	0.3944
p	E_c/E_m							
	8		10		15		20	
	k [ref. 50]	k	k [ref. 50]	k	k [ref. 50]	k	k [ref. 50]	k
0	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6
0.2	0.6851	0.6851	0.6474	0.6474	0.5672	0.5672	0.5037	0.5037
0.4	0.5949	0.5949	0.5454	0.5454	0.4505	0.4505	0.3832	0.3833
0.6	0.5393	0.5393	0.4859	0.4859	0.3887	0.3888	0.3237	0.3238
1	0.4749	0.4749	0.4196	0.4196	0.3245	0.3246	0.2645	0.2646
2	0.4065	0.4066	0.3520	0.3521	0.2633	0.2635	0.2102	0.2105
4	0.3616	0.3619	0.3080	0.3094	0.2263	0.2268	0.1784	0.1790
6	0.3443	0.3448	0.2926	0.2932	0.2126	0.2133	0.1669	0.1676
8	0.335	0.3357	0.2840	0.2847	0.2055	0.2063	0.1609	0.1617
10	0.3292	0.3300	0.2786	0.2795	0.2011	0.2020	0.1572	0.1580
15	0.3212	0.3223	0.2712	0.2723	0.195	0.1961	0.1522	0.1531

- **Estudo de verificação 4:**

Fixando-se a relação $E_c/E_m = 6$, procedeu-se a um estudo de verificação do fator de correção de corte para diferentes relações e_c/e_f e expoentes p , cujos resultados se encontram registados

numericamente na Tabela 8.5 e graficamente na Figura 8.5. Em ambos os estudos o desvio da superfície neutra é nulo, independentemente do expoente da lei de potência, da razão entre módulos de elasticidade, E_c/E_m , e da relação entre espessuras do núcleo e das faces, e_c/e_f , uma vez que a distribuição de fração volúmica é simétrica em relação à superfície média (plano $z = 0$).

Neste estudo obtiveram-se desvios bastante reduzidos em todas as situações avaliadas. Portanto, também para diferentes razões e_c/e_f se comprova a verificação do modelo para cálculo do fator de correção de corte. Desta forma, tendo em conta os resultados obtidos nos estudos de verificação já apresentados, pode-se considerar o modelo de cálculo do desvio da superfície neutra e do fator de correção de corte como verificado. Uma vez verificado, prosseguiu-se a verificação dos modelos de cálculo de deslocamentos transversais e tensões.

Tabela 8.5. Fator de correção de corte para diferentes relações e_c/e_f com $E_c/E_m = 6$

p	e_c/e_f					
	1		2		4	
	k	$\delta(\%)$ [ref. 50]	k	$\delta(\%)$ [ref. 50]	k	$\delta(\%)$ [ref. 50]
0	5/6	0	5/6	0	5/6	0
1	0.4591	0.003	0.4819	-0.004	0.5464	-0.007
2	0.3982	0.033	0.4159	0.025	0.4805	0.002
4	0.3589	0.179	0.3722	0.082	0.4355	0.046
6	0.3441	0.362	0.3554	0.184	0.4178	0.080
8	0.3364	0.518	0.3464	0.295	0.4084	0.144
10	0.3317	0.706	0.3409	0.350	0.4025	0.174
p	e_c/e_f					
	6		8		10	
	k	$\delta(\%)$ [ref. 50]	k	$\delta(\%)$ [ref. 50]	k	$\delta(\%)$ [ref. 50]
0	5/6	0	5/6	0	5/6	0
1	0.5990	0.006	0.6392	0.000	0.6701	-0.006
2	0.5368	0.003	0.5816	0.010	0.6171	0.000
4	0.4931	0.033	0.5400	0.020	0.5781	0.016
6	0.4756	0.051	0.5233	0.030	0.5622	0.033
8	0.4663	0.079	0.5142	0.057	0.5535	0.043
10	0.4604	0.110	0.5085	0.080	0.5481	0.055

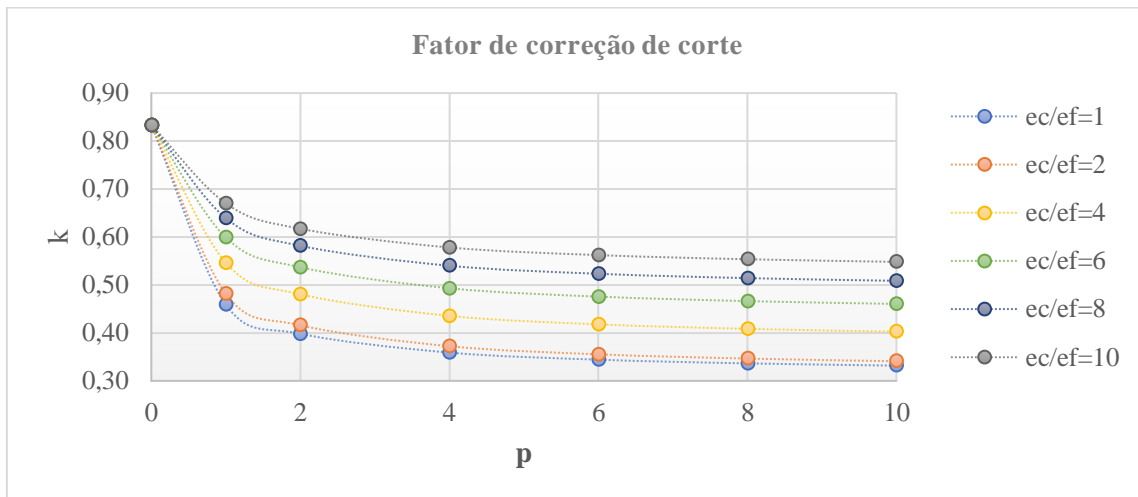


Figura 8.5. Evolução do fator de correção de corte em função do expoente p , para diferentes relações e_c/e_f

8.1.1.2. Deslocamento transversal e tensões

Uma vez verificado o modelo de cálculo do fator de correção de corte para diferentes situações, avançou-se para a verificação do modelo de cálculo do deslocamento transversal e tensões para placas FGM com diferentes configurações.

- **Estudo de verificação 5:**

Este estudo diz respeito a uma placa FGM bifásica Al/Al₂O₃, cujas propriedades materiais se encontram registadas na Tabela 8.1, com aresta unitária e razão de aspeto $a/h = 10$, simplesmente apoiada e sujeita a uma carga transversal de 1MPa de intensidade uniformemente distribuída por toda a sua superfície. Quanto à modelação por elementos finitos, a placa foi discretizada numa malha de 20x20 elementos do tipo Q4. Aplicando a FSDT, obtiveram-se os resultados expostos na Tabela 8.6, os quais se encontram adimensionalizados pelas expressões (8.3) a (8.6) onde a e h referem-se ao comprimento e espessura da placa, respetivamente, q_0 representa a componente escalar da carga uniformemente distribuída à qual a placa se considera sujeita, e E_c corresponde ao módulo de elasticidade longitudinal da fase cerâmica, que neste caso corresponde à alumina.

$$\bar{w} = \frac{10 \cdot h^3 \cdot E_c}{a^4 \cdot q_0} \cdot w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \quad (8.3)$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{h}{a \cdot q_0} \cdot \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) \quad (8.4)$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{h}{a \cdot q_0} \cdot \sigma_y \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{3} \right) \quad (8.5)$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = \frac{h}{a \cdot q_0} \cdot \sigma_{xy} \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{h}{6} \right) \quad (8.6)$$

Tabela 8.6. Deslocamento transversal, tensões no plano xy e respectivos desvios em relação à literatura [61]

p	\bar{w}	$\delta_{\bar{w}}(\%)$	$\bar{\sigma}_x$	$\delta_{\bar{\sigma}_x}(\%)$	$\bar{\sigma}_y$	$\delta_{\bar{\sigma}_y}(\%)$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\delta_{\bar{\sigma}_{xy}}(\%)$
0 (Al₂O₃)	0.4663	-0.04	2.8661	-0.94	1.9107	0.02	1.2740	-0.85
1	0.9284	-0.03	4.4297	-1.00	2.1713	0.10	1.1003	-1.26
2	1.1944	0.04	5.1725	-1.09	2.0391	0.26	0.9806	-1.02
3	1.3211	0.08	5.5439	-1.19	1.8673	0.43	0.9965	-0.82
4	1.3900	0.07	5.8171	-1.26	1.7295	0.57	1.0227	-0.69
5	1.4362	0.04	6.0706	-1.30	1.6212	0.67	1.0387	-0.61
6	1.4728	0.01	6.3207	-1.30	1.5326	0.74	1.0478	-0.55
7	1.5048	-0.01	6.5684	-1.30	1.4579	0.77	1.0534	-0.52
8	1.5340	-0.02	6.8118	-1.28	1.3938	0.79	1.0575	-0.50
9	1.5614	-0.02	7.0488	-1.25	1.3389	0.80	1.0611	-0.48
10	1.5874	-0.01	7.2783	-1.23	1.2921	0.79	1.0644	-0.47
∞ (Al)	2.5315	-0.05	2.8661	-0.94	1.9107	0.02	1.2740	-0.85

Os baixos desvios verificados nos resultados referentes ao deslocamento transversal denotam a validade do modelo no cálculo dos deslocamentos. Relativamente às tensões no plano axial, os desvios não são tão reduzidos quanto no caso do deslocamento transversal sendo, no entanto, bastante aceitáveis. Contudo é importante referir que o estudo de referência [61], contrariamente ao aqui exposto, considera uma teoria de deformação de corte sinusoidal que não exige aplicação de fator de correção de corte. Aliás, é este o motivo para o uso de uma malha de 20 x 20 elementos finitos ao invés da malha de 10 x 10 elementos que tem sido utilizada nos estudos anteriores, pois o aumento do número de elementos finitos promoveu uma maior aproximação entre os valores obtidos para as tensões e os respetivos valores de referência.

- **Estudo de verificação 6:**

Mantendo as mesmas fases materiais aplicadas no estudo antecedente, carregamento e condições de fronteira, este sexto estudo focou-se igualmente numa placa quadrada de lado unitário, mas cuja distribuição material ao longo da espessura, h , apresenta uma configuração distinta. Na Figura 8.6 encontra-se uma ilustração do modo como as fases se distribuem segundo a direção da espessura, sendo que esta distribuição ocorre de modo que a placa apresenta um núcleo cerâmico de espessura e_c e faces superior e inferior compostas por FGM Al/Al₂O₃ de espessuras e_{tf} e e_{bf} , respetivamente. O estudo de verificação exposto neste ponto avalia o deslocamento transversal no centro da placa para diferentes razões de aspeto e para diferentes configurações a nível de espessura, sendo que estas últimas se encontram especificadas na Tabela 8.7. A adimensionalização do deslocamento transversal foi determinada por aplicação da expressão (8.3), e os resultados assim obtidos encontram-se registados na Tabela 8.8.

Neste estudo de verificação do deslocamento transversal em placas compósitas de diferentes configurações observam-se baixos desvios em relação aos valores de referência. No entanto é de notar que no caso em que a razão de aspecto assume o valor 5, os desvios são consideravelmente superiores para expoentes maiores, contudo nunca ultrapassando o desvio máximo de 3.48%. Este valor é considerado bastante aceitável tendo em consideração a teoria de deformação de corte utilizada neste caso e a relação de aspecto da placa. Já para as razões de aspecto de 10 e 20 os desvios observados são sempre bastante reduzidos independentemente da configuração e do expoente considerado. Desta forma é possível aceitar o modelo implementado como válido nos casos configurados neste estudo.

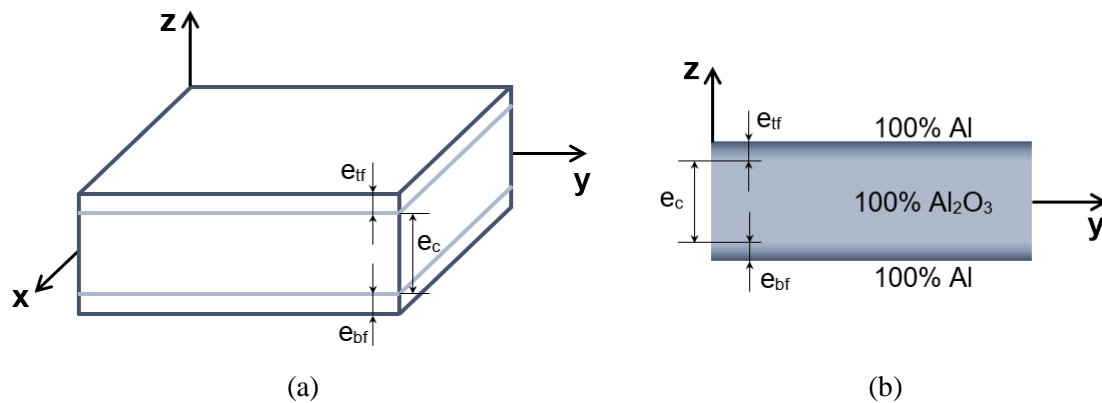


Figura 8.6. Configuração geométrica da distribuição material ao longo da espessura

Tabela 8.7. Espessuras do núcleo e faces nas diferentes configurações consideradas

Configuração	e_{bf}	e_c	e_{tf}
1-0-1	$h/2$	0	$h/2$
1-1-1	$h/3$	$h/3$	$h/3$
1-2-1	$h/4$	$h/2$	$h/4$
2-1-2	$2h/5$	$h/5$	$2h/5$
2-1-1	$h/2$	$h/4$	$h/4$
2-2-1	$2h/5$	$2h/5$	$h/5$

Tabela 8.8. Deslocamento transversal, e respectivos desvios, para diferentes configurações

	a/h	5			10			20		
		\bar{w} [ref. 62]	\bar{w}	$\delta_{\bar{w}}$ (%)	\bar{w} [ref. 62]	\bar{w}	$\delta_{\bar{w}}$ (%)	\bar{w} [ref. 62]	\bar{w}	$\delta_{\bar{w}}$ (%)
1-0-1	0	0.5354	0.5356	0.04	0.4666	0.4655	-0.23	0.4493	0.4480	-0.29
	0.5	0.9112	0.9110	-0.02	0.8250	0.8230	-0.25	0.8034	0.8010	-0.30
	1	1.2772	1.2777	0.04	1.1765	1.1738	-0.23	1.1513	1.1478	-0.31
	2	1.8328	1.8418	0.49	1.7100	1.7081	-0.11	1.6793	1.6747	-0.27
	5	2.4555	2.5062	2.06	2.2877	2.2948	0.31	2.2457	2.2420	-0.17
	10	2.6606	2.7344	2.77	2.4438	2.4564	0.51	2.3895	2.3869	-0.11
1-1-1	0	0.5354	0.5356	0.04	0.4666	0.4655	-0.23	0.4494	0.4480	-0.31
	0.5	0.7980	0.7977	-0.04	0.7201	0.7183	-0.26	0.7006	0.6984	-0.31
	1	1.0244	1.0237	-0.06	0.9402	0.9378	-0.26	0.9191	0.9163	-0.31
	2	1.3562	1.3565	0.03	1.2644	1.2617	-0.21	1.2417	1.2380	-0.30
	5	1.7995	1.8113	0.65	1.6999	1.6985	-0.08	1.6735	1.6703	-0.19
	10	2.0085	2.0389	1.51	1.9045	1.9075	0.16	1.8785	1.8747	-0.20
1-2-1	0	0.5353	0.5356	0.06	0.4666	0.4655	-0.23	0.4494	0.4480	-0.31
	0.5	0.7344	0.7343	-0.02	0.6590	0.6574	-0.25	0.6401	0.6381	-0.31
	1	0.8892	0.8889	-0.04	0.8093	0.8075	-0.22	0.7896	0.7871	-0.31
	2	1.0994	1.0997	0.03	1.0153	1.0129	-0.23	0.9945	0.9912	-0.33
	5	1.3764	1.3761	-0.02	1.2845	1.2820	-0.20	1.2621	1.2584	-0.29
	10	1.5679	1.5191	-3.11	1.4296	1.4194	-0.72	1.3997	1.3944	-0.38
2-1-2	0	0.5354	0.5356	0.04	0.4666	0.4655	-0.23	0.4494	0.4480	-0.31
	0.5	0.8457	0.8454	-0.04	0.7651	0.7632	-0.25	0.7449	0.7426	-0.31
	1	1.1302	1.1298	-0.03	1.0409	1.0383	-0.25	1.0186	1.0154	-0.31
	2	1.5608	1.5641	0.21	1.4606	1.4579	-0.18	1.4356	1.4314	-0.29
	5	2.1141	2.1457	1.50	1.9996	2.0027	0.16	1.9710	1.9669	-0.21
	10	2.3398	2.4086	2.94	2.2154	2.2272	0.53	2.1843	2.1819	-0.11
2-1-1	0	0.5354	0.5356	0.04	0.4666	0.4655	-0.23	0.4494	0.4480	-0.31
	0.5	0.8190	0.8188	-0.02	0.7386	0.7368	-0.25	0.7185	0.7163	-0.31
	1	1.0701	1.0703	0.01	0.9813	0.9790	-0.24	0.9591	0.9561	-0.31
	2	1.4389	1.4434	0.31	1.3393	1.3372	-0.15	1.3144	1.3107	-0.28
	5	1.9014	1.9358	1.81	1.7872	1.7915	0.24	1.7586	1.7554	-0.18
	10	2.0915	2.1642	3.48	1.9674	1.9808	0.68	1.9363	1.9349	-0.07
2-2-1	0	0.5354	0.5356	0.04	0.4666	0.4655	-0.23	0.4494	0.4480	-0.31
	0.5	0.7667	0.7665	-0.03	0.6895	0.6878	-0.25	0.6701	0.6681	-0.30
	1	0.9574	0.9570	-0.04	0.8745	0.8723	-0.25	0.8537	0.8511	-0.30
	2	1.2270	1.2274	0.03	1.1372	1.1346	-0.23	1.1148	1.1114	-0.30
	5	1.5763	1.5870	0.68	1.4792	1.4783	-0.06	1.4549	1.4511	-0.26
	10	1.7432	1.7682	1.43	1.6408	1.6433	0.15	1.6154	1.6121	-0.20

8.1.1.3. Compósitos reforçados com nanotubos de carbono

No âmbito deste tipo de reforço, há que verificar o modelo de cálculo das propriedades materiais. Neste estudo, a placa modelada consiste num compósito bifásico Al/ZrO₂ onde a fase metálica se considera reforçada com MWCNTs. Nas Tabela 8.1 e Tabela 8.9 encontram-se discriminadas as propriedades materiais e geométricas dos materiais considerados neste estudo de verificação.

A distribuição de fração volúmica da fase cerâmica no FGM ocorre segundo a direção da espessura da placa de acordo com a lei de potência descrita pela equação (3.1), e a sua evolução para diferentes expoentes encontra-se ilustrada no gráfico da Figura 8.7. O comportamento do módulo de elasticidade do compósito resultante ao longo da espessura, e para diferentes frações mássicas de MWCNTs e diferentes expoentes da lei de potência, encontra-se evidenciado nos gráficos expostos na Figura 8.8.

Tabela 8.9. Propriedades, materiais e geométricas, características dos MWCNTs considerados como reforço do FGM

Material	Propriedades				
	E [GPa]	l [μm]	d [nm]	t [nm]	ρ [kg/m^3]
MWCNTs	400	50	20	0.34	1350

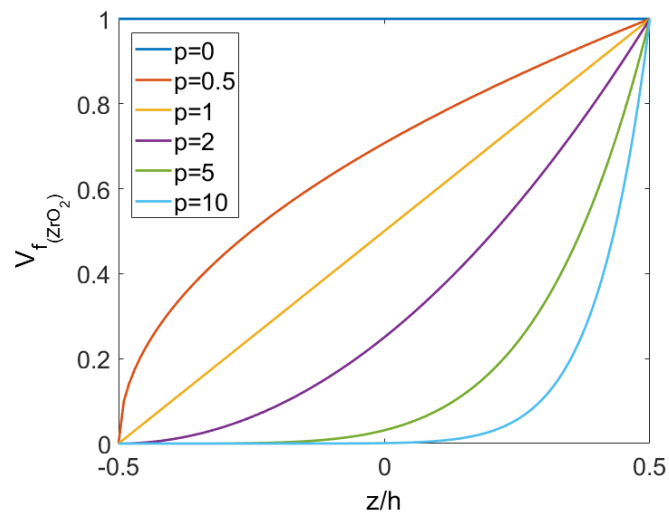


Figura 8.7. Fração volúmica de zircónia em função de z/h

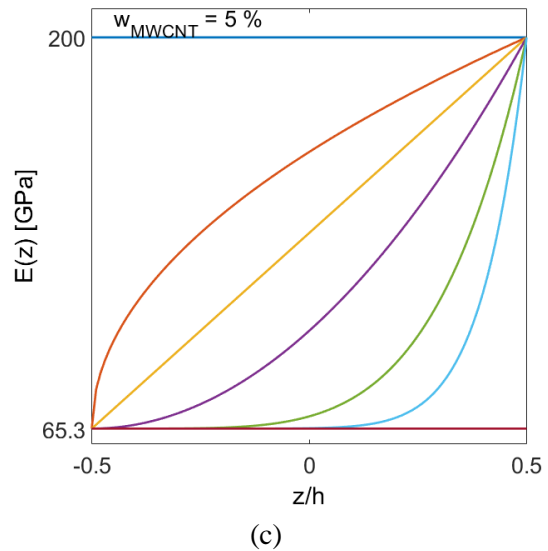
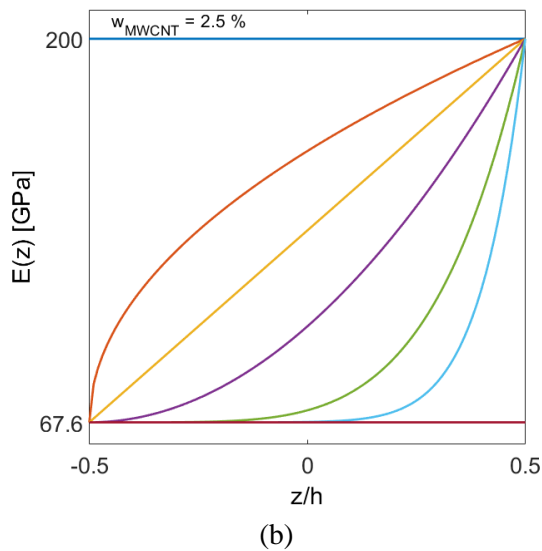
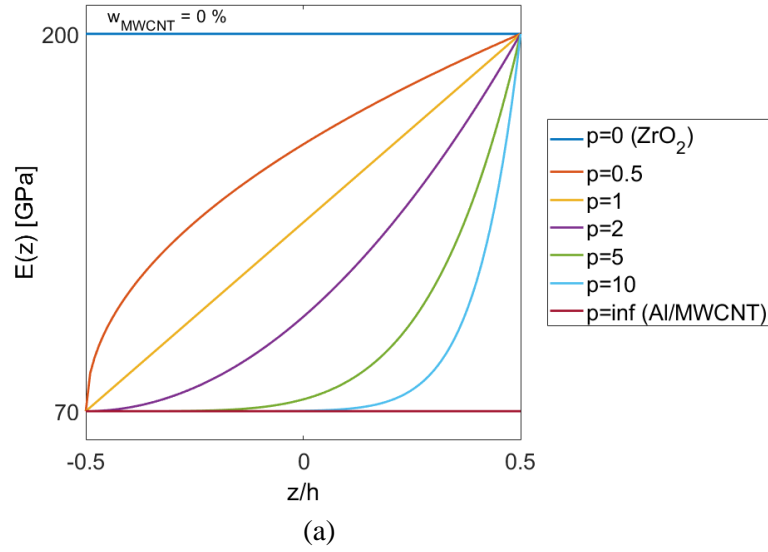


Figura 8.8. Módulo de Young do compósito Al/ZrO₂ reforçado com MWCNTs em função de z/h , para diferentes expoentes da lei de potência: (a) $w_{MWCNTs} = 0\%$; (b) $w_{MWCNTs} = 2.5\%$; (c) $w_{MWCNTs} = 5\%$

De modo a permitir uma melhor visualização da influência da fração mássica dos MWCNTs no módulo de Young do compósito considerado, apresenta-se na Figura 8.9 um gráfico da evolução desta propriedade material ao longo da espessura para um mesmo expoente, mas em diferentes condições de fração mássica de reforço. Como é possível verificar, o aumento da fração mássica de MWCNTs no compósito diminui o módulo de elasticidade, ou seja, torna o material menos rígido. Esta tendência apesar de poder parecer contraditória, é no presente caso expectável, dado que a configuração geométrica dos nanotubos é um fator determinante na previsão das propriedades dos nanotubos [39].

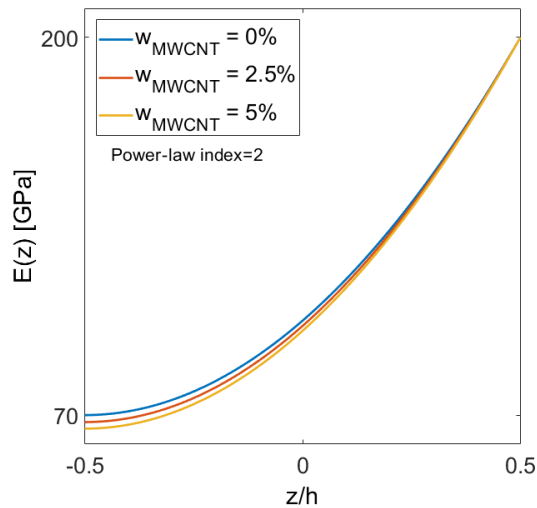


Figura 8.9. Módulo de Young do compósito FGM em função de z/h , para expoente $p = 2$ e diferentes frações mássicas de MWCNTs

- **Estudo de verificação 7:**

De modo a cumprir as configurações enunciadas no estudo de referência [39], foi considerada uma placa quadrada de lado unitário e razão de aspeto 20, simplesmente apoiada nos quatro bordos e sujeita a uma carga uniformemente distribuída pela totalidade da sua superfície com 10kPa de intensidade. A nível do modelo de elementos finitos implementado, foi considerada uma malha com 10 x 10 elementos finitos do tipo Q4. A verificação do modelo assim caracterizado foi obtida pela análise dos resultados respeitantes ao deslocamento transversal máximo, sendo que estes foram determinados com base na FSDT e na HSDT para diferentes frações mássicas de MWCNTs e diferentes expoentes da lei de potência. Adicionalmente, calculou-se o desvio da superfície neutra e do fator de correção de corte para esses mesmos parâmetros, encontrando-se todos os resultados obtidos registados na Tabela 8.10. Os gráficos das Figura 8.10 e Figura 8.11 permitem visualizar o efeito da fração mássica de MWCNTs no desvio da superfície neutra e fator de corte, respetivamente, com o aumento do expoente da lei de potência.

Tendo em conta o facto do estudo de referência se basear na FSDT e a discretização da placa ter sido feita numa malha de 18x18 elementos, os baixos desvios registados neste estudo validam o modelo implementado para o cálculo dos deslocamentos transversais de uma placa FGM reforçada com nanotubos de carbono. Este estudo permitiu não só verificar o modelo como também verificar que os deslocamentos determinados com base na HSDT conduzem a menores desvios em relação aos dados de referência do que aqueles que foram obtidos por aplicação da FSDT. De notar que no presente trabalho o fator de correção do efeito de corte é calculado caso a caso, o que se traduz numa previsão mais realista do comportamento da estrutura.

Tabela 8.10. Verificação do modelo para determinação de deslocamento transversal máximo aplicado a FGM com inclusões de MWCNT, por comparação com [39]

w_{CNT} (%)	p	d [mm]	k	w/h FSDT	δ (%) FSDT	w/h HSDT	δ (%) HSDT
0	0 (ZrO ₂)	0	5/6	3.58E-04	---	3.59E-04	---
	0.5	2.8	0.8431	4.91E-04	0.12	4.91E-04	0.11
	1	4.0	0.8310	5.75E-04	0.15	5.75E-04	0.10
	5	4.8	0.7945	6.54E-04	0.35	6.54E-04	0.23
	5	4.2	0.7558	7.24E-04	0.23	7.23E-04	0.11
	10	3.0	0.7691	7.82E-04	---	7.82E-04	---
	∞ (Al)	0	5/6	1.03E-03	---	1.02E-03	---
2.5	0 (ZrO ₂)	0	5/6	3.58E-04	---	3.59E-04	---
	0.5	2.8	0.8433	4.94E-04	0.08	4.94E-04	0.07
	1	4.1	0.8309	5.83E-04	0.13	5.82E-04	0.07
	5	4.9	0.7930	6.67E-04	0.15	6.66E-04	0.02
	5	4.4	0.7521	7.40E-04	0.27	7.39E-04	0.14
	10	3.1	0.7656	8.01E-04	---	8.01E-04	---
	∞ (Al)	0	5/6	1.06E-03	---	1.01E-03	---
5	0 (ZrO ₂)	0	5/6	3.58E-04	---	3.59E-04	---
	0.5	2.9	0.8435	4.99E-04	0.23	4.98E-04	0.01
	1	4.2	0.8309	5.92E-04	0.61	5.90E-04	0.34
	5	5.1	0.7915	6.81E-04	0.43	6.79E-04	0.09
	5	4.6	0.7485	7.58E-04	0.50	7.55E-04	0.15
	10	3.3	0.7622	8.22E-04	---	8.20E-04	---
	∞ (Al)	0	5/6	1.10E-03	---	1.10E-03	---

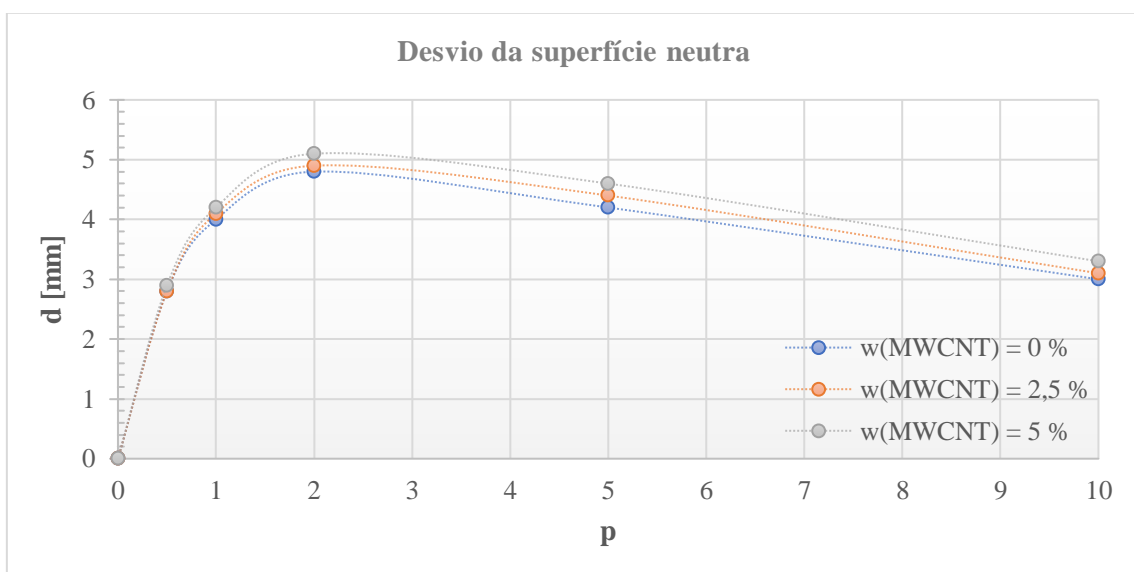


Figura 8.10. Gráfico do desvio da superfície neutra, relativamente à superfície média, em função do expoente da lei de potência, para diferentes frações mássicas de MWCNTs

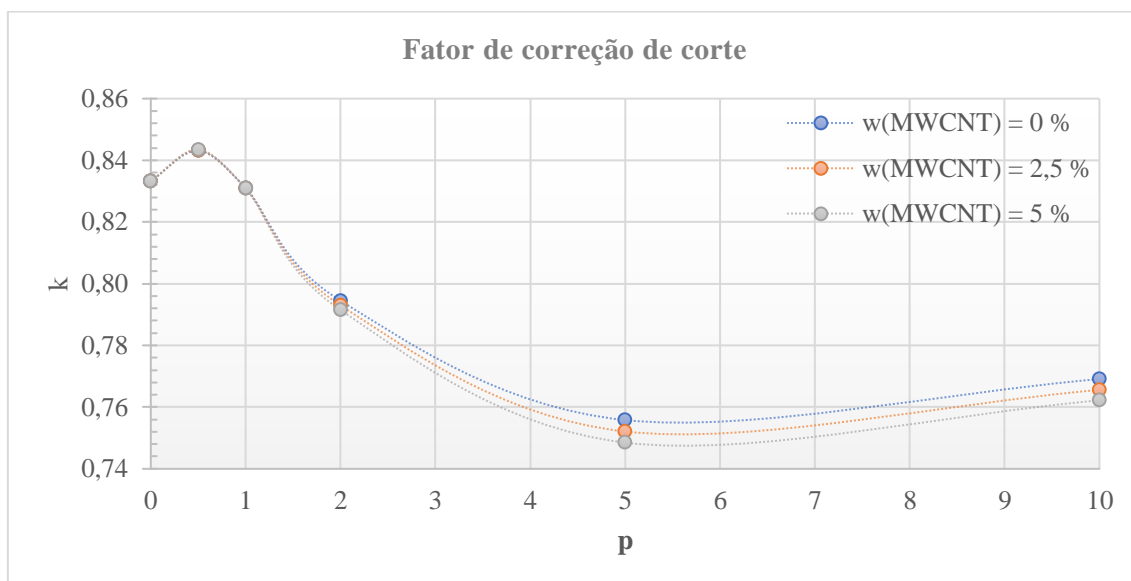


Figura 8.11. Gráfico do fator de correção de corte em função do expoente da lei de potência, para diferentes frações mássicas de MWCNTs

Com este estudo foi também explorado o comportamento do desvio da superfície média e do fator de correção de corte em função do expoente da lei de potência e da fração mássica de MWCNTs. Como o gráfico da Figura 8.10 revela, o desvio da superfície neutra aumenta até $p = 2$ para todas as frações mássicas de MWCNTs avaliadas, sendo que decresce a partir deste valor tendendo para zero quando $p \rightarrow \infty$, pois nesta situação o compósito não apresenta qualquer gradiente funcional. Verifica-se ainda que o aumento da fração mássica de MWCNTs traduz-se num aumento do desvio da superfície média, independentemente do expoente p considerado. Quanto ao fator de corte, verifica-se que toma o valor $5/6$ na condição $p = 0$, sendo que tenderá para este valor quando $p \rightarrow \infty$. A evolução do fator de correção de corte mostra-se semelhante aos verificados nos estudos anteriores, aumentando até $p = 0,5$, diminuindo até sensivelmente $p = 5$, e aumentando por fim tendendo para $5/6$ como referido anteriormente. De notar ainda que, apesar de pouco evidente, até $p = 0,5$ quanto maior a fração mássica maior o valor de k . No entanto para expoentes superiores o comportamento é exatamente o oposto e mais notório.

8.1.1.4. Compósitos com porosidades

Para a verificação dos modelos implementados para inclusão do efeito da existência de porosidades nos cálculos, foi efetuado o estudo exposto nesta subsecção.

- **Estudo de verificação 8:**

Para este estudo foi considerada uma placa FGM Al/ZrO₂, com as mesmas propriedades consideradas na subsecção anterior e expostas na Tabela 8.1. Em particular, e de acordo com o estudo tido como referência [44], a distribuição da fração volúmica da zircónia ocorre segundo a lei de potência (3.1), com um expoente da lei de potência fixo e igual 0.1. A evolução do módulo de

Young do compósito considerado neste estudo ao longo da espessura da placa encontra-se representada graficamente na Figura 8.12, para dois tipos de distribuição de porosidade distintos – *even* e *uneven*. No caso de porosidades distribuídas de acordo com o modelo *even* (Figura 8.12-a) o módulo de Young aumenta ao longo da espessura, sendo que o aumento da sua fração volúmica conduz à diminuição desta propriedade material. O mesmo não se pode dizer quanto à distribuição de porosidades do tipo *uneven* (Figura 8.12-b). As porosidades assim distribuídas provocam uma redução do módulo de Young ao longo da espessura na metade inferior da placa, de $z = -h/2$ até $z = 0$, comportamento que passa a ser crescente na metade superior entre $z = 0$ e $z = h/2$. Este comportamento é independente do expoente da lei de potência, sendo consequência da dependência do valor absoluto da cota z , de acordo com a expressão (3.14).

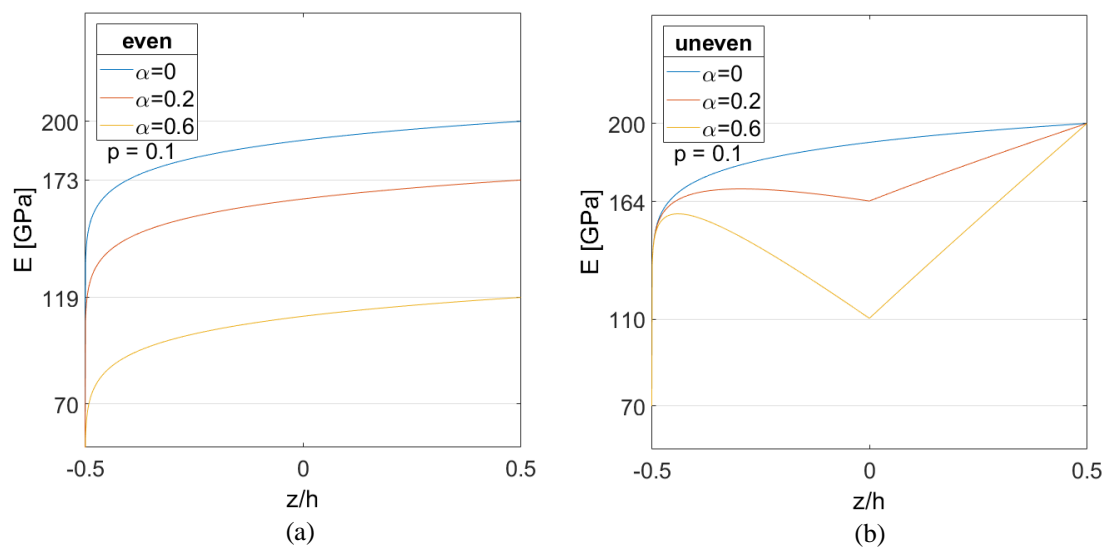


Figura 8.12. Gráfico do módulo de Young do FGM Al/ZrO₂ em função de z/h , para diferentes frações volúmicas de porosidades: (a) distribuição de porosidades tipo *even*; (b) distribuição de porosidades tipo *uneven*

A placa quadrada de lado unitário e razão de aspeto 100, simplesmente apoiada nos quatro bordos, foi discretizada numa malha de 18 x 18 elementos finitos, tal como considerado na literatura [44], do tipo Q4. A carga uniformemente distribuída à qual a placa se considera sujeita é variável, sendo a sua intensidade adimensionalizada pelo parâmetro de carga, P , expresso na equação (8.7), onde a e h correspondem à medida do lado e da espessura da placa, respetivamente, q_0 representa a intensidade da carga uniformemente distribuída à qual a placa se considera sujeita, e E_m corresponde ao módulo de Young da fase metálica que neste caso é o alumínio.

$$P = \frac{q_0 \cdot a^4}{E_m \cdot h^4} \quad (8.7)$$

No presente estudo de verificação, o estudo de referência não proporciona dados numéricos para avaliação do desvio entre resultados, mas sim uma representação gráfica que serviu como termo

de verificação. Neste sentido, apresenta-se na Figura 8.13 o gráfico do deslocamento transversal máximo em função do parâmetro de carga já referido, para diferentes situações no que diz respeito a distribuições de porosidades e frações volúmicas das mesmas. Para ir ao encontro do estudo de referência, os deslocamentos transversais foram adimensionalizados de acordo com a expressão (8.8), sendo que h representa a espessura da placa e w corresponde ao deslocamento transversal de um dado ponto da placa. No que diz respeito aos resultados obtidos, confirma-se a verificação dos modelos implementados no âmbito da inclusão de distribuição de porosidades, pois o gráfico obtido (Figura 8.13) apresenta em todos os casos avaliados um comportamento similar e com valores semelhantes ao exposto na literatura [44].

$$w_{adim} = \frac{w}{h} \quad (8.8)$$

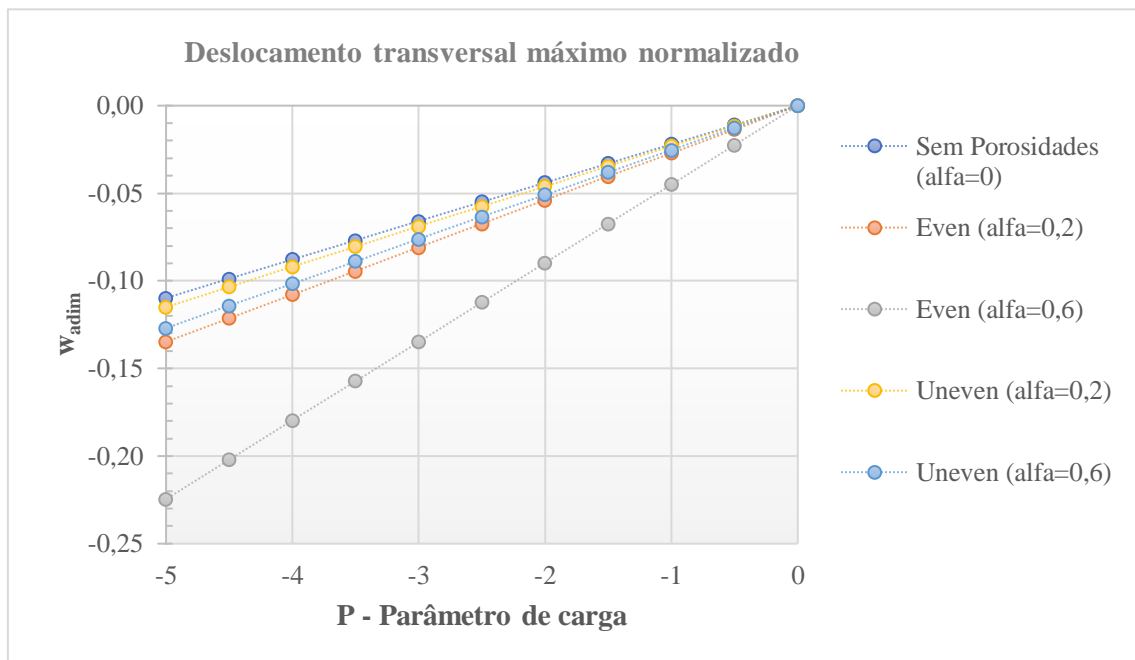


Figura 8.13. Deslocamento transversal máximo adimensional em função do parâmetro de carga P , para distribuições de porosidades *even* e *uneven*, considerando diferentes frações volúmicas de porosidades

Este estudo de verificação foi acompanhado por estudos paramétricos para avaliação do efeito das distribuições e frações volúmicas de porosidades no desvio da superfície neutra e no fator de correção de corte. Os resultados respeitantes a esta influência encontram-se representados nos gráficos das Figura 8.14 e Figura 8.15.

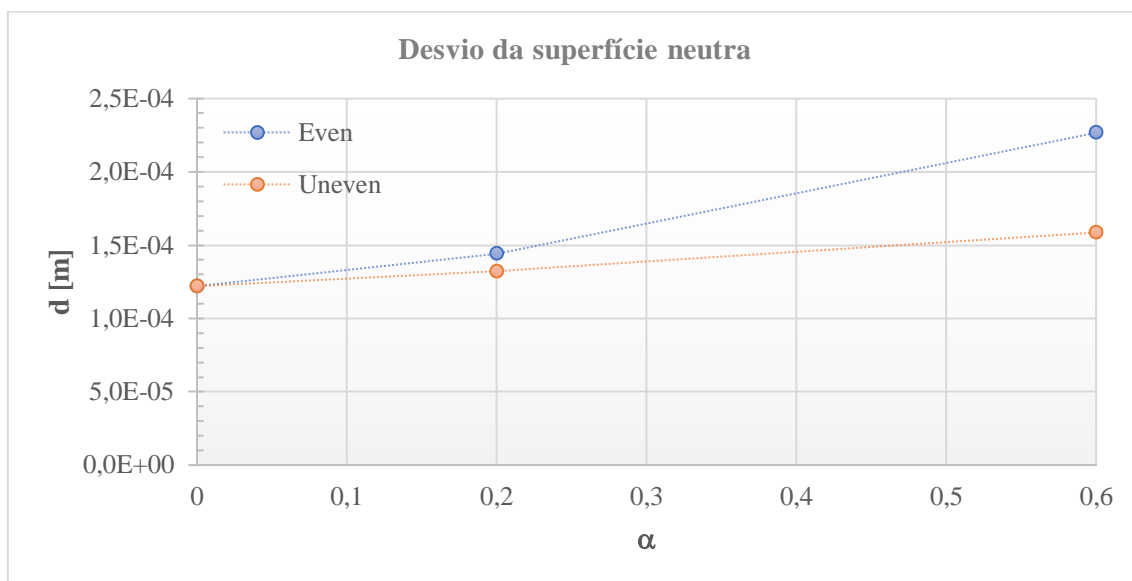


Figura 8.14. Desvio da superfície neutra, relativamente à superfície média, para distribuições de porosidades do tipo *even* e *uneven*, em função do parâmetro α

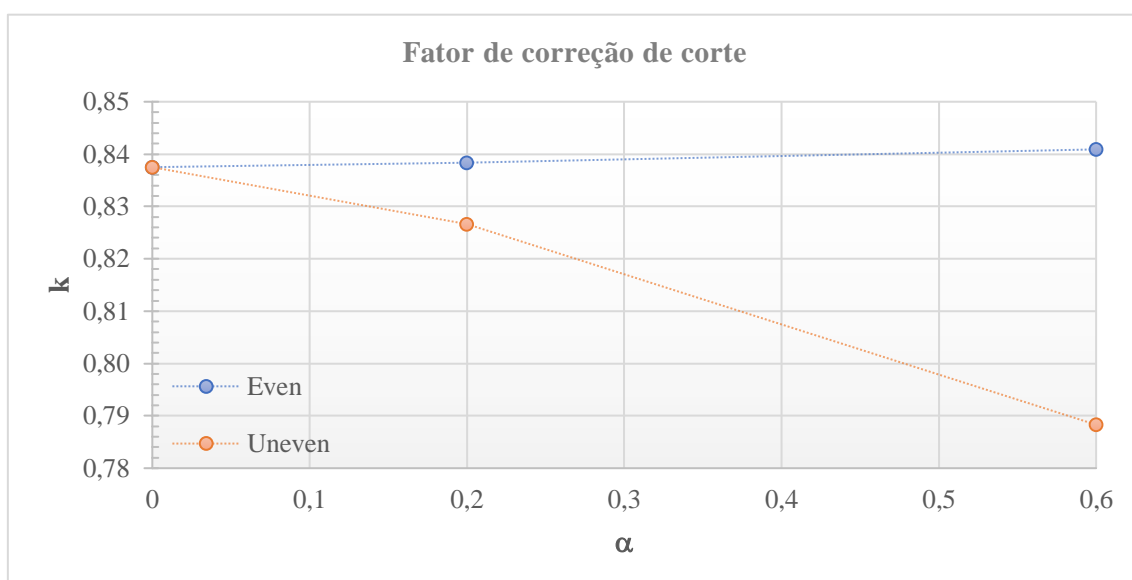


Figura 8.15. Evolução do fator de correção de corte, considerando distribuições de porosidades do tipo *even* e *uneven*, em função da fração volúmica de porosidades

O desvio da superfície neutra em relação à superfície média, representado graficamente na Figura 8.14, aumenta com o aumento do parâmetro α , sendo sempre superior para porosidades distribuídas segundo o modelo *even*. A Figura 8.15 mostra que o tipo de distribuição de porosidades afeta o comportamento do fator de correção de corte. Em particular, o valor de k aumenta de forma muito ligeira com o aumento da fração volúmica de porosidades no caso em que se considera a existência de porosidades distribuídas de modo *even*. No caso de estas porosidades se distribuírem de acordo com o modelo *uneven* o fator de correção de corte diminui acentuadamente com o aumento do parâmetro α .

8.1.2. Abordagem multicamada

Aborda-se agora a verificação dos modelos de dois tipos de placas sandwich – laminados e com camadas FGM – implementados usando uma abordagem multicamada. Dado que na pesquisa bibliográfica efetuada não foi possível encontrar estudos do âmbito da abordagem multicamada com FGM que se enquadrem nesta matéria, o estudo de verificação correspondente foi realizado tendo como referência resultados obtidos por abordagem de camada única.

- **Estudo de verificação 9:**

No contexto da abordagem LW, considerou-se neste estudo o exemplo formulado por Srinivas [63] e que considera uma placa sandwich de três camadas, quadrada de lado unitário e razão de aspeto 10, simplesmente apoiada e sujeita a um carregamento transversal de magnitude unitária sobre toda a sua superfície. A espessura do núcleo corresponde a 8/10 da espessura total da placa, sendo que as camadas exteriores têm igual espessura. Neste exemplo, as propriedades materiais do núcleo resultam na seguinte matriz de coeficientes de rigidez elástica transformados:

$$\bar{Q}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.999781 & 0.231192 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.231192 & 0.524886 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.159914 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.266810 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.262931 \end{bmatrix}$$

As propriedades materiais das faces exteriores do laminado considerado são múltiplas das propriedades materiais do núcleo, pelo que resultam da multiplicação destas últimas por um fator R. Este mesmo exemplo foi estudado por Ferreira [64], considerando a FSDT na formulação dos campos de deslocamentos das três camadas. Seguindo este mesmo exemplo e considerando a formulação FSDT-FSDT-FSDT, o modelo implementado foi sujeito a verificação por comparação com os resultados referidos na literatura, encontrando-se os resultados obtidos para este efeito na Tabela 8.11. Os resultados encontram-se adimensionalizados de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= (w(a/2, b/2, 0) * 0.999781)/(t * q) \\ \bar{\sigma}_x^1 &= \sigma_x^{(1)}(a/2, b/2, -h/2)/q & \bar{\sigma}_y^1 &= \sigma_y^{(1)}(a/2, b/2, -h/2)/q \\ \bar{\sigma}_x^2 &= \sigma_x^{(1)}(a/2, b/2, -2h/5)/q & \bar{\sigma}_y^2 &= \sigma_y^{(1)}(a/2, b/2, -2h/5)/q \\ \bar{\sigma}_x^3 &= \sigma_x^{(2)}(a/2, b/2, -2h/5)/q & \bar{\sigma}_y^3 &= \sigma_y^{(2)}(a/2, b/2, -2h/5)/q \\ \bar{\tau}_{xz}^1 &= \tau_{xz}^{(2)}(0, b/2, 0)/q & \bar{\tau}_{xz}^2 &= \tau_{xz}^{(2)}(0, b/2, -2h/5)/q \end{aligned} \quad (8.9)$$

Tabela 8.11. Deslocamento transversal e componentes de tensão adimensionalizados obtidos no estudo de verificação 9

Ref.	k	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
R=5										
[ref. 64] (10x10)	1	258.834	59.570	45.969	9.194	---	---	---	3.629	1.583
Presente (10x10)	1	258.8336	59.5704	45.9692	9.1938	38.2179	29.8914	5.9783	3.6289	1.5831
[ref. 65] (20x20)	1	258.8342	60.0881	46.3718	9.2744	38.4267	30.0523	6.0105	3.8804	1.7314
Presente (20x20)	1	258.8342	60.0881	46.3718	9.2744	38.4267	30.0523	6.0105	3.8804	1.7314
[ref. 65] (20x20)	5/6	267.1507	59.9246	45.9070	9.1814	38.7909	30.2055	6.0411	3.8675	1.7430
Presente (20x20)	5/6	267.1507	59.9246	45.9070	9.1814	38.7909	30.2055	6.0411	3.8675	1.7430
R=10										
[ref. 64] (10x10)	1	159.682	64.463	48.131	4.813	---	---	---	3.548	1.747
Presente (10x10)	1	159.6822	64.4631	48.1314	4.8131	43.3636	33.2797	3.3280	3.5483	1.7470
[ref. 65] (20x20)	1	159.4757	65.0473	48.5758	4.8576	43.5805	33.4408	3.3441	3.7918	1.9279
Presente (20x20)	1	159.4757	65.0473	48.5758	4.8576	43.5805	33.4408	3.3441	3.7918	1.9279
[ref. 65] (20x20)	5/6	167.4872	64.7566	47.6721	4.7672	44.2484	33.6886	3.3689	3.7697	1.9447
Presente (20x20)	5/6	167.4872	64.7566	47.6721	4.7672				3.7697	1.9447
R=15										
[ref. 64] (10x10)	1	122.150	65.876	47.540	3.169	---	---	---	3.491	1.816
Presente (10x10)	1	122.1499	65.8759	47.5395	3.1693	46.2623	34.8631	2.3242	3.4912	1.8158
[ref. 65] (20x20)	1	121.8709	66.4903	48.0001	3.2000	46.4797	35.0191	2.3346	3.7297	2.0192
Presente (20x20)	1	121.8709	66.4903	48.0001	3.2000	46.4797	35.0191	2.3346	3.7297	2.0192
[ref. 65] (20x20)	5/6	129.7105	66.1127	46.7050	3.1137	47.4140	35.3295	2.3553	3.6995	2.0400
Presente (20x20)	5/6	129.7105	66.1127	46.7050	3.1137	47.4140	35.3295	2.3553	3.6995	2.0400

Como os próprios resultados evidenciam, existe uma concordância total entre o modelo implementado e os resultados apresentados pela literatura revista.

- **Estudo de verificação 10:**

Mantendo o conceito de placa sandwich laminada, este estudo de verificação contemplou situações já referidas na literatura revista. No caso de estudo de Pandit et al. [66] foi considerada

uma teoria zigzag de ordem superior na modelação dos campos de deslocamentos de uma placa sandwich de três camadas laminadas com as orientações $0^\circ/0^\circ/0^\circ$. Já nos estudos reportados por Mantari e Soares [67] e por Pagano [68] foi considerado um laminado de três camadas com a orientação $0^\circ/90^\circ/0^\circ$, sendo que no primeiro caso o campo de deslocamentos contém funções hiperbólicas e no segundo caso trata-se da teoria de elasticidade 3-D. Nenhum destes estudos tidos como referência neste estudo de verificação referem a introdução de fator de correção de corte. Os resultados, em forma de desvios percentuais às respetivas referências, encontram-se na Tabela 8.12 e evidenciam que os desvios obtidos na modelação que não contempla a introdução do fator de correção de corte são notoriamente inferiores aos obtidos por aplicação deste fator de correção, à exceção dos casos onde $a/h = 100$.

Tabela 8.12. Desvios do deslocamento transversal máximo adimensional em relação à literatura, para diferentes elementos finitos, relações de aspeto e teorias de deformação de corte

	a/h	FSDT-FSDT-FSDT			FSDT-HSDT-FSDT			
		$\delta(\%)$	$\delta(\%)$	$\delta(\%)$	$\delta(\%)$	$\delta(\%)$	$\delta(\%)$	
		[ref. 66]	[ref. 67]	[ref. 68]	[ref. 66]	[ref. 67]	[ref. 68]	
Q4	sem k	4	1.03	-0.79	-1.10	0.26	-0.01	-0.33
		10	1.27	-0.14	-1.15	1.39	-0.08	-1.09
		100	-1.73	1.63	-0.39	-1.76	1.63	-0.37
	com k	4	16.96	11.36	11.01	1.51	4.15	3.83
		10	15.60	7.55	6.46	1.93	1.76	0.72
		100	-0.21	1.79	-0.22	-1.73	1.67	-0.34
Q9	sem k	4	-0.34	-1.68	-1.98	0.95	-0.91	2.40
		10	-0.01	-0.60	-1.60	0.15	-0.53	-1.54
		100	0.03	2.00	-0.01	0.07	2.00	-0.01
	com k	4	15.34	10.35	10.00	1.78	3.19	2.87
		10	---	6.99	5.90	---	1.27	0.24
		100	1.55	2.15	0.13	0.07	2.03	0.01

Na consideração de elementos finitos Q9, os desvios são menores em relação a Pandit et al. [66], pois este estudo de referência utilizou o mesmo tipo de elemento. Verifica-se ainda que com o aumento da razão de aspeto, os desvios diminuem na maioria dos estudos realizados. No que respeita à teoria de deformação de corte utilizada na modelação do campo de deslocamentos da camada central, nota-se menor desvio na aplicação da HSDT no núcleo em grande parte dos casos em que foi aplicado o fator de correção de corte. No que respeita aos desvios em relação à teoria de elasticidade 3-D utilizada por Pagano [68] verifica-se maior aproximação de resultados com elementos do tipo Q9 em placas com maior relação de aspeto. Apesar de este estudo ter conduzido a alguns desvios elevados, estes ocorreram essencialmente em baixas relações de aspeto e na aplicação da FSDT ao campo de deslocamentos referente ao núcleo. Ainda assim, e tendo em

consideração que nenhuma das três referências se baseia nem na FSDT nem na HSDT, os resultados permitem considerar os modelos aqui verificados como válidos.

A Figura 8.16 pretende evidenciar a influência da introdução do fator de correção de corte na resposta da placa para diferentes relações de aspecto e teorias de deformação de corte. Desta forma verifica-se que, a introdução de fator de correção de corte resulta em maiores deslocamentos transversais máximos, especialmente no caso FSDT-FSDT-FSDT e para menores relações de aspecto.

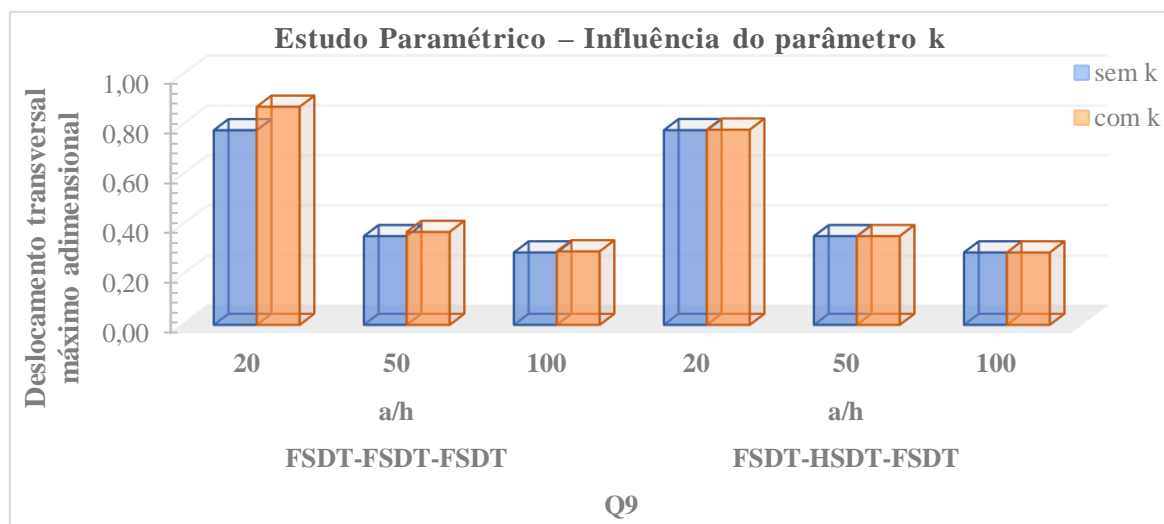


Figura 8.16. Influência da teoria de deformação de corte para diferentes relações de aspecto e teoria de deformação de corte na discretização de placas sandwich através de elementos Q9

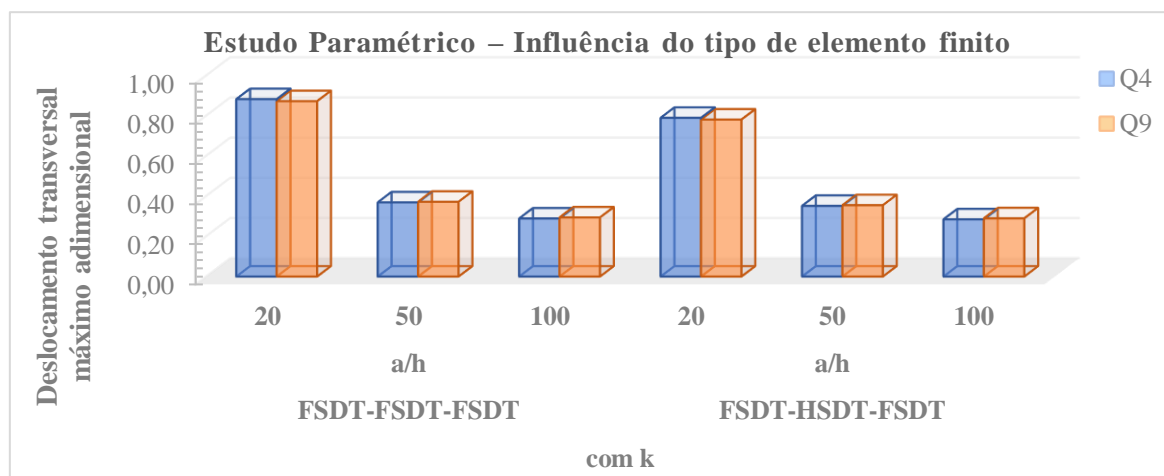


Figura 8.17. Influência do tipo de elemento finito para diferentes relações de aspecto e teorias de deformação de corte, contemplando a aplicação de fator de correção de corte

O gráfico exposto na Figura 8.17, que ilustra a influência do tipo de elemento finito no deslocamento transversal máximo para diferentes teorias de deformação de corte e razões de aspecto, demonstra que a utilização de elementos Q9 conduz a menores deslocamentos quando $a/h = 20$, contrariamente ao verificado para maiores relações de aspecto. No que respeita à teoria de

deformação de corte, a aplicação da HSDT no núcleo corresponde a menores deslocamentos transversais máximos, sendo a discrepância de resultados mais notória no caso correspondente a $a/h = 20$. Esta mesma constatação encontra-se evidenciada de forma mais clara na Figura 8.18.

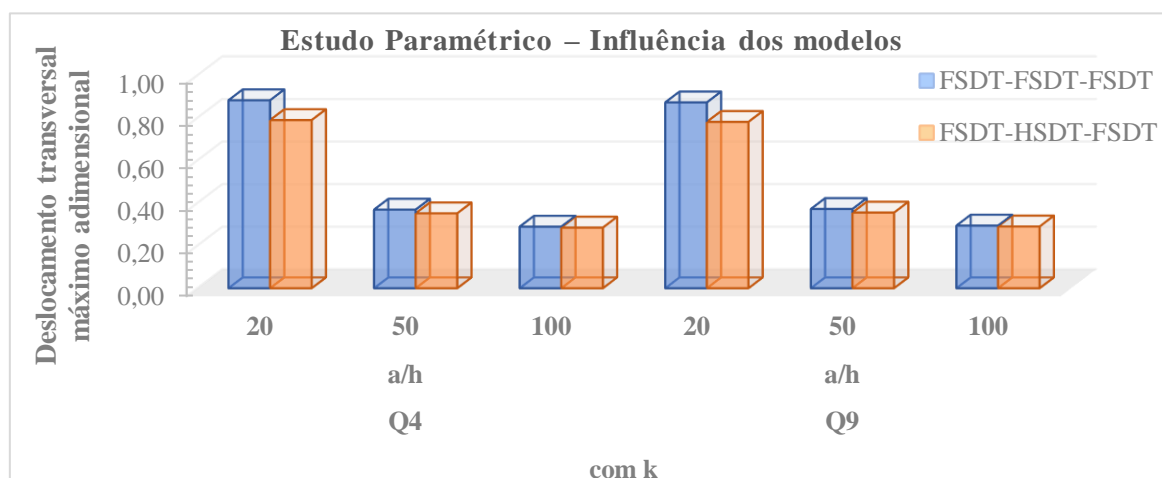


Figura 8.18. Influência da teoria de deformação de corte, da relação de aspecto e do tipo de elemento finito no deslocamento transversal máximo

8.1.2.1. Compósitos sandwich com gradiente funcional

- **Estudo de verificação 11:**

Neste estudo de verificação foi considerada uma placa sandwich quadrada, de lado 10m, de núcleo cerâmico e faces FGM Al/Al₂O₃, tal como ilustrado anteriormente na Figura 8.4. Nas Figura 8.19 e Figura 8.20 encontram-se ilustradas graficamente as evoluções da fração volúmica da alumina e do módulo de Young do compósito ao longo da espessura h , para diferentes configurações em espessura de acordo com as especificações da Tabela 8.7.

Os resultados adimensionalizados de acordo com a equação (8.3) encontram-se, juntamente com os referidos no estudo de Demirhan e Vaskin [62], registados na Tabela 8.13 para diferentes razões de aspecto (a/h) e expoentes da lei de potência, demonstrando a verificação dos modelos de cálculo implementados, sendo que mais uma vez os menores desvios surgem para maiores relações de aspecto, independentemente da teoria de deformação de corte aplicada ao núcleo.

Tal como em estudos de verificação expostos anteriormente, também neste se incluiu o estudo do comportamento do desvio da superfície neutra em relação à superfície média e do fator de correção de corte. Os gráficos das Figura 8.21 e Figura 8.22 ilustram o seu comportamento.

Note-se que na Figura 8.21 apenas se representam resultados correspondentes às configurações assimétricas, pois nas restantes a superfície neutra corresponde com a superfície média uma vez que apresentam simetria na distribuição material, independentemente do expoente p , o que corresponde a $d = 0$. Ainda a respeito do desvio da superfície neutra, d , o gráfico da Figura 8.21 mostra que este aumenta com o aumento do expoente da lei de potência, sendo este aumento mais brusco para valores

de p mais baixos. Além do que, tratando-se de placas com a mesma espessura total h , a configuração 2-1-1 resulta num maior desvio.

Quanto ao fator de correção de corte, cujo gráfico em função do expoente p se apresenta na Figura 8.22 para diferentes configurações, é notório o comportamento que a configuração 1-2-1 apresenta distinto das restantes configurações. Similarmente a estudos de apresentados anteriormente, excetuando a configuração 1-2-1, o fator de corte apresenta um comportamento crescente para expoentes inferiores a 2, expoente após o qual o fator de correção de corte diminui. No caso particular da configuração 1-2-1, essa diminuição só se verifica a partir do expoente 5. De notar ainda que o decréscimo é mais acentuado nas configurações 2-1-1 e 2-1-2.

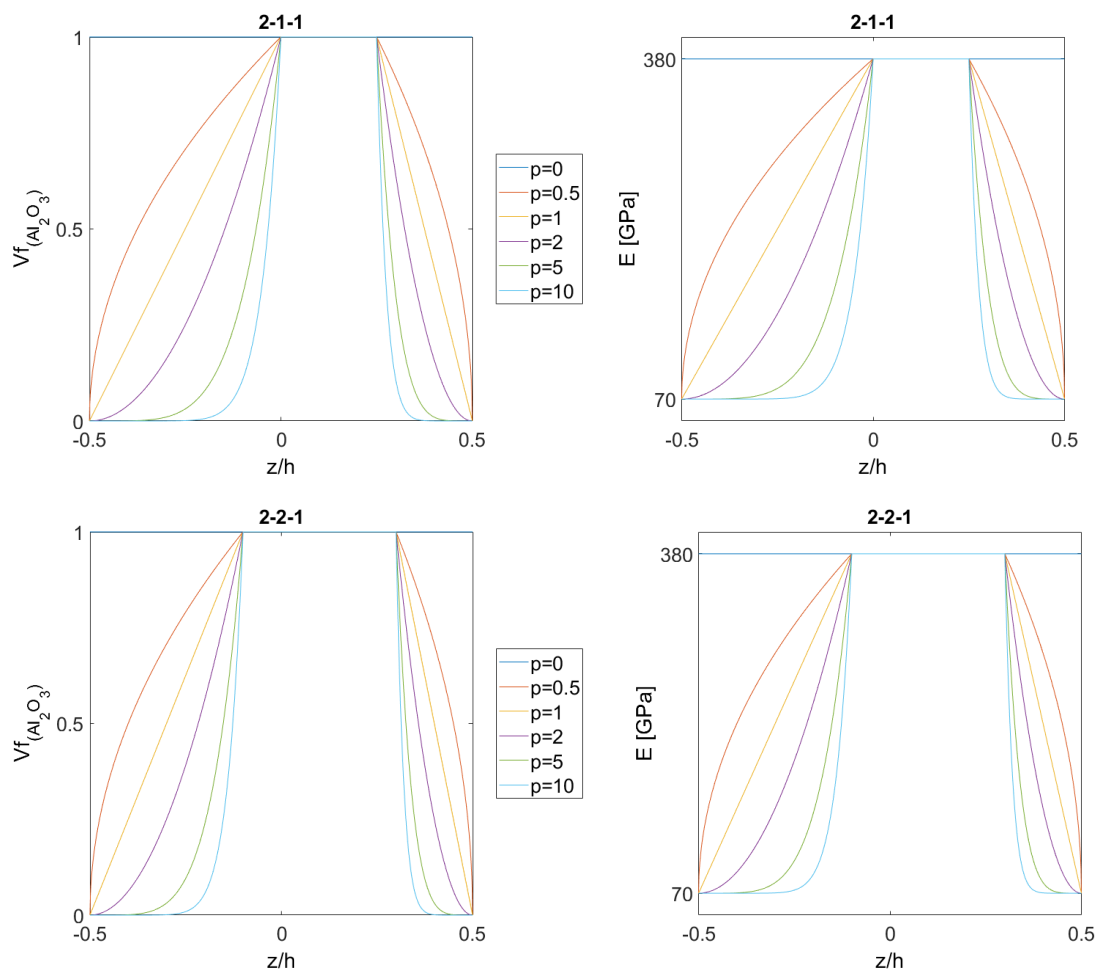


Figura 8.19. Fração volúmica da fase cerâmica do FGM em função da razão z/h , para diferentes expoentes e configurações de espessura – distribuições assimétricas

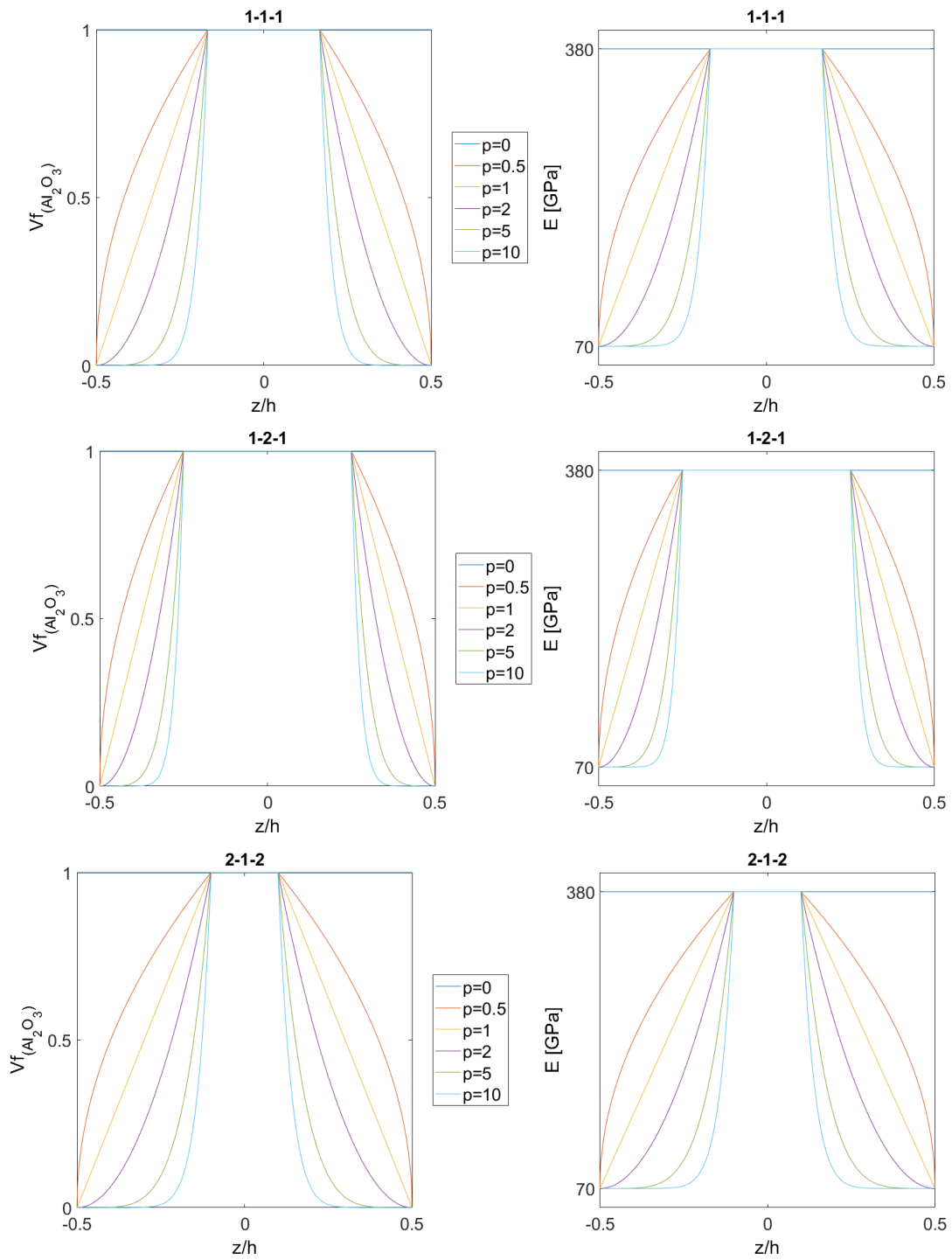


Figura 8.20. Fração volúmica da fase cerâmica do FGM em função da razão z/h , para diferentes expoentes e configurações de espessura – distribuições simétricas

Tabela 8.13. Deslocamento transversal máximo adimensionalizado – abordagem multicamada: (a) FSDT no núcleo; (b) HSDT no núcleo

	a/h	5			10			20		
		\bar{w} [ref. 62]	\bar{w} (a)	\bar{w} (b)	\bar{w} [ref. 62]	\bar{w} (a)	\bar{w} (b)	\bar{w} [ref. 62]	\bar{w} (a)	\bar{w} (b)
1-1-1	0	0.5354	0.5447	0.5305	0.4666	0.4678	0.4642	0.4494	0.4486	0.4477
	0.5	0.7980	0.8038	0.7967	0.7201	0.7198	0.7180	0.7006	0.6988	0.6983
	1	1.0244	1.0281	1.0255	0.9402	0.9389	0.9382	0.9191	0.9166	0.9163
	2	1.3562	1.3584	1.3611	1.2644	1.2622	1.2627	1.2417	1.2381	1.2382
	5	1.7995	1.8114	1.8130	1.6999	1.6985	1.6987	1.6735	1.6703	1.6702
	10	2.0085	2.0435	2.0327	1.9045	1.9087	1.9058	1.8785	1.8750	1.8741
1-2-1	0	0.5353	0.5485	0.5360	0.4666	0.4688	0.4656	0.4494	0.4488	0.4480
	0.5	0.7344	0.7443	0.7378	0.6590	0.6599	0.6582	0.6401	0.6388	0.6383
	1	0.8892	0.8973	0.8944	0.8093	0.8096	0.8088	0.7896	0.7877	0.7874
	2	1.0994	1.1057	1.1072	1.0153	1.0144	1.0147	0.9945	0.9916	0.9915
	5	1.3764	1.3781	1.3843	1.2845	1.2825	1.2838	1.2621	1.2586	1.2587
	10	1.5679	1.5193	1.5258	1.4296	1.4194	1.4207	1.3997	1.3945	1.3945
2-1-2	0	0.5354	0.5409	0.5258	0.4666	0.4669	0.4630	0.4494	0.4483	0.4474
	0.5	0.8457	0.8483	0.8400	0.7651	0.7639	0.7618	0.7449	0.7428	0.7422
	1	1.1302	1.1313	1.1275	1.0409	1.0387	1.0377	1.0186	1.0155	1.0153
	2	1.5608	1.5642	1.5641	1.4606	1.4580	1.4579	1.4356	1.4314	1.4314
	5	2.1141	2.1504	2.1349	1.9996	2.0039	1.9999	1.9710	1.9672	1.9662
	10	2.3398	2.4290	2.3801	2.2154	2.2324	2.2200	2.1843	2.1832	2.1800
2-1-1	0	0.5354	0.5496	0.5612	0.4666	0.4692	0.4722	0.4494	0.4489	0.4497
	0.5	0.8190	0.8282	0.8393	0.7386	0.7392	0.7420	0.7185	0.7169	0.7176
	1	1.0701	1.0765	1.0868	0.9813	0.9806	0.9831	0.9591	0.9565	0.9571
	2	1.4389	1.4454	1.4523	1.3393	1.3378	1.3394	1.3144	1.3108	1.3112
	5	1.9014	1.9375	1.9180	1.7872	1.7919	1.7869	1.7586	1.7555	1.7542
	10	2.0915	2.1781	2.1188	1.9674	1.9844	1.9693	1.9363	1.9358	1.9320
2-2-1	0	0.5354	0.5523	0.5459	0.4666	0.4698	0.4682	0.4494	0.4491	0.4486
	0.5	0.7667	0.7783	0.7758	0.6895	0.6908	0.6901	0.6701	0.6688	0.6686
	1	0.9574	0.9657	0.9658	0.8745	0.8745	0.8744	0.8537	0.8517	0.8516
	2	1.2270	1.2320	1.2348	1.1372	1.1358	1.1364	1.1148	1.1117	1.1118
	5	1.5763	1.5872	1.5864	1.4792	1.4783	1.4779	1.4549	1.4511	1.4508
	10	1.7432	1.7699	1.7573	1.6408	1.6438	1.6404	1.6154	1.6122	1.6112

(a) FSDT-FSDT-FSDT; (b) FSDT-HSDT-FSDT

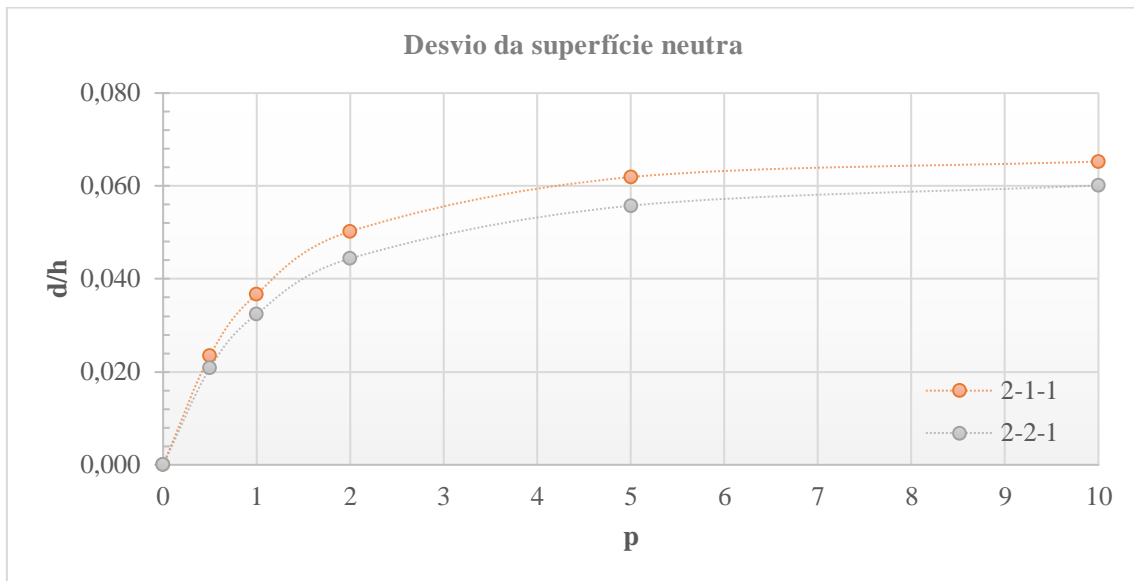


Figura 8.21. Desvio da superfície neutra (adimensionalizado) em função do expoente p , para diferentes configurações em espessura

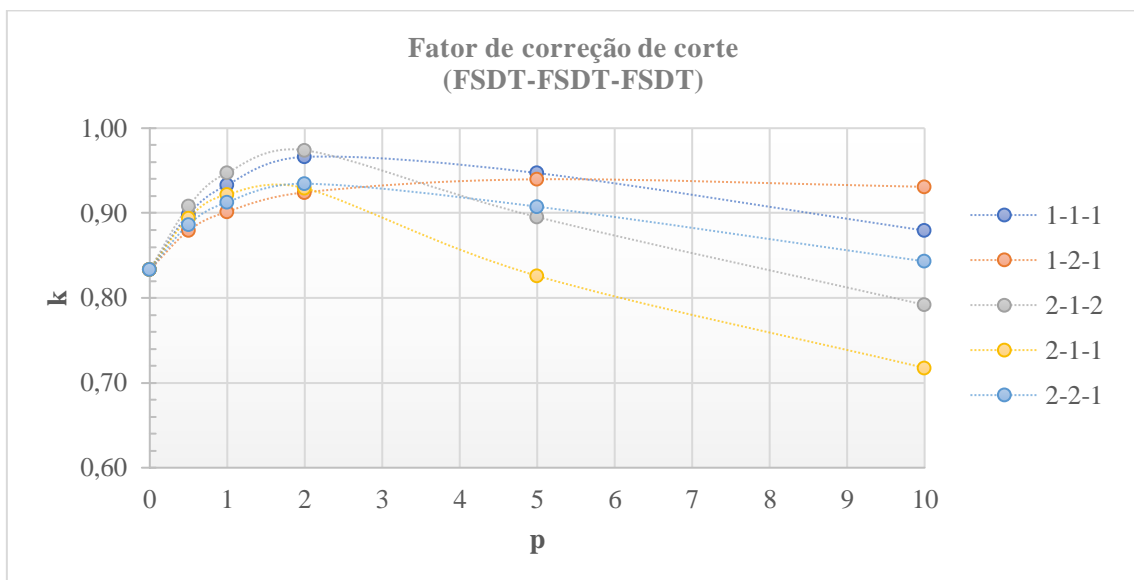


Figura 8.22. Fator de correção de corte aplicado às camadas FSDT em função do expoente p , para diferentes configurações em espessura

8.1.2.2. Compósitos com porosidades

No que diz respeito à abordagem multicamada, a pesquisa efetuada não permitiu encontrar literatura cujos estudos incluíssem o efeito da existência de porosidades no comportamento mecânico de placas compósitas sandwich, de modo que não foi possível realizar qualquer verificação neste âmbito. Na subsecção 8.3.3 serão apresentados estudos neste âmbito, realizados com base nas verificações anteriores.

8.1.3. Otimização

No que respeita à otimização, a metaheurística SFS abordada na secção 7.3 foi aplicada nos estudos efetuados. No entanto, tal como nos estudos apresentados anteriormente, também nos estudos de otimização é importante proceder à verificação e/ou verificação dos resultados. Para tal, existe um vasto leque de funções de *benchmark* disponíveis na literatura [69]. No presente trabalho considera-se a minimização de duas funções de *benchmark* com características distintas, uma unimodal e outra multimodal. Já no campo dos problemas de engenharia, considera-se o problema de minimização do peso de uma mola sujeita a determinadas restrições [12].

- **Estudo de verificação 12:**

Neste primeiro estudo de verificação no âmbito da otimização, optou-se por seleccionar a função Goldstein-Price dada a sua simplicidade, uma vez que se trata de uma função unimodal com duas variáveis de projeto [12]. Esta função, cuja expressão matemática se apresenta em (8.10), encontra-se representada na Figura 8.23.

$$f(x_1, x_2) = [1 + (x_1 + x_2 + 1)^2 \cdot (19 - 14x_1 + 3x_1^2 - 14x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2)] \cdot [30 + (2x_1 - 3x_2)^2 \cdot (18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2)] \quad (8.10)$$

De acordo com as indicações da literatura [69], as variáveis x_1 e x_2 são contínuas e tomam valores no intervalo $[-5,5]$. Como se referiu, trata-se de uma função unimodal, com mínimo global $f^* = 3$ localizado em $(x_1^*, x_2^*) = (0, -1)$.

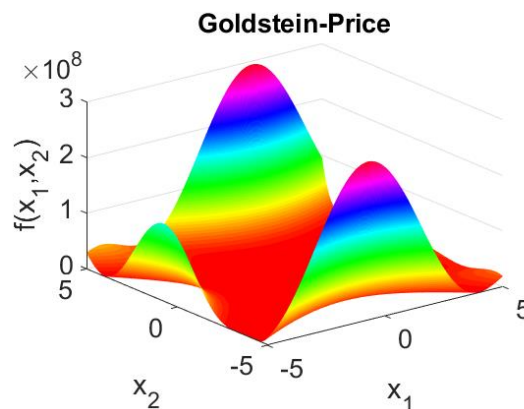


Figura 8.23. Gráfico da função de *benchmark* Goldstein-Price

Para a verificação do algoritmo SFS implementado foram feitas duas séries de 10 corridas com parametrizações distintas. Numa primeira série foram considerados 25 indivíduos (N), 10 difusões (MDN) e 20 gerações (G). Para verificar o modelo, foi realizada uma segunda série de corridas com os parâmetros citados na literatura [10], que correspondem a $N=100$, $MDN=1$ e $G=200$. Os ótimos obtidos em cada corrida de cada série encontram-se nas Tabela 8.14 e Tabela 8.15. No gráfico da Figura 8.24 encontra-se ilustrada a evolução do ótimo ao longo das 10 corridas da 1ª série,

acompanhada da representação por ordem decrescente dos mesmos. De modo a permitir uma comparação entre os resultados obtidos nas duas séries, uma vez que foram efetuadas com diferentes parametrizações, estes encontram-se ilustrados no gráfico da Figura 8.25.

Tabela 8.14. Resultados do estudo de verificação 10: 1ª série de corridas

Corrida	x_1^*	x_2^*	f^*
1	-0.004139	-0.973422	3.323854
2	0.028530	-0.981312	3.234551
3	-0.007975	-1.004205	3.016534
4	0.004348	-0.987748	3.057670
5	-0.013590	-1.008683	3.054288
6	-0.006910	-0.993791	3.037275
7	0.029323	-0.983933	3.221171
8	-0.024112	-0.987586	3.266752
9	-0.011542	-1.015144	3.096737
10	0.005907	-1.003712	3.019728
Valor ótimo^(*) [10]			3.0000
Média			3.132856
Desvio Padrão			0.116020

(*) Parâmetros: 100 indivíduos; MDN=1; 200 gerações

Tabela 8.15. Resultados do estudo de verificação 10: 2ª série de corridas

Corrida	x_1^*	x_2^*	f^*
1	-0.01272	-1.00709	3.0435
2	-0.01969	-1.00751	3.0915
3	-0.00612	-1.00156	3.0084
4	0.024716	-0.99041	3.1409
5	-0.00631	-1.00252	3.0094
6	0.003741	-0.99703	3.0049
7	0.001013	-1.00041	3.0004
8	-0.00307	-1.00076	3.0021
9	0.003859	-0.99378	3.0152
10	0.001096	-1.00421	3.0090
Valor ótimo^(*) [10]			3.0000
Média			3.0325
Desvio Padrão			0.04717

(*) Parâmetros: 100 indivíduos; MDN=1; 200 gerações

Os resultados demonstram uma boa concordância com o ótimo teórico e com a solução apresentada pela referência. De facto, aumentando o número de indivíduos e de gerações, reduzindo o número de difusões à unidade, obtém-se um valor ótimo médio mais próximo do valor exato.

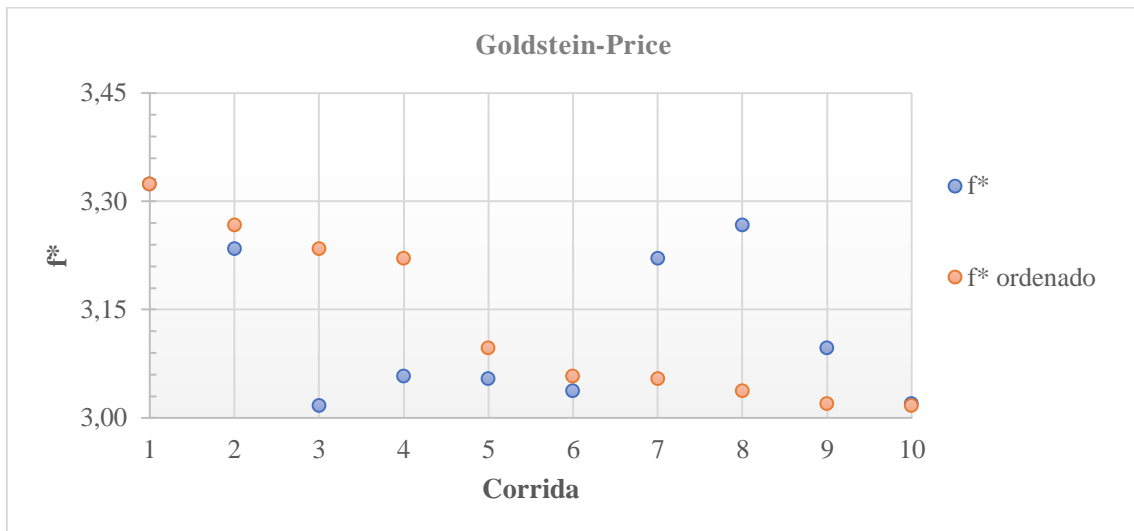


Figura 8.24. Gráfico dos ótimos observados na otimização da função de *benchmark* Goldstein-Price: 1ª série



Figura 8.25. Gráfico dos ótimos observados na otimização da função de *benchmark* Goldstein-Price: 1ª e 2ª séries

- **Estudo de verificação 13:**

Neste estudo de verificação, selecionou-se a função de Rastrigin. Tratando-se igualmente de uma função de *benchmark*, difere da anterior na medida em que é multimodal e permite um maior número de variáveis. No presente estudo de verificação, e para tornar a sua visualização possível através de um gráfico 3D, optou-se por considerar apenas duas variáveis (x_1 e x_2). Desta forma, a expressão matemática é da pela equação (8.11), encontrando-se a sua representação gráfica na Figura 8.26. A função Rastrigin contém um ótimo global nulo localizado na origem.

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 - 10 \cos(2\pi x_1) + 10). (x_2^2 - 10 \cos(2\pi x_2) + 10) \quad (8.11)$$

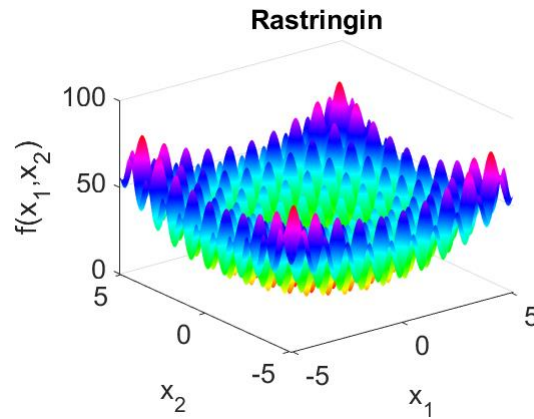


Figura 8.26. Gráfico da função de *benchmark* Rastrigin, reduzida a duas variáveis

Analogamente ao estudo de verificação anterior, procedeu-se a duas séries de 10 corridas cada, a primeira das quais parametrizada de igual forma à 1ª série do estudo anterior. Na segunda série, foram aplicados os parâmetros indicados na referência, de modo a permitir a verificação do algoritmo implementado. Os resultados encontram-se registados nas Tabela 8.16 e Tabela 8.17. Mantendo o procedimento do estudo antecedente, apresentam-se os gráficos das Figura 8.27 e Figura 8.28 com a evolução do ótimo ao longo das corridas na 1ª e 2ª séries para uma melhor visualização do estudo. No caso da função Rastrigin, os resultados da 1ª série apresentam maior exatidão do que os da 2ª série obtidos com maior número de indivíduos. De facto, tratando-se de um processo estocástico, este resultado não é de todo inesperado.

Tabela 8.16. Resultados do estudo de verificação 11: 1ª série de corridas

Corrida	x_1^*	x_2^*	f^*
1	-0.004712	-0.002419	0.005566
2	0.008362	0.006478	0.022192
3	-0.010964	-0.004263	0.027445
4	0.007890	0.001680	0.012908
5	0.011350	-0.008801	0.040910
6	0.042031	0.000324	0.348487
7	-0.026336	0.030501	0.321297
8	0.020964	0.018707	0.156412
9	0.004867	0.019339	0.078804
10	0.000697	-0.002245	0.001096
Valor ótimo^(*) [10]			0
Média			0.101512
Desvio Padrão			0.131412

(*) Parâmetros de busca: 100 indivíduos; MDN=1; 40 gerações

Tabela 8.17. Resultados do estudo de verificação 11: 2ª série de corridas

Corrida	x_1^*	x_2^*	f^*
1	0.002874	-0.000976	0.001827
2	-0.033521	0.018447	0.289549
3	0.011988	0.015776	0.077834
4	0.005654	0.006577	0.014923
5	-0.003236	0.010188	0.022664
6	0.000452	0.023883	0.112995
7	0.002648	-0.010242	0.022197
8	-0.006006	0.008648	0.021990
9	-0.006420	-0.004079	0.011477
10	-0.002974	0.002859	0.003376
Valor ótimo^(*) [10]			0
Média			0.057883
Desvio Padrão			0.088831

(*) Parâmetros de busca: 100 indivíduos; MDN=1; 40 gerações

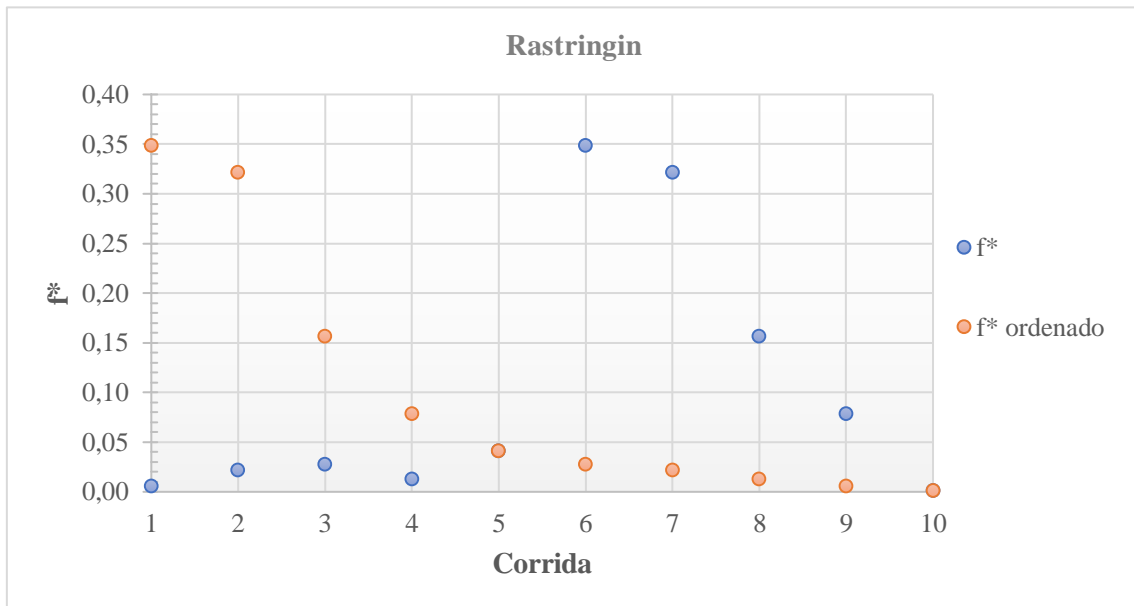


Figura 8.27. Gráfico dos ótimos observados na otimização da função de *benchmark* Rastringin: 1ª série

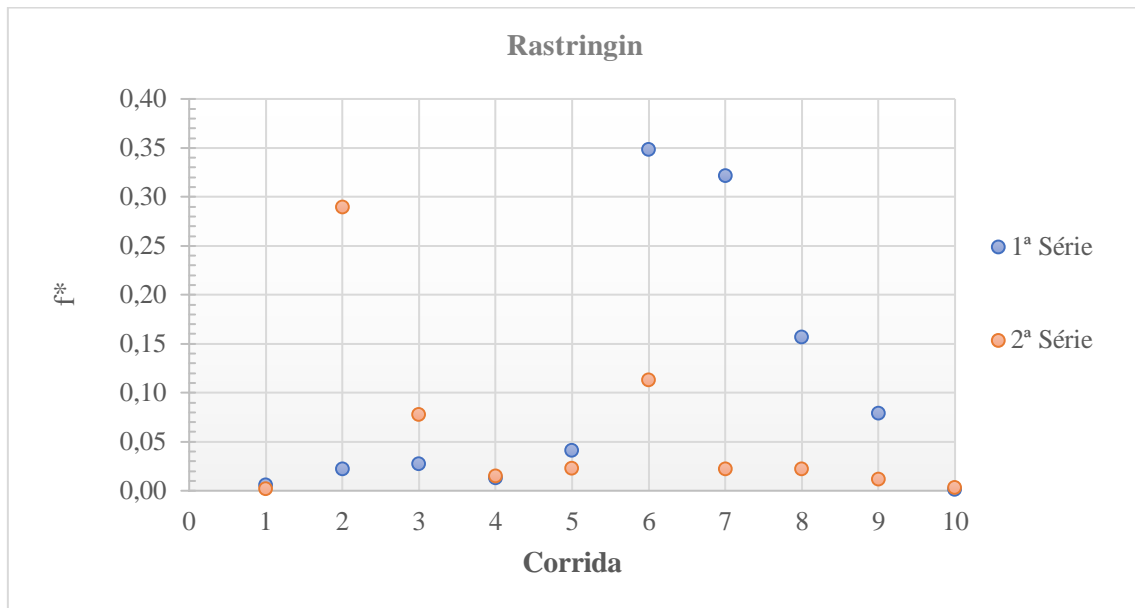


Figura 8.28. Gráfico dos ótimos observados na otimização da função de *benchmark* Rastrigin: 1ª e 2ª séries

Os resultados dos estudos de otimização respeitantes a funções de *benchmark* permitem verificar o algoritmo implementado na otimização de funções uni e multimodais com diferente número de variáveis. O estudo que se segue pretende avaliar, através da sua verificação, o desempenho do mesmo algoritmo na resolução de um problema de engenharia extensivamente estudado na literatura de otimização.

- **Estudo de verificação 14:**

Um problema de engenharia disponível para testes de verificação consiste na mola de tensão/compressão ilustrada na Figura 8.29. Este caso de estudo foi descrito por Belengdu [70], sendo o objetivo a minimização do peso da mola, restringida não só pelas próprias variáveis de projeto (w , d e L) como também pela deflexão mínima, pela tensão de corte, pela frequência de vibração e pelo diâmetro exterior.

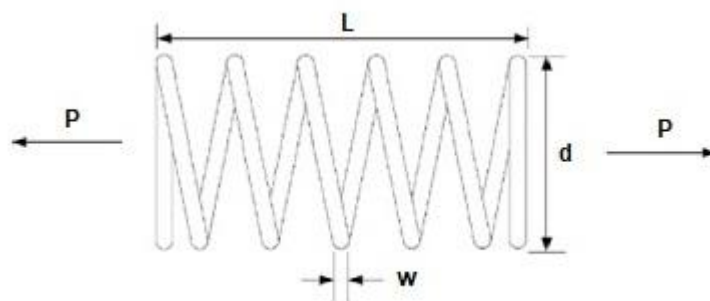


Figura 8.29. Esquema de uma mola de tensão/compressão

O problema descrito pode então ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar: } f(w, d, L) = (L + 2).w^2.d \\
 &\text{Sujeita a:} \\
 &g_1 = 1 - \frac{d^3 L}{71785w^4} \leq 0 \\
 &g_2 = \frac{d(4d - w)}{12566w^3(d - w)} + \frac{1}{5108w^2} - 1 \leq 0 \\
 &g_3 = 1 - \frac{140.45w}{d^2 L} \leq 0 \\
 &g_4 = \frac{2(w + d)}{3} - 1 \leq 0 \\
 &0.05 \leq w \leq 2.0 \\
 &0.25 \leq d \leq 1.3 \\
 &2.0 \leq L \leq 15.0
 \end{aligned} \tag{8.12}$$

onde as variáveis de projeto w , d e L são, respetivamente, o diâmetro do fio, o diâmetro médio e o comprimento da mola. Este problema de otimização foi resolvido por vários investigadores através de diversos métodos, dos quais são exemplo os trabalhos de Belengdu [70], que aplicou métodos de programação matemática, e de Coello e Montes que utilizaram um algoritmo para a sua resolução [71]. Segundo estes estudos a solução ótima, que conduz ao peso mínimo de 0.012665, obtém-se quando as variáveis de projeto assumem os valores $w^* = 0.051689$, $d^* = 0.356718$ e $L^* = 11.288966$.

Para a verificação do algoritmo SFS implementado neste trabalho, na resolução deste problema de engenharia mantiveram-se os parâmetros de otimização já considerados nos estudos anteriores para a primeira série de corridas, tendo-se aplicado os parâmetros referidos no estudo de referência na segunda série. Os resultados obtidos em ambas as séries foram registados nas Tabela 8.18 e Tabela 8.19 e a exposição gráfica dos mesmos encontra-se nas Figura 8.30 e Figura 8.31. Tanto na 1ª como na 2ª série de 10 corridas, os respetivos ótimos encontram-se muito próximos da solução de referência, sendo que na 2ª série a média dos ótimos apresenta menor desvio em relação a esta.

Como resumo dos estudos de verificação neste campo, pode-se assumir que o algoritmo de otimização foi verificado, sendo válido para diferentes casos com diferentes graus de complexidade na medida em que os resultados obtidos mostraram concordância com os resultados teóricos e/ou de referência. De uma forma geral, os diferentes estudos de verificação apresentados na secção 8.1 permitem confirmar que os modelos computacionais estão aptos para a sua aplicação a diferentes materiais e abordagens.

Tabela 8.18. Resultados obtidos na resolução do problema de engenharia: 1ª série

Corrida	w^*	d^*	L^*	f^*
1	0.050124	0.318740	14.479678	0.013197
2	0.050135	0.318624	14.032890	0.012840
3	0.056733	0.482914	6.739136	0.013583
4	0.053704	0.394143	10.299612	0.013981
5	0.053692	0.406127	9.118116	0.013017
6	0.054474	0.422048	8.590216	0.013263
7	0.054753	0.434465	7.944012	0.012952
8	0.053638	0.394655	9.682392	0.013264
9	0.050788	0.334513	12.863362	0.012825
10	0.054833	0.430611	8.563865	0.013677
Ótimo^(*) [10]	0.051689	0.356718	11.288966	0.012665
			Média	0.013260
			Desvio Padrão	0.000383

(*) Parâmetros de busca: MDN=1; 30 corridas

Tabela 8.19. Resultados obtidos na resolução do problema de engenharia: 2ª série

Corrida	w^*	d^*	L^*	f^*
1	0.051706	0.353008	11.875104	0.013095
2	0.051575	0.351105	11.826276	0.012913
3	0.056446	0.479981	6.619313	0.013182
4	0.050836	0.335490	12.932179	0.012946
5	0.053196	0.392704	9.604582	0.012896
6	0.051073	0.341026	12.348914	0.012764
7	0.052098	0.363442	11.217637	0.013038
8	0.050010	0.315062	14.362467	0.012893
9	0.050546	0.329366	13.285945	0.012863
10	0.053915	0.410301	8.806385	0.012889
Ótimo^(*) [10]	0.051689	0.356718	11.288966	0.012665
			Média	0.012911
			Desvio Padrão	0.000110

(*) Parâmetros de busca: MDN=1; 30 corridas

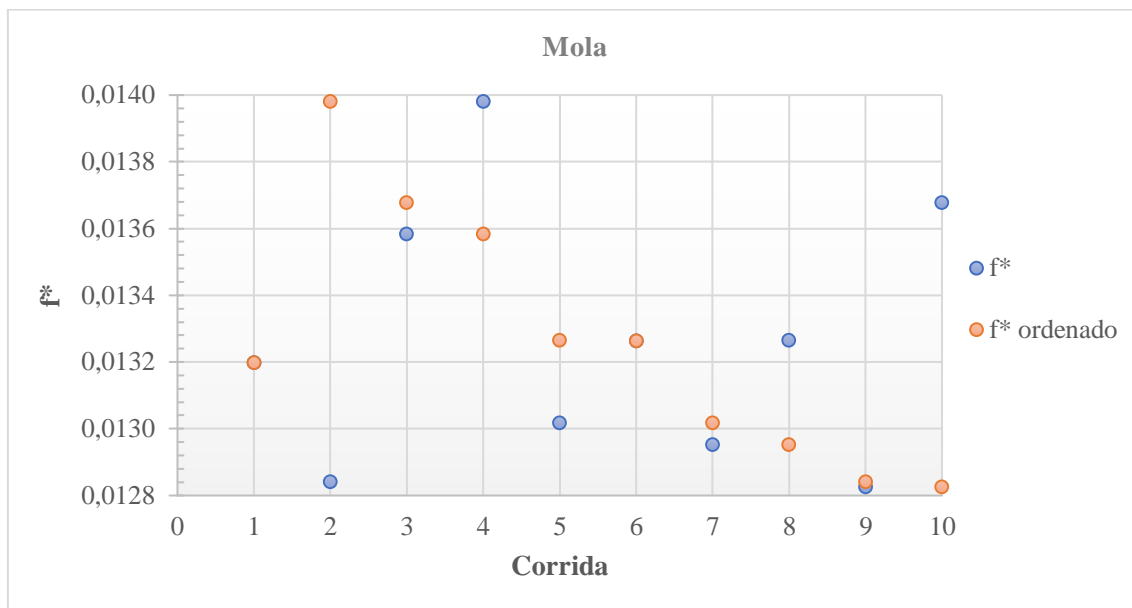


Figura 8.30. Gráfico dos ótimos observados na otimização da aplicação de engenharia (mola): 1ª série

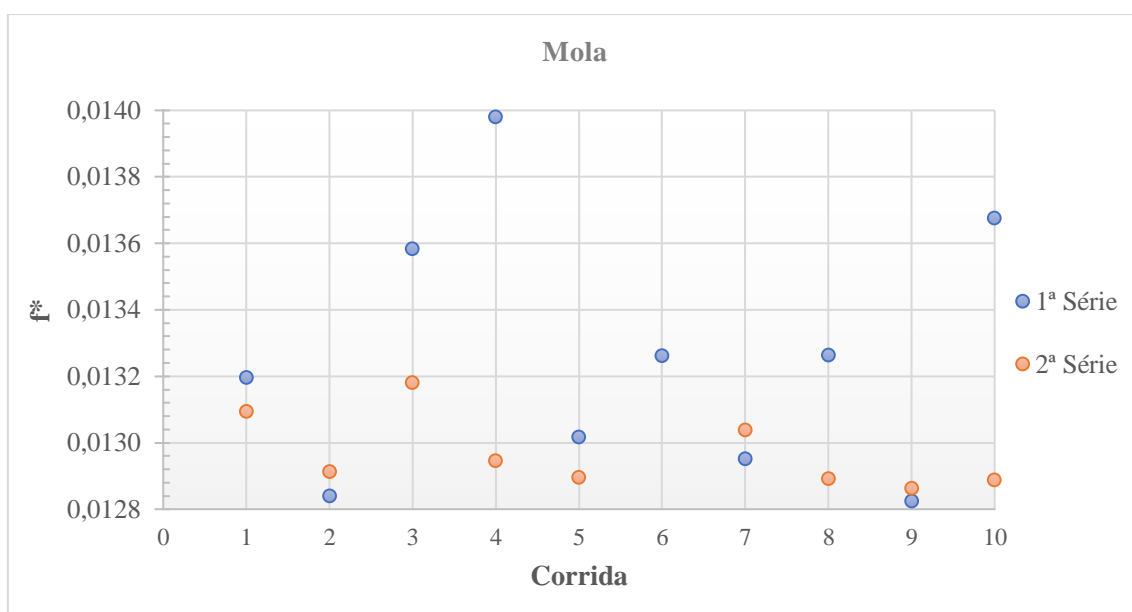


Figura 8.31. Gráfico dos ótimos observados na otimização da aplicação de engenharia (mola): 1ª e 2ª séries

8.2. Casos de estudo: Abordagem camada única equivalente

Uma vez verificado o modelo computacional para modelação e estudo de placas compósitas FGM através da abordagem de camada única equivalente, a presente secção inclui diversos estudos numéricos neste contexto. Numa primeira subsecção, os casos de estudo apresentados focam-se na influência da função de distribuição de fração volúmica na resposta mecânica de FGPs. De seguida, numa subsecção subordinada a compósitos reforçados com nanotubos de carbono, apresentam-se

estudos de influência da fração mássica de MWCNTs no módulo de Young de compósitos de matriz polimérica. Mantendo o mesmo material compósito, e dando continuidade ao tema das porosidades, consequentes dos processos de fabrico, surge uma subsecção onde se expõem os estudos efetuados neste âmbito, nomeadamente acerca da influência do tipo de distribuição e fração volúmica das porosidades consideradas. Para este fim foram simuladas situações correspondentes a ensaios mecânicos de acordo com normas ASTM ([72], [73]).

Salvo indicação em contrário, os casos expostos nesta secção consideram placas com características geométricas (320/3 mm x 13 mm x 4mm) associadas aos provetes normalizados de acordo com as normas ASTM D7264 / D [72] e ASTM D 3039 / D 3039M [73], correspondentes a ensaios de tração e de flexão em três pontos, respetivamente. Nas Figura 8.32 e Figura 8.33 encontram-se representadas esquematicamente as situações de carregamento correspondentes a estes dois ensaios, de acordo com o estipulado pelas respetivas normas.

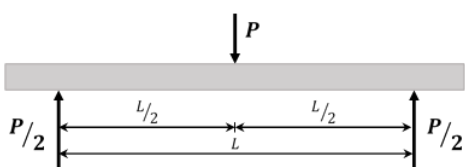


Figura 8.32. Diagrama de carga para ensaio de flexão em 3 pontos



Figura 8.33. Diagrama de carga para ensaio de tração

Apesar da componente experimental não constituir um objetivo deste trabalho, considera-se importante o estudo de situações de ensaio padrão, na medida em que poderão facilitar não só a sua replicação como também a comparação de resultados entre investigadores em contexto numérico e/ou experimental [25].

8.2.1. Compósitos com gradiente funcional

Uma vez testado e verificado o modelo computacional para caracterização dos deslocamentos transversais de uma placa FGM Al/Al₂O₃, procedeu-se ao estudo da mesma placa considerando diferentes distribuições de fração volúmica das fases constituintes. Com este intuito, desenvolveram-se três modelos para representação da distribuição de fração volúmica.

As placas modeladas nestes estudos são quadradas de lado unitário, considerando-se simplesmente apoiadas e sujeitas a uma carga uniformemente distribuída com 1MPa de magnitude. A placa foi discretizada numa malha de 10x10 elementos finitos do tipo Q4, sendo o campo de deslocamento descrito pela FSDT. Os modelos de fração volúmica e respetivos resultados obtidos encontram-se expostos de seguida.

- **Caso de estudo 1:**

- **Modelo A:**

Neste primeiro modelo, a fração volúmica do alumínio evolui ao longo da espessura de acordo com a lei de potência formulada em (8.13). Os gráficos da Figura 8.34 ilustram a evolução da fração volúmica do alumínio e do módulo de Young do compósito ao longo da espessura da placa. Na Tabela 8.20 encontram-se os resultados referentes ao fator de correção de corte e deslocamento transversal máximo obtidos para diferentes relações de aspeto. O deslocamento máximo encontra-se na forma adimensionalizada por aplicação da expressão (8.3). Uma vez que se trata de uma distribuição material simétrica em relação à superfície média ($z = 0$), o desvio da superfície neutra é nulo, independentemente do expoente da lei de potência e da razão a/h .

$$Vf_{(Al)}(z) = \begin{cases} \left(\frac{2z}{h} + 1\right)^p, & -\frac{h}{2} \leq z < 0 \\ \left(-\frac{2z}{h} + 1\right)^p, & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases} \quad (8.13)$$

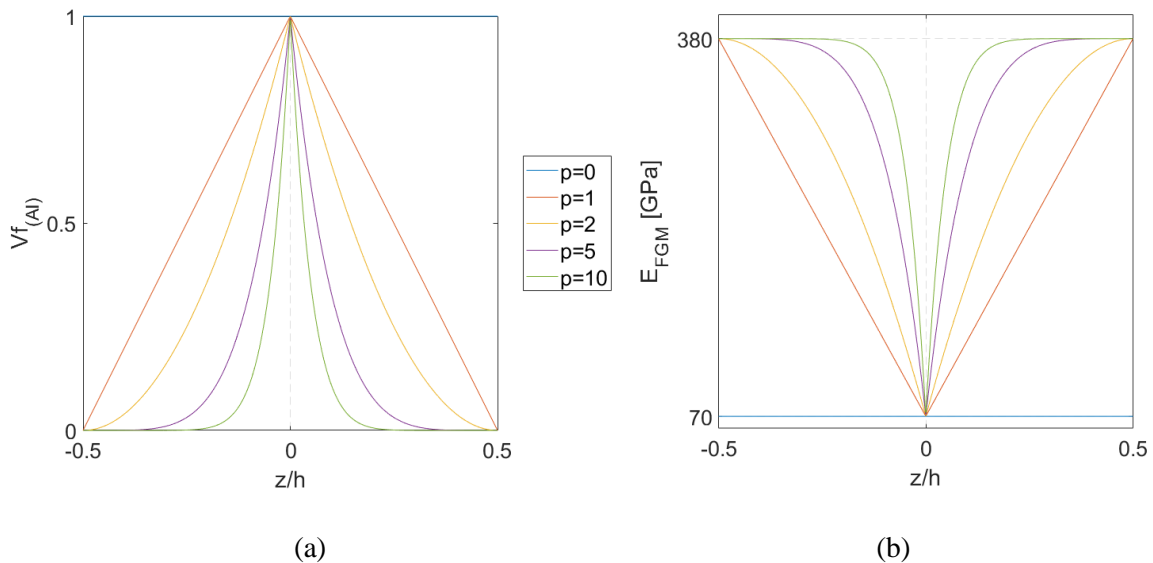


Figura 8.34. Distribuição material ao longo da espessura de acordo com o modelo A: (a) evolução da fração volúmica do alumínio; (b) evolução do módulo de Young do compósito FGM

Como esperado, o fator de correção de corte apresenta o mesmo comportamento já registado e observado nos estudos de verificação. Quanto ao deslocamento transversal máximo, apresenta um comportamento decrescente à medida que o expoente da lei de potência aumenta. Este comportamento encontra-se de acordo com a rigidez do material, que aumenta com o aumento do expoente.

Tabela 8.20. Fator de correção de corte e deslocamento transversal – Modelo A

a/h		10	20
p	k	\bar{w}	\bar{w}
0 (Al)	5/6	2.5271	2.4320
1	0.5730	0.6128	0.5698
2	0.5775	0.5277	0.4930
3	0.5973	0.5019	0.4712
4	0.6177	0.4904	0.4621
5	0.6362	0.4841	0.4576
6	0.6524	0.4803	0.4549
7	0.6664	0.4777	0.4533
8	0.6787	0.4759	0.4522
9	0.6894	0.4746	0.4515
10	0.6987	0.4735	0.4509
∞ (Al ₂ O ₃)	5/6	0.4655	0.4480

○ **Modelo B:**

A proporção áurea, ou número de ouro, encontra-se presente nos mais diversos fenômenos naturais tais como a disposição das sementes num girassol e a espiral descrita nas conchas de vários moluscos. Mas a presença deste número especial não se resume à Natureza, também na arte ele surge de forma abundante, nomeadamente nas obras de Vitruvius, Leonardo da Vinci e Salvador Dalí, entre outros. Conhecido desde a Antiguidade, o número de ouro surge permanentemente nas mais diversas áreas, pelo que ficou conhecido ao longo dos tempos também por divina proporção ou proporção áurea. Leonardo da Vinci contribuiu de forma exímia em diversas áreas do conhecimento, onde se incluem não só a matemática e a físico-química, como também a engenharia, pintura e arquitetura, entre outras. Da Vinci deu continuidade aos estudos de Vitruvius acerca da beleza, aplicando-lhes o seu conhecimento científico das proporções humanas. Surgiu então a obra O Homem de Vitruvius, ilustrada na Figura 8.35, onde a representação do ser humano se encontra inscrita num quadrado e num círculo, simultaneamente [74].

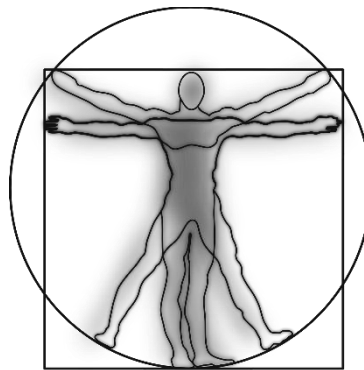


Figura 8.35. Ilustração da obra “O Homem de Vitruvius” [75]

Atendendo a que o número de ouro pode ser descrito como a razão entre os comprimentos de dois segmentos de reta (\overline{AX} e \overline{XB}) que verificam a igualdade traduzida pela equação (8.14) [74], generalizando este conceito para uma direção genérica, cuja ilustração se encontra na Figura 8.36, vem que a abcissa x do ponto X é dada por:

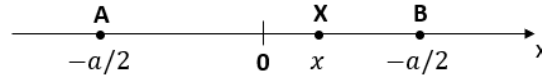


Figura 8.36. Representação em reta real para analogia com o de número de ouro

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \quad (8.14)$$

$$x = \frac{a}{2} \cdot \frac{\Phi - 1}{\Phi + 1}, \quad \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (8.15)$$

Como esta breve descrição pretende demonstrar, a proporção áurea representa uma característica deveras especial e presente nas mais diversas áreas. Por este motivo apresenta-se neste trabalho a sua aplicação à distribuição de fração volúmica de um material num compósito FGM, a qual julga-se inovadora na medida em que não foi encontrada referenciada na literatura que envolve este tema.

Aplicando este conceito à direção da espessura de uma placa, z , a fração volúmica de uma fase de um FGM bifásico, pode ser expressa pela função por ramos (8.16) onde h representa a espessura da placa.

$$Vf_{(A)}(z) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi + 1}{h \cdot \Phi} \cdot \left(z + \frac{h}{2} \right) \right)^p, & -\frac{h}{2} \leq z < \frac{h}{2} \cdot \frac{\Phi - 1}{\Phi + 1} \\ \left(\frac{\Phi + 1}{h} \cdot \left(\frac{h}{2} - z \right) \right)^p, & \frac{h}{2} \cdot \frac{\Phi - 1}{\Phi + 1} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases} \quad (8.16)$$

A fração volúmica referente ao alumínio, expressa por (8.16) e o módulo de Young do FGM considerado para este estudo encontram-se representados na Figura 8.37, evidenciando-se a sua evolução ao longo da espessura da placa para diferentes expoentes.

Este estudo contemplou diferentes expoentes da lei de fração volúmica e diferentes razões de aspeto. Os respetivos deslocamentos transversais máximos adimensionalizados por (8.3) encontram-se registados na Tabela 8.21, assim como os valores obtidos para o desvio da superfície média e fator de correção de corte. Na Figura 8.38 encontra-se o gráfico do comportamento do desvio da superfície neutra em função do expoente da lei de potência. O gráfico da Figura 8.39 pretende auxiliar a comparação entre as evoluções do fator de correção de corte com o aumento do expoente da lei de potência observadas por aplicação dos modelos A e B de fração volúmica.

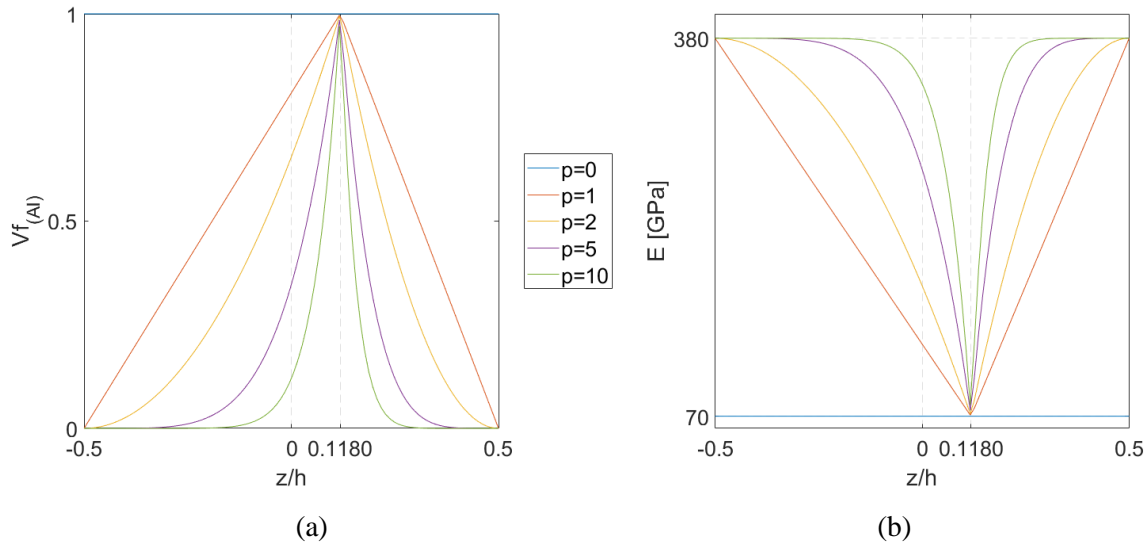


Figura 8.37. Distribuição material ao longo da espessura de acordo com o modelo B: (a) evolução da fração volúmica do alumínio); (b) evolução do módulo de Young do compósito FGM

Tabela 8.21. Desvio da superfície neutra, Fator de correção de corte e deslocamento transversal resultantes da aplicação do modelo B

a/h		10			20		
p	d/h	k	\bar{w}				
0 (Al)	0	5/6	2.5271	2.4320			
1	-0.0271	0.5857	0.6234	0.5813			
2	-0.0220	0.5923	0.5361	0.5023			
3	-0.0181	0.6133	0.5091	0.4791			
4	-0.0153	0.6342	0.4966	0.4691			
5	-0.0133	0.6528	0.4897	0.4638			
6	-0.0117	0.6688	0.4853	0.4606			
7	-0.0104	0.6826	0.4823	0.4585			
8	-0.0094	0.6944	0.4801	0.4570			
9	-0.0086	0.7047	0.4784	0.4559			
10	-0.0079	0.7136	0.4771	0.4550			
∞ (Al ₂ O ₃)	0	5/6	0.4655	0.4480			

No que diz respeito aos deslocamentos transversais máximos adimensionais, observados nos casos de estudo referentes aos modelos A e B, verifica-se que estes diminuem com o aumento do expoente da lei de potência. Esta observação encontra-se de acordo com a distribuição de fração volúmica na medida em que o aumento do expoente p corresponde a um aumento da fração volúmica de alumina, o que se traduz num aumento da rigidez do compósito. Constatou-se ainda que os deslocamentos transversais máximos adimensionais obtidos no modelo B encontram-se acima dos observados no modelo A, para todos os expoentes e relações de aspeto considerados. No entanto, há

que ter em conta que estes resultados correspondem a uma situação de carregamento uniformemente distribuído. Assim sendo, estes resultados revelam ainda que o modelo B de distribuição de fração volúmica pode constituir uma forma de adaptação da distribuição de material ao carregamento a que a estrutura poderá ser sujeita.

Os resultados respeitantes ao desvio da superfície neutra permitem verificar a ocorrência de um afastamento entre a superfície neutra e a superfície média para expoentes entre 0 e 1, voltando estas a aproximarem-se para expoentes superiores. Este desvio tende para zero quando $p \rightarrow \infty$. Os valores negativos justificam-se pelo facto da superfície composta totalmente por alumínio se encontrar numa cota acima da superfície média, pois a superfície neutra tende a desviar-se da superfície média no sentido da maior rigidez.

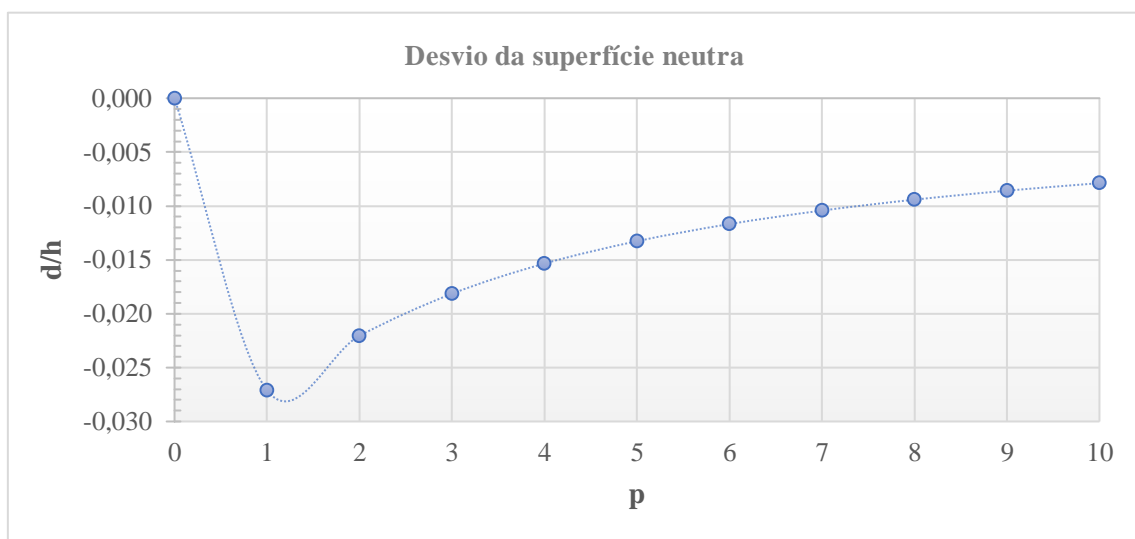


Figura 8.38. Gráfico do desvio da superfície neutra em relação à superfície média para a distribuição de fração volúmica definida pelo modelo B

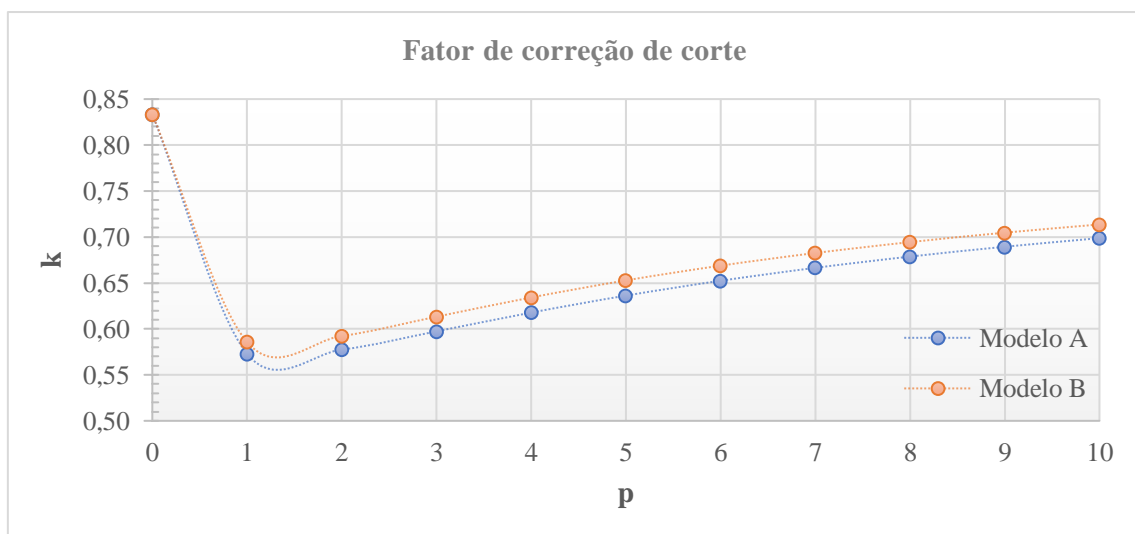


Figura 8.39. Gráfico da evolução do fator de correção de corte em função do expoente da lei de potência para os modelos A e B de distribuição de fração volúmica

○ **Modelo C:**

O último dos modelos implementados neste contexto refere-se a uma distribuição de fração volúmica dada pela expressão (8.17), onde z representa a distância de um ponto à superfície média de uma placa de espessura h , e os parâmetros c , d e p permitem caracterizar o modo de evolução da fração volúmica. Este modelo foi inspirado na resposta de um sistema de um grau de liberdade em situação de vibração livre sub-amortecida, onde o termo exponencial influencia o amortecimento e o argumento da função trigonométrica está relacionado com a frequência natural amortecida. As alterações feitas a este modelo prendem-se com o facto de, tratando-se de uma fração volúmica, não serem admissíveis valores negativos e de a variável z ter por domínio o intervalo $[-h/2, h/2]$, onde h representa a espessura da placa.

$$V_{f(A)}(z) = \left[e^{-c\pi\left(\frac{z}{h}\right)^2} \cdot \cos^2 \left(d\pi \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right) \right]^p \quad (8.17)$$

De modo a analisar o efeito que o coeficiente e frequência de amortecimento provocam na resposta mecânica de uma placa compósita FGM, procedeu-se ao estudo de três casos distintos, designados por modelos C1, C2 e C3, onde a fração volúmica do alumínio foi modelada por diferentes parametrizações aplicadas à expressão (8.17). De seguida apresentam-se as três parametrizações aplicadas acompanhadas por gráficos que evidenciam o modo de evolução da fração volúmica do alumínio. Os resultados obtidos para os diferentes modelos apresentam-se no final, na Tabela 8.22 e Figura 8.43, de modo a facilitar a interpretação dos mesmos.

▪ **Modelo C1:**

Neste primeiro modelo, os parâmetros c e d assumiram os valores 3 e 14, respetivamente. Desta forma a fração volúmica do alumínio na FGP vem dada por (8.18). Na Figura 8.40 encontram-se representados graficamente os comportamentos da fração volúmica do alumínio e do módulo de Young do compósito considerado ao longo da espessura da FGP.

$$V_{f(Al)}(z) = \left[e^{-3\pi\left(\frac{z}{h}\right)^2} \cdot \cos^2 \left(14\pi \cdot \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right) \right]^p \quad (8.18)$$

▪ **Modelo C2:**

Numa segunda parametrização, mantendo-se o valor de d , reduziu-se o parâmetro c de 3 para 2, de modo que a fração volúmica do alumínio ao longo da espessura é dada pela expressão (8.19). Fazendo analogia com a expressão associada ao fenómeno físico na qual este modelo se inspirou, esta alteração traduz-se numa redução do fator de amortecimento. Os gráficos relativos à fração volúmica da fase metálica e módulo de Young do FGM encontram-se na Figura 8.41.

$$V_{f(Al)}(z) = \left[e^{-2\pi\left(\frac{z}{h}\right)^2} \cdot \cos^2 \left(14\pi \cdot \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right) \right]^p \quad (8.19)$$

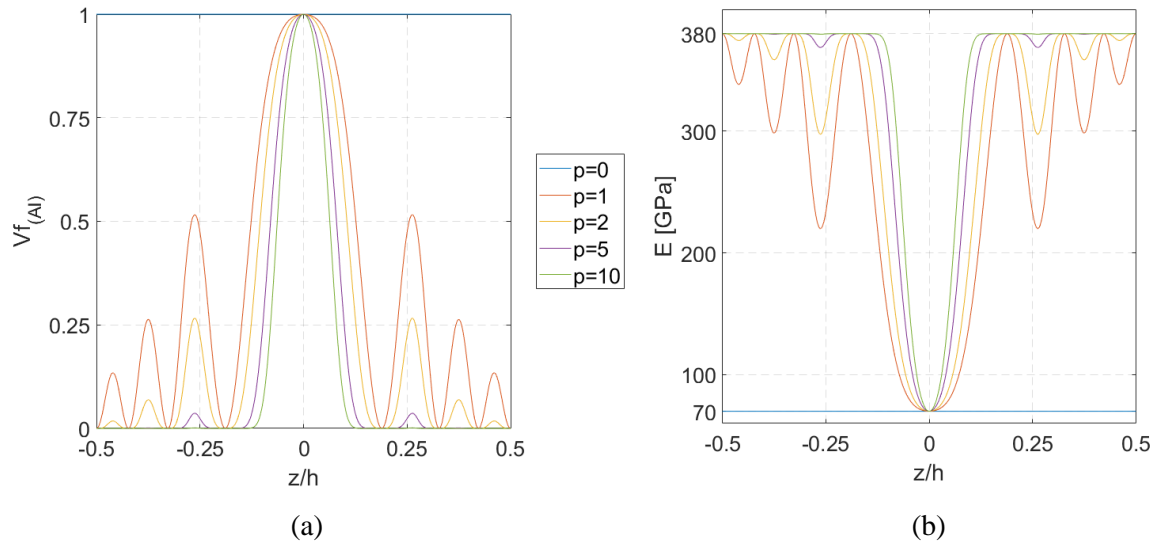


Figura 8.40. Distribuição material ao longo da espessura de acordo com o modelo C1: (a) evolução da fração volúmica do alumínio; (b) evolução do módulo de Young do compósito FGM

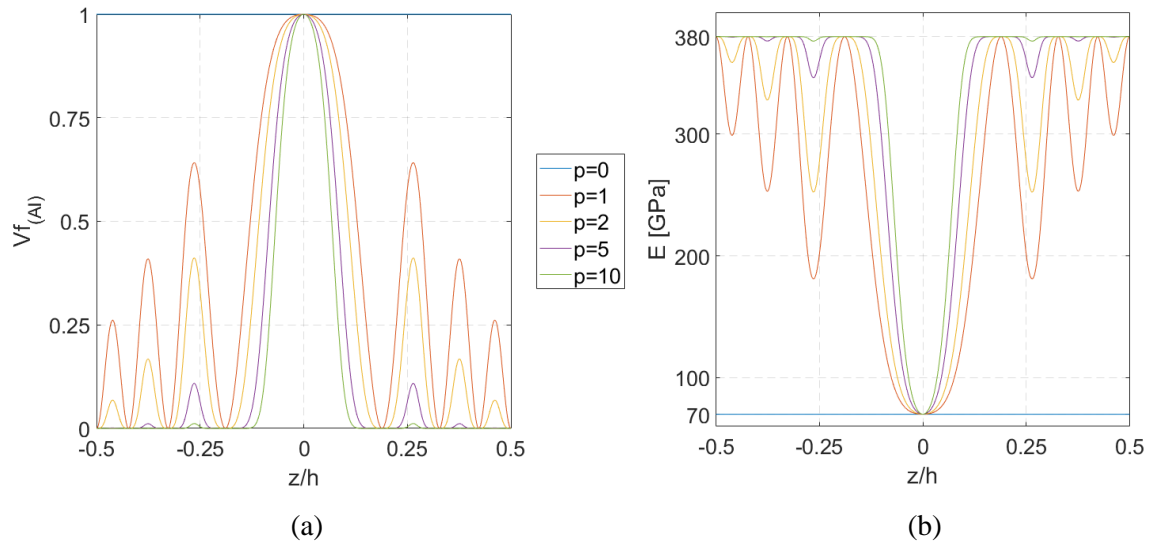


Figura 8.41. Distribuição material ao longo da espessura de acordo com o modelo C2: (a) evolução da fração volúmica do alumínio; (b) evolução do módulo de Young do compósito FGM

▪ **Modelo C3:**

Por último, voltando ao valor inicial $c = 3$, alterou-se o parâmetro d , assumindo este agora o valor 6. Desta forma a fração volúmica assume a distribuição expressa pela equação (8.20). Esta redução do parâmetro d está associado, por analogia com a expressão que serviu de inspiração ao presente modelo, à redução da frequência de amortecimento. As evoluções da fração volúmica do alumínio e do módulo de Young do compósito resultante ao longo da espessura da placa encontram-se ilustradas graficamente na Figura 8.42.

$$Vf_{(A)}(z) = \left[e^{-3\pi \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2} \cdot \cos^2 \left(6\pi \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right) \right]^p \quad (8.20)$$

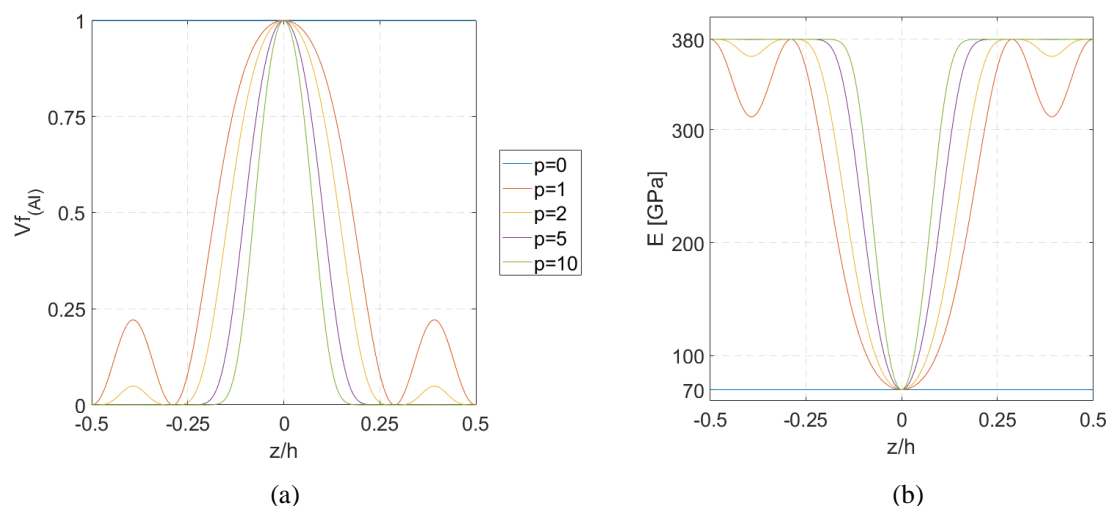


Figura 8.42. Distribuição material ao longo da espessura de acordo com o modelo C3: (a) evolução da fração volúmica do alumínio; (b) evolução do módulo de Young do compósito FGM

Nas parametrizações aplicadas ao modelo C verifica-se simetria de propriedades materiais relativamente à superfície média, pelo que nestes três casos as superfícies média e neutra coincidem. De modo a fazer um estudo comparativo entre os três modelos expostos (C1, C2 e C3), optou-se por organizar os resultados obtidos referentes ao fator de correção de corte e deslocamento transversal máximo adimensional na Tabela 8.22. Os deslocamentos transversais máximos adimensionalizados verificados nos três modelos apresentam um comportamento decrescente com o aumento do expoente p , o que se encontra de acordo com a distribuição material. As alterações efetuadas nos parâmetros c e d resultaram num aumento do deslocamento transversal máximo adimensionalizado relativamente ao observado no modelo C1, sendo esse aumento mais significativo no modelo C2.

Tabela 8.22. Fatores de correção de corte e deslocamentos transversais máximos adimensionalizados registados nos modelos C1, C2 e C3

p	Modelo C1		Modelo C2		Modelo C3	
	k	\bar{w}	k	\bar{w}	k	\bar{w}
0 (Al)	5/6	2.5271	5/6	2.5271	5/6	2.5271
1	0.4901	0.5569	0.4967	0.5909	0.4596	0.5618
2	0.4907	0.5080	0.4898	0.5227	0.4658	0.5138
3	0.5018	0.4956	0.4961	0.5034	0.4804	0.5018
4	0.5134	0.4904	0.5045	0.4953	0.4939	0.4964
5	0.5239	0.4875	0.5129	0.4910	0.5055	0.4931
6	0.5333	0.4857	0.5207	0.4884	0.5156	0.4908
7	0.5416	0.4844	0.5279	0.4866	0.5246	0.4890
8	0.5491	0.4833	0.5345	0.4853	0.5325	0.4875
9	0.5558	0.4825	0.5405	0.4843	0.5397	0.4863
10	0.5618	0.4818	0.5460	0.4835	0.5463	0.4852
∞ (Al_2O_3)	5/6	0.4655	5/6	0.4655	5/6	0.4655

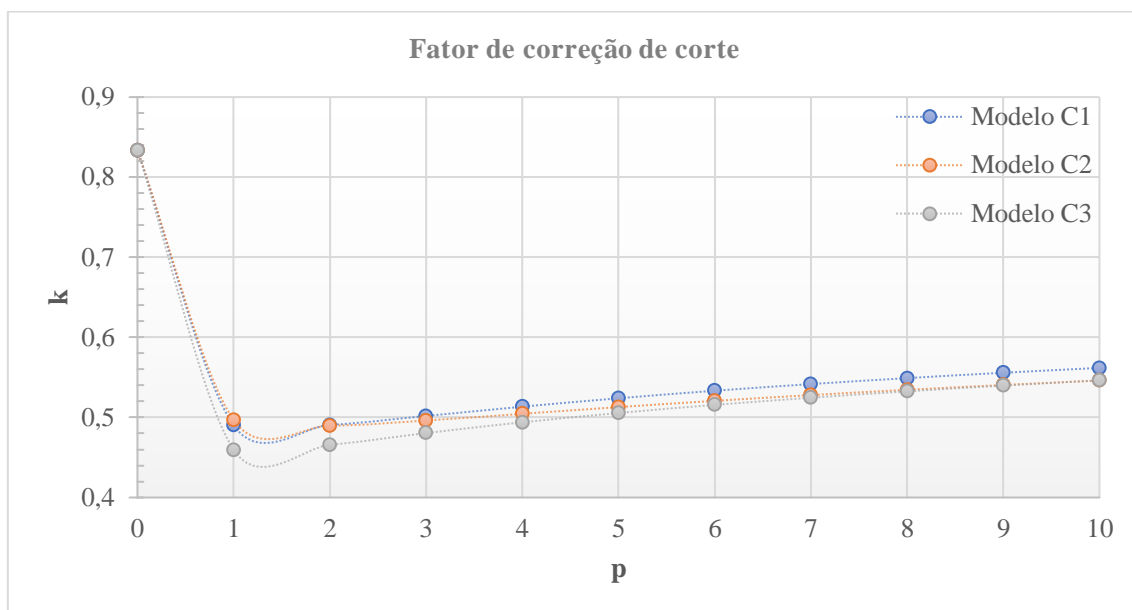


Figura 8.43. Gráfico do fator de correção de corte em função do expoente, p , para as distribuições de fração volúmica abordadas no modelo C

Estes modelos (A, B e C) podem ser importantes numa perspectiva de estudo dinâmico no domínio das vibrações livres amortecidas. Note-se também que em todos os modelos apresentados considerou-se um núcleo mais macio, no entanto seria também possível “inverter” as frações volúmicas das fases obtendo-se um núcleo com maior rigidez.

8.2.2. Compósitos reforçados com nanotubos de carbono

Dada a importância e aplicabilidade de compósitos de matriz polimérica reforçados com nanotubos de carbono, esta subsecção pretende avaliar a influência da fração mássica de nanotubos de carbono nas propriedades efetivas do compósito, mais concretamente no que respeita ao módulo de Young. Adicionalmente, fixando a fração mássica de reforço na matriz polimérica, estuda-se a resposta de provetes compósitos normalizados nas situações de carga concordantes com os ensaios de tração e flexão em três pontos, de acordo com o exposto no início da secção 8.2.

- **Caso de estudo 2:**

Neste caso de estudo apresenta-se o trabalho desenvolvido acerca do modo como a proporção mássica de reforço de MWCNTs afeta o módulo de Young do nanocompósito. Em particular, o FGM em estudo nesta subsecção é composto por duas fases: uma fase polimérica – fase A – composta por PSU, e uma outra fase onde MWCNTs reforçam uma matriz polimérica de PSU – fase B, como ilustrado na Figura 8.44.

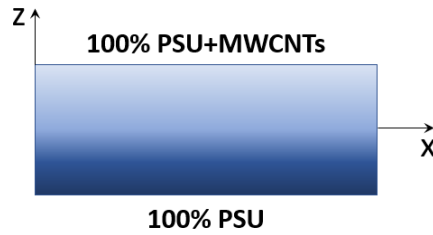


Figura 8.44. Esquema de evolução das fases materiais presentes no FGM PSU/PSU+MWCNTs

A fração volúmica da fase B distribui-se de acordo com a lei de potência (3.1), encontrando-se na Figura 8.45 a sua representação gráfica para diferentes expoentes. O módulo de Young do compósito PSU/PSU+MWCNTs foi estimado por aplicação das equações (3.8), (3.9) e (3.10), e a influência que a fração mássica de MWCNTs na matriz polimérica tem nesta propriedade encontra-se ilustrada nos gráficos da Figura 8.46. A Figura 8.47 pretende evidenciar a influência da fração mássica do reforço, pelo que a evolução do módulo de Young do nanocompósito encontra-se representada para um mesmo expoente da lei de potência.

Do que é possível observar na Figura 8.46, o aumento da fração mássica de MWCNTs provoca um aumento no módulo de Young do nanocompósito sob análise. Quanto ao expoente da lei de potência, que comanda a distribuição das fases materiais, pode-se confirmar que quando $p = 0$ a FGP reduz-se a uma placa homogénea constituída somente pelo nanocompósito PSU+MWCNT. Na situação oposta, para $p = \infty$, a placa também homogénea é composta por PSU. As restantes curvas mostram que o gradiente de MWCNTs desloca-se no sentido da superfície superior à medida que o expoente da lei de potência aumenta. Relativamente à Figura 8.47, é claro o efeito da presença de MWCNTs no nanocompósito. Atendendo a que o compósito em estudo apresenta um gradiente funcional traduzido por um aumento de fração mássica de MWCNTs ao longo da espessura, as curvas aqui traçadas mostram não só que a uma maior presença de MWCNTs em massa correspondem maiores valores de Módulo de Young, como também esse efeito se torna mais acentuado com o aumento da fração mássica de MWCNTs na fase B [25].

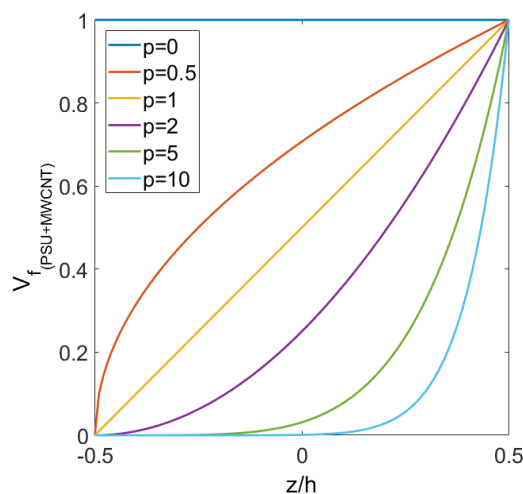


Figura 8.45. Evolução da fração volúmica da fase B ao longo da espessura, para diferentes expoentes da lei de potência

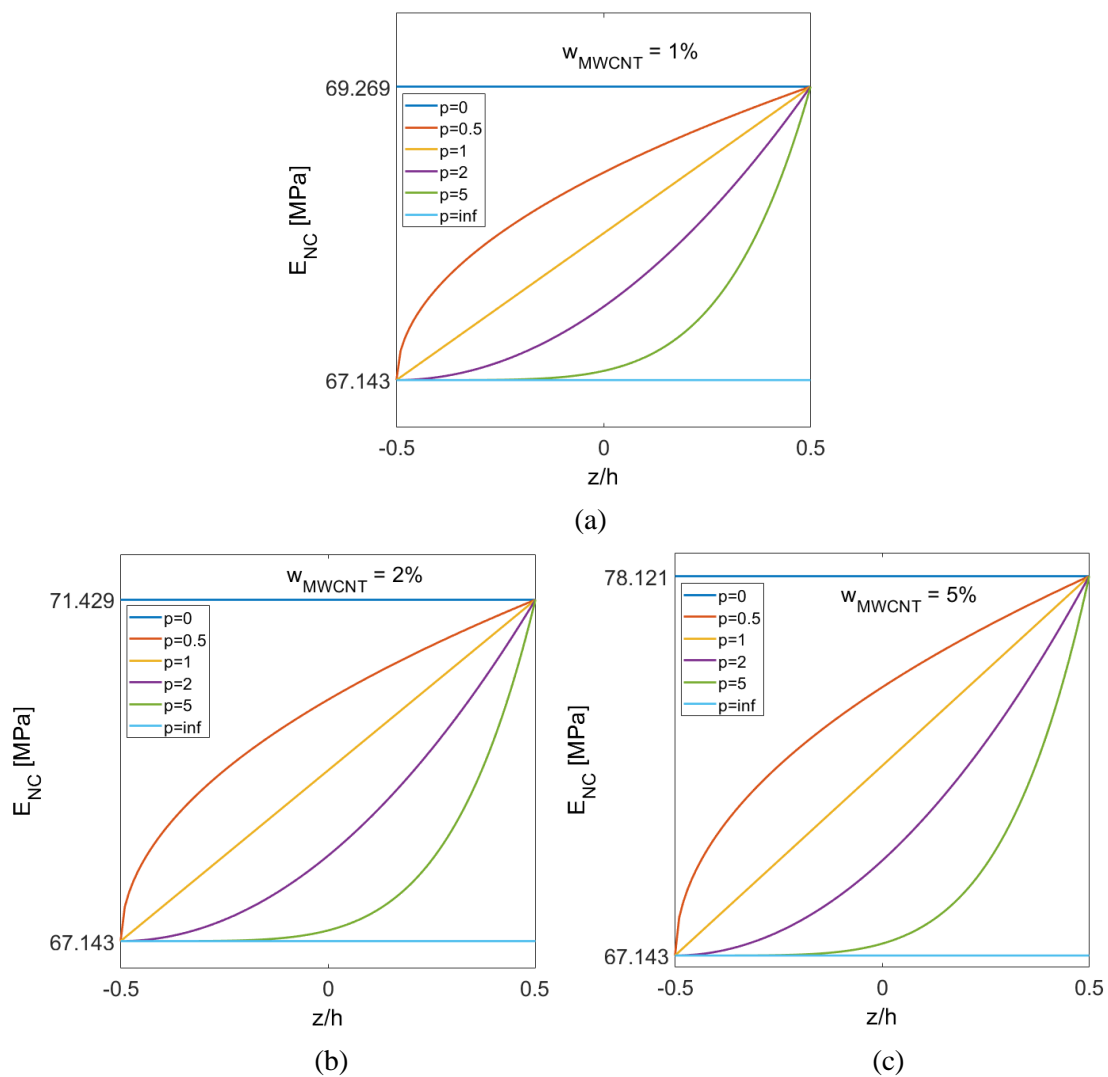


Figura 8.46. Evolução do módulo de Young do nanocompósito (E_{NC}) ao longo da espessura da FGP: (a) $w_{MWCNT} = 1\%$; (b) $w_{MWCNT} = 2\%$; (c) $w_{MWCNT} = 5\%$ [25]

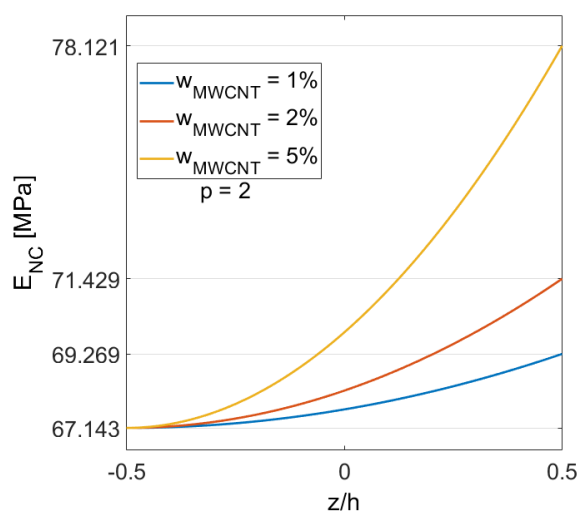


Figura 8.47. Módulo de Young do nanocompósito para diferentes frações mássicas de MWCNTs, com $p = 2$ [25]

- **Caso de estudo 3:**

O presente caso de estudo centra-se na resposta estática de uma placa nanocompósita, cuja composição material resulta de uma matriz de 15%PSU em DMF, com 67.143 MPa de módulo de elasticidade, reforçada com 2%(m/m) de MWCNTs. As propriedades das fases presentes na matriz e dos MWCNTs considerados encontram-se detalhadas nas Tabela 8.23 e Tabela 8.24, respetivamente.

Tabela 8.23. Massa volúmica das fases constituintes da matriz de PSU em DMF

Material	ρ [kg/m ³]
PSU	1350
DMF	950

Tabela 8.24. Propriedades materiais e geométricas dos MWCNTs

MWCNTs	E [GPa]	l [μm]	d [nm]	t [nm]	ρ [kg/m ³]
	6	1.4	70	5	2400

- **Tração**

Nesta situação a placa foi considerada sujeita a uma carga distribuída axialmente, com 61,5N/m de magnitude na extremidade livre, e os deslocamentos axiais nodais observados encontram-se ilustrados no gráfico da Figura 8.48. O deslocamento máximo observado nesta situação é de 22.901μm, o qual se verifica nos nós pertencentes à extremidade livre tal como esperado.

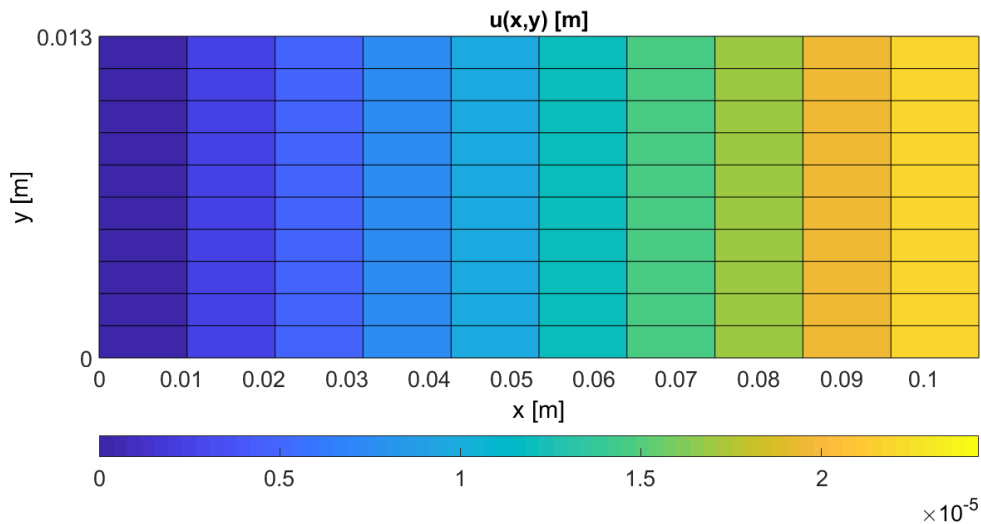


Figura 8.48. Deslocamento axial dos nós da malha de elementos finitos considerada

- **Flexão**

Para este caso de estudo o mesmo provete foi agora submetido a uma carga transversal linearmente distribuída de aproximadamente 7.7N/m de intensidade, aplicada de acordo com as especificações da norma que rege este ensaio [72]. Com esta configuração obteve-se um

deslocamento transversal máximo de ~ 0.5 mm. Nas Figura 8.49 e Figura 8.50 encontram-se ilustrados graficamente os deslocamentos transversais dos nós da malha de elementos finitos considerada.

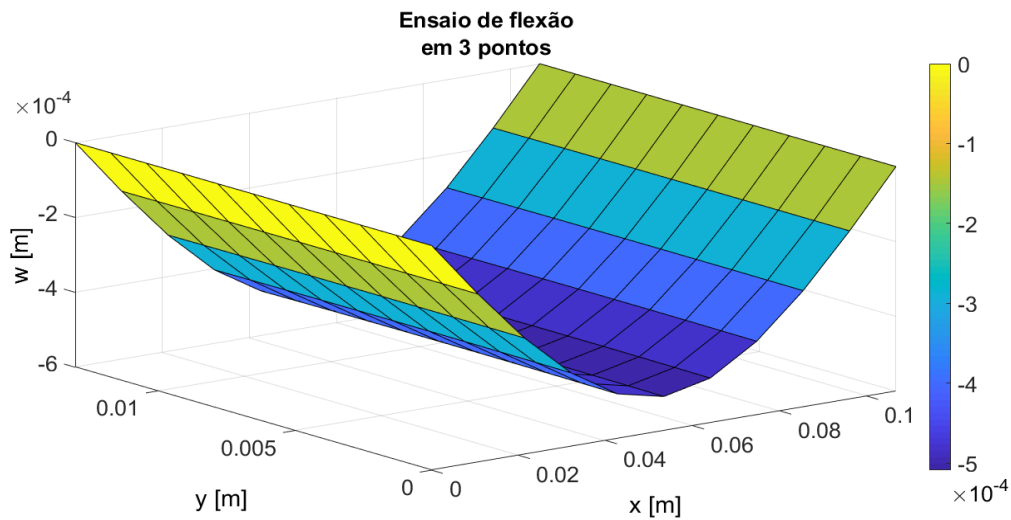


Figura 8.49. Gráfico do deslocamento transversal no ensaio de flexão de uma placa PSU+2%MWCNTs

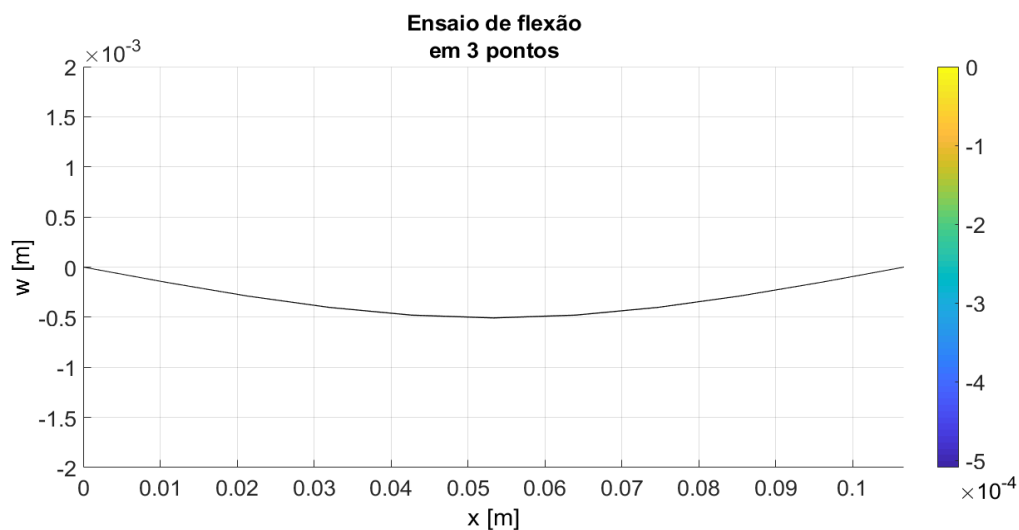


Figura 8.50. Gráfico do deslocamento transversal no ensaio de flexão de uma placa PSU+2%MWCNTs isenta de poros (alçado)

- **Caso de estudo 4:**

Neste ponto avalia-se a influência da distribuição de MWCNTs ao longo da espessura de uma placa e da presença de diferentes distribuições de porosidades. Para este fim considerou-se uma placa com gradiente funcional PSU/(PSU+2%MWCNTs) onde uma matriz de PSU – fase B – é reforçada com MWCNTs. A fase A deste FGM é composta por uma mistura PSU+2%MWCNTs, sendo que a respetiva fração volúmica evolui de acordo com a lei de potência descrita pela expressão (3.1).

○ **Tração**

Similarmente aos estudos apresentados anteriormente, os resultados apresentados na Tabela 8.25 encontram-se na forma adimensional por aplicação da expressão (8.21), onde $u_{\max(PSU)}$ refere-se ao deslocamento axial máximo obtido com uma placa de PSU ($u_{\max(PSU)} = 24.362 \mu m$). Para uma melhor interpretação do comportamento do deslocamento axial máximo em função do expoente da lei de potência, na Figura 8.51 apresentam-se os resultados na forma gráfica. De acordo com os resultados obtidos, o deslocamento axial máximo adimensional aumenta com o aumento do expoente p , atingindo o valor máximo 1 na situação em que a placa é constituída somente por PSU ($p = \infty$), o que significa que o aumento da percentagem mássica de MWCNTs promove a diminuição o deslocamento axial máximo do provete. Esta observação está de acordo com o facto do módulo de Young do compósito aumentar com o aumento da fração mássica de MWCNTs, facto este já constatado anteriormente.

$$u_{adim} = \frac{u_{max}}{u_{max(PSU)}} \quad (8.21)$$

Tabela 8.25. Deslocamento axial máximo adimensional para diferentes expoentes da lei de potência

p	u_{adim}
0 (PSU+2%MWCNTs)	0.9400
0.5	0.9592
1	0.9691
2	0.9792
5	0.9895
∞ (PSU)	1.0000

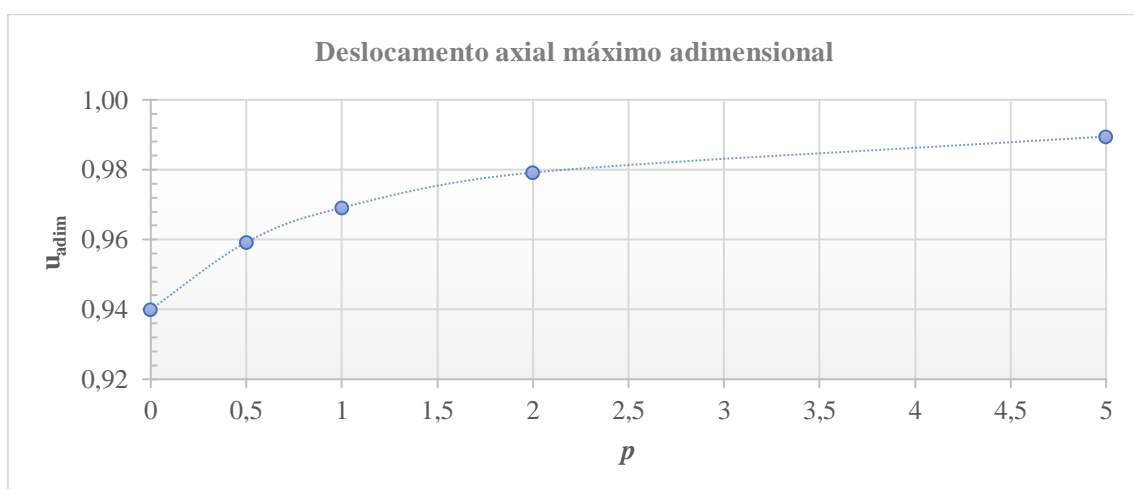


Figura 8.51. Gráfico do deslocamento axial máximo adimensional em função do expoente da lei de potência

○ **Flexão**

Os resultados obtidos neste caso de estudo, adimensionalizados pela expressão (8.22), onde $w_{\max (PSU)}$ representa o deslocamento transversal máximo observado numa placa de PSU sujeita às mesmas condições ($w_{\max (PSU)} = 541.22\mu m$), encontram-se na Tabela 8.26 e no gráfico da Figura 8.52, verificando-se um comportamento análogo ao relatado no estudo anterior relativo às condições de ensaio de tração.

$$w_{adim} = \frac{w_{max}}{w_{max (PSU)}} \quad (8.22)$$

Tabela 8.26. Deslocamento transversal máximo adimensional para diferentes expoentes da lei de potência

p	w_{adim}
0 (PSU+2%MWCNTs)	0.9400
0.5	0.9616
1	0.9694
2	0.9754
5	0.9823
∞ (PSU)	1.0000

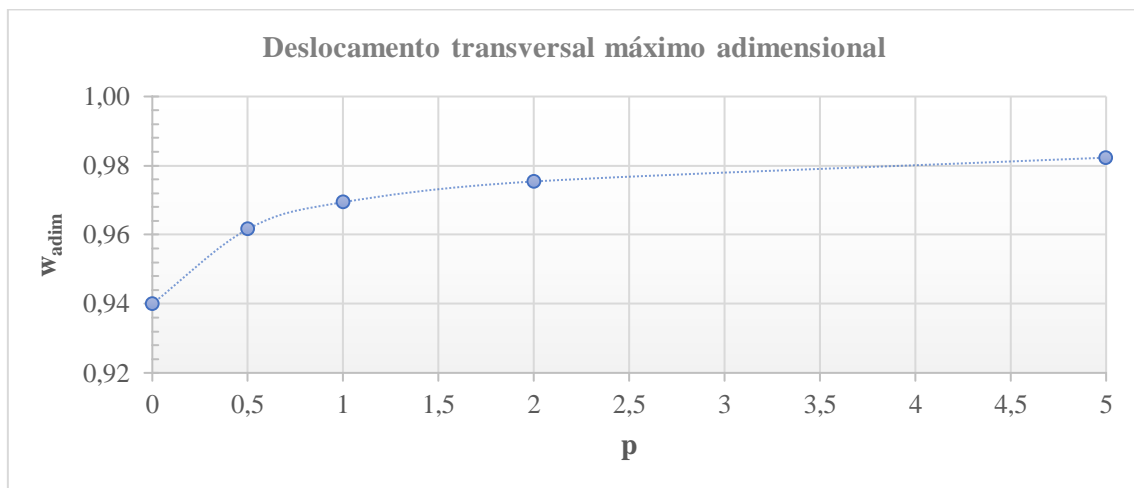


Figura 8.52. Gráfico do deslocamento transversal máximo adimensional em função do expoente da lei de potência

8.2.3. Compósitos com porosidades

Sendo que por um lado grande parte dos processos de fabrico resultam na existência de porosidades nos materiais, e que por outro lado estas porosidades são desejáveis em materiais

compósitos de matriz polimérica para aplicações biomédicas dado que promovem a biocompatibilidade, nesta subsecção descrevem-se os estudos efetuados neste âmbito.

- **Caso de estudo 5:**

Este caso de estudo focou-se na avaliação da influência da distribuição de porosidades num material e da proporção que estas representam num nanocompósito FGM PSU/(PSU+2%MWCNT). Para este efeito, considerou-se a existência porosidades distribuídas de acordo com duas formulações diferentes – *even* e *uneven* – e com frações volúmicas diferentes. O módulo de Young do compósito foi estimado pelas expressões (3.13) e (3.14), para as distribuições do tipo *even* e *uneven* respetivamente. Os gráficos da Figura 8.53 mostram a influência dos parâmetros já enunciados juntamente com o expoente da lei de potência.

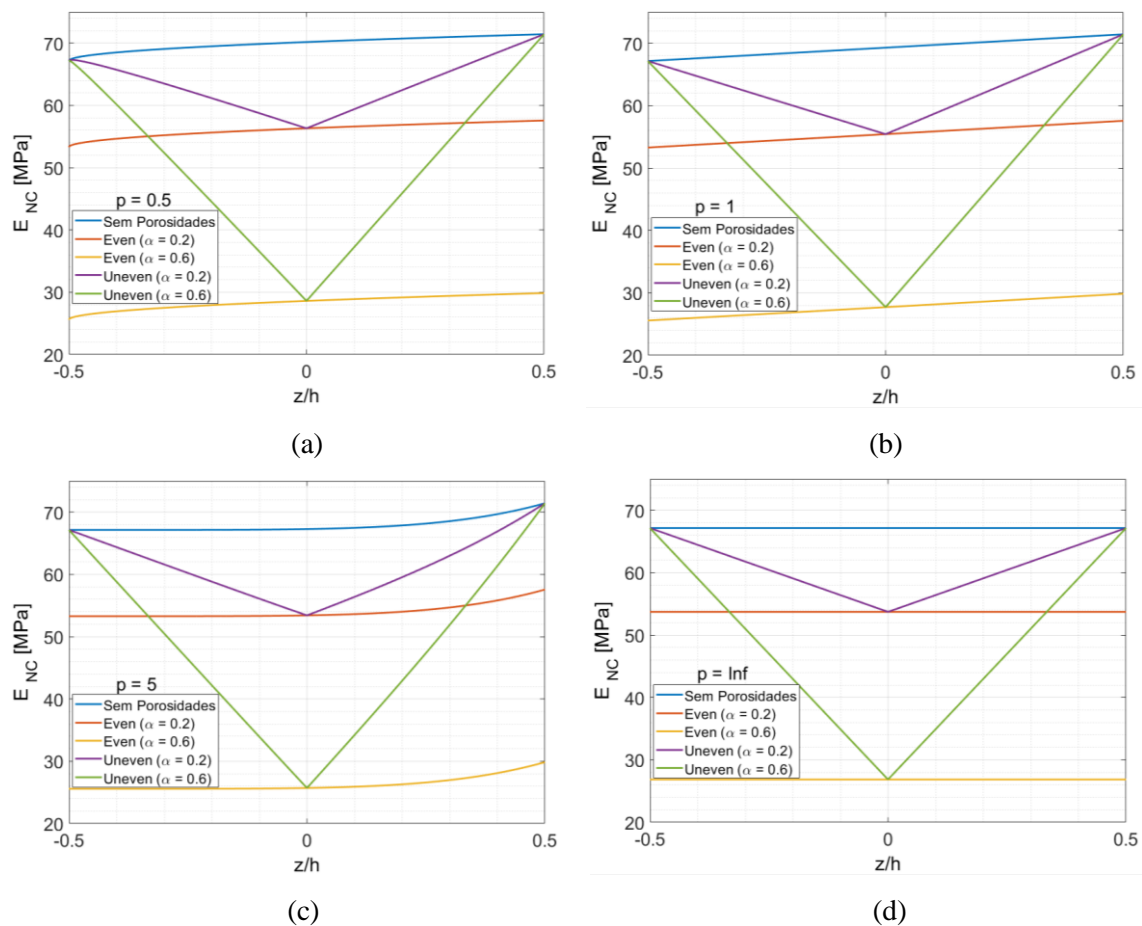


Figura 8.53. Evolução do módulo de Young do nanocompósito (E_{NC}) ao longo da espessura para diferentes distribuições e frações volúmicas de porosidades: (a) $p = 0.5$; (b) $p = 1$; (c) $p = 5$; (d) $p = \infty$

Este estudo torna evidente o efeito distinto que as diferentes distribuições e porosidades aqui abordadas causam no comportamento do módulo de Young ao longo da espessura da estrutura considerada. No caso de porosidades distribuídas de acordo com o modelo *even*, esta propriedade apresenta um aumento ligeiro ao longo da espessura. No entanto o mesmo não se pode afirmar acerca da distribuição de porosidades do tipo *uneven*. Devido à sua dependência do valor absoluto da cota z , esta distribuição de porosidades produz um efeito particular no módulo de Young do FGM, sofrendo este uma diminuição ao longo da espessura entre $z = -h/2$ e $z = 0$ e aumentando na metade superior da placa, em espessura. Desta forma, o módulo de Young apresenta um mínimo na superfície média, $z = 0$, e um máximo nas superfícies exteriores ($z = -h/2$ e $z = h/2$) [25].

- **Caso de estudo 6:**

Este segundo estudo no contexto dos materiais compósitos porosos centra-se na resposta estática de uma placa nanocompósita, cuja composição material resulta da combinação de uma matriz de 15%PSU em DMF reforçada com 2%(m/m) de MWCNTs. As propriedades das fases presentes na matriz e dos MWCNTs considerados encontram-se detalhadas nas Tabela 8.23 e Tabela 8.24, respetivamente. Neste caso de estudo foi assumida a existência de uma distribuição de porosidades, que pode manifestar-se de diferentes modos de acordo com a secção 3.4. De igual modo, a placa considerada foi modelada na situação descrita nos testes de tração e flexão em três pontos, no sentido da análise da influência desta característica no comportamento da estrutura.

- **Tração**

Os resultados referentes ao ensaio de tração encontram-se registados na Tabela 8.27 e expostos graficamente na Figura 8.54, para as duas distribuições de porosidades abordadas neste trabalho e para diferentes frações volúmicas das mesmas. De modo a promover uma melhor interpretação, os deslocamentos máximos axiais foram adimensionalizados por aplicação da expressão (8.21).

Este estudo confirma a influência do tipo de distribuição de porosidades nos deslocamentos, influência esta que já tinha sido verificada nos estudos de verificação. De facto, o deslocamento axial apresenta uma evolução com o aumento da presença de porosidades muito mais suave no caso de porosidades distribuídas segundo o modelo *uneven*. Como expectável, no caso correspondente à inexistência de poros ($\alpha = 0$) o deslocamento axial máximo adimensional é inferior à unidade, uma vez que o reforço de 2%MWCNTs na matriz de PSU promove um aumento do módulo de Young relativamente ao PSU por si só.

Tabela 8.27. Deslocamento axial máximo adimensional observado com diferentes distribuições de porosidades

α	u_{adim}	
	<i>even</i>	<i>uneven</i>
0	0.9400	0.9400
0.1	1.0451	0.9897
0.2	1.1764	1.0447
0.3	1.3451	1.1060
0.4	1.5699	1.1748
0.5	1.8846	1.2526
0.6	2.3564	1.3412
0.7	3.1425	1.4434
0.8	4.7146	1.5627
0.9	9.4300	1.7037

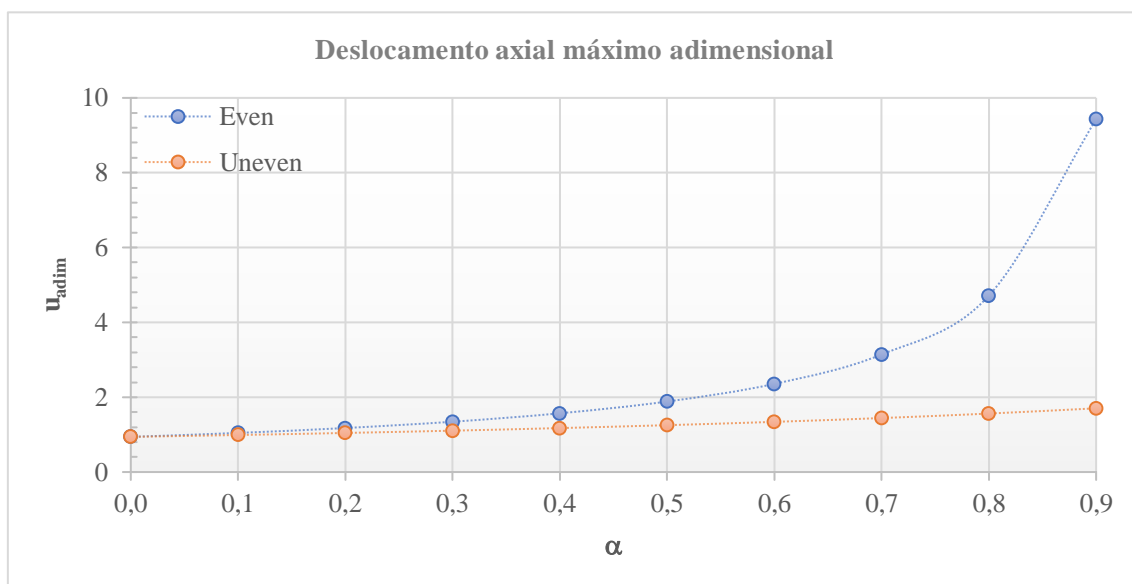


Figura 8.54. Gráfico do deslocamento axial máximo adimensional em função da fração volúmica de porosidades, para diferentes tipos de distribuição

o **Flexão**

Os deslocamentos transversais máximos adimensionalizados, registados para diferentes distribuições e frações volúmicas de porosidades, encontram-se expostos na Tabela 8.28 e no gráfico da Figura 8.55. Os resultados apresentam-se adimensionalizados de forma análoga ao estudo anterior, tendo-se aplicado a expressão (8.22).

Como é possível verificar, no ensaio de flexão o deslocamento transversal máximo apresenta um comportamento em tudo idêntico ao observado no ensaio de tração. Igualmente ao ensaio de tração, os valores observados na ausência de porosidades devem-se ao facto já mencionado atrás.

Tabela 8.28. Deslocamento transversal máximo adimensional observado com diferentes distribuições de porosidades

α	W_{adim}	
	<i>even</i>	<i>uneven</i>
0	0.9400	0.9400
0.1	1.0443	0.9642
0.2	1.1746	0.9896
0.3	1.3421	1.0163
0.4	1.5654	1.0448
0.5	1.8779	1.0745
0.6	2.3466	1.1062
0.7	3.1277	1.1400
0.8	4.6896	1.1762
0.9	9.3751	1.2160

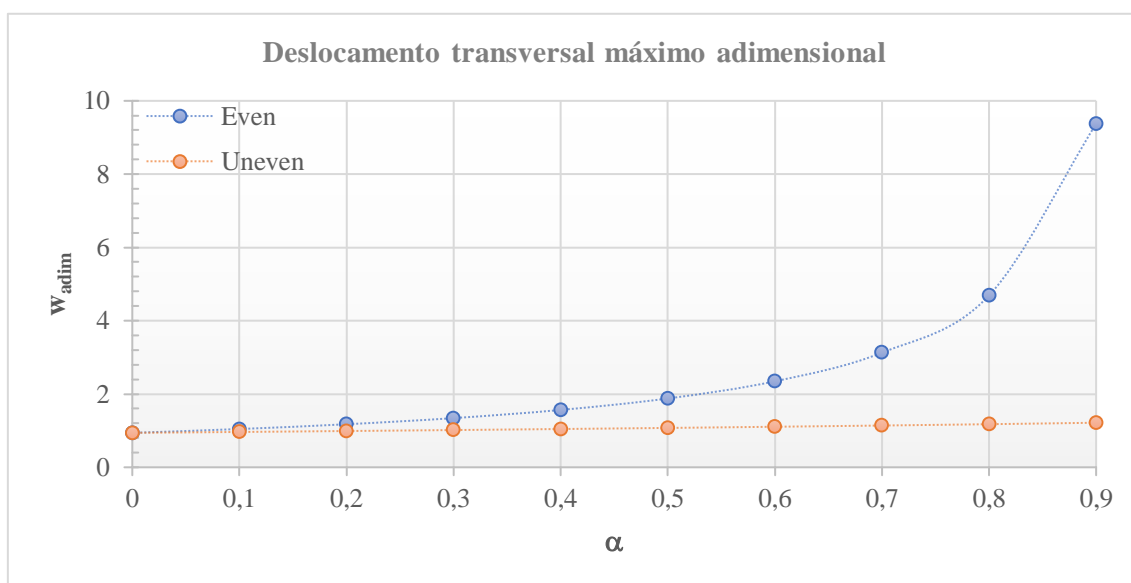


Figura 8.55. Gráfico do deslocamento transversal máximo adimensional em função da fração volúmica de porosidades, para diferentes tipos de distribuição

- **Caso de estudo 7:**

Neste ponto avalia-se a influência da distribuição de MWCNTs ao longo da espessura de uma placa e da presença de diferentes distribuições de porosidades. Para este fim considerou-se uma placa com gradiente funcional PSU/(PSU+2%MWCNTs) onde uma matriz de PSU – fase B – é reforçada com MWCNTs, sendo que a respetiva fração volúmica evolui de acordo com a lei de potência descrita pela expressão (3.1). Representando a fase A deste FGM tem-se uma mistura PSU+2%MWCNTs. Nos casos de estudo que se seguem a este respeito, a placa encontra-se sujeita

às condições já descritas no ponto anterior, sendo que também neste ponto se apresentam dois casos que se distinguem no que respeita à inclusão de porosidades.

○ **Tração**

Os resultados referentes a esta situação de carga encontram-se expostos nas Tabela 8.29 e Tabela 8.30. Os resultados foram adimensionalizados pela expressão (8.21), e determinados para os dois modelos de distribuição de porosidades: *even* e *uneven*. Mantendo-se o comportamento observado nos estudos anteriores no âmbito dos compósitos porosos, o deslocamento axial máximo adimensional aumenta com o aumento da fração volúmica de porosidades e do expoente da lei de potência, para ambos os tipos de distribuição. No entanto, e identicamente ao já observado, as porosidades com distribuição do tipo *even* proporcionam um aumento bastante mais acentuado com o aumento destes parâmetros.

Tabela 8.29. Deslocamento axial máximo adimensional considerando porosidades distribuídas segundo o modelo *even*

α	u_{adim}					
	p					
	0 (PSU+2%MWCNTs)	0.5	1	2	5	∞ (PSU)
0	0.9400	0.9592	0.9691	0.9792	0.9895	1.0000
0.1	1.0451	1.0652	1.0774	1.0899	1.1027	1.1158
0.2	1.1764	1.1974	1.2128	1.2286	1.2448	1.2616
0.3	1.3451	1.3666	1.3867	1.4074	1.4288	1.4508
0.4	1.5699	1.5911	1.6185	1.6468	1.6761	1.7065
0.5	1.8846	1.9036	1.9429	1.9838	2.0264	2.0710
0.6	2.3564	2.3682	2.4293	2.4936	2.5613	2.6329
0.7	3.1425	3.1321	3.2398	3.3551	3.4789	3.6122
0.8	4.7146	4.6220	4.8604	5.1244	5.4191	5.7496
0.9	9.4300	8.8129	10.8300	10.8394	12.2469	14.0751

Tabela 8.30. Deslocamento axial máximo adimensional considerando porosidades distribuídas segundo o modelo *uneven*

α	u_{adim}					
	p					
	0 (PSU+2%MWCNTs)	0.5	1	2	5	∞ (PSU)
0	0.9400	0.9592	0.9691	0.9792	0.9895	1.0000
0.1	0.9897	1.0094	1.0203	1.0315	1.0430	1.0529
0.2	1.0447	1.0649	1.0771	1.0895	1.1023	1.1114
0.3	1.1060	1.1266	1.1403	1.1543	1.1686	1.1766

α	u_{adim}					
	0 (PSU+2%MWCNTs)	0.5	1	2	5	∞ (PSU)
0.4	1.1748	1.1957	1.2111	1.2270	1.2432	1.2498
0.5	1.2526	1.2738	1.2913	1.3093	1.3278	1.3325
0.6	1.3412	1.3626	1.3827	1.4034	1.4247	1.4268
0.7	1.4434	1.4648	1.4881	1.5121	1.5369	1.5356
0.8	1.5627	1.5837	1.6110	1.6392	1.6684	1.6624
0.9	1.7037	1.7240	1.7564	1.7901	1.8251	1.8125

○ **Flexão**

Os resultados relativos ao ensaio de flexão para os dois modelos de distribuição de porosidades – *even* e *uneven* – encontram-se nas Tabela 8.31 e Tabela 8.32. Tal como nos estudos de flexão anteriores, os resultados foram adimensionalizados pela expressão (8.22).

Como se pode verificar, os resultados expostos confirmam novamente o aumento do deslocamento adimensional com o aumento de ambos os parâmetros considerados – fração volúmica de porosidades e expoente da lei de potência – independentemente do tipo de distribuição de porosidades. Ainda de notar que para baixos valores destes parâmetros os deslocamentos transversais são inferiores aos observados numa placa de PSU (sem reforço de MWCNTs e sem poros).

Tabela 8.31. Deslocamento transversal máximo adimensional considerando porosidades distribuídas segundo o modelo *even*

α	w_{adim}					
	0 (PSU+2%MWCNTs)	0.5	1	2	5	∞ (PSU)
0	0.9400	0.9616	0.9694	0.9754	0.9823	1.0000
0.1	1.0443	1.0674	1.0770	1.0845	1.0930	1.1109
0.2	1.1746	1.1994	1.2115	1.2210	1.2317	1.2496
0.3	1.3421	1.3686	1.3845	1.3969	1.4109	1.4278
0.4	1.5654	1.5935	1.6152	1.6322	1.6512	1.6653
0.5	1.8779	1.9071	1.9385	1.9629	1.9903	1.9978
0.6	2.3466	2.3748	2.4240	2.4624	2.5052	2.4964
0.7	3.1277	3.1477	3.2358	3.3049	3.3808	3.3273
0.8	4.6896	4.6712	4.8734	5.0331	5.2042	4.9890
0.9	9.3751	9.1076	9.9824	10.7094	11.4165	9.9736

Tabela 8.32. Deslocamento transversal máximo adimensional considerando porosidades distribuídas segundo o modelo *uneven*

α	w_{adm}					
	p					
	0 (PSU+2%MWCNTs)	0.5	1	2	5	∞ (PSU)
0	0.9400	0.9616	0.9694	0.9754	0.9823	1.0000
0.1	0.9642	0.9862	0.9943	1.0007	1.0079	1.0257
0.2	0.9896	1.0119	1.0206	1.0273	1.0349	1.0526
0.3	1.0163	1.0391	1.0482	1.0553	1.0633	1.0812
0.4	1.0448	1.0677	1.0774	1.0849	1.0934	1.1116
0.5	1.0745	1.0980	1.1082	1.1162	1.1252	1.1429
0.6	1.1062	1.1301	1.1410	1.1495	1.1590	1.1768
0.7	1.1391	1.1641	1.1762	1.1849	1.1943	1.2118
0.8	1.1792	1.2010	1.2134	1.2232	1.2341	1.2548
0.9	1.2160	1.2409	1.2545	1.2654	1.2774	1.2936

8.3. Casos de estudo: Abordagem multicamada

8.3.1. Compósitos com porosidades

Aplicando a abordagem LW, procedeu-se ao estudo de uma placa sandwich com camadas exteriores FGM como a que se encontra ilustrada na Figura 8.56, com configuração em espessura 1-2-1 de acordo com as indicações da Tabela 8.7.

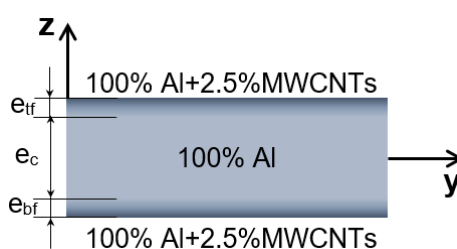


Figura 8.56. Esquema de placa sandwich com núcleo metálico revestido por placas FGM Al/Al+2.5%MWCNTs

- **Caso de estudo 8:**

Neste caso de estudo a placa foi considerada sujeita a uma carga uniformemente distribuída com 100kPa de intensidade. Com este estudo pretendeu-se avaliar a influência do tipo de distribuição de porosidades e respetiva fração volúmica no deslocamento transversal máximo da placa, assim como comparar os resultados obtidos aplicando diferentes teorias de deformação de

corte ao núcleo. Para tal, foram realizados estudos neste sentido considerando FSDT nas três camadas, distinguindo-se duas situações: existência de porosidades apenas nas camadas FGM (camadas exteriores) e existência de porosidades nas três camadas. Os resultados obtidos encontram-se registados na Tabela 8.33. Procedendo-se de igual forma, mas considerando a HSDT na formulação do campo de deslocamentos do núcleo, obtiveram-se os resultados da Tabela 8.34. Os gráficos das Figura 8.57 a Figura 8.58 ilustram a evolução do fator de correção de corte em função da fração volúmica de porosidades, para diferentes expoentes da lei de potência e distribuições de porosidades incluídas nos estudos acima descritos. Com o gráfico da Figura 8.59 pretende-se evidenciar a influência do expoente p na evolução do fator de correção de corte em função do parâmetro α . Os restantes gráficos (Figura 8.60 a Figura 8.63) demonstram a influência dos diferentes tipos de distribuição de porosidades e camadas onde são aplicados, do expoente da lei de potência e da teoria de deformação de corte considerada no núcleo, no comportamento do deslocamento transversal máximo em função da fração volúmica de porosidades.

Para os diferentes modelos estudados verificou-se que para a mesma fração volúmica de porosidades, o deslocamento transversal aumenta à medida que o expoente da lei de potência aumenta. Mantendo o expoente da lei de potência, o aumento da fração volúmica de porosidades conduz a maiores deslocamentos transversais. Comparando os modelos de distribuição de porosidades, verifica-se o comportamento já observado em estudos anteriores, ou seja, as porosidades distribuídas de acordo com o modelo *even* produzem maiores deslocamentos transversais. Como expectável, quando se considera a existência de porosidades nas três camadas da placa sandwich, obtêm-se deslocamentos transversais superiores comparativamente aos verificados quando assume-se a existência de porosidades apenas nas camadas externas. Outra observação que se destaca na análise dos gráficos das Figura 8.60 e Figura 8.61 é o facto da variação conjugada dos parâmetros p e α conduzirem a deslocamentos transversais máximos com tendências que diferem em função do tipo de distribuição de porosidades. Em particular, verifica-se uma tendência exponencial para porosidades do tipo *even* e linear no caso de porosidades distribuídas de acordo com o modelo *uneven*.

Relativamente ao fator de correção de corte, mais concretamente no estudo que contempla a existência de porosidades nas camadas externas, observa-se uma tendência crescente até $\alpha=0.7$ e decrescente após este valor. Já no caso de porosidades do tipo *uneven* presentes nas três camadas, o valor do fator de correção de corte diminui em todos os casos analisados a este respeito.

No que respeita às teorias de deformação de corte aplicadas, no caso concreto da razão de aspeto considerada ($a/h = 10$), a Figura 8.63 revela que os modelos implementados (FSDT-FSDT-FSDT e FSDT-HSDT-FSDT) não se traduzem em diferenças significativas nos deslocamentos transversais máximos [76].

Tabela 8.33. Deslocamento transversal máximo de uma placa FGM com configuração 1-2-1, determinado de acordo com a abordagem FSDT-FSDT-FSDT

Porosidades		Camadas exteriores		3 camadas	
		<i>even</i>	<i>uneven</i>	<i>even</i>	<i>uneven</i>
p	α	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]
0	0	6.6970E-05	6.6970E-05	6.6970E-05	6.6970E-05
	0.2	8.2411E-05	7.3814E-05	8.5990E-05	7.4760E-05
	0.4	1.0508E-04	8.1770E-05	1.1656E-04	8.4056E-05
	0.6	1.4254E-04	9.1241E-05	1.7541E-04	9.5520E-05
	0.8	2.1834E-04	1.0286E-04	3.4162E-04	1.1045E-04
0.5	0	6.7782E-05	6.7782E-05	6.7782E-05	6.7782E-05
	0.2	8.3628E-05	7.4799E-05	8.7297E-05	7.5761E-05
	0.4	1.0706E-04	8.2978E-05	1.1893E-04	8.5308E-05
	0.6	1.4619E-04	9.2746E-05	1.8075E-04	9.7119E-05
	0.8	2.2703E-04	1.0478E-04	3.6234E-04	1.1255E-04
1	0	6.8148E-05	6.8148E-05	6.8148E-05	6.8148E-05
	0.2	8.4179E-05	7.5241E-05	8.7888E-05	7.6210E-05
	0.4	1.0796E-04	8.3520E-05	1.2001E-04	8.5869E-05
	0.6	1.4787E-04	9.3424E-05	1.8323E-04	9.7838E-05
	0.8	2.3113E-04	1.0565E-04	3.7237E-04	1.1350E-04
2	0	6.8471E-05	6.8471E-05	6.8471E-05	6.8471E-05
	0.2	8.4668E-05	7.5632E-05	8.8413E-05	7.6607E-05
	0.4	1.0876E-04	8.4000E-05	1.2097E-04	8.6365E-05
	0.6	1.4938E-04	9.4025E-05	1.8546E-04	9.8472E-05
	0.8	2.3487E-04	1.0642E-04	3.8166E-04	1.1434E-04
5	0	6.8736E-05	6.8736E-05	6.8736E-05	6.8736E-05
	0.2	8.5072E-05	7.5954E-05	8.8845E-05	7.6932E-05
	0.4	1.0943E-04	8.4396E-05	1.2177E-04	8.6772E-05
	0.6	1.5065E-04	9.4520E-05	1.8731E-04	9.8992E-05
	0.8	2.3804E-04	1.0707E-04	3.8959E-04	1.1503E-04

Tabela 8.34. Deslocamento transversal máximo de uma placa FGM com configuração 1-2-1, determinado de acordo com a abordagem FSDT-HSDT-FSDT

Porosidades		Camadas exteriores		3 camadas	
		<i>even</i>	<i>uneven</i>	<i>even</i>	<i>uneven</i>
p	α	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]
0	0	6.6622E-05	6.6622E-05	6.6622E-05	6.6622E-05
	0.2	8.2199E-05	7.3550E-05	8.5535E-05	7.4375E-05
	0.4	1.0502E-04	8.1590E-05	1.1593E-04	8.3605E-05
	0.6	1.4263E-04	9.1137E-05	1.7442E-04	9.4936E-05
	0.8	2.1856E-04	1.0279E-04	3.3948E-04	1.0946E-04
0.5	0	6.7442E-05	6.7442E-05	6.7442E-05	6.7442E-05
	0.2	8.3426E-05	7.4543E-05	8.6854E-05	7.5386E-05
	0.4	1.0701E-04	8.2806E-05	1.1832E-04	8.4868E-05
	0.6	1.4629E-04	9.2652E-05	1.7980E-04	9.6549E-05
	0.8	2.2728E-04	1.0472E-04	3.6034E-04	1.1158E-04
1	0	6.7813E-05	6.7813E-05	6.7813E-05	6.7813E-05
	0.2	8.3983E-05	7.4991E-05	8.7453E-05	7.5841E-05
	0.4	1.0791E-04	8.3354E-05	1.1941E-04	8.5437E-05
	0.6	1.4798E-04	9.3334E-05	1.8230E-04	9.7276E-05
	0.8	2.3139E-04	1.0559E-04	3.7047E-04	1.1254E-04
2	0	6.8142E-05	6.8142E-05	6.8142E-05	6.8142E-05
	0.2	8.4478E-05	7.5388E-05	8.7986E-05	7.6245E-05
	0.4	1.0872E-04	8.3840E-05	1.2039E-04	8.5941E-05
	0.6	1.4950E-04	9.3939E-05	1.8456E-04	9.7919E-05
	0.8	2.3514E-04	1.0636E-04	3.7986E-04	1.1338E-04
5	0	6.8413E-05	6.8413E-05	6.8413E-05	6.8413E-05
	0.2	8.4888E-05	7.5715E-05	8.8426E-05	7.6577E-05
	0.4	1.0939E-04	8.4241E-05	1.2119E-04	8.6356E-05
	0.6	1.5077E-04	9.4439E-05	1.8645E-04	9.8450E-05
	0.8	2.3830E-04	1.0700E-04	3.8790E-04	1.1408E-04

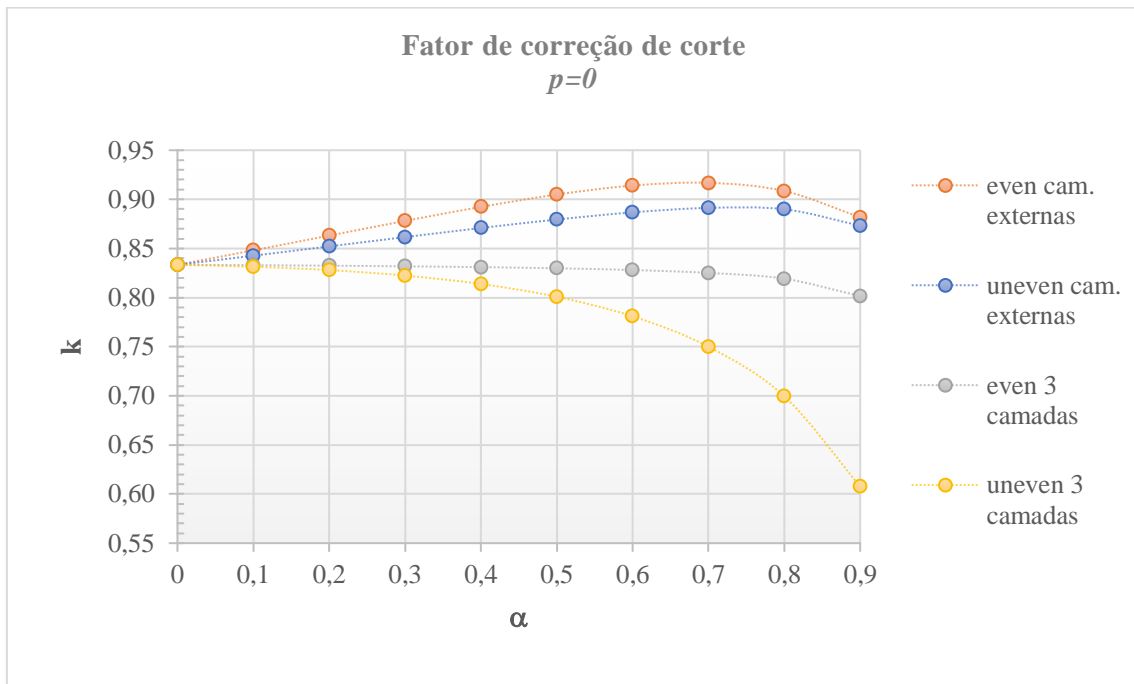


Figura 8.57. Gráfico da evolução do fator de correção de corte em função da fração volúmica de porosidades, para porosidades do tipo *even* e *uneven* ($p = 0$)

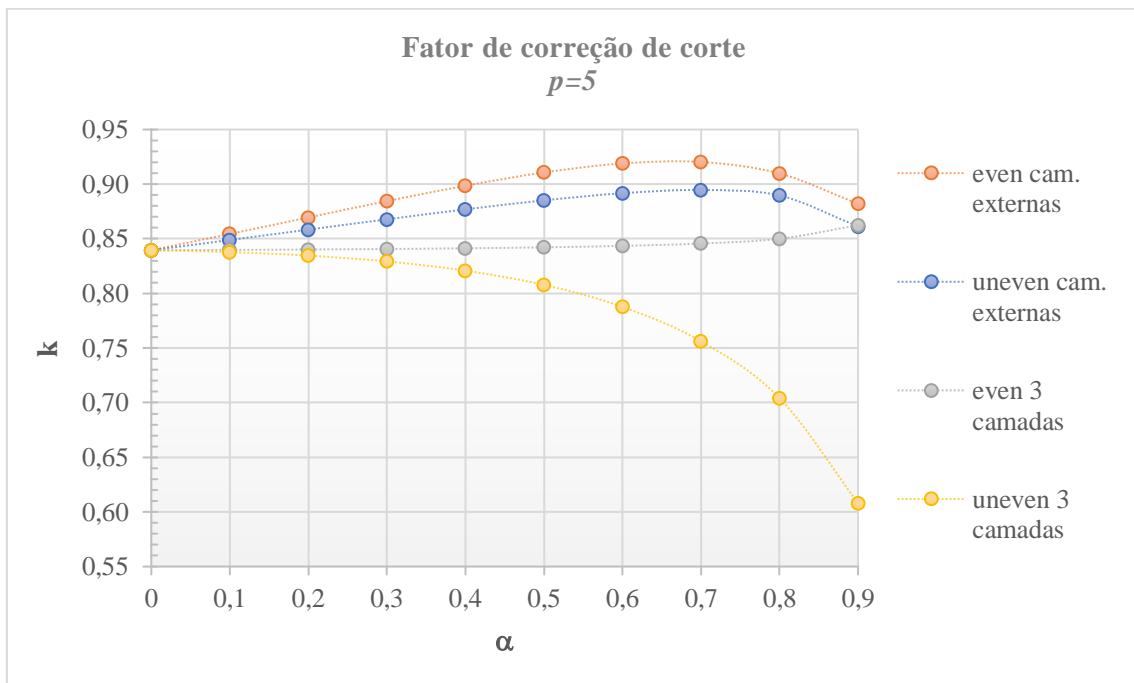


Figura 8.58. Gráfico da evolução do fator de correção de corte em função da fração volúmica de porosidades, para porosidades do tipo *even* e *uneven* ($p = 5$)

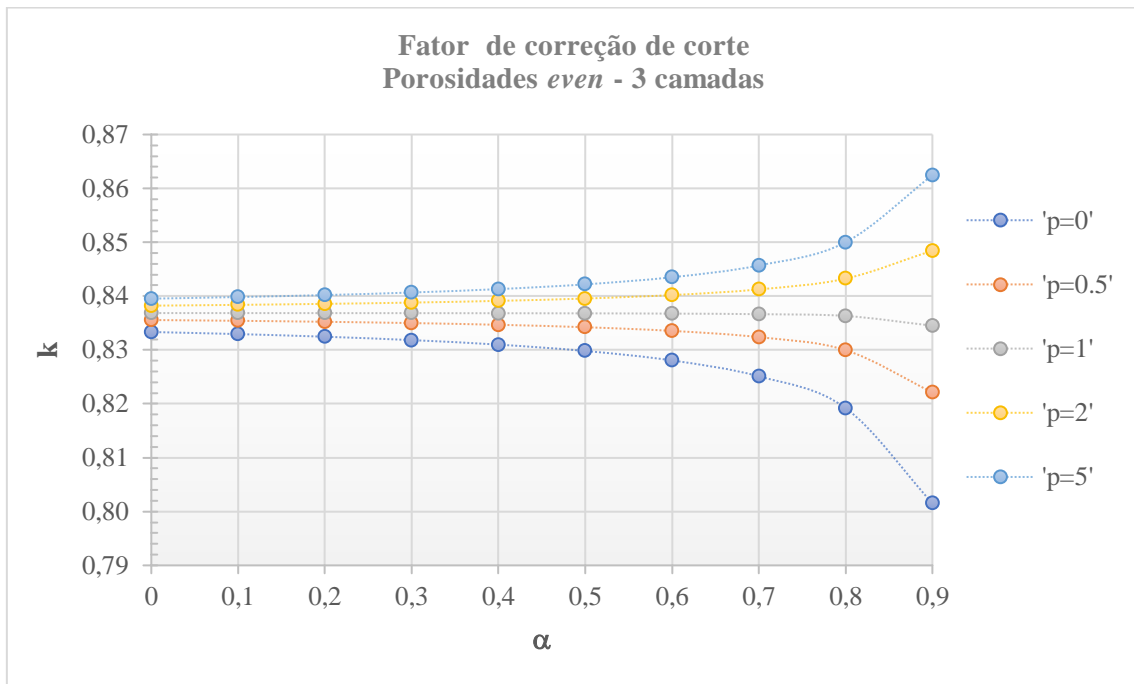


Figura 8.59. Gráfico da evolução do fator de correção de corte em função da fração volúmica de porosidades, considerando a existência de porosidades do tipo *even* nas 3 camadas

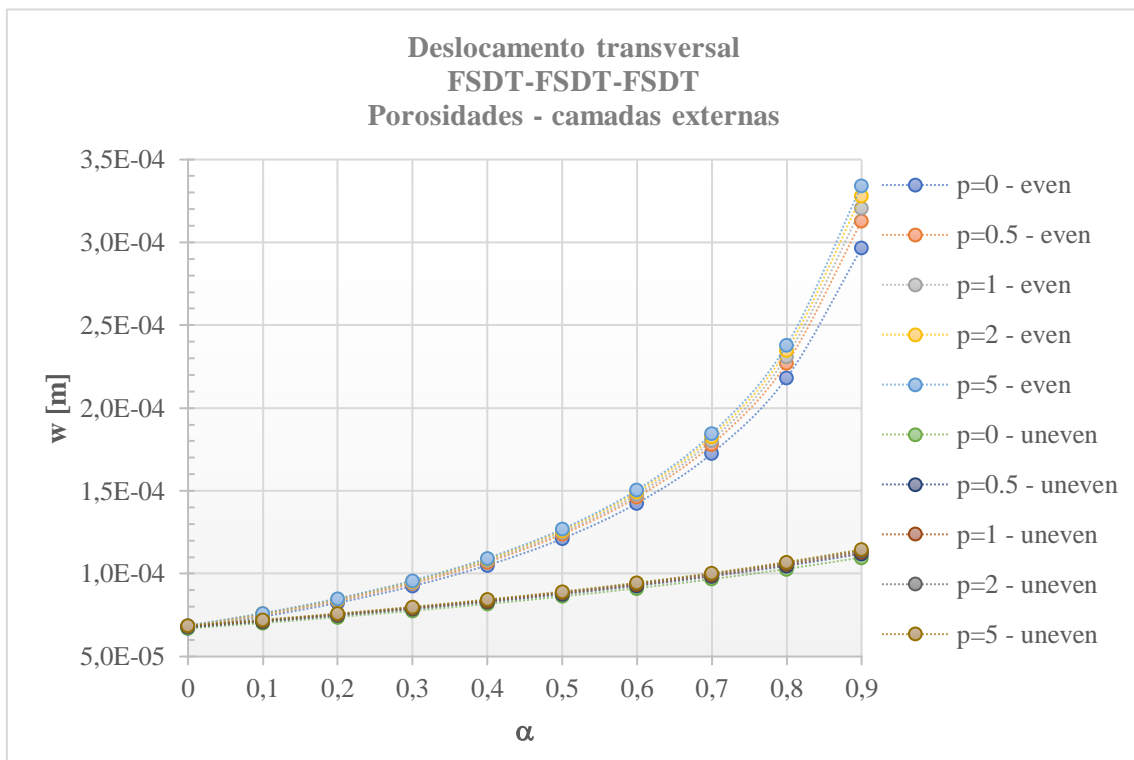


Figura 8.60. Gráfico do deslocamento transversal máximo em função da fração volúmica de porosidades, para porosidades do tipo *even* e *uneven* – consideração de existência de porosidades apenas nas camadas externas em igual proporção

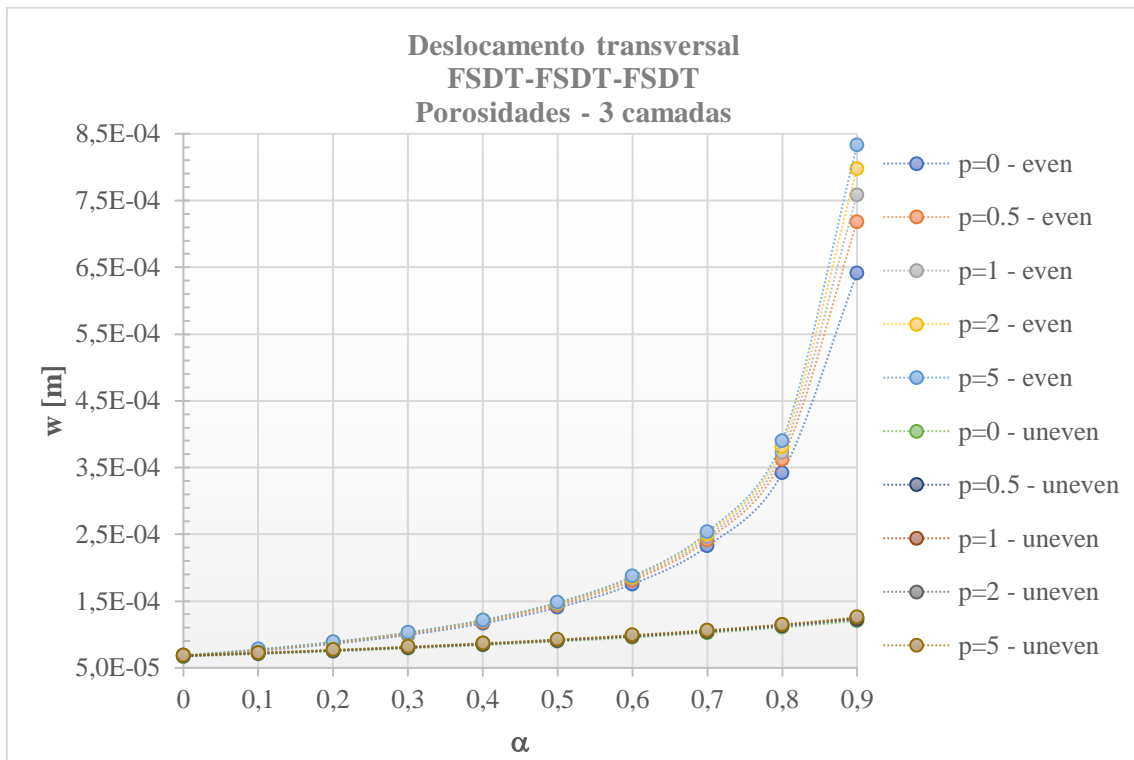


Figura 8.61. Gráfico do deslocamento transversal máximo em função da fração volúmica de porosidades, para diferentes expoentes da lei de potência – consideração de existência de porosidades em todas as camadas e em igual proporção

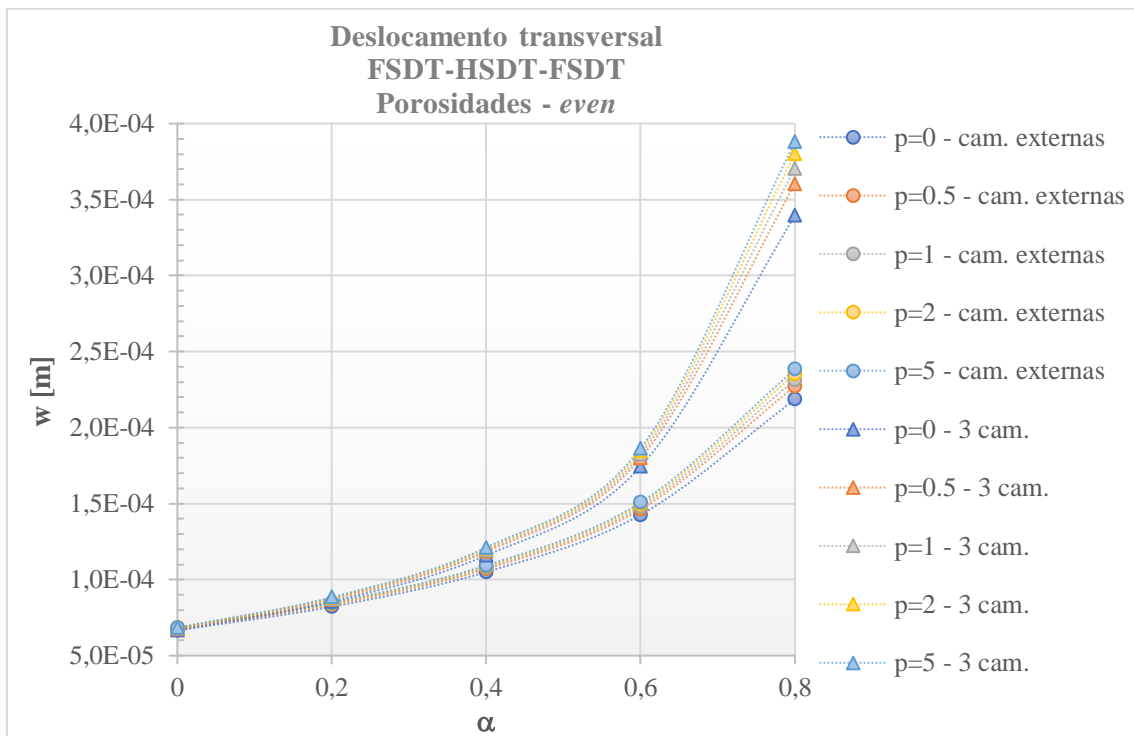


Figura 8.62. Gráfico do deslocamento transversal máximo em função da fração volúmica de porosidades, considerando a existência de porosidades do tipo *even*, para diferentes expoentes da lei de potência

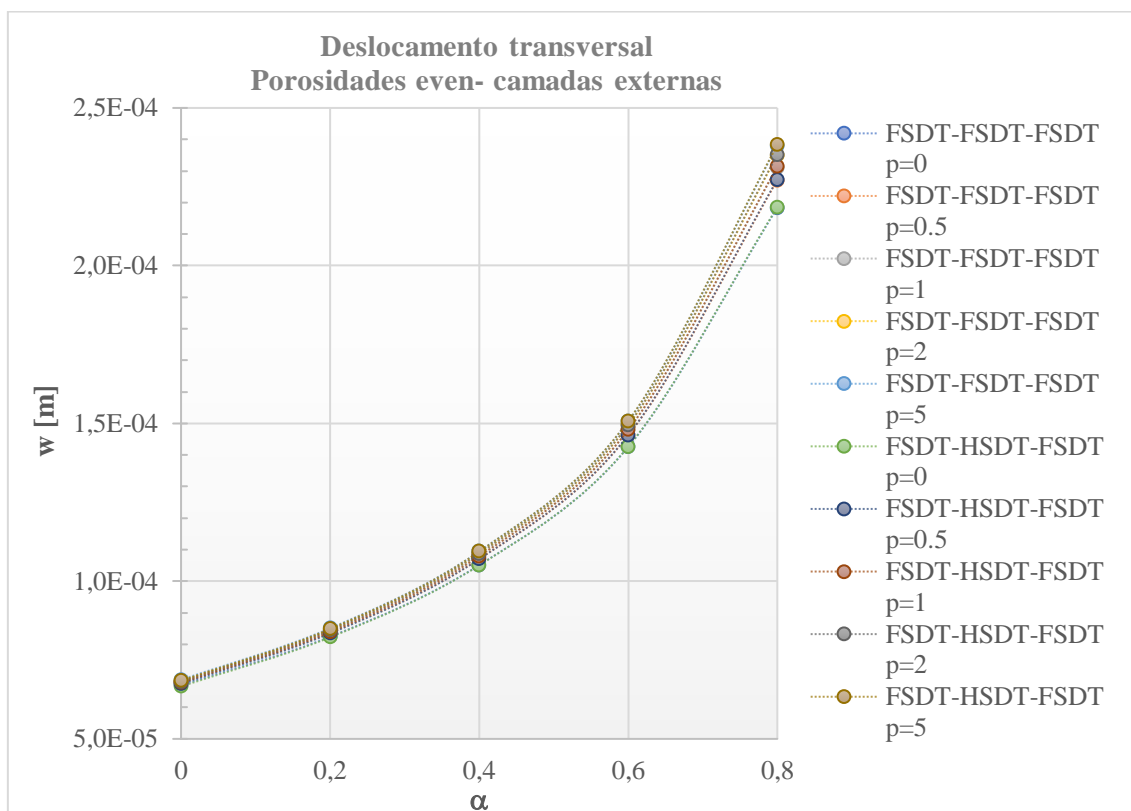


Figura 8.63. Gráfico do deslocamento transversal máximo em função da fração volúmica de porosidades, considerando a existência de porosidades do tipo *even* apenas nas camadas exteriores, para diferentes teorias de deformação de corte e expoentes da lei de potência.

Após a exposição dos diferentes casos de estudo referentes às abordagens de camada única equivalente e multicamada, segue-se uma secção com estudos de otimização de placas compósitas, em função dos diferentes parâmetros até então avaliados.

8.4. Otimização

Nesta última secção do capítulo reservado às aplicações numéricas desenvolvidas, apresentam-se os estudos relativos à otimização de placas compósitas. Nos casos de estudo abordados de seguida, o objetivo da otimização consistiu na minimização do deslocamento transversal máximo. A placa a otimizar é quadrada de lado unitário e razão de aspeto 10. Aplicando a FSDT e a abordagem camada única, a placa discretizada numa malha de 10x10 elementos finitos do tipo Q4 foi considerada simplesmente apoiada e sujeita a uma carga transversal uniformemente distribuída com 1MPa de intensidade. A nível material, a placa apresentará diferentes constituições consoante o caso de estudo.

- **Caso de estudo 9:**

Para dar início aos estudos de otimização, optou-se por considerar uma placa FGM Al/ZrO₂, onde a fase metálica se distribui ao longo da espessura de acordo com a lei de potência traduzida por (3.1). O problema de otimização aqui exposto pode ser formulado do seguinte modo:

Minimizar: $w_{max}(p)$

Sujeita a: $\{p_i, i = 0, \dots, 100\} \subset [0,10]$; $p_i = (i)0.1$

Conforme se observa, o problema só possui constrangimentos laterais, sendo a correspondente variável de projeto p uma variável discreta. O motivo pelo qual se considerou esta variável como discreta relaciona-se com a ocorrência de problemas de ordem numérica. No entanto, considera-se que a possibilidade de considerar expoentes com um dígito decimal é não só satisfatório como mais realista. Por aplicação do algoritmo SFS, anteriormente verificado pelos estudos apresentados na subsecção 8.1.3, considerando os parâmetros de otimização $N=5$ indivíduos, $MDN=1$ difusão e $G=5$ gerações, foram realizadas 10 corridas de busca do ótimo. Na Tabela 8.35 encontram-se os resultados relativos ao ótimo de cada corrida. Tendo em consideração a distribuição material da placa, o menor deslocamento transversal máximo ocorrerá na situação em que $p = 0$, ou seja, quando a placa for constituída unicamente pela fase cerâmica (fase com maior rigidez).

Tabela 8.35. Caracterização dos ótimos atingidos em cada corrida (caso de estudo 9)

Corrida	p^*	w_{max}^*
1	0.0	2.3276E-04
2	0.0	2.3276E-04
3	0.1	2.5211E-04
4	0.0	2.3276E-04
5	0.2	2.7038E-04
6	0.1	2.5211E-04
7	0.0	2.3276E-04
8	0.0	2.3276E-04
9	0.0	2.3276E-04
10	0.0	2.3276E-04
Valor ótimo	0	2.3276E-04
	Média	2.4039E-04
	Desvio Padrão	1.32549E-05

Ainda que com parâmetros reduzidos, i.e., usando valores reduzidos para o número de indivíduos, número de difusões e número de gerações, o valor médio obtido para o menor deslocamento transversal máximo encontra-se próximo da solução ótima, sendo que em 7 das 10 corridas esta solução foi atingida. O desvio padrão da amostra é uma ordem de grandeza inferior à

média, pelo que se pode considerar que o algoritmo apresenta precisão satisfatória mesmo com um baixo número de corridas.

- **Caso de estudo 10:**

Neste segundo caso de estudo no âmbito da otimização considerou-se uma placa homogénea constituída por alumínio reforçado com MWCNTs, constituindo a percentagem mássica de MWCNTs a variável de projeto. Continuando-se a estudar a minimização do deslocamento transversal máximo da placa, o problema de otimização apresenta a seguinte formulação:

Minimizar: $w_{max}(w_{MWCNTs}(\%))$

Sujeita a: $\{w_{MWCNTs_i}(\%), i = 0, \dots, 50\} \subset [0,5]; w_{MWCNTs_i}(\%) = (i)0.1$

Pelos motivos já relatados no caso de estudo antecedente, a variável de projeto é discreta. Mantendo os parâmetros de otimização aplicados no caso anterior, as 10 corridas de busca fractal estocástica realizadas conduziram aos resultados expostos na Tabela 8.36. Tendo-se já verificado que a introdução de MWCNTs numa matriz de alumínio conduz a um material com menor rigidez do que o alumínio por si só, a solução ótima verifica-se quando a percentagem mássica deste reforço é nula.

Tabela 8.36. Caracterização dos ótimos atingidos em cada corrida (caso de estudo 10)

Corrida	$w_{MWCNTs}^*(\%)$	w_{max}^*
1	0.0	6.6503E-04
2	0.0	6.6503E-04
3	0.1	6.6599E-04
4	0.0	6.6503E-04
5	0.0	6.6503E-04
6	0.0	6.6503E-04
7	0.1	6.6599E-04
8	0.1	6.6599E-04
9	0.1	6.6599E-04
10	0.0	6.6503E-04
Valor ótimo	0	6.6503E-04
	Média	6.6542E-04
	Desvio Padrão	4.94141E-07

Os resultados obtidos traduzem-se numa média muito próxima da solução ótima, apresentando um desvio padrão bastante reduzido. O desempenho do algoritmo na resolução deste problema é bastante satisfatório, tendo-se verificando que em 60% das corridas a solução ótima foi encontrada e os ótimos das restantes corridas encontram-se bastante próximos da solução ótima.

- **Caso de estudo 11:**

Considerando agora uma placa homogénea constituída unicamente por alumínio, procedeu-se a um estudo de otimização onde o parâmetro α associado à fração volúmica de porosidades constituiu a variável de projeto. Desta forma, e com o objetivo de minimizar o deslocamento transversal máximo da placa, o problema de otimização vem formulado da seguinte forma:

Minimizar: $w_{max}(\alpha)$

Sujeita a: $\{\alpha_i, i = 0, \dots, 9\} \subset [0,0.9]; \alpha_i = (i)0.1$

Também neste contexto e pelas razões referidas anteriormente, a variável de projeto é discreta. Dada a reduzida dimensão do espaço de busca, optou-se por considerar um único indivíduo em cada geração mantendo-se os restantes parâmetros inalterados. Os resultados obtidos em cada uma das 10 corridas efetuadas encontram-se registados na Tabela 8.37. Uma vez que a existência e porosidades torna os materiais menos rígidos, a solução para este problema de otimização corresponde à situação de ausência de porosidades ($\alpha = 0$). Mais uma vez, o algoritmo SFS mostrou-se eficaz como os resultados demonstram.

Tabela 8.37. Caracterização dos ótimos atingidos em cada corrida (caso de estudo 11)

Corrida	α^*	w_{max}^*
1	0	6.6503E-04
2	0	6.6503E-04
3	0	6.6503E-04
4	0	6.6503E-04
5	0.3	9.9209E-04
6	0	6.6503E-04
7	0	6.6503E-04
8	0	6.6503E-04
9	0.1	7.5122E-04
10	0.1	7.5122E-04
Valor ótimo	0	6.6503E-04
	Média	7,1498E-04
	Desvio Padrão	1,0375E-04

- **Caso de estudo 12:**

Mantendo o problema de otimização apresentado no caso de estudo anterior, aumentou-se o espaço de busca de acordo com a formulação seguinte:

Minimizar: $w_{max}(\alpha)$

Sujeita a: $\{\alpha_i, i = 0, \dots, 90\} \subset [0,0.9]$; $\alpha_i = (i)0.01$

Assim sendo, voltando a estipular 5 indivíduos para o processo de busca, obtiveram-se os resultados da Tabela 8.38. Comparativamente ao caso de estudo anterior, verifica-se que o aumento do espaço de busca conduziu a uma solução ótima média mais próxima da solução exata e com menor desvio padrão.

Tabela 8.38. Caracterização dos ótimos atingidos em cada corrida (caso de estudo 12)

Corrida	α^*	w_{max}^*
1	0.00	6.6503E-04
2	0.00	6.6503E-04
3	0.03	6.8916E-04
4	0.02	6.8097E-04
5	0.00	6.6503E-04
6	0.00	6.6503E-04
7	0.00	6.6503E-04
8	0.00	6.6503E-04
9	0.00	6.6503E-04
10	0.00	6.6503E-04
Valor ótimo	0	6.6503E-04
	Média	6,6904E-04
	Desvio Padrão	8,6624E-06

- **Caso de estudo 13:**

Neste caso de estudo considerou-se uma FGP Al/ZrO₂, onde a fração volúmica da fase cerâmica é dada pela expressão (3.1) com expoente unitário. Mantendo-se a variável de projeto, o espaço de busca foi reduzido relativamente ao caso de estudo antecedente, vindo neste caso o problema de otimização formulado da seguinte forma:

Minimizar: $w_{max}(\alpha)$

Sujeita a: $\{\alpha_i, i = 0, \dots, 50\} \subset [0,0.5]$; $\alpha_i = (i)0.01$

Novamente, sendo a variável de projeto a fração volúmica de porosidades, a solução ótima corresponderá à situação de inexistência de poros na placa. Como os resultados da Tabela 8.39

demonstram, em todas as 10 corridas a solução ótima foi atingida, daí se verificar um desvio padrão nulo.

Tabela 8.39. Caracterização dos ótimos atingidos em cada corrida (caso de estudo 13)

Corrida	α^*	w_{max}^*
1	0	3.7231E-04
2	0	3.7231E-04
3	0	3.7231E-04
4	0	3.7231E-04
5	0	3.7231E-04
6	0	3.7231E-04
7	0	3.7231E-04
8	0	3.7231E-04
9	0	3.7231E-04
10	0	3.7231E-04
Valor ótimo	0	3.7231E-04
	Média	3.7231E-04
	Desvio Padrão	0

- **Caso de estudo 14:**

Aumentando um pouco o grau de complexidade do problema de otimização, introduziu-se a existência de porosidades do tipo *even* na placa FGM considerada no caso de estudo 9. À semelhança dos casos anteriores continuaram a considerar-se as variáveis de projeto associadas aos constrangimentos laterais como discretas. Desta forma, o problema de otimização vem com a seguinte formulação:

Minimizar: $w_{max}(p, \alpha)$

Sujeita a: $\{p_i, i = 0, \dots, 100\} \subset [0, 10]; p_i = (i)0.1$

$\{\alpha_i, i = 0, \dots, 5\} \subset [0, 0.5]; \alpha_i = (i)0.1$

A restrição da fração volúmica de porosidades ao intervalo $[0; 0.5]$ deve-se ao facto de valores superiores ao máximo deste intervalo conduzirem a módulos de Young negativos para o FGM, a determinadas cotas z . Esta conclusão é inerente à formulação que permite estimar esta propriedade material efetiva.

Tendo em conta que tanto o aumento do expoente da lei de potência (p) como da fração volúmica de porosidades (α) produzem um aumento do deslocamento transversal máximo, tal como foi demonstrado em estudos numéricos anteriores, a solução ótima deste problema encontra-se

quando ambas as variáveis se anulam, i.e., quando a placa é construída somente com o material cerâmico e quando não tem porosidades.

Os resultados registados na Tabela 8.40 demonstram alguma proximidade entre o valor médio e o valor ótimo, sendo que o desvio entre estes é maior do que o observado no estudo anterior. Apesar de se tratar de um processo estocástico, este resultado é expectável dado que é provável que o aumento do número de variáveis e, conseqüentemente, do espaço de procura, exija um maior número de indivíduos, de difusões e/ou gerações para atingir o mesmo nível de exatidão. Ainda assim, em 4 das 10 corridas obteve-se a solução ótima. Tal como no caso de estudo anterior, o desvio padrão permite considerar que o estudo apresenta uma precisão aceitável para os parâmetros considerados.

Tabela 8.40. Caracterização dos ótimos atingidos em cada corrida (caso de estudo 14)

Corrida	p^*	α^*	w^*
1	0.2	0.1	2.9853E-04
2	0.0	0.0	2.3276E-04
3	0.0	0.2	2.7753E-04
4	0.0	0.0	2.3276E-04
5	0.1	0.0	2.5211E-04
6	1.5	0.0	4.0501E-04
7	0.7	0.0	3.4286E-04
8	0.0	0.0	2.3276E-04
9	0.1	0.1	2.7660E-04
10	0.0	0.0	2.3276E-04
Valor ótimo	0	0	2.3276E-4
		Média	2.7837E-04
		Desvio Padrão	5.7364E-05

É de referir que foram também realizados estudos de otimização considerando os três parâmetros – p , α e $w_{MWCNTs}(\%)$ – como variáveis de projeto em simultâneo, na minimização do deslocamento transversal máximo de uma FGP PSU/PSU+MWCNTs. A solução ótima corresponderia, nesta situação, a um expoente da lei de potência e a uma fração volúmica de porosidades nulos e ao valor máximo de MWCNTs admitido. Contudo, devido a dificuldades de ordem numérica, não foi possível terminar nenhuma das corridas. No entanto, ainda que com poucas gerações em cada corrida, verificou-se que as soluções encontradas se aproximavam da solução ótima.

9. Plataformas Computacionais

Tal como referido, um dos objetivos do trabalho consistiu na construção de plataformas computacionais com carácter pedagógico para auxílio à compreensão das metodologias aplicadas nos estudos desenvolvidos no âmbito do tema escolhido.

Para tal, foram criadas duas plataformas computacionais em MATLAB App Designer ®: uma para análise estática de placas pelo método dos elementos finitos, e uma outra para estudos de otimização através de metaheurísticas. Ambas as plataformas são descritas no presente capítulo, expondo-se os separadores que constituem as interfaces para exploração dos diferentes parâmetros.

9.1. Plataforma computacional I – Análise estática de placas

Nesta primeira secção apresenta-se a plataforma computacional desenvolvida para o estudo de placas, através do método de elementos finitos, quando sujeitas a diferentes situações de carga e constrangimentos. O utilizador terá oportunidade de explorar diferentes materiais, incluindo ou não porosidades, observar a distribuição das propriedades materiais ao longo da espessura da placa considerada, e ainda explorar alguns aspetos das fases do método de elementos finitos através da consideração de diferentes tipos de elemento finito e de diferentes discretizações. Poderá ainda utilizar duas teorias de deformação de corte. Ao dispor do utilizador encontram-se ainda situações de carga distintas, nomeadamente as já utilizadas nos estudos numéricos, assim como diferentes constrangimentos. Ao longo dos écrans da plataforma são apresentadas dicas de utilização.

Tanto a abordagem de camada única (ESL) como a abordagem multicamada (LW) encontram-se disponíveis na plataforma. Contudo, para não tornar a sua descrição demasiado exaustiva, optou-se por expor nas subsecções que se seguem apenas a primeira.

9.1.1. Separador “*Plate Geometry*”

Num primeiro separador, “*Plate Geometry*”, o utilizador deverá introduzir informação acerca das dimensões da placa a modelar. Uma vez definidas estas dimensões, será apresentada a razão de aspeto numa escala que permite valores entre zero e cem. Este separador encontra-se ilustrado na Figura 9.1.

9.1.2. Separador “*Materials Properties*”

Após a introdução das medidas que definem a geometria da placa, segue-se a caracterização dos materiais que a constituem. Esta caracterização é feita no separador “*Materials Properties*”, onde uma imagem de um FGM bifásico pretende demonstrar a evolução gradual e contínua entre as duas fases materiais a seleccionar. O utilizador, deverá então preencher os espaços relativos às

propriedades materiais das fases envolvidas. No caso de se tratar de um material homogêneo, então as duas fases apresentarão iguais propriedades materiais.

A plataforma permite a inclusão de nanotubos de carbono na fase material B. Se for essa a situação, então o botão “*With CNTs*” deverá ser acionado. Uma vez acionado este botão, surgirá o painel de título “*CNT*” para introdução de informação acerca dos CNTs relevante para a avaliação das propriedades materiais efetivas da placa. Na Figura 9.2 é possível visualizar este separador.

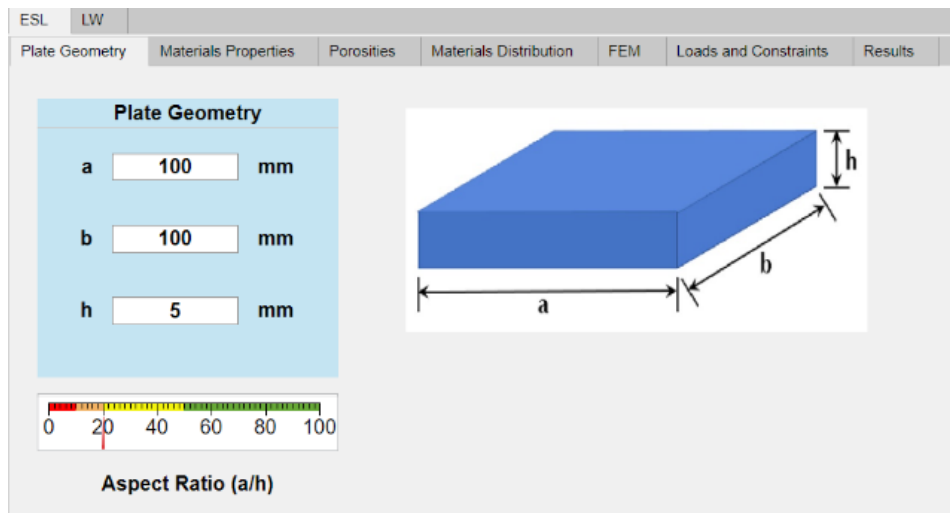


Figura 9.1. Plataforma computacional I – Separador “*Plate Geometry*”

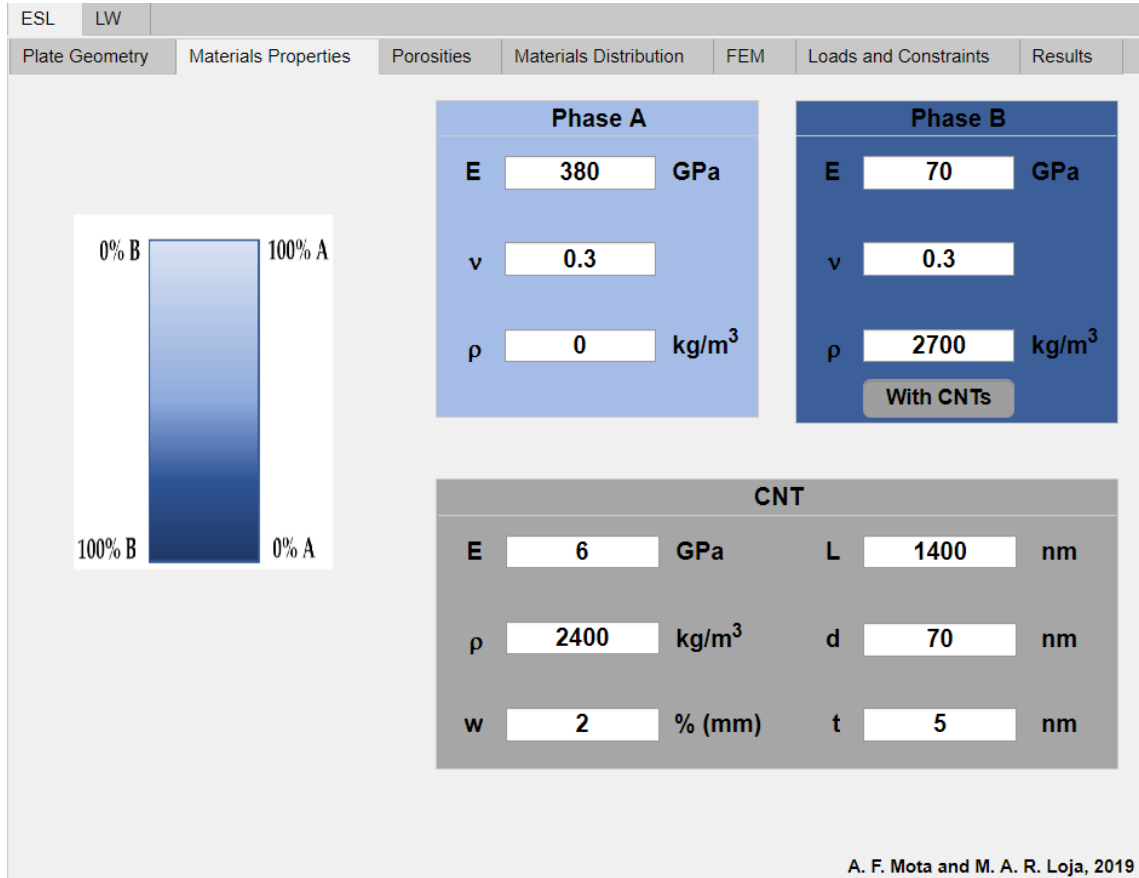


Figura 9.2. Plataforma computacional I – Separador “*Materials Properties*”

9.1.3. Separador “*Porosities*”

O efeito da existência de porosidades nos materiais nas suas propriedades materiais e, consequentemente, no seu desempenho, foi um dos temas abordados neste trabalho. Também nesta plataforma é possível fazer esta avaliação, utilizando o separador “*Porosities*” (Figura 9.3) para definir os parâmetros a considerar a este respeito. Para tal, se o estudo não incluir o efeito da existência de porosidades, então deverá ser selecionada a opção “*Exclude Porosities Influence*”. Pelo contrário, se o utilizador desejar introduzir no seu estudo a influência dessa característica material, então deverá selecionar o campo “*Include Porosities Influence*”. Ao selecionar este campo, surgirão dois campos: um painel para selecionar o tipo de distribuição de porosidades e um outro para introdução da fração volúmica de porosidades (α). Na plataforma estão disponíveis as distribuições de porosidades segundo os modelos *even* e *uneven*, já verificados e avaliados nos estudos numéricos. O modo como as porosidades influenciam as propriedades efetivas materiais será visualizado no separador seguinte.

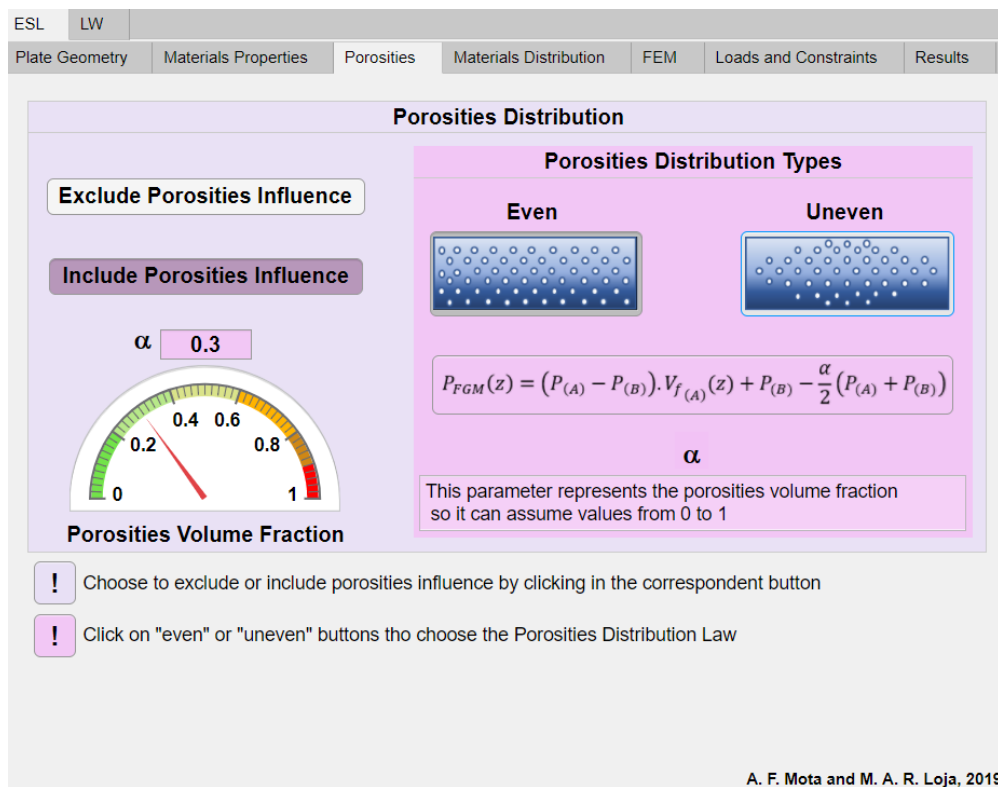


Figura 9.3. Plataforma computacional I – Separador “*Porosities*”

9.1.4. Separador “*Materials Distribution*”

Depois de definida a geometria e as características materiais da placa em estudo, segue-se o separador “*Materials Properties*”, onde se encontra a expressão matemática da lei de potência que rege a evolução da fase A ao longo da espessura. O utilizador deve então introduzir o valor do expoente da lei de potência (p) a ser considerado. No mostrador denominado “*Power-Law Index*”,

será dada informação acerca da influência deste parâmetro na distribuição material, pretendendo-se evidenciar que quanto maior o expoente, mais predominante será a presença da fase B.

Por fim, as propriedades materiais efetivas são estimadas surgindo no separador os gráficos correspondentes às evoluções das frações volúmicas das fases envolvidas e do módulo de Young do material compósito definido, ambas em função da razão z/h . Este separador encontra-se ilustrado na Figura 9.4. Uma vez definido e caracterizado o material que constitui a placa em estudo, segue-se a modelação em elementos finitos.

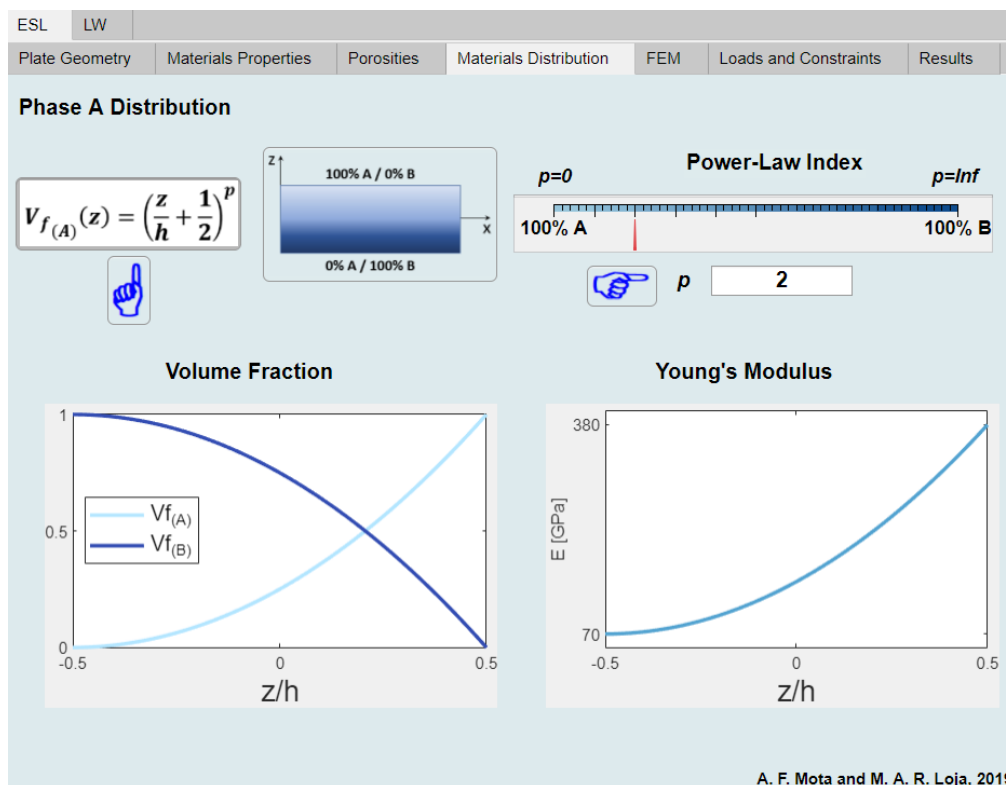


Figura 9.4. Plataforma computacional I – Separador “Materials Distribution”

9.1.5. Separador “FEM”

Neste separador, denominado de “FEM” pois introduz o método de elementos finitos no estudo, procede-se à discretização da malha e à definição da teoria de deformação de corte a aplicar nos subseparadores correspondentes.

No subseparador “Mesh” relativo à discretização da malha, deve ser inicialmente escolhido o tipo de elemento finito a utilizar nessa discretização no painel “Element Type”. A plataforma permite a escolha entre dois tipos de elementos finitos, Q4 e Q9, já abordados na secção 4.2. De seguida, no campo “Mesh Discretization” define-se a discretização da malha em termos de quantidade de elementos finitos. Após este processo, a plataforma indica o número total de elementos finitos e de nós existentes na malha definida. No subseparador “Shear Deformation Theory” é escolhida a teoria de deformação de corte a considerar (FSDT ou HSDT). Adicionalmente, e caso seja desejado,

apresenta-se uma ligeira descrição de cada uma das teorias. As Figura 9.5 e Figura 9.6 ilustram esta fase do processo.

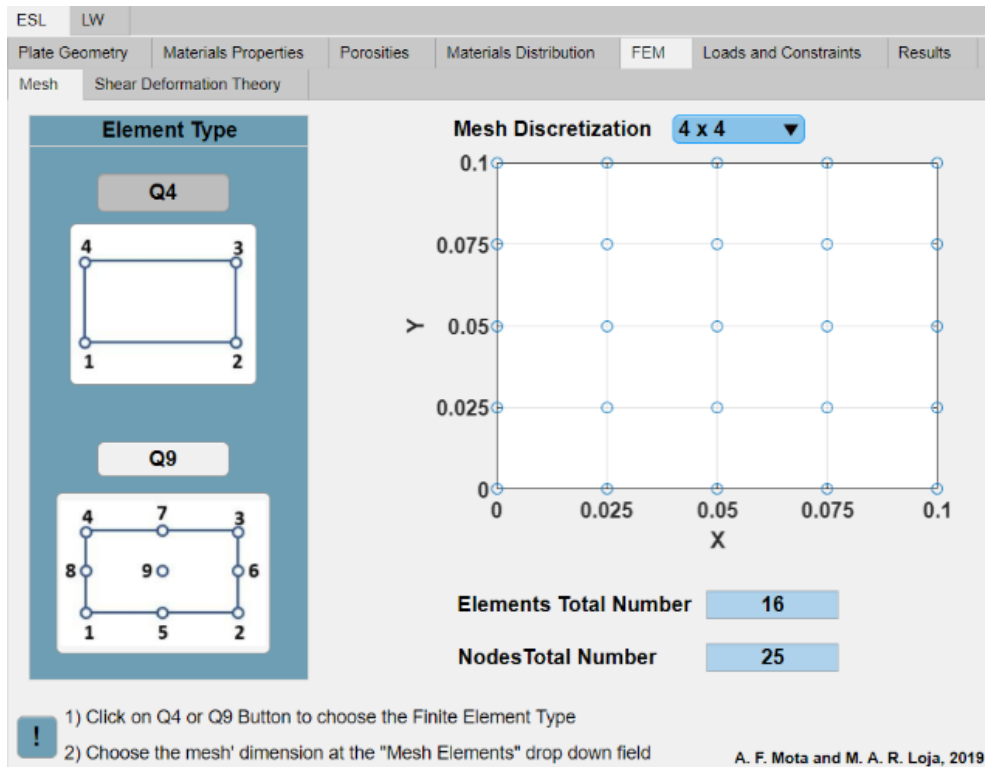


Figura 9.5. Plataforma computacional I – Separador “FEM”: subseparador “Mesh”

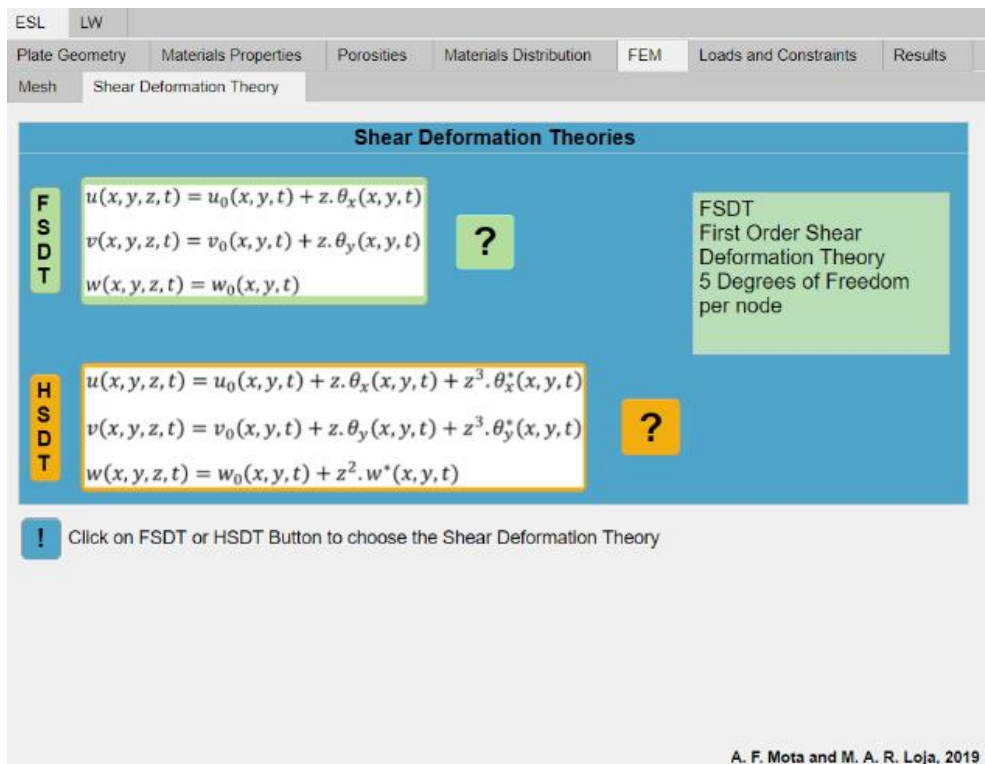


Figura 9.6. Plataforma computacional I – Separador “FEM”: subseparador “Shear Deformation Theory”

9.1.6. Separador “Loads and Constraints”

Encontrando-se a placa definida relativamente à geometria e materiais, e estando também constituído o seu modelo discretizado através de uma malha de elementos finitos, após a seleção da teoria de deformação de corte deve-se estabelecer as condições de carga e constringimentos às quais a placa se encontra sujeita. Estas configurações são realizadas no separador “Loads and Constraints” (Figura 9.7). Este separador é composto por duas secções: uma para definição do tipo de constringimentos (“Constraints”) e outra para caracterização da carga aplicada (“Loads”). Na primeira, existem quatro configurações disponíveis: encastramento nos quatro bordos (CCCC), apoio simples nos quatro bordos (SSSS), encastramento num único bordo e livre nos restantes (CFFF) e simplesmente apoiada em dois bordos e livre nos restantes (SSFF). Todas estas opções ao serem selecionadas têm como retorno um esquema ilustrativo da condição que lhe está associada, para uma melhor compreensão por parte do utilizador. A caracterização da carga é feita optando por uma das três configurações disponíveis: carga transversal uniformemente distribuída, carga axialmente distribuída e carga correspondente ao ensaio de flexão em três pontos. Todas estas configurações foram estudadas no capítulo anterior.

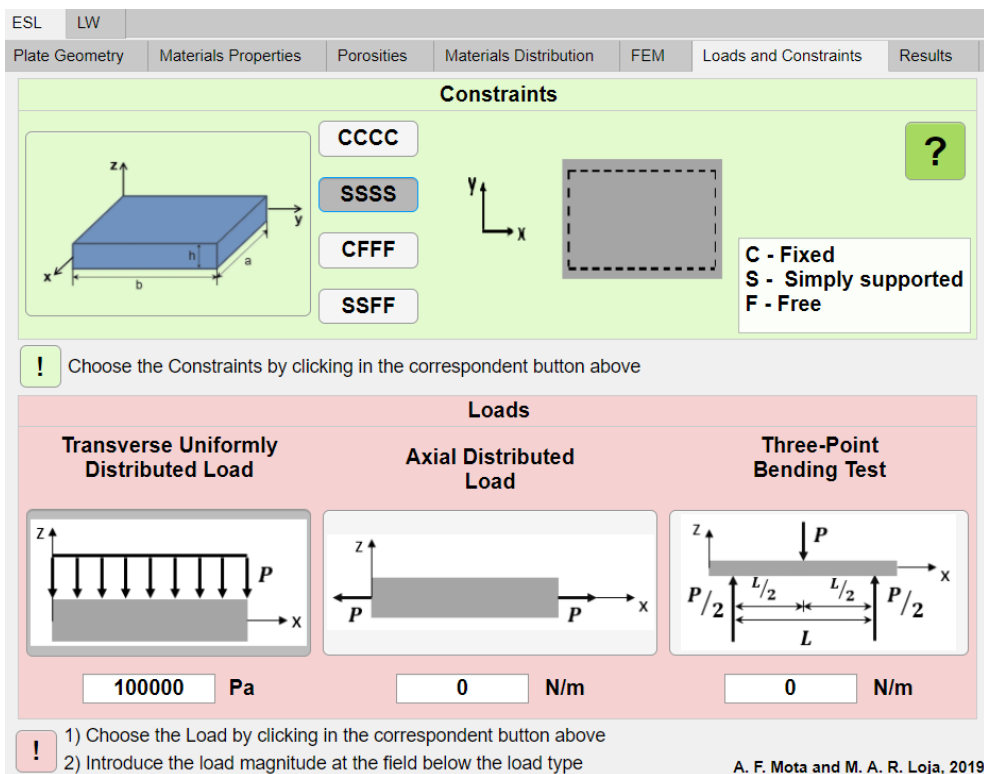


Figura 9.7. Plataforma computacional I – Separador “Loads and Constraints”

9.1.7. Separador “Results”

Uma vez efetuadas todas as configurações necessárias, no separador “Results” são apresentados os resultados obtidos na simulação. Como a Figura 9.8 evidencia, é apresentado um resumo das configurações aplicadas e informação acerca do desvio da superfície neutra e fator de correção de

corte. Para uma melhor interpretação do desvio da superfície neutra, apresenta-se também uma figura elucidativa a este respeito. No que diz respeito aos deslocamentos, o utilizador encontra os resultados obtidos num gráfico tridimensional acompanhado pelo valor do deslocamento máximo e sua localização na placa. Selecionando o campo identificado por “*Explore in independent figures*”, é possível analisar os resultados com maior detalhe, como mostra a Figura 9.9.

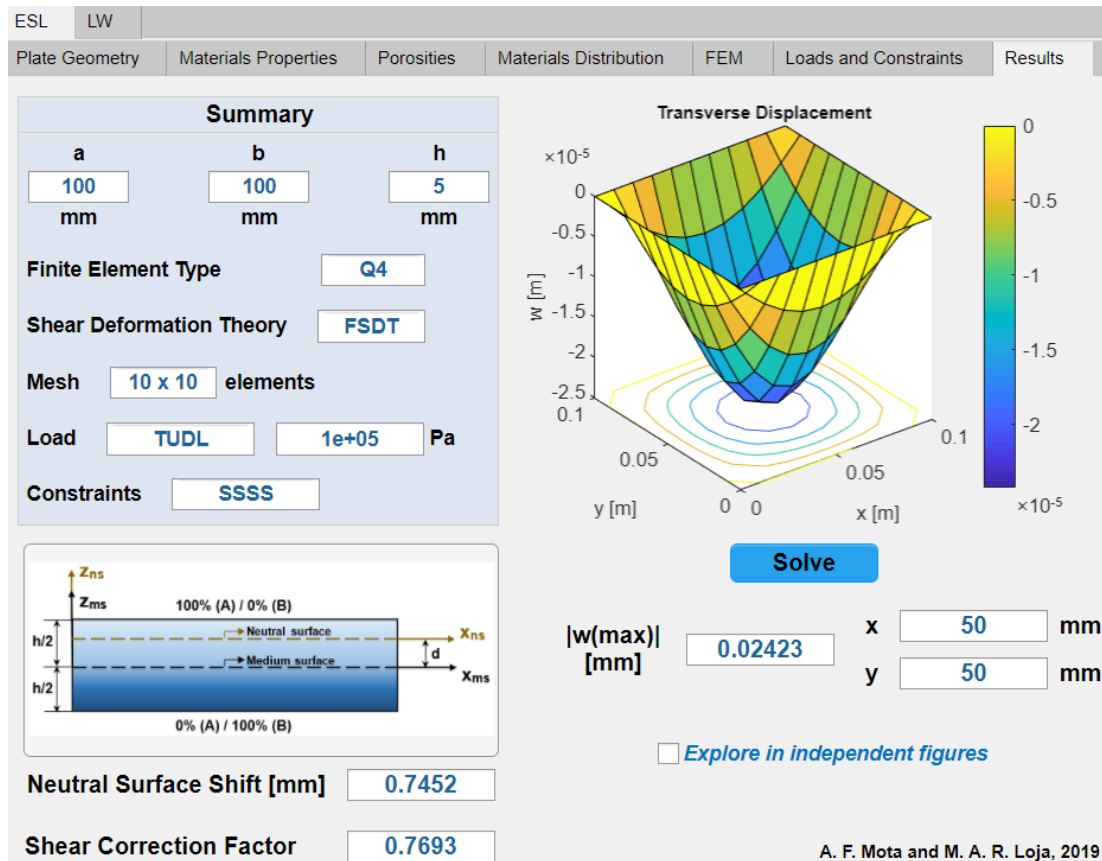


Figura 9.8. Plataforma computacional I – Separador “Results”

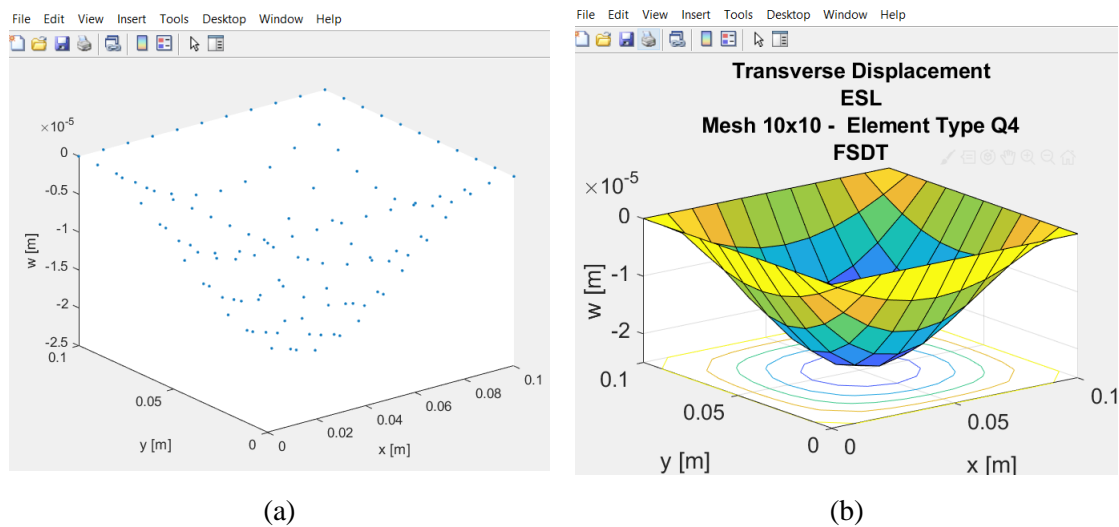


Figura 9.9. Plataforma Computacional I – Separador “Results”: (a) figura independente relativa aos deslocamentos nodais; (b) figura independente com os deslocamentos nodais e malha de elementos finitos

Espera-se que esta plataforma possa contribuir para a iniciação à modelação e simulação de placas pelo método de elementos finitos, assim como à compreensão de conceitos inerentes.

9.2. Plataforma computacional II - Otimização

Dada a sua importância num vasto leque de disciplinas e aplicações, a otimização encontra-se presente de uma forma mais ou menos explícita, em grande parte dos cursos, nomeadamente nos graus de licenciatura e mestrado. São várias as técnicas e algoritmos existentes para a resolução de problemas de otimização, desde os mais tradicionais aos bio-inspirados. No entanto, continua a verificar-se uma lacuna no que respeita a plataformas pedagógicas que permitam a exploração destes algoritmos na resolução de problemas reais e, mais concretamente, na área da engenharia [12]. Por este motivo, o desenvolvimento de uma plataforma pedagógica para apoio ao estudo e exploração de algoritmos de otimização num contexto educacional constituiu um dos objetivos deste trabalho.

A otimização constitui um método eficiente na resolução de muitos problemas de engenharia. Por este motivo, a compreensão dos conceitos e processos por detrás das técnicas de otimização confere aos alunos a capacidade de aplicação e adequação destas a problemas específicos. Nesse sentido, os ambientes experimentais e/ou de simulação tais como as plataformas pedagógicas podem aproximar os alunos da aplicação prática da otimização [12].

Existe atualmente um vasto leque de aplicações computacionais disponíveis no mercado para projetos de engenharia que incluem rotinas de otimização, e das quais são exemplo o SOLIDWORKS ® e o Ansys ®. Apesar de incluírem ferramentas de otimização, nenhuma delas engloba a técnica de otimização abordada neste trabalho nem tem o objetivo de abordá-la didaticamente. Aliás, na pesquisa efetuada neste âmbito não foram encontradas plataformas didáticas no contexto das metaheurísticas de otimização nem da sua aplicação na resolução de problemas de engenharia.

Pelos motivos apresentados, a plataforma computacional apresentada nesta secção tem como objetivo interligar pedagogicamente as técnicas metaheurísticas com os problemas de otimização de engenharia, promovendo a apreensão e exploração dos conceitos associados. A plataforma foi criada com o intuito de permitir aos estudantes o acompanhamento passo-a-passo do processo de modo a permitir a compreensão do modo de funcionamento das metaheurísticas de otimização.

A plataforma aqui apresentada foi desenvolvida no MATLAB App Designer ®, e contém um conjunto de separadores com diferentes funcionalidades que serão descritos de seguida. Mantendo o carácter pedagógico, quando pertinente os separadores incluem informação alusiva ao processo de otimização.

9.2.1. Separador “Introduction”

O separador “Introduction” tem como propósito indicar os principais passos para a utilização da plataforma computacional de otimização. Nesse sentido, e como pode ser visualizado na Figura 9.10, neste primeiro separador constam campos com breves descrições dos passos a seguir.

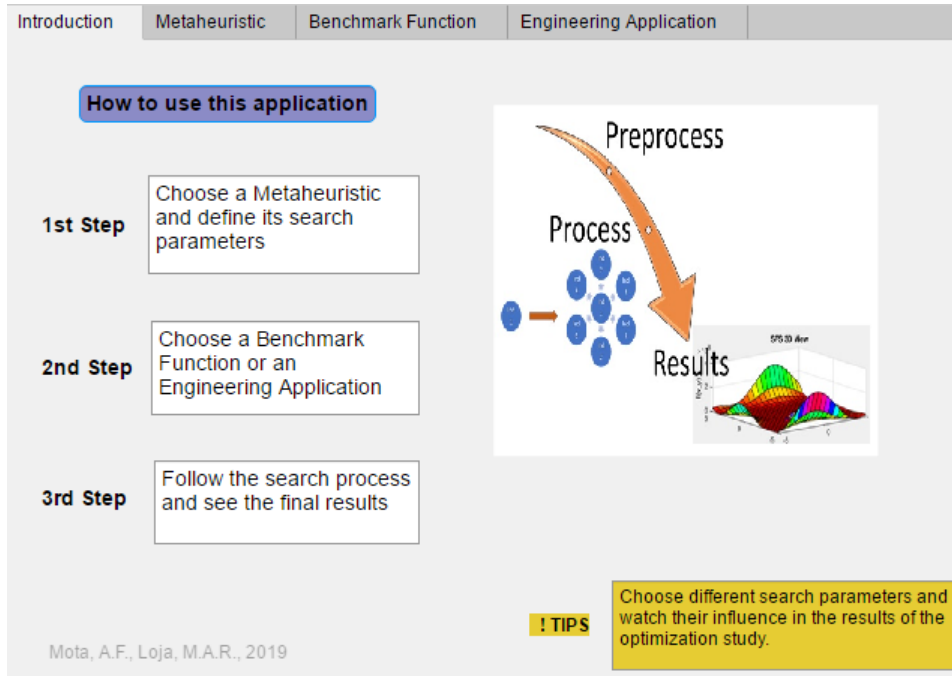


Figura 9.10. Plataforma computacional II – Separador “Introduction”

9.2.2. Separador “Metaheuristic”

No separador denominado “Metaheuristic”, os utilizadores encontram dois subseparadores: um para escolha da metaheurística a aplicar – “Metaheuristic” (Figura 9.11) – e um outro para a definição dos parâmetros de busca – “Search Parameters” (Figura 9.12).

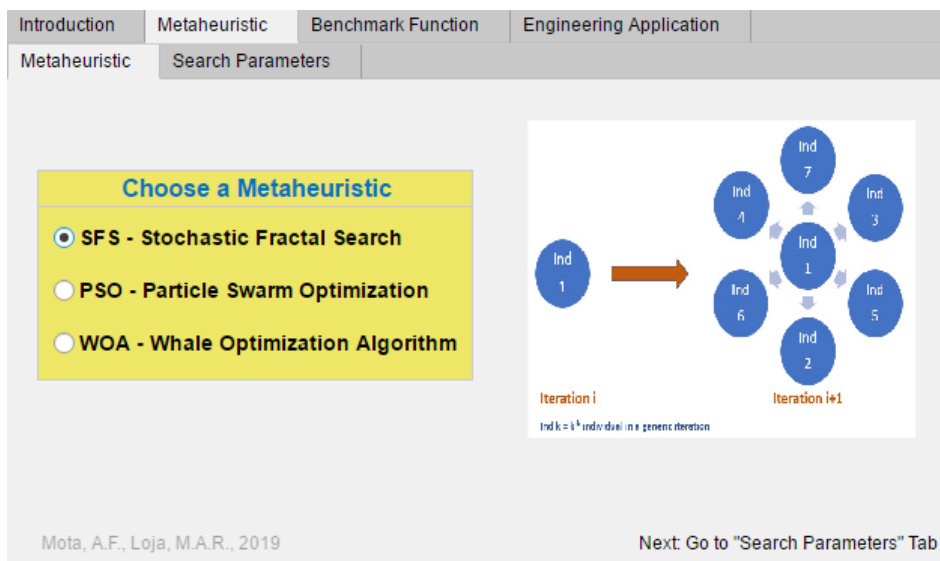


Figura 9.11. Plataforma computacional II – Subseparador “Metaheuristic”

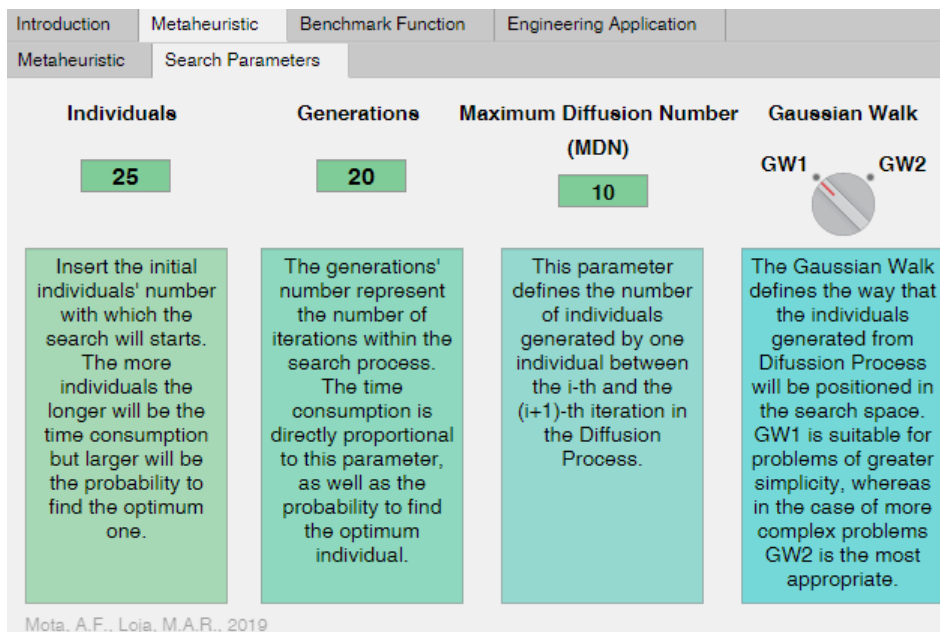


Figura 9.12. Plataforma computacional II – Separador “*Metaheuristic*”: subseparador “*Search Parameters*”

Após a seleção da metaheurística a explorar, o utilizador é direcionado para a definição dos respetivos parâmetros. Para permitir uma melhor compreensão dos parâmetros envolvidos e, desta forma, auxiliar o utilizador na sua definição, o separador “*Search Parameters*” inclui uma breve exposição dos mesmos.

9.2.3. Separador “*Benchmark Funtion*”

Se o utilizador optar pelo estudo de uma função de *benchmark*, então deve seguir para o respetivo separador. Este inclui três subseparadores: “*Preprocess*”, “*Process*” e “*Results*”. No primeiro deve seleccionar a função de *benchmark* a estudar, sendo que a aplicação tem disponível algumas funções com diferentes características quanto ao número de variáveis, incluindo funções unimodais e multimodais. Ao seleccionar uma das funções de *benchmark* disponíveis, surge na aplicação o gráfico correspondente e os campos “*Design Variables Domain*” e “*Exact Solution*” indicam o domínio das variáveis e a solução exata, respetivamente. A Figura 9.13 ilustra este procedimento.

Terminada a fase do pré-processamento, descrito no parágrafo anterior, segue-se a fase do processo de procura da solução ótima. O utilizador pode acompanhar o desenrolar deste processo no subseparador “*Process*” (Figura 9.14). Ao clicar no botão “*View Process*”, o utilizador dá início ao processo de busca do ótimo. Ao longo do processo a plataforma disponibiliza informação acerca de cada geração da busca. Em cada geração, indicada na zona superior central, é disponibilizada informação acerca do ótimo e sua localização após o primeiro (canto inferior esquerdo) e segundo (canto inferior direito) processos de atualização. Os gráficos à esquerda e à direita ilustram a localização dos indivíduos de cada geração após o primeiro e segundo processos de atualização,

respetivamente, indicando o melhor e pior indivíduo (“*Best Individual*” e “*Worst Individual*”, respetivamente), assim como o ótimo até à geração atual (“*Optimum*”).

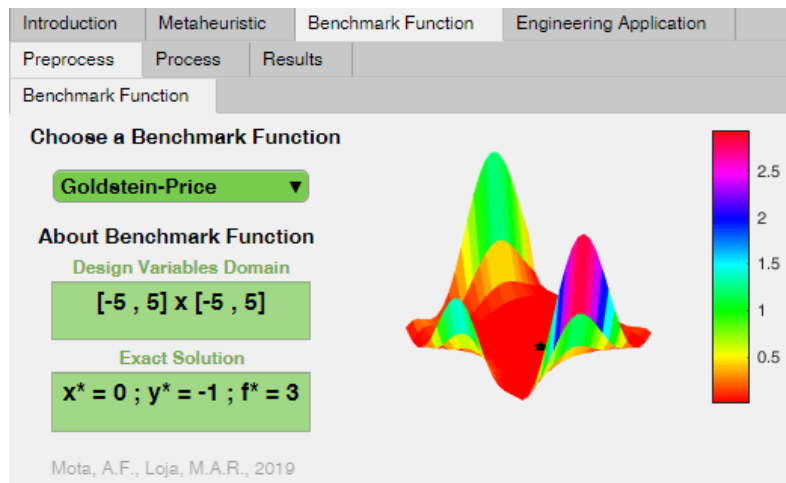


Figura 9.13. Plataforma Computacional II – Separador “*Benchmark Function*”: subseparator “*Preprocess*”

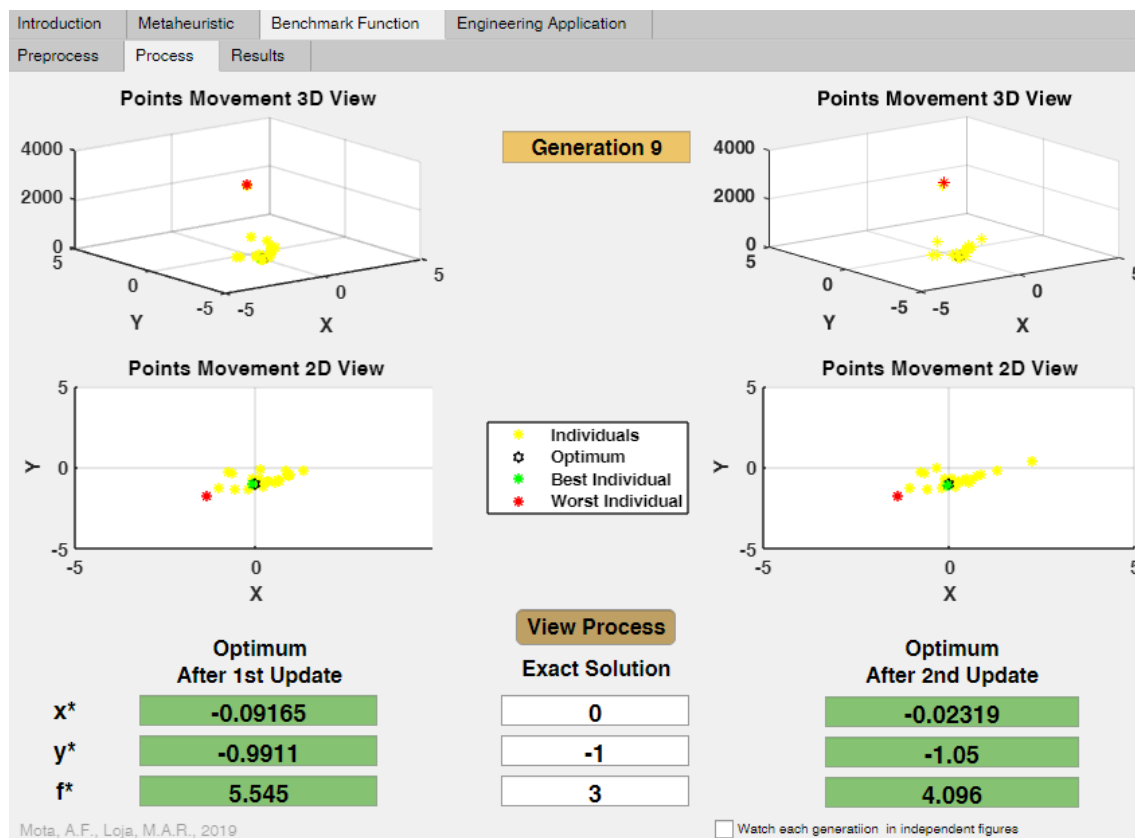


Figura 9.14. Plataforma computacional II – Separador “*Benchmark Function*”: subseparator “*Process*”

Se o utilizador pretender acompanhar o processo em figuras independentes da plataforma, que contêm adicional acerca do mesmo, então o campo “*Watch each generation in independent figures*” deve ser selecionado. Nesta situação, será apresentada uma figura, no final de cada geração, com gráficos acerca da localização dos indivíduos, incluindo o melhor e o pior da atual geração e o ótimo

até ao momento. Adicionalmente, apresenta-se a evolução do ótimo de cada geração ao longo das gerações, assim como os ótimos ordenados por ordem decrescente. Para uma avaliação do processo, junta-se um gráfico com a evolução do desvio padrão dos valores da função objetivo de cada indivíduo ao longo das gerações. Na Figura 9.15 encontra-se um exemplo de uma destas figuras independentes num estudo de otimização da função de *benchmark* Goldstein-Price.

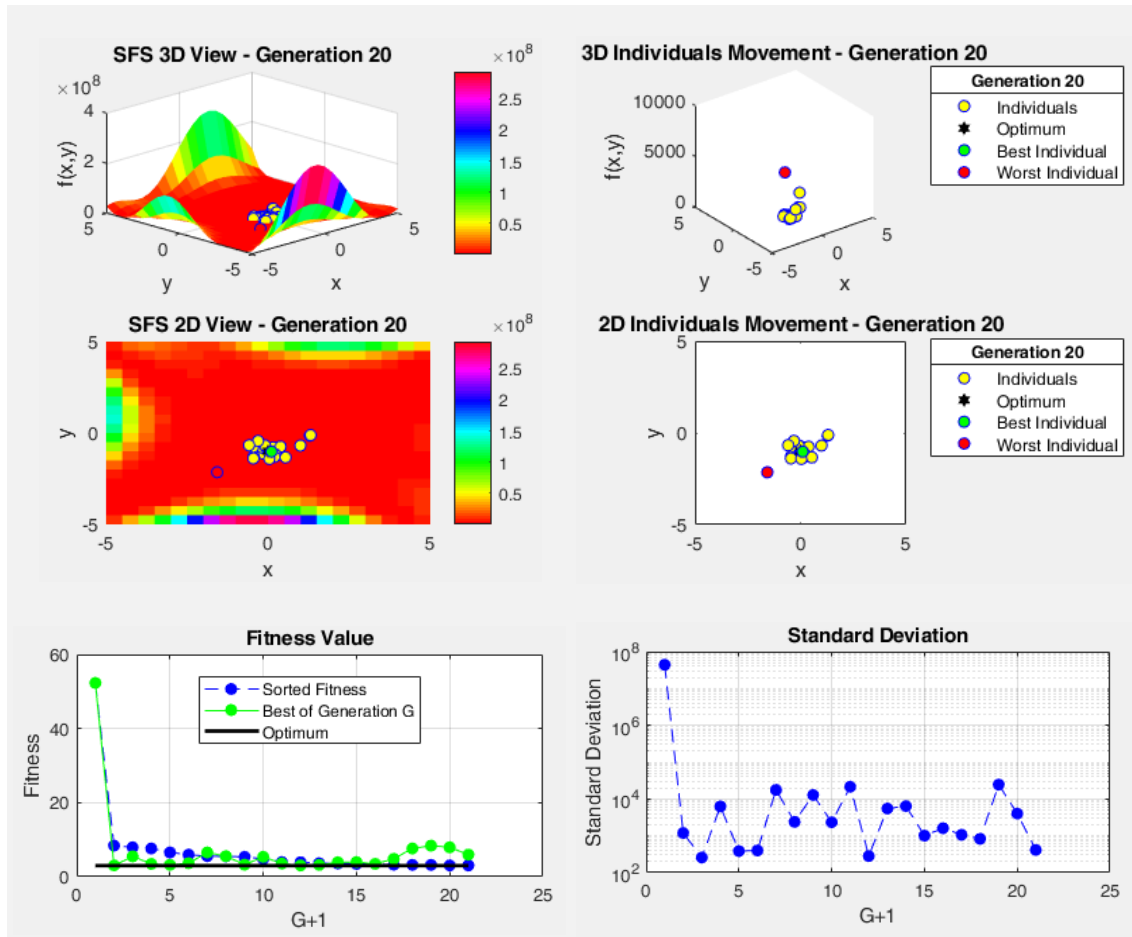


Figura 9.15. Plataforma computacional II – Subseparador “*Process*”: figuras independentes

Por fim, terminado o processo de procura do ótimo, o utilizador encontra no separador “*Results*” informação numérica e gráfica acerca das soluções ótima e exata e respetivas localizações, assim como um resumo do estudo efetuado. Este resumo relembra não só a técnica de otimização selecionada e respetivas parametrizações, como também a função de *benchmark* otimizada. Este separador pode ser visualizado na Figura 9.16.

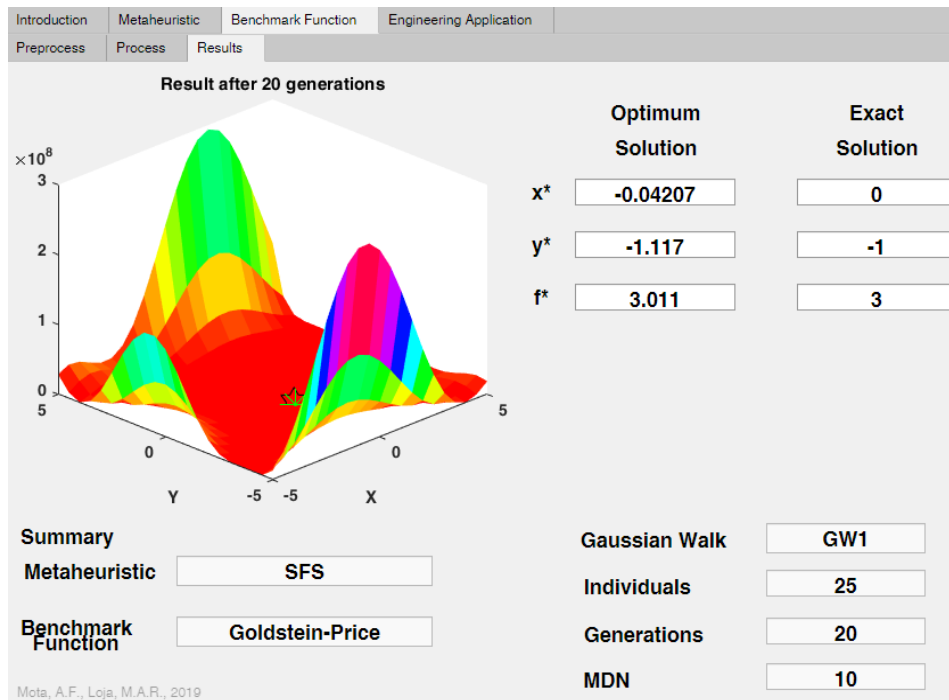


Figura 9.16. Plataforma Computacional II – Separador “*Benchmark Function*”: subseparador “*Results*”

9.2.4. Separador “*Engineering Application*”

Este separador é em tudo idêntico ao separador “*Benchmark Function*”, mas a descrição efetuada na subsecção antecedente aplica-se neste caso à otimização de aplicações típicas de engenharia. Para não tornar a descrição repetitiva, apresentam-se simplesmente, nas Figura 9.17 a Figura 9.19 os subseparadores correspondentes ao pré-processamento, processamento, e resultados, respetivamente.

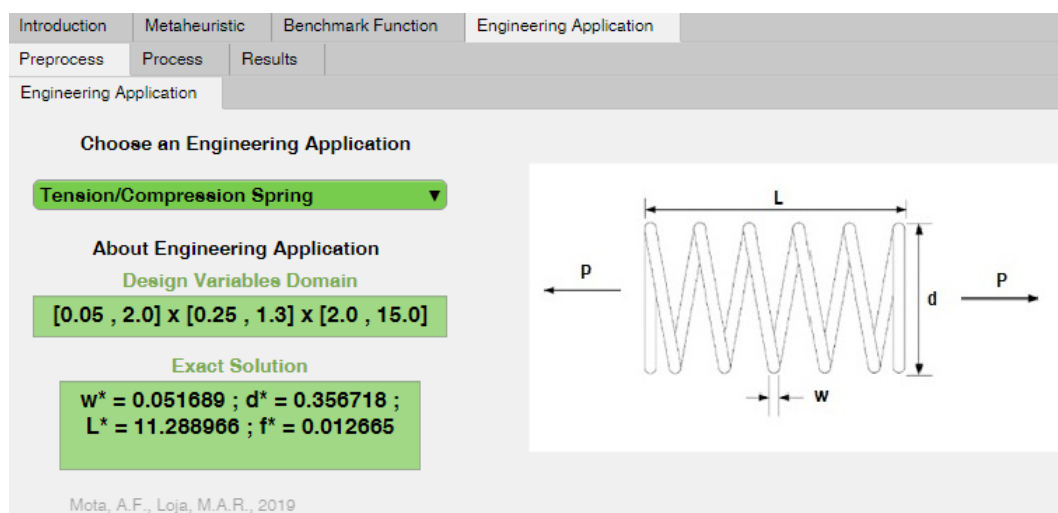


Figura 9.17. Plataforma computacional II – Separador “*Engineering Application*”: subseparador “*Preprocess*”

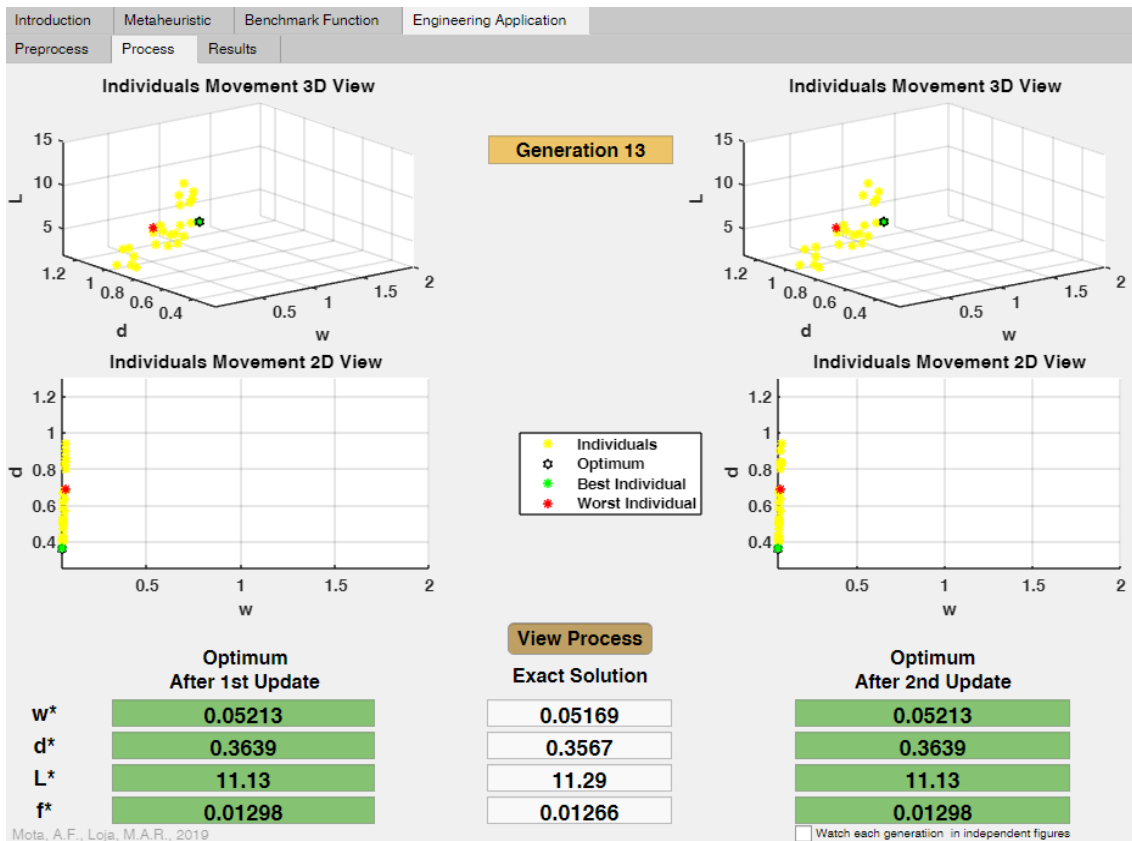


Figura 9.18. Plataforma computacional II – Separador “Engineering Application”: subseparador “Process”

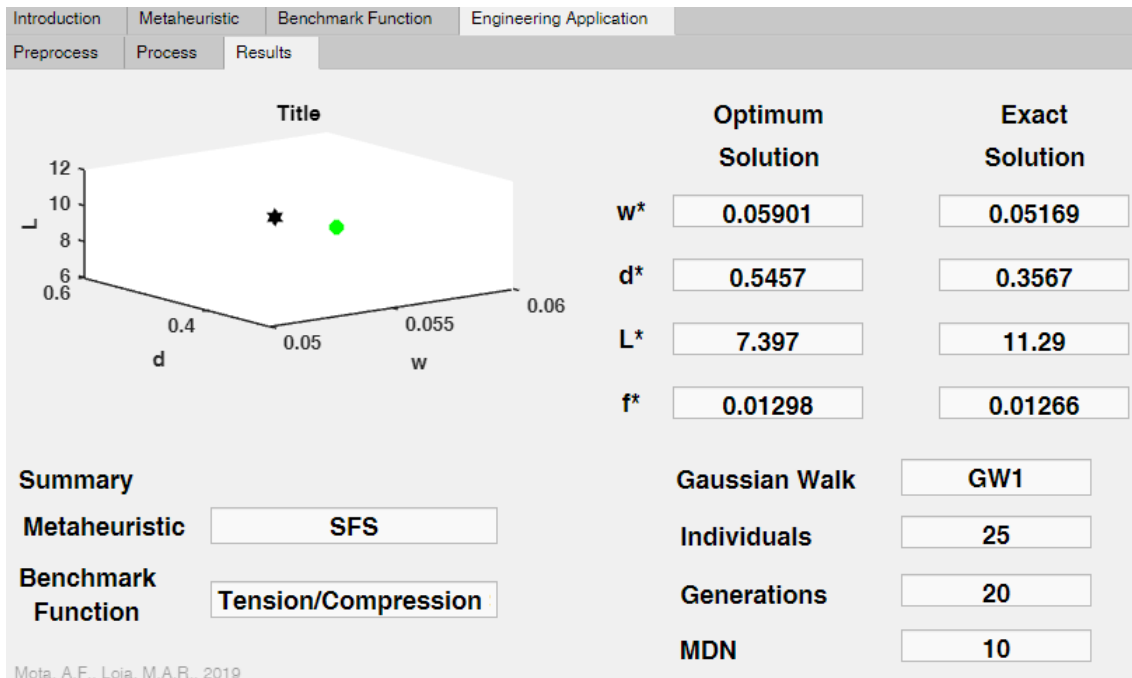


Figura 9.19. Plataforma computacional II – Separador “Engineering Application”: subseparador “Results”

10. Conclusões

O trabalho descrito nesta dissertação englobou diversos estudos, nomeadamente estudos de verificação incidentes nos diversos tópicos abrangidos por este trabalho, seguidos de variados casos de estudo.

De uma forma geral, os diversos estudos de verificação conduziram a resultados muito próximos dos relatados nos estudos considerados para referência. Desta forma confirmou-se a verificação dos mesmos, tanto segundo a ESL como segundo a LW, para diferentes configurações a nível de expoente da lei de potência (p), de relação de aspeto (a/h), de razões E_c/E_m , e_c/e_f , de frações mássicas de MWCNTs, de leis de distribuição de porosidades (*even* e *uneven*) e frações volúmicas das mesmas (α). Também no âmbito da otimização, os estudos efetuados com as funções de *benchmark*, Goldstein-Price e Rastringin, e com o problema de engenharia associado à minimização do peso de uma mola de tração/compressão permitiram verificar os algoritmos implementados para tal.

Em particular, e relativamente ao desvio da superfície neutra (d) e fator de correção de corte (k), conclui-se que estes tomam os valores 0 e $5/6$, respetivamente, nas situações em que a placa é composta por material homogéneo ($p = 0$ e $p \rightarrow \infty$). Em grande parte dos estudos, concluiu-se que a superfície neutra se afasta da superfície média com o aumento do expoente da lei de potência até $p \approx 2$, valor a partir do qual esta superfície desloca-se no sentido da superfície média até coincidir com esta no limite quando $p \rightarrow \infty$. Excetua-se o estudo de verificação 11, referente à abordagem multicamada, onde a razão d/h aumenta com o expoente p para todas as configurações avaliadas e é superior para a configuração 2-1-1, comparativamente à configuração 2-2-1, para todos os expoentes considerados. Relativamente ao fator de correção de corte, verificou-se que apresenta um comportamento crescente para baixos expoentes, diminuindo depois com o aumento do expoente, voltando a aumentar para valores mais elevados de p tendendo para $5/6$ quando $p \rightarrow \infty$. Uma exceção a este comportamento surgiu no estudo de verificação 4, acerca da evolução do fator de correção de corte em função de p para diferentes razões e_c/e_f . Neste caso, k diminui com o expoente p para todos os valores considerados. No caso dos estudos de verificação no âmbito das porosidades, o modelo *even* conduz a maiores desvios da superfície neutra e a maiores deslocamentos transversais máximos do que o modelo *uneven*. Neste caso de estudo, verificou-se ainda que a superfície neutra se afasta da superfície média com o aumento da fração volúmica de porosidades, independentemente do tipo de distribuição atribuída a estas (*even* ou *uneven*). Ainda acerca do estudo de verificação 8, mas relativamente ao fator de correção de corte, concluiu-se que as porosidades distribuídas de acordo com o modelo *even* conduzem a maiores valores de k comparativamente ao modelo *uneven*, apresentando o fator de correção de corte um comportamento crescente com α , contrariamente ao

verificado com porosidades do tipo *uneven*. Daqui se conclui que os coeficientes de rigidez elástica sofrem maior correção quando se considera a existência de porosidades do tipo *uneven*.

Ainda no que respeita aos estudos de verificação, nos estudos correspondentes à influência da introdução de reforço de MWCNTs numa matriz de alumínio, concluiu-se que o aumento da percentagem mássica deste reforço provoca um afastamento da superfície neutra em relação à superfície média, conduzindo também a módulos de elasticidade inferiores. Relativamente às teorias da deformação de corte, a consideração da HSDT resultou em menores desvios em relação à referência considerado. Ainda na abordagem ESL, os modelos de cálculo de deslocamentos e tensões foram verificados com sucesso, atendendo aos desvios relativamente baixos obtidos. É possível que os maiores desvios se devam à diferença entre campos de deslocamentos considerados e metodologia utilizada para a determinação das tensões de corte (via relações constitutivas ou via equações de equilíbrio).

Relativamente à abordagem LW, os estudos de verificação 9 e 10, permitiram avaliar o modelo desenvolvido para o estudo de placas sandwich laminadas de três camadas. Os resultados do estudo de verificação 9, onde se considera as propriedades materiais das faces múltiplas das do núcleo, estão em total concordância com a literatura de referência não só no que respeita ao deslocamento transversal máximo como também às tensões, normais e de corte. O estudo de verificação 10 permitiu avaliar placas sandwich laminadas com orientação $0^\circ/0^\circ/0^\circ$ e $0^\circ/90^\circ/0^\circ$. Neste caso, a concordância aumenta com o aumento da relação de aspeto, de uma forma geral, verificando-se em particular desvios reduzidos relativamente a resultados referentes à teoria de elasticidade 3D.

No estudo de verificação 11, relativamente ao deslocamento transversal máximo determinado por abordagem multicamada, os baixos desvios em relação à referência permitiram concluir que a formulação desenvolvida para o cálculo do fator de correção de corte pode ser considerada válida para os casos estudados.

Considerando agora os casos de estudo, e começando pelo caso de estudo 1 onde foi avaliada a influência da lei de potência na resposta de placas compósitas Al/Al₂O₃, foram implementados três modelos de evolução da fração volúmica da fase metálica distintos da lei de potência utilizada nos restantes estudos. Comparando os modelos A e B, em ambos o deslocamento transversal máximo diminui com o aumento do expoente p , o que está de acordo com a distribuição de fração volúmica definida, pois o aumento deste parâmetro conduz a um aumento da fração volúmica da fase cerâmica, o que torna o material mais rígido. Concluiu-se ainda com este estudo que o modelo A conduz a menores deslocamentos transversais máximos e a maiores fatores de correção de corte do que o modelo B, para todos os expoentes considerados. O modelo C, cuja formulação foi inspirada na expressão matemática da resposta de um sistema em vibração livre sub-amortecida, foi decomposto em três submodelos de modo a avaliar a influência dos parâmetros c e d . Os resultados obtidos permitiram concluir que $\bar{w}_{C1} < \bar{w}_{C3} < \bar{w}_{C2}$ para $p \leq 3$, para expoentes superiores concluiu-se que $\bar{w}_{C1} < \bar{w}_{C2} < \bar{w}_{C3}$. Relativamente ao fator de correção de corte, concluiu-se que $k_{C3} <$

$k_{C1} < k_{C2}$ para $p \leq 2$, $k_{C3} < k_{C2} < k_{C1}$ para $3 \leq p \leq 9$, e $k_{C2} < k_{C3} < k_{C1}$ para $p = 10$, o que significa que a correção introduzida pelo fator de correção de corte será maior ou menor, para um mesmo expoente, em função do modelo C1, C2 ou C3.

Os estudos realizados para avaliar o efeito da inclusão de nanopartículas em materiais de base polimérica permitiram concluir que a presença de MWCNTs torna as placas consideradas mais rígidas, o que se traduz em menores deslocamentos transversais quando as mesmas se consideram sujeitas a cargas de tração e flexão, correspondentes a situações de ensaios de tração e flexão em três pontos, respetivamente. De facto, foi possível concluir que, dentro da gama de frações mássicas de MWCNTs consideradas, o aumento da fração volúmica de reforço resulta num aumento do módulo de Young do nanocompósito considerado (PSU/PSU+2%MWCNTs). Esta tendência é também acompanhada pela evolução contínua e gradual de propriedades imposta pela lei de potência considerada. Recordando que a introdução de MWCNTs num FGM Al/ZrO₂ reduziu o módulo de Young do compósito, como observado no estudo de verificação 7, conclui-se que a influência do reforço de nanotubos de carbono no módulo de Young de um compósito depende não só da matriz como também das características materiais e geométricas dos nanotubos considerados.

Avançando para os estudos sobre a influência das distribuições de porosidades, os resultados permitiram concluir que a distribuição de porosidades denominada *uneven* conduz a uma evolução singular do módulo de Young do nanocompósito considerado, verificando-se um mínimo desta propriedade material no plano médio da placa e um máximo nas superfícies inferior e superior da mesma. Este facto deve-se, como referido na respetiva secção, à dependência do módulo de z por parte do módulo de Young, imposta pela formulação correspondente a este tipo de distribuição de porosidades. De forma bastante distinta da observada para a distribuição *uneven*, as porosidades distribuídas de acordo com o modelo *even* resultam num aumento ligeiro do módulo de elasticidade do material ao longo da espessura da placa, evoluindo de um mínimo na superfície inferior (PSU) a um máximo na superfície superior (PSU+2%MWCNTs). A influência destes dois parâmetros, tipo de distribuição de porosidades e fração volúmica das mesmas, foi avaliada nos casos de estudo 6 e 7, onde as placas foram modeladas a nível geométrico, condições de carga e apoios de acordo com as normas ASTM correspondentes a ensaios de tração e flexão em três pontos. Destes estudos concluiu-se que, considerando a distribuição de porosidades do tipo *even*, os deslocamentos axial e transversal máximos, nos casos de tração e flexão em três pontos respetivamente, são substancialmente superiores aos apresentados na condição de porosidades do tipo *uneven*. Este facto é independente dos parâmetros α e p . Como esperado, em ambas as situações de carga consideradas o aumento da fração volúmica de porosidades conduz a maiores deslocamentos máximos, independentemente do tipo de distribuição das mesmas e do expoente da lei de potência. Como o aumento do nível de porosidades e da fração mássica de MWCNTs induzem efeitos opostos na rigidez do nanocompósito, o primeiro reduz e a segunda aumenta, a conjugação destes dois parâmetros pode ser benéfica para determinadas aplicações.

No caso de estudo 8, respeitante à abordagem LW, foi considerada uma placa sandwich constituída por três camadas: um núcleo metálico e faces inferior e superior com gradiente funcional Al/Al+2.5%MWCNTs. Neste estudo os campos de deslocamentos associados às camadas externas foram formulados de acordo com a FSDT, sendo que no caso do núcleo foram utilizadas as duas teorias de deformação de corte abordadas no presente trabalho. O estudo em causa teve o objetivo de analisar a influência de porosidades, no que respeita à sua fração volúmica e modelo de distribuição, do expoente da lei de potência e da teoria de deformação de corte aplicada ao campo de deslocamentos do núcleo no deslocamento transversal máximo da placa. Os resultados revelaram novamente que a distribuição *even* provoca maiores deslocamentos transversais do que a distribuição *uneven*. Como esperado, a consideração de três camadas porosas promove um aumento do deslocamento transversal, em comparação com o caso em que se considerou a existência de porosidades unicamente nas camadas externas. Também o aumento do expoente p resulta em maiores fatores de correção de corte e deslocamentos transversais, independentemente do tipo de porosidades e da sua fração volúmica no material. No que concerne ao fator de correção de corte, a distribuição de porosidades do tipo *even* resultou, em todos os casos avaliados, em maiores valores deste parâmetro do que o tipo *uneven*, tendo-se verificado a seguinte relação $k(\textit{even cam. ext.}) > k(\textit{uneven cam. ext.}) > k(\textit{even 3 cam.}) > k(\textit{uneven 3 cam.})$, o que implica maior influência nos coeficientes de rigidez elástica quando se consideram porosidades em todas as camadas da placa e, em particular, na distribuição *uneven*. Foi ainda observado um comportamento deste fator em função do parâmetro α , para diferentes expoentes da lei de potência, bastante distinto dos restantes casos considerados. Quando se introduzem porosidades do tipo *even* nas três camadas da placa, o fator de correção de corte diminui para $p = 0$ e $p = 0.5$, é praticamente constante para $p = 1$, e aumenta para $p = 2$ e $p = 5$, sendo que os decréscimos e aumentos são mais pronunciados para maiores valores de α . Ainda a este respeito, concluiu-se que para um mesmo valor de α , o fator de correção de corte aumenta com o aumento do expoente da lei de potência. Relativamente às teorias de deformação de corte, nas condições estudadas pode-se concluir que a consideração de diferentes teorias na formulação do campo de deslocamentos do núcleo, FSDT ou HSDT, os resultados obtidos não revelam que estas afetem o deslocamento transversal de forma vincada. Por último, os resultados obtidos permitiram concluir que, quando se variam os parâmetros α e p , os deslocamentos transversais máximos apresentam uma tendência linear crescente no caso de porosidades do tipo *uneven*, contrariamente à tendência exponencial crescente verificada quando se assume a presença de porosidades do tipo *even*.

Os casos de estudo avaliados terminaram com seis problemas de otimização, onde se pretendia estudar os parâmetros – expoente da lei de potência, fração mássica de MWCNTs e fração volúmica de porosidades – que conduzem ao deslocamento transversal mínimo da placa considerada. No primeiro destes casos, considerando-se apenas como variável de projeto p , ou seja, considerando a placa isenta de porosidades, o ótimo obtido em 70% das corridas efetuadas coincide com a solução

ótima. Ainda que utilizando como parâmetros de busca fractal estocástica valores tão reduzidos como 5 indivíduos, uma única difusão e 5 gerações, o algoritmo mostrou-se bastante eficiente na resolução deste problema. No caso de estudo 10, considerando-se uma placa constituída por alumínio com possibilidade de reforço com MWCNTs, o estudo de minimização considerou uma única variável de projeto: a fração mássica de MWCNTs utilizada para reforço do alumínio. Mantendo-se os parâmetros de busca, também neste segundo estudo o algoritmo de busca fractal estocástica demonstrou um bom desempenho ao atingir a solução exata em 6 das 10 corridas realizadas. Os casos de estudo 11 e 12, considerando ambos como única variável de projeto a fração volúmica de porosidades distribuídas de acordo com o modelo *even*, avaliaram a influência da dimensão do espaço de busca no comportamento do SFS. Verificou-se que, a este respeito, o aumento do espaço de busca implicou a necessidade de um aumento do número de indivíduos para que a solução ótima iguale a solução exata, resultando num menor desvio padrão, e poderá justificar um aumento do número de corridas. Tendo em conta que o espaço de busca do caso de estudo 12 é cerca de 9 vezes superior ao considerado no caso de estudo 11, pode-se afirmar que o algoritmo aplicado demonstra boa eficácia tanto em espaços de busca muito reduzidos como em espaços de busca de dimensão superior. No caso de estudo 13, onde considerou-se uma FGP Al/ZrO₂ com expoente $p = 1$, o estudo de otimização considerou como variável de projeto a fração volúmica de porosidades. Em todas as corridas efetuadas neste estudo as soluções ótimas atingidas coincidiram com a solução exata. No último caso de estudo, considerando a mesma situação do caso de estudo 9, o parâmetro α juntou-se ao expoente da lei de potência, resultando num problema de duas variáveis. Neste caso, a solução ótima foi alcançada em 40% das 10 corridas realizadas, o que permite concluir que o aumento do número de variáveis exige uma adequação dos restantes parâmetros de otimização, na medida em que aumenta o espaço de busca. A diversidade de casos de estudos de otimização realizados demonstra o bom desempenho da busca fractal estocástica no âmbito de problemas de engenharia.

As plataformas computacionais apresentadas no capítulo 9 compõem um dos objetivos a atingir com este trabalho. A plataforma computacional I, relativa à análise estática de placas, constituiu uma ferramenta interativa para introdução dos materiais com gradiente funcional, permitindo a consideração de reforço com nanotubos de carbono e/ou de diferentes distribuições de porosidades. Adicionalmente, expõe os principais aspetos subjacentes ao método dos elementos finitos e às teorias de deformação de corte. Permitindo ainda diferentes situações de carga e apoios, a plataforma apresenta os resultados obtidos não só de uma forma gráfica, ilustrando os deslocamentos dos nós da malha de elementos finitos, como também numérica através dos valores de parâmetros como o desvio da superfície neutra e o fator de correção de corte, ou com o deslocamento máximo obtido e sua localização na placa. Em suma, a plataforma desenvolvida apresenta-se prática e útil na aprendizagem dos diversos temas que engloba, permitindo avaliar a influência dos diversos parâmetros envolvidos nos resultados.

Relativamente à plataforma computacional II, criada para estudos de otimização através de metaheurísticas, permite o estudo de diferentes casos, nomeadamente de funções de *benchmark* com diferentes graus de complexidade e de problemas típicos de engenharia, todos eles de introdução e avaliação de algoritmos. Trata-se também de uma plataforma de fácil utilização, permitindo o acompanhamento do processo de otimização na busca pela solução ótima. Desta forma, constitui um elemento pedagógico para o processo de ensino e aprendizagem neste campo, particularmente nos níveis de licenciatura e mestrado.

Em geral, os objetivos foram cumpridos e permitiram abranger diferentes materiais, avaliando a influência de reforço com MWCNTs, a influência da distribuição de porosidades e da sua maior ou menor concentração, a influência da distribuição de fração volúmica das fases materiais, e de diferentes configurações de condições de fronteira, não só no comportamento estático das placas como também no desvio da sua superfície neutra e no fator de correção de corte. Também os estudos de otimização permitiram avaliar o desempenho da metaheurística abordada e a influência dos parâmetros envolvidos.

11. Desenvolvimentos Futuros

Considerando os objetivos propostos como alcançados, os estudos e plataformas desenvolvidas permitem ainda dar continuidade ao trabalho efetuado.

Após a verificação já efetuada aos modelos desenvolvidos e implementados, considera-se que os mesmos poderão vir a ser validados através da utilização de resultados experimentais, dado que até ao momento não foram encontrados trabalhos de carácter experimental, publicados sobre esta temática.

Relativamente às distribuições de porosidades, poder-se-á expandir os estudos a outros modelos de distribuição para futura comparação e adequação dos mesmos às necessidades impostas em fase de projeto.

É relevante dar continuidade à análise de placas constituídas por materiais porosos por meio da abordagem multicamada, na medida que a pesquisa efetuada neste sentido até à data não permitiu encontrar estudos neste âmbito.

É de referir que a utilização de técnicas de imagem para caracterização de distribuições de porosidades encontra-se já em curso como sequência natural deste trabalho, no sentido de aproximar as distribuições de porosidades por funções que as descrevam, e prever o comportamento mecânico de placas nas quais estas distribuições ocorrem.

No contexto da otimização, e em articulação com o ponto anterior que se encontra já em desenvolvimento, será oportuno e importante ampliar os estudos de otimização usando os modelos multicamada de modo a avaliar de forma mais exaustiva o desempenho da metaheurística nessas condições.

Quanto às plataformas computacionais, considera-se também importante a extensão da plataforma de análise de placas por elementos finitos, a novas situações de carga e outras condições de fronteira, assim como a diferentes materiais compósitos, como por exemplo compósitos laminados e/ou diferentes tipos de reforço. Já na plataforma dedicada à otimização, seria interessante a inclusão de novos problemas de engenharia bem como a integração de outras metaheurísticas.

Referências

- [1] A. Sola, D. Bellucci, and V. Cannillo, “Functionally graded materials for orthopedic applications – an update on design and manufacturing,” *Biotechnol. Adv.*, vol. 34, no. 5, pp. 504–531, 2016.
- [2] R. M. Mahamood and E. T. Akinlabi, “Functionally graded material: An overview,” in *Proceedings of the World Congress on Engineering*, 2012, vol. III, pp. 664–668.
- [3] M. Naebe and K. Shirvanimoghaddam, “Functionally graded materials: A review of fabrication and properties,” *Appl. Mater. Today*, vol. 5, pp. 223–245, 2016.
- [4] I. D. Johnston, D. K. McCluskey, C. K. L. Tan, and M. C. Tracey, “Assessment of porosity influence on vibration and static behavior of functionally graded magneto-electro.elastic plate: A finite element study,” *J. Micromechanics Microengineering*, no. 24, pp. 1–7, 2014.
- [5] S. Coskun, J. Kim, and H. Toutanji, “Bending, free vibration, and buckling analysis of functionally graded porous micro-plates using a general third-order plate theory,” *J. Compos. Sci.*, vol. 3, no. 15, pp. 1–22, 2019.
- [6] G. Catania and M. Strozzi, “Damping oriented design of thin-walled mechanical components by means of multi-layer coating technology,” *Coatings*, vol. 8, no. 73, pp. 1–21, 2018.
- [7] L. Yu, Y. Ma, C. Zhou, and H. Xu, “Damping efficiency of the coating structure,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 42, pp. 3045–3058, 2005.
- [8] M. A. R. Loja, “Dynamic response of soft core sandwich beams with metal-graphene nanocomposite skins,” *Shock Vib.*, vol. 2017, 2017.
- [9] X. Xu, Y. Jiang, and H. Pueh Lee, “Multi-objective optimal design of sandwich panels using a genetic algorithm,” *Eng. Optim.*, vol. 49, no. 10, pp. 1665–1684, 2017.
- [10] H. Salimi, “Stochastic fractal search: A powerful metaheuristic algorithm,” *Knowledge-Based Syst.*, vol. 75, pp. 1–18, 2015.
- [11] A. Nakib, S. Ouchraa, N. Shvai, L. Souquet, and E. G. Talbi, “Deterministic metaheuristic based on fractal decomposition for large-scale optimization,” *Appl. Soft Comput. J.*, vol. 61, pp. 468–485, 2017.

- [12] A. F. Mota and M. A. R. Loja, "A pedagogical platform for metaheuristic optimization," in *Exp.at'19*.
- [13] S. Olmos, "Understanding mobile learning : Devices , pedagogical implications and research lines," *Teoría la Educ. - Educ. y Cult. en la Soc. la Inf.*, vol. 15, no. April 2016, pp. 20–42, 2014.
- [14] M. C. P. O. Okojie, A. A. Olinzock, and T. C. Okojie-boulder, "The pedagogy of technology integration," *J. Technol. Stud.*, pp. 66–71, 2005.
- [15] C. Pons-lelardeux, M. Galaup, F. Segonds, and P. Lagarrigue, "Didactic study of a learning game to teach mechanical engineering," *Procedia Eng.*, vol. 132, pp. 242–250, 2015.
- [16] L. A. Dobrzański and R. Honysz, "The significance of multimedia didactic aids in the informative society," *Arch. Mater. Sci. Eng.*, vol. 32, no. 2, pp. 117–120, 2008.
- [17] R. Dobrzański, L.A; Honysz, "Materials science virtual laboratory innovatory didactic tool in the teaching of material engineering performed by traditional and e-learning methods," *acta Mech. Autom.*, vol. 2, no. 4, pp. 5–10, 2008.
- [18] T. A. N. Silva and M. A. R. Loja, "An educational platform in structural mechanics," *Int. J. Online Eng.*, vol. 9, pp. 10–12, 2013.
- [19] V. dos Santos, R. N. Brandalise, and M. Savaris, "Composite biomaterials," in *Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering*, Springer, 2017.
- [20] S. K. Mazumdar, *Composites manufacturing: Materials, product, and process engineering*. Boca Raton, 2002.
- [21] J. R. Vinson and R. L. Sierakowski, "The behavior of structures composed of composite materials," in *Solid mechanics and its applications*, 2nd ed., vol. 105, Dordrecht, Netherlands: Springer, 2008, p. 445.
- [22] H. Thai and S. Kim, "A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells," *Compos. Struct.*, vol. 128, pp. 70–86, 2015.
- [23] B. Kieback, A. Neubrand, and H. Riedel, "Processing techniques for functionally graded materials," *Mater. Sci. Eng. A*, vol. 362, no. 1–2, pp. 81–105, 2003.
- [24] D. K. Jha, T. Kant, and R. K. Singh, "A critical review of recent research on functionally graded plates," *Compos. Struct.*, vol. 96, pp. 833–849, 2013.

- [25] A. F. Mota and M. A. R. Loja, "Mechanical behavior of porous functionally graded nanocomposite materials," *C - J. Carbon Res.*, vol. 5, no. 34, pp. 1–21, 2019.
- [26] A. Hassan and A. Hassan, "A review on buckling analysis of functionally graded plates Under thermo- mechanical loads," vol. 11, no. 1, pp. 345–368, 2019.
- [27] M. K. Singha, T. Prakash, and M. Ganapathi, "Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load," *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 47, no. 4, pp. 453–460, 2011.
- [28] F. Hussain, M. Hojjati, M. Okamoto, and R. E. Gorga, "Review article: Polymer-matrix nanocomposites, processing, manufacturing, and application: An overview," *J. Compos. Mater.*, vol. 40, no. 17, pp. 1511–1575, 2006.
- [29] C. Borgonovo and D. Apelian, "Manufacture of aluminum nanocomposites: A critical review," *Mater. Sci. Forum*, vol. 678, pp. 1–22, 2011.
- [30] R. F. Gibson, "A review of recent research on mechanics of multifunctional composite materials and structures," *Compos. Struct.*, vol. 92, no. 12, pp. 2793–2810, 2010.
- [31] V. R. Raphey, T. K. Henna, K. P. Nivitha, P. Mufeedha, C. Sabu, and K. Pramod, "Advanced biomedical applications of carbon nanotube," *Mater. Sci. Eng. C*, vol. 100, no. July 2018, pp. 616–630, 2019.
- [32] L. Feng and Z. Liu, "Biomedical applications and toxicology of carbon nanomaterials," *Biomed. Appl. Toxicol. Carbon Nanomater.*, pp. 131–162, 2016.
- [33] A. Wedel-Grzenda *et al.*, "Polysulphone composite membranes modified with two types of carbon additives as a potential material for bone tissue regeneration," *Bull. Mater. Sci.*, vol. 40, no. 1, pp. 201–212, 2017.
- [34] G. Udupa, S. R. Shrikantha, and K. V Gangadharan, "Future applications of carbon nanotube reinforced functionally graded composite materials," in *IEEE-International Conference on Advances in Engineering, Science and Management (ICAESM), 2012*, 2012, pp. 399–404.
- [35] X. Li, Y. Fan, and F. Watari, "Current investigations into carbon nanotubes for biomedical application," *Biomed. Mater.*, vol. 5, no. 2, 2010.
- [36] J. C. H. Affdl and J. L. Kardos, "The Halpin-Tsai equations: A review," *Polym. Eng. Sci.*, vol. 16, no. 5, pp. 344–352, 1976.

- [37] M. Rafiee, X. Q. He, S. Mareishi, and K. M. Liew, "Modeling and stress analysis of smart CNTs/Fiber/Polymer multiscale composite plates," *Int. J. Appl. Mech.*, vol. 06, no. 03, p. 1450025, 2014.
- [38] M. A. Rafiee, J. Rafiee, Z. Wang, H. Song, Z. Yu, and N. Koratkar, "Enhanced mechanical properties of nanocomposites at low graphene content," *ACS Nano*, vol. 3, no. 12, pp. 3884–3890, 2009.
- [39] D. M. S. Costa and M. A. R. Loja, "Assessing the static behavior of hybrid CNT-metal-ceramic composite plates," *AIMS Mater. Sci.*, vol. 3, no. 3, pp. 808–831, 2016.
- [40] J. Kim, K. K. Żur, and J. N. Reddy, "Bending, free vibration, and buckling of modified couples stress-based functionally graded porous micro-plates," *Compos. Struct.*, vol. 209, no. October 2018, pp. 879–888, 2019.
- [41] N. Soro, L. Brassart, Y. Chen, M. Veidt, H. Attar, and M. S. Dargusch, "Finite element analysis of porous commercially pure titanium for biomedical implant application," *Mater. Sci. Eng. A*, vol. 725, no. February, pp. 43–50, 2018.
- [42] C. Domínguez-Trujillo *et al.*, "Bioactive coatings on porous titanium for biomedical applications," *Surf. Coatings Technol.*, vol. 349, no. June, pp. 584–592, 2018.
- [43] S. Pokhrel, "Hydroxyapatite: preparation, properties and its biomedical applications," *Adv. Chem. Eng. Sci.*, vol. 08, no. 04, pp. 225–240, 2018.
- [44] N. V. Nguyen, H. X. Nguyen, S. Lee, and H. Nguyen-Xuan, "Geometrically nonlinear polygonal finite element analysis of functionally graded porous plates," *Adv. Eng. Softw.*, vol. 126, no. November, pp. 110–126, 2018.
- [45] S. Merdaci and H. Belghoul, "High-order shear theory for static analysis of functionally graded plates with porosities," *Comptes Rendus - Mec.*, vol. 347, no. 3, pp. 207–217, 2019.
- [46] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis*, 2nd ed. CRC Press, 2004.
- [47] T. Kant and K. Swaminathan, "Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory," *Compos. Struct.*, vol. 53, no. 1, pp. 73–85, 2001.
- [48] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The finite element method*, 5th ed., vol. 1. Butterworth-Heinemann, 2000.

- [49] J. N. Reddy, *An introduction to the finite element method*, 3rd ed. New York: MsGraw Hill, 2006.
- [50] T. K. Nguyen, K. Sab, and G. Bonnet, “First-order shear deformation plate models for functionally graded materials,” *Compos. Struct.*, vol. 83, no. 1, pp. 25–36, 2008.
- [51] T.-K. Nguyen, K. Sab, and G. Bonnet, “Shear correction factors for functionally graded plates,” *Mech. Adv. Mater. Struct.*, no. 14:8, pp. 567–575, 2007.
- [52] X. Yang and X. He, *Introduction to optimization*. Springer, 2019.
- [53] J. J. Moré and S. J. Wright, “Optimization software guide,” in *Frontiers in applied mathematics*, vol. 14, 1993.
- [54] D. Zaldivar, E. Cuevas, O. Maciel, A. Valdivia, E. Chavolla, and D. Oliva, “Learning classical and metaheuristic optimization techniques by using an educational platform based on LEGO robots,” *IJEEE*, pp. 1–20, 2019.
- [55] M. Kaedi, “Fractal-based algorithm: A new metaheuristic method for continuous optimization,” *Int. J. Artif. Intell.*, vol. 15, no. 1, pp. 76–92, 2017.
- [56] R. Eberhart and J. Kennedy, “A new optimizer using particle swarm theory,” in *Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science*, 1995, pp. 39–43.
- [57] D. Karaboga, “An idea based on honey bee swarm for numerical optimization.” Erciyes University Press, Erciyes, pp. 1–16, 2005.
- [58] M. Dorigo and G. Di Caro, “Ant colony optimization: A new meta-heuristic,” in *Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation, CEC 1999*, 1999, vol. 2, pp. 1470–1477.
- [59] X. S. Yang and S. Deb, “Cuckoo search: State-of-the-art and opportunities,” *IEEE 4th Int. Conf. Soft Comput. Mach. Intell. ISCFMI 2017*, vol. 2018-Janua, pp. 55–59, 2018.
- [60] I. Bala and A. Yadav, “Gravitational search algorithm: A state-of-the-art review,” *Adv. Intell. Syst. Comput.*, vol. 741, pp. 27–37, 2019.
- [61] A. M. Zenkour, “Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates,” vol. 30, pp. 67–84, 2006.
- [62] P. A. Demirhan and V. Taskin, “Levy solution for bending analysis of functionally graded

- sandwich plates based on four variable plate theory,” *Compos. Struct.*, vol. 177, pp. 80–95, 2017.
- [63] S. Srinivas, “A refined analysis of composite laminates,” *J. Sound Vib.*, vol. 30, no. 4, pp. 495–507, 1973.
- [64] A. J. M. Ferreira, *Problemas de elementos finitos em Matlab*. Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.
- [65] M. A. S. Venâncio and M. A. R. Loja, “A study on the behavior of laminated and sandwich composite plates using a layerwise theory,” *AIMS Mater. Sci.*, vol. 3, no. 4, pp. 1587–1614, 2016.
- [66] M. K. Pandit, A. H. Sheikh, and B. N. Singh, “An improved higher order zigzag theory for the static analysis of laminated sandwich plate with soft core,” *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 44, no. 9–10, pp. 602–610, 2008.
- [67] J. L. Mantari and C. Guedes Soares, “Generalized layerwise HSDT and finite element formulation for symmetric laminated and sandwich composite plates,” *Compos. Struct.*, vol. 105, pp. 319–331, 2013.
- [68] N. J. Pagano, “Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates,” *J. Compos. Mater.*, vol. 4, pp. 20–34, 1970.
- [69] L. G. Optimization, “Benchmark functions for the CEC ’ 2013 special session and competition on large-scale global optimization,” no. December 2013, 2013.
- [70] A. D. Belegundu, “A Study of mathematical programming methods for structural optimization. Part I: Theory,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 21, no. October, pp. 1583–1599, 1985.
- [71] C. A. C. Coello and E. M. Montes, “Constraint-handling in genetic algorithms through the use of dominance-based tournament selection,” *Adv. Eng. Informatics*, vol. 16, pp. 193–203, 2002.
- [72] A. International, “D 7264/D 7264M – 07 - Standard test method for flexural properties of polymer matrix composite materials,” *ASTM Stand.*, vol. i, pp. 1–11, 2007.
- [73] A. International, “D 3039/D 3039M – Standard test method for tensile properties of polymer matrix composite materials,” *ASTM Stand.*, 2002.

- [74] F. Corbalán, *A proporção áurea - A linguagem matemática da beleza*. RBA, 2010.
- [75] “pixabay.” [Online]. Available: <https://pixabay.com/pt>.
- [76] J. I. Barbosa, A. F. Mota, and M. A. R. Loja, “Static behavior of porous functionally graded plates using a layerwise approach,” in *Congress on numerical methods in engineering*, 2019.