RELATÓRIO DE ESTÁGIO-CÁLCULO INTEGRAL

Heitor Miranda

Mestrado em ensino da Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Departamento de Matemática da FCUP

2019/2020

Orientador

Professora Doutora Maria Gabriela Faria Arala Chaves, Professora Auxiliar, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Todas as correções determinadas pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, ______/______/_________

MSc

Índice

Resumo

O presente trabalho foi elaborado no âmbito da unidade curricular: "*Iniciação à Prática Profissional, incluindo a Prática de Ensino Supervisionada"* e subdivide-se essencialmente em três partes: uma análise crítica e reflexiva acerca das atividades elaboradas no âmbito da PES, uma produção de material didático (um pequeno texto que poderia constituir um capítulo de um manual escolar) e a redação de um capítulo em que seja aprofundado um tema de natureza científica (são abordados o Teorema de Lebesgue, acerca da integrabilidade de funções, e é efetuada uma pequena descrição do processo de construção da função de Volterra).

Procurou-se que a segunda e terceira partes se encontrassem subordinadas a um tema comum, o Cálculo integral.

The present work was developed in the period in which took place the curricular unit: "Introduction to Professional Practice, including Supervised Teaching Practice" and is essentially subdivided into three parts: a critical and reflective analysis about the activities developed within the scope of PES, a production of didactic material (a short text that could be a chapter in a school textbook) and a chapter in which a topic of a scientific nature is deepened (Lebesgue's Theorem is addressed, about the integrability of functions, and a small description of the construction process of Volterra's function).

It was sought that the second and third parts were subordinated to a common theme, the Integral Calculus.

Introdução

O presente trabalho foi elaborado durante o ano letivo 2019/2020, no âmbito da unidade curricular *Iniciação à Prática Profissional, incluindo a Prática de Ensino Supervisionada*, na qual se integra.

O tema escolhido para a elaboração das partes didática e científica foi o Cálculo integral. Sendo este um tema em vigor no atual programa (embora não seja lecionado na maioria das escolas em virtude de tal ter deixado ser obrigatório, com a implementação de um documento onde vigoram um conjunto de aprendizagens consideradas essenciais), considero em todo o caso que seria uma mais valia para os alunos do ensino secundário assistirem a uma abordagem, ainda que introdutória, do seu estudo.

O capítulo inicial encontra-se diretamente ligado à prática letiva que ocorreu na Escola Secundária Filipa de Vilhena e procurou-se, tanto quanto possível, que o mesmo refletisse a mudança e aprendizagens de que pude beneficiar com a sua realização, e que felizmente me permitiram experienciar momentos de crescimento pessoal e profissional, bem como o desenvolvimento de competências profissionais no âmbito da docência.

Reflexão Crítica das atividades desenvolvidas no âmbito da PES (Prática de Ensino Supervisionada)

A secção seguinte foi elaborada numa fase final do estágio (Prática de Ensino Supervisionada ou simplesmente PES) por mim realizado na Escola Secundária Filipa de Vilhena, e pretende constituir-se como uma pequena recompilação de alguns eventos ou situações que considerei significativos ou que de algum modo tiveram impacto na minha aprendizagem, relativamente ao desenvolvimento de saberes da área da docência ou outras competências associadas ao meu trabalho enquanto docente. De igual modo, partilharei alguns aspetos que resultaram da minha reflexão acerca do trabalho aí desenvolvido, e que considero serem de assinalar.

O primeiro aspeto que me parece ser justo mencionar diz respeito ao grupo de trabalho que integrei e que era constituído por quatro elementos (nos quais me incluo): a Professora Cristina Cruchinho, na qualidade de orientadora cooperante e as minhas duas colegas estagiárias, a Professora Ana Isabel Cunha e a Professora Maria Sofia Soares Ribeiro.

Penso que me encontrei numa situação bastante privilegiada, na medida em que tanto as minhas colegas como a Professora Cristina revelaram uma enorme vontade de ensinar e uma capacidade extraordinária de trabalho e competências profissionais.

Em particular, no caso das minhas colegas, tal é de se assinalar uma vez que creio já possuírem uma capacidade de ensinar e lidar com as crianças e adolescentes (isto foi referido várias vezes pela Professora Cristina) que me parece ser invulgar. A sua criatividade, persistência e enorme capacidade de trabalho constituíram sempre um fator de enorme motivação e inspiração.

Claro que com todas estas qualidades veio sempre acoplada uma certa pressão, no sentido de corresponder às expectativas desenvolvidas e ser igualmente bom.

Quanto à Professora Cristina, na qualidade de orientadora cooperante, nunca esquecerei o seu enorme respeito pelos princípios e valores individuais, a sua grande capacidade de prever e antever situações e sobretudo de planificar, estruturar e organizar tudo por forma a otimizar a nossa aprendizagem enquanto docentes e assegurar a qualidade das aulas por todos lecionadas.

Antes do estágio propriamente dito ter tido início conversámos com a Professora Cristina, em agosto, para conhecer alguns detalhes da escola, e de como se estruturaria a PES.

A Escola Secundária Filipa de Vilhena possui instalações que de um modo geral são bastante satisfatórias. Contudo, há alguns aspetos menos positivos e que devem ser referidos: os quadros interativos que não funcionam e as deficiências na ventilação e sistema de abertura das janelas das salas de aula.

O primeiro destes aspetos afetou-me particularmente. Estando habituado a recorrer a uma forte componente visual tanto para ensinar como para aprender (parece-me muito difícil ensinar matemática, sem um esquema ou sem escrever algo), tive muitas vezes de lidar com um quadro pequeníssimo e umas canetas cuja tinta não apresentava grande qualidade (exceto as que a professora Cristina comprava), pelo que me parece que este aspeto deve ser assinalado. Quanto ao sistema de ventilação, devo mencionar que existiam umas correntes de ar frio no fundo da sala (onde frequentemente nos sentávamos quando não estávamos a lecionar) mas que pouco ou nenhum efeito tinham uma vez que existia sempre um ar abafado.

Quanto ao corpo docente da escola, é de se realçar que o mesmo se encontra bastante envelhecido. Em particular, aqueles com quem mais diretamente interagi (da área da matemática) inserem-se provavelmente na sua grande maioria numa faixa etária compreendida entre os 55-65 anos, e creio que a Escola beneficiaria se o quadro docente fosse um pouco mais heterogéneo.

A PES propriamente dita teve início em setembro e um aspeto que despertou a minha atenção foi a dificuldade de concordância entre alguns professores da escola e a Professora Cristina, quanto à ordem dos conteúdos programáticos. Apesar da existência de uma ordem pré-determinada no atual programa de ensino da matemática, os docentes das escolas podem escolher alterar a mesma, se considerarem que tal se justifique. Na primeira reunião que existiu do grupo de professores de matemática da Escola (grupo 500), esta era uma das questões relevantes que era necessário decidir. A Professora Cristina sugeriu que, no 12º ano, iniciássemos o ano com o estudo das probabilidades e da análise combinatória, tanto por ser o que está estabelecido na ordem de conteúdos que está prevista no programa, como por ser um conteúdo apelativo e motivador para a maioria dos alunos. Esta proposta foi de imediato refutada por alguns colegas com a justificação de que se haviam efetuado em anos anteriores outros percursos e que tinha sido obtido algum êxito em exame. A questão não foi objeto de debate por ter a concordância da maioria, e não me pareceu que os colegas estivessem interessados em realizar tal discussão (parecia ser indiferente a escolha da ordem a seguir). De um modo muito estranho aceitou-se rapidamente a ideia proposta por um dos docentes (talvez pela antiguidade na escola) apesar da insistência da Professora Cristina.

Outro aspeto a que tive de me habituar e que percebo que irá constituir-se como uma realidade para mim, foi a discussão enorme que surgiu devido à divergência de opiniões quantos aos instrumentos de avaliação e ao respetivo peso. A maioria dos colegas pretendia que 70 % da avaliação assentasse em testes de avaliação sumativa (os restantes 30 % para questões de aula e trabalhos diversos dos alunos, incluindo a sua participação e empenho). Curiosamente e apesar de, em termos pessoais, acreditar que deve ser dado um peso elevado à avaliação sumativa, devo referir que de certo modo fiquei entristecido com a fraca dinâmica da reunião. Os colegas não pretendiam discutir ou refletir acerca da situação em termos de aprendizagem, isto é, nunca se debatia acerca do que tinha impacto na aprendizagem dos alunos. Normalmente, referia-se o que tinha sido efetuado em anos anteriores e que tinha alguma correlação com boas classificações dos alunos, nos exames nacionais.

Compreendi, em todo o caso, que provavelmente este aspeto me permitiu preparar de certo modo para situações menos simpáticas ou em que de algum modo venham a existir divergências com colegas de trabalho, em situações futuras.

Durante o resto do ano a colaboração com estes colegas foi mínima e apenas associada à construção de instrumentos de avaliação (apesar de não ter estado presente nestas reuniões, uma vez que ocorriam nos nossos dias de trabalho, destinados à elaboração do relatório de estágio ou outras atividades associadas à FCUP).

Relativamente às atividades letivas propriamente ditas, creio que deve ser mencionado o facto da escola Secundária Filipa de Vilhena não me parecer ser representativa (no que aos estudantes diz respeito) da população portuguesa. Na sua grande maioria, os estudantes eram muito educados e cumpridores (existindo obviamente exceções) e não evidenciavam praticamente nenhuns sinais de indisciplina (pelo menos aqueles com que pude relacionar-me diretamente). Menciono que não é representativa apenas por intuição e pela realidade com que lidei, que contrasta bastante com a que muitos colegas que trabalham noutras escolas referem, informalmente.

Desde um momento inicial se notou (e pude observar durante os primeiros sessenta dias a Professora Cristina a dar aulas, sem a nossa intervenção) que os estudantes estavam acostumados a saber comportar-se em sala de aula e a trabalhar devidamente. Este período inicial foi bastante importante porque me permitiu assistir a aulas de grande qualidade e que me serviram de algum modo de “modelo” ou exemplo. As aulas eram orientadas por princípios didáticos e conduzidas com uma enorme preocupação em assegurar uma genuína aprendizagem por parte dos alunos. As estratégias de ensino eram diversificadas, a criatividade abundava e os alunos podiam pronunciar-se quanto ao que ocorria.

Existiam frequentemente exercícios ou provas relativamente aos quais era dado feedback (por nós ou pela Professora Cristina) e creio que tanto nós (grupo de estagiários) como os alunos beneficiámos largamente com esta situação. Devo ainda referir que esta relação simbiótica era muito positiva. Os alunos possuíam quatro professores com quatro visões distintas e formas diferentes de ensinar, e creio que beneficiavam com esta situação. Também constituía uma vantagem o facto de sermos sempre vários professores a analisar o que ocorria em sala de aula, bem como o que podia ser objeto de melhoria (penso que um único professor poderá afunilar o seu pensamento ou, pelo menos, não se aperceberá de tantos aspetos ou situações que podem e devem ser alterados em benefício de todos).

Quando começámos a lecionar sem a intervenção direta da Professora Cristina, fizemo-lo os três juntos (isto é, lecionámos uma aula conjuntamente).Creio que este desafio, que nos foi lançado pela Professora Cristina, pretendia de certo modo permitir a existência de um momento de transição entre um período em que apenas assistimos a aulas e outro em que somos nós, de forma autónoma, que as conduzimos. Apesar desta ideia ser interessante, este desafio revelou-se bastante complexo. Lecionar uma aula é algo que considero bastante pessoal e subdividir 100 minutos por três docentes foi (pelo menos para mim) algo relativamente difícil. Já neste período pude assistir a algo que nos acompanhou de forma transversal, durante o resto do ano: a diversidade de estilos existente tanto na forma de planificar as aulas como no ato em si de as lecionar.

No final de cada semana (ou pelo menos com uma periodicidade semanal), reuníamo-nos com o propósito de planificar e estruturar a semana que antevíamos e refletir acerca do trabalho até aí desenvolvido. Também neste tipo de situação a Professora Cristina teve particular cuidado no sentido de permitir que cada um de nós crescesse e aprendesse, efetuando críticas e sugestões tanto às nossas planificações (antes de lecionarmos as aulas) como aos momentos de reflexão que lhe sucediam.

Entre mim e o grupo de trabalho, a única divergência (se é que assim se pode chamar) que ocorreu diz respeito aos graus de dificuldade de tarefas a aplicar (relativamente a este item rapidamente nos harmonizámos) bem quanto aos conteúdos das metas curriculares em vigor.

Pessoalmente considero que, apesar de muito ambiciosas, as metas e programas curriculares em vigor são (com uma ou outra exceção) adequadas ou pelo menos nos fornecem um bom caminho para orientar o nosso trabalho e preparar os alunos para o ensino superior.

É minha convicção pessoal que o outro documento oficial existente e em vigor (denominado *aprendizagens essenciais*) reduz bastante os conteúdos programáticos a lecionar. As opiniões acerca deste assunto divergem e também entre nós, por vezes, tal ocorreu (eu creio que, apesar de não ser obrigatório, poderíamos ter abordado conteúdos muito interessantes como, por exemplo, “osciladores harmónicos” ou “equações diferenciais”, entre outros).

Conversámos e elaborámos uma solução conjunta que nos permitiu efetuar aquilo que considerámos ser mais vantajoso para os alunos tanto no presente (preparação para o exame nacional e desenvolvimento das suas competências, raciocínio e espírito crítico) bem como para quem eventualmente quisesse efetuar estudos no ensino superior com forte componente matemática associada.

Outro aspeto a destacar seguramente diz respeito ao uso da tecnologia. Pude aprender imenso acerca de como poderia utilizar esta tecnologia para elaborar material didático ou utilizá-la em sala de aula com os alunos. O domínio e rapidez nesta área por parte das minhas colegas estagiárias, revelou-se frequentemente avassalador. A verdade é que hoje, realizo tarefas de natureza informática com relativa destreza e facilidade. Esta é seguramente uma área na qual cresci (havendo ainda uma imensidão por descobrir).Construímos imenso material didático e o hábito de o fazermos simultaneamente e à distância revelou-se particularmente útil após o dia 13 de março, uma vez que deixariam de ocorrer aulas (de forma presencial) que incluíssem todos, durante este ano letivo, devido à pandemia causada à escala mundial pelo vírus SARS-CoV-2.

Entre novembro e março, cada um de nós planificou as aulas que nos estavam atribuídas beneficiando antecipadamente de comentários ou sugestões dos restantes elementos do núcleo de estágio. Desde um momento inicial, a Professora Cristina referiu que todos partíamos de uma base muito sólida e que revelávamos destreza e segurança a lecionar. A título pessoal, gostaria de realçar que, em cada bloco de aulas que lecionei, a primeira aula decorria sempre um pouco menos bem que as seguintes (existia sempre uma pequena sensação de ansiedade, similar à que senti ao lecionar pela primeira vez).

Normalmente a Professora Cristina assignava-nos um bloco de uma semana de aulas para lecionar e posteriormente parávamos durante um período de duas outras três semanas para refletir e preparar um novo bloco de aulas. Apesar de ser provavelmente muito cansativo, penso que teria existido alguma vantagem em lecionar intermitentemente e por períodos maiores. A verdade é que as últimas aulas de cada bloco decorriam muito bem e os níveis de insegurança e o nervosismo reduziam drasticamente. Os momentos em que me parece que desempenhava melhor a minha função corresponderam a aulas em que me consegui abstrair do facto de me encontrar a ser avaliado e observado. Em todo o caso, as sugestões e comentários decorrentes destas observações desempenharam para mim um papel importantíssimo, e constituíram um fator de mudança e evolução. Creio até serem um dos aspetos positivos mais importantes e com maior impacto na minha formação enquanto docente.

Relativamente a algumas críticas que recebi, foram referidos alguns aspetos a melhorar relativamente às aulas que lecionava e que eu dificilmente conseguiria analisar sozinho (o tom de voz que empregava, a forma como organizava o quadro, entre outros). Pude observar, de forma satisfatória, que o facto de ter consciência dos mesmos e operar mudanças em alguns aspetos das minhas aulas também se traduzia em mudanças positivas na aprendizagem dos alunos e num maior sucesso das minhas aulas (ou pelo menos assim me pareceu).

A PES permitiu-me ainda concluir que determinadas crenças ou atitudes que possuía antes de ter tido a possibilidade de estar em sala de aula a lecionar, se revelaram equivocadas. Isto é, antes de dar aulas existia uma certa sensação de que possuía estratégias ou ideias que inequivocamente solucionariam grande parte dos problemas que os alunos revelassem na sua aprendizagem. Atualmente, além de entender que não as possuo (e que provavelmente não existem), aprendi que devo observar cuidadosamente o que ocorre em sala de aula e adaptar-me a casa situação, em concreto, assumindo de forma realista que nem sempre poderei conseguir ultrapassar todas as dificuldades que advenham. Em todo o caso, há situações que entendo melhor e a reflexão acerca da minha prática tem sido de grande ajuda.

Um aspeto negativo, que analiso em retrospetiva e relativamente ao qual ainda tenho dificuldades, diz respeito ao tempo de espera que deve decorrer até fornecer as soluções e resoluções aos alunos das tarefas que proponho (creio que devo e posso melhorar neste aspeto). Na última parte do ano, em que ocorreram a aulas à distância, compreendi melhor a necessidade de ser prudente quanto a este aspeto. Embora seja tentador revelar as respostas, assisto frequentemente a que, quando os alunos têm de pensar e justificar tudo e eu apenas conduzo as discussões, a aprendizagem é mais eficaz e consolidada.

Não sendo o ensino à distância um tipo de sistema que aprecie particularmente e para o qual não em encontrava preparado, o contacto com esta situação permitiu-me desenvolver aptidões e competências que penso poderão ser úteis num futuro. Este período permitiu-me, particularmente, aprender a organizar a informação de forma mais sintética e orientada, e a fazer uma melhor gestão do tempo. As primeiras aulas à distância eram bastante confusas e os silêncios dos alunos bastante difíceis de aceitar.

Com o tempo, aprendi a colocar pequenas perguntas de "teste" no sentido de tentar entender se de facto havia ou não dúvidas (perguntar diretamente aos alunos não me fornecia informações verosímeis), a adaptar o meu discurso ou elaborar um outro tipo de resolução, que se tornasse mais fácil de entender para quem se encontra á distância (e é interessante porque penso que por vezes simplifiquei bastante o meu discurso, porque notava ao circular em grupos de trabalho, que determinadas formas de explicar funcionavam melhor). O trabalho à distância tem também a vantagem de nos permitir "circular" mais rápido entre grupos de trabalho no sentido de averiguarmos um ponto de situação. Contudo, penso que neste tipo de modalidade de ensino é mais difícil aferir se de facto há ou não aprendizagem dos conteúdos. Trata-se de algo novo e penso haver ainda muito a aprender, nesta área.

Em jeito de conclusão deste capítulo gostaria de salientar que, apesar de ter ainda muito para aprender acerca da minha carreira enquanto docente (e compreendo agora verdadeiramente o alcance que tal possibilidade de evolução abrange), a PES contribuiu de forma decisiva para que pudesse evoluir e melhorar em muitas competências e capacidades, e que me encontro seguramente melhor preparado para lecionar e ensinar. Sinto-me mais confiante, estou habituado organizar e planificar melhor e penso que conseguirei fazer um trabalho orientado no sentido de promover efetivas aprendizagens dos alunos, que, espero, tenham impacto na sua educação e formação.

Capítulo I – Parte Didática

1. Primitivas-definição e propriedades

O Cálculo integral, conjuntamente com cálculo diferencial, constitui uma importante área de estudo do que frequentemente denominamos por cálculo infinitesimal.

Neste capítulo, o nosso objetivo principal é apresentar uma abordagem introdutória ao estudo do Cálculo integral.

Conforme veremos, a determinação de funções primitivas possui uma associação bastante forte com o estudo do Cálculo integral.

Assim sendo, comecemos por introduzir a noção de função primitiva, apresentando de seguida alguns exemplos, métodos e técnicas envolvidos na sua determinação.

1.1. Noção de primitiva

Seja f uma função real definida num intervalo I.

Diz-se que F é uma primitiva de f em I se F é diferenciável em I e, para qualquer $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Diz-se que a função é primitivável em I quando admite uma primitiva nesse intervalo.

Exemplos:

1.Seja $f(x) = x$ .Uma primitiva de f é a função definida por $\frac{x^2}{2}$.

2.Seja $g(x) = e^x$. Uma primitiva de g é a função definida por $e^x + 2$.

As funções apresentadas nos exemplos anteriores não são as únicas funções primitivas das funções dadas.

De facto, sabemos que $(\frac{x^2}{2})' = x$ mas também é verdade que $(\frac{x^2}{2} + 5)' = x$.

Aliás, verifica-se que $(\frac{x^2}{2} + c)' = x$, $\forall c \in \mathbb{R}$. Isto é, existe uma infinidade de funções primitivas de x, que diferem entre si por uma constante.

Ou seja, sendo f uma função primitivável num determinado intervalo I do seu domínio e F uma primitiva de f nesse intervalo, então as funções primitivas de f em I são definidas por $F(x) + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Propriedade 1:

Seja f uma função definida num intervalo I. Se F e G são duas primitivas de f em I, então a função $F - G$ é constante em I.

Demonstração:

Sabemos que, $\forall\, x \in I\,, (F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Mas se qualquer que seja x pertencente a I, $(F - G)'(x) = 0$, então tal significa que a função $F - G$ é constante em I (como queríamos demonstrar).

Utilizamos o símbolo $\int f(x)dx$ para representar o conjunto das funções que são primitivas de f, num determinado intervalo.

Propriedade 2:

Se f e g são funções primitiváveis num intervalo I, então $f + g$ também é primitivável em I e a soma de uma primitiva de f com uma primitiva de g é uma primitiva de $f + g$.

Demonstração:

Seja F uma primitiva de f e G uma primitiva de g.

Então, qualquer que seja $x \in I$, tem-se:

$(F + G)'(x) = (F' + G')(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$. Ou seja, $(F + G)$ é uma primitiva de $f + g$ (como queríamos demonstrar).

Exemplos:

$$\int cos(x) + x\; dx = sin(x) + \frac{x^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x + 2\; dx = e^x + 2x + C, C \in \mathbb{R}$$

Propriedade 3

Se f é uma função primitivável num intervalo I e k uma constante real, então kf é primitivável em I e o produto de k por uma primitiva de f é uma primitiva de kf.

Demonstração:

Seja F uma primitiva de f. Então, qualquer que seja $x \in I$, tem-se que:

$(kF)'(x) = kF'(x) = kf(x)$, o que demonstra que kF é uma primitiva de kf .

Exemplos:

$$\int 2x - \frac{1}{3}\cos(x)\,dx = 2\int x\,dx - \frac{1}{3}\int \cos(x)\;dx = 2\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\sin(x) + C$$
$$= x^2 - \frac{1}{3}\sin(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sqrt{2}\sin(x)\;dx = \sqrt{2}\int \sin(x)\;dx = \sqrt{2}(-\cos(x)) + C = -\sqrt{2}\,cos\,(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

Atendendo a que o processo de primitivação é o "inverso" do processo de derivação (como o leitor poderá ter verificado a partir das definições e exemplos já apresentados), apresentam-se sistematizadas na seguinte tabela funções primitivas de referência, relativamente a algumas famílias de funções já conhecidas, frequentemente designadas por primitivas imediatas, que se obtêm facilmente tendo em consideração algumas das regras de derivação.

$\boldsymbol{Função\ ou\ familia\ de\ funções}$	$\boldsymbol{Primitivas\ de\ referência}$
k	$kx + C, C \in \mathbb{R}$
$x^n, n \neq -1, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, C \in \mathbb{R},$
e^x	$e^x + C, C \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + C, C \in \mathbb{R}$
$sin\,(x)$	$-\cos(x) + C, C \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$sin(x) + C, C \in \mathbb{R}$
$1 + tg^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$tg(x) + C, C \in \mathbb{R}$

Exemplos:

1. $\int 2 + \frac{2}{x} + \cos(3x)\,dx = \int 2\,dx + 2\int \frac{1}{x}\,dx + \int \cos(3x)\,dx = 2x + 2\ln\lvert x\rvert + \frac{1}{3}\sin(3x) + C, C \in \mathbb{R}$

2. $\int \frac{5x+\sqrt{x}}{x}\,dx = \int \frac{5x}{x}\,dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx = \int 5\,dx + \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}\,dx = \int 5\,dx + \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 5x + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 5x + 2\sqrt{x} + C, C \in \mathbb{R}$

Existem ainda algumas funções relativamente às quais será útil recorrer a determinados malabarismos algébricos e técnicas específicas de primitivação.

Não se destinando este texto a aprofundar este tipo de situações apresentamos, contudo, alguns exemplos que possam introduzir o leitor a algumas destas situações.

Em particular, referiremos alguns exemplos de situações que envolvam o conhecimento da regra da derivada da função composta, isto é, se F é uma primitiva de f num intervalo, e u uma função derivável, então $\int f\big(u(x)\big).u'(x)\,dx = F(u(x)) + C, C \in \mathbb{R}$.

Exemplos:

1. $\int \frac{7x}{x^2+1}\,dx$.

Aparentemente, determinar uma primitiva desta função pode parecer complicado. Repare-se, contudo, que os graus dos polinómios que se encontram no numerador e no denominador diferem entre si uma unidade.

Sabemos que $(x^2)' = 2x$, e que $(\ln(|u|))' = \frac{1}{u}.u'$.

Embora a nossa função não seja exatamente deste tipo, podemos transformar a sua expressão algébrica por forma a obtermos $2x$ no numerador. Ou seja:

$$\int \frac{7x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2.7x}{2(x^2+1)}\,dx = \frac{7}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

Nesta última expressão já existe envolvido algo do tipo $\int \frac{u'}{u}dx$ (e sabemos que $\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln(|u|)$

Assim sendo:

$$\int \frac{7x}{x^2+1}\,dx = \frac{7}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$= \frac{7}{2}.\ln|x^2+1| + c = \frac{7}{2}.\ln(x^2+1) + C, C \in \mathbb{R}$.

(uma vez que $u(x) = x^2 + 1$ e, portanto, $u(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

2. $\int tg^2(x)\,dx$.

Não nos é familiar nenhuma função cuja derivada seja exatamente $tg^2(x)$.

Contudo, sabemos que $\left(tg(x)\right)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$ e que $1 + tg^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Transformemos então a expressão da função que queremos primitivar, por forma a aparecer envolvida a expressão $1 + tg^2(x)$ (podemos fazer isto somando e subtraindo $1)$.

Note-se que $1 + tg^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ e $\frac{1}{\cos^2(x)}$ é facilmente primitivável.

Vejamos:

$$\int tg^2(x)\,dx = \int 1 + tg^2(x) - 1\,dx = \int 1 + tg^2(x)\,dx - \int 1\,dx$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx - \int 1\,dx = tg(x) - x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

3. $\int (2x+3)e^{x^2+3x}\,dx.$

Consideremos duas funções f e u, tais que: $f(x) = e^x$ e $u(x) = x^2 + 3x$.

Sabemos que uma primitiva de f é $F(x) = e^x$, e que e^{x^2+3x} será a expressão analítica resultante de uma composição da função f com a função u .

Note-se ainda que $(x^2 + 3x)' = 2x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$

Ou seja, a função que pretendemos é do tipo $f\left(u(x)\right).u'(x)$ (cuja primitiva sabemos ser igual a $F\left(u(x)\right) + C, C \in \mathbb{R}$).

Mas então $\int (2x+3)e^{x^2+3x}\,dx = e^{x^2+3x} + C, C \in \mathbb{R}$.

4. $\int \frac{2}{x \ln x}\,dx = 2\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,dx.$

Esta última expressão apresenta alguma vantagem, uma vez que a expressão que se encontra no numerador se obtém derivando a que existe no denominador.

Assim sendo e como $(\ln(|u|))' = \frac{u'}{u}$, então $2\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,dx = 2\ln(|\ln(x)|) + C, C \in \mathbb{R}$.

5.$\int tg(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx.$

Uma vez mais, nesta última expressão parece que já estamos na presença de algo que nos é mais familiar, uma vez que $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

Consideremos então duas funções f e u tais que: $f(x) = \frac{1}{x}$ e $u(x) = \cos(x)$.

Sabemos que uma primitiva de f é $F(x) = \ln|x|$.

Então:

$$-\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int -\sin(x)\,.\frac{1}{\cos(x)}\,dx = -\int u'(x).f\big(u(x)\big)\,dx =$$

$$-F\big(u(x)\big) + c = -\ln|\cos(x)| + C, C \in \mathbb{R}$$

Exercícios resolvidos:

1. Considera a função h definida por $h(x) = \frac{3}{x}$ e de domínio $\mathbb{R}^+$. Determina uma função primitiva de h, sabendo que o ponto de coordenadas $(e^3, \frac{37}{4})$ pertence ao gráfico de h.

Resolução:

$\int \frac{3}{x}\,dx = 3\int \frac{1}{x}\,dx = 3\ln x + C.$

Seja $F(x) = 3\ln x + C$. Como $F(e^3) = \frac{37}{4}$ então $3\ln e^3 + C = \frac{37}{4} \Leftrightarrow 3 \times 3 + C = \frac{37}{4} \Leftrightarrow$ $C = \frac{37}{4} - \frac{36}{4} \Leftrightarrow C = \frac{1}{4}.$

A função pedida é $F(x) = 3\ln x + \frac{1}{4}$

2. a) Determina as constantes reais não nulas, A e B tais que:

$$\forall x \in \mathbb{R}\{-1,0\}, \quad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

b) Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{2}{x^2+x}$.

Determina a primitiva de f que se anula para $x = 2$.

(Adaptado de "*Caderno de apoio, 12ªano, Metas curriculares para o ensino secundário de Matemática A*")

Resolução:

a) Sabemos que, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A(x+1)}{x(x+1)} + \frac{Bx}{x(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$1 = A(x+1) + Bx \Leftrightarrow Ax + A + Bx = 1 \Leftrightarrow (A+B)x + A = 1$$

Repare-se que obtivemos uma igualdade de dois polinómios, um em cada membro.

Sejam $P_1(x) = (A+B)x + A$ e $P_2(x) = 1 = 0x + 1$.

A condição $(A+B)x + A = 1$ é equivalente a $P_1(x) = P_2(x)$, e tal ocorre se, e só se os coeficientes dos monómios que os constituem (de igual grau) forem iguais.

Ou seja: $\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases}$

Resolvendo o sistema concluímos que $\begin{cases} B = -1 \\ A = 1 \end{cases}$

b) Utilizando a informação obtida da alínea anterior sabemos que, para $x \in \mathbb{R}^+$:

$$F(x) = \int \frac{2}{x(x+1)}\, dx = 2 \times \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\, dx = 2[\ln(x) - \ln(x+1)] + C = 2\ln\frac{x}{x+1} + C$$

Como $F(2) = 0$, então vem que:

$2\ln\frac{2}{3} + C = 0 \Leftrightarrow C = -2\ln\frac{2}{3} \Leftrightarrow \ C = \ln\frac{9}{4}$.

Portanto, $F(x) = 2\ln\frac{x}{x+1} + \ln\frac{9}{4}$.

Exercícios Propostos:

1. Determine as seguintes famílias de primitivas:

a) $\int 4x^2 + x\, dx$

b) $\int x^{2001}\, dx$

c) $\int \frac{3}{x} + 1\ \, dx$

d) $\int \frac{2}{x} + e^x + 3\, dx$

e) $\int x\sqrt{x}\, dx$

2. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{6}x$

b) $g\ (x) = \cos(2x) + \frac{1}{x-1}$

c) $h(x) = x.\cos\,(x^2 + 1)$

d) $i(x) = \frac{x}{x^2+1} + \sqrt{x}$

e) $j(x) = \sin(x)\,.\cos(x) + \sqrt[3]{x^2}$

f) $k(x) = x^2 - 5x + 2 - 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

g) $l(x) = \frac{2\ln^2(x)}{3x} + tg^2(x)$

h) $\pi(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

i) $k(x) = e^{\sin(x)}.\cos(x)$

3. Um ponto move-se numa reta numérica de tal forma que, em cada instante t, a sua posição é dada por $p(t)$.

Sabendo que:

- a sua aceleração é constante e igual a 10 m/s^2
- no instante $t = 2$ sua velocidade é de 23 m/s e a partícula se encontra a 37 cm da origem do referencial, no sentido positivo.

Determine uma expressão para $p(t)$.

4. O declive da reta tangente ao gráfico de uma função h num ponto de abcissa x é dado por $x(x-3)$.

Sabendo que o ponto de coordenadas $(1; 2)$ pertence ao gráfico de $h,$ determine $h(x)$.

5. A quantidade de espécimes de uma determinada população de abelhas é dada por $n(x)$, em milhares, em função de x, em anos.

Sabe-se que:

- $n(1) = 7{,}4$;
- $\frac{n\prime(t)}{n(t)} = 1{,}7.$

Determine o número de abelhas ao fim de 5 anos, arredondado às unidades.

2. Cálculo integral

2.1. O problema da área

Historicamente, o cálculo integral surge como ferramenta para o cálculo da área de figuras planas, e o seu estudo é inclusive anterior ao do cálculo diferencial.

Suponhamos, por exemplo, que pretendemos determinar a área da figura plana delimitada pela curva $y = x^2$ e as retas $x = 0$ e $x = 2$ (uma figura deste tipo designa-se usualmente por um *segmento parabólico*).

Existirá algum processo que nos permita determinar esta área, de forma rigorosa?

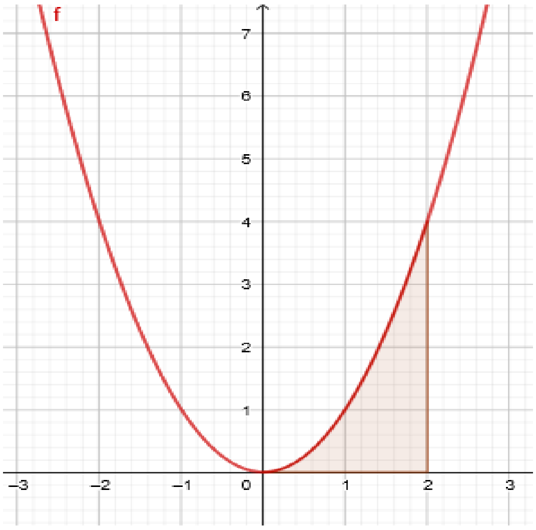

Figura 1

Observando a figura 1, verificamos que ainda não conhecemos nenhum processo ou fórmula que nos permitam determinar diretamente e de forma rigorosa a área em questão.

Constatamos ainda que, mesmo que tentemos decompor a figura, não o conseguimos efetuar de tal modo que nos seja possível determinar de forma rigorosa a área de cada uma das figuras resultantes de uma tal decomposição.

No entanto, uma possível estratégia para "atacar" este problema poderá consistir em tentar determinar a área desta figura de uma forma aproximada.

Consideremos, por exemplo, a figura seguinte:

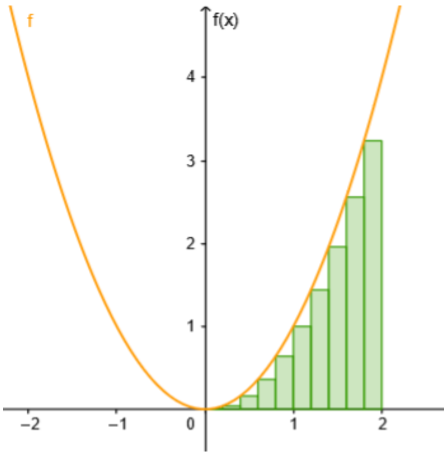

Figura 2

A área da figura assinalada a verde constitui uma aproximação (por defeito) do valor que pretendemos determinar.

Esta área pode determinar-se de forma simples, uma vez que consiste na soma da área de dez retângulos, cuja base resulta da divisão do segmento de reta associado ao intervalo $[0; 2]$ em dez partes iguais e cuja altura corresponde ao menor valor que a função assume no subintervalo correspondente.

De igual modo, poderíamos efetuar um raciocínio análogo, mas determinando uma aproximação por excesso da área do segmento parabólico, conforme ilustrado na figura 3.

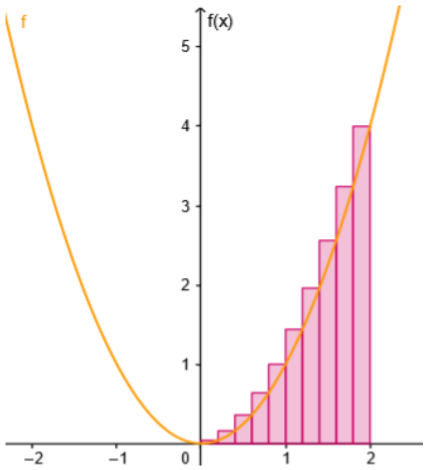

Figura 3

Suponhamos agora que o número de divisões do segmento de reta associado ao intervalo $[0; 2]$ aumentava drasticamente.

A nossa intuição dir-nos-á que o erro cometido será cada vez menor à medida que o número de retângulos aumenta e que o valor resultante deste cálculo estará cada vez mais próximo do valor da área que pretendemos determinar.

De facto, pode mostrar-se que as áreas obtidas em ambos os processos, quando o número de retângulos aumenta muito, se aproximam tanto quanto pretendermos entre si.

Suponhamos então que o número de retângulos aumenta indefinidamente (ou seja, tendendo para +∞) .

Representamos por $\int_0^2 x^2\,dx$ o valor para o qual convergem as sucessões de áreas que obtemos por estes processos, à medida que tal ocorre.

Integral definido (integral de uma função positiva):

Dado um referencial cartesiano e uma função continua e positiva, definida num intervalo $[a;b]$, chama-se integral de f entre a e b à medida, na unidade quadrada associada à medida de comprimento desse referencial, da área da região do plano delimitada por f, o eixo das abcissas, e as retas $x = a$ e $x = b$.

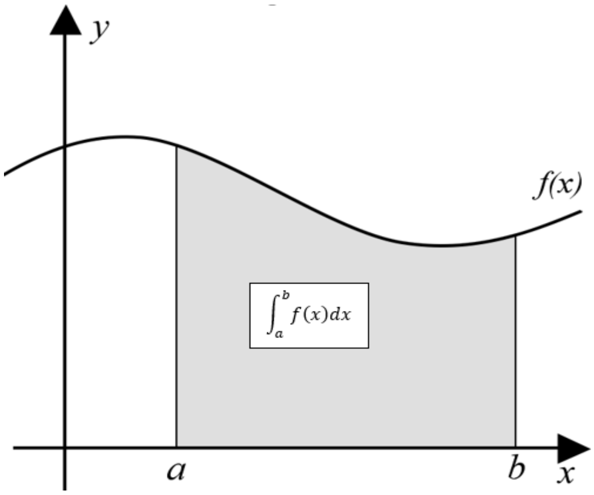

Figura 4

Da definição de integral apresentada, será bastante intuitivo e lógico considerar as propriedades que a seguir se apresentam, que se pode mostrar serem verdadeiras:

1. Se $f(x) > 0, \forall x \in [a;b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx > 0$
2. Dadas duas funções f e g, contínuas e não negativas no intervalo $[a;b]$, se para todo o $x \in [a;b]$, $g(x) \leq f(x)$, então

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

3. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

4. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

5. $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

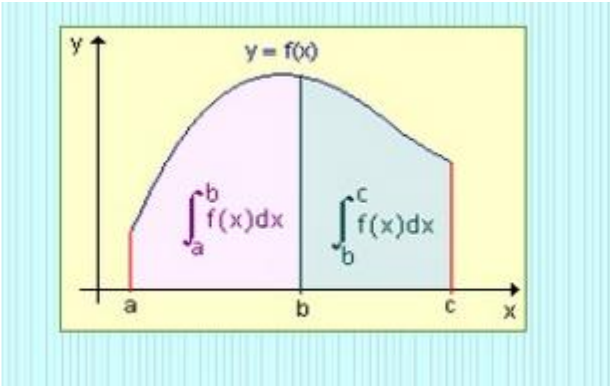

Figura 5

Mas, ainda que munidos do conhecimento destas propriedades, resolver rapidamente o nosso problema inicial ainda pode ser um pouco complicado (determinar a área de um segmento parabólico, de forma rigorosa).

Apresentaremos de seguida um importante resultado, conhecido como teorema fundamental do cálculo, que nos auxiliará a dar resposta a esta questão (de forma mais eficaz) e relacionar a área delimitada por gráfico de função, com uma função primitiva da mesma.

Teorema fundamental do cálculo integral:

Seja f uma função contínua, num intervalo $[a; b]$, com $a < b$.

Seja F_a a função definida em $[a; b]$ por $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Então F_a é a função primitiva de f que se anula em a.

Justificação:

Iremos apresentar de seguida um pequeno texto com alguns dos passos intermédios envolvidos na demonstração deste resultado, para uma melhor compreensão do mesmo por parte do leitor.

De notar que, em bom rigor, o mesmo não constitui uma demonstração formal (com todos os requisitos a que a mesma deve obedecer) deste resultado.

Seja f uma função contínua definida em $[a;b]$, com $a < b$ e seja F_a a função definida em $[a;b]$ por $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Para $x \in [a;b]$ e dado $h > 0$ tal que $(x+h) \in [a,b]$, $F_a(x+h) - F_a(x)$ corresponde à medida da área da região do plano delimitada pela função f, o eixo das abcissas, e as retas verticais de abcissas x e $x+h$.

Ou seja $F_a(x+h) - F_a(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$.

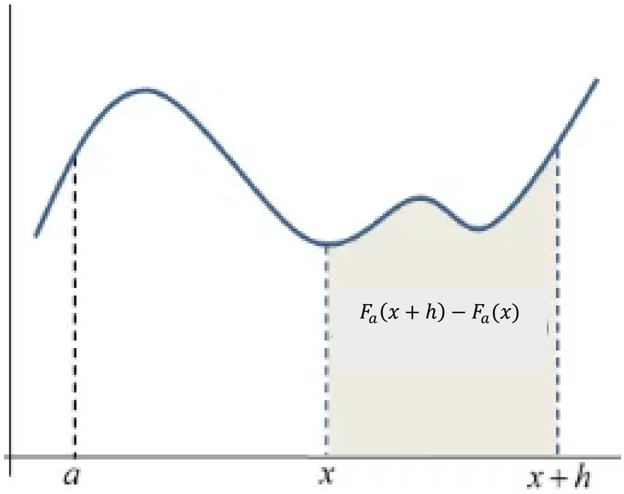

Figura 6

Mas, sabemos que f é uma função contínua pelo que, pelo teorema de Weierstrass, a mesma admite um máximo e um mínimo absolutos no intervalo $[x;x+h]$.

Designemos este máximo por $M(h)$ e o mínimo por $m(h)$.

Assim sendo, podemos concluir que $m(h) < f(t) < M(h)$ pelo que, $\forall t \in [x;x+h]$,se tem que:

$$\int_x^{x+h} m(h)\,dt \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq \int_x^{x+h} M(h)\,dt$$

Mas $\int_x^{x+h} M(h)\,dt$ corresponde à área de um retângulo de lados h e $M(h)$, e $\int_x^{x+h} m(h)\,dt$ à área de um retângulo de lados h e $m(h)$ pelo que $\int_x^{x+h} M(h)\,dt = M(h) \times h$ e $\int_x^{x+h} m(h)\,dt = m(h) \times h$ pelo que :

$$m(h) \times h \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq M(h) \times h$$

Mas sabemos que $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = F_a(x+h) - F_a(x)$, e assim sendo:

$$m(h) \times h \leq F_a(x+h) - F_a(x) \leq M(h) \times h \Leftrightarrow$$

$$m(h) \leq \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq M(h)$$

Como f é contínua em x, $\lim_{h \to 0} m(h) = \lim_{h \to 0} M(h) = f(x)$, e então, pelo teorema das funções enquadradas $\lim_{h \to 0^+} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x)$.

De forma análoga pode concluir-se que $\lim_{h \to 0^-} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x)$.

Assim sendo, $\lim_{h \to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x)$ e $F_a(x)$ é uma primitiva de f.

Por último, de referir ainda que $\int_a^a f(t)\, dt$ corresponde à área da região do plano definida pela função f e as retas $x = a \;\; e \; x = a$, ou seja, corresponde à área de um segmento de reta, que é igual a zero.

Conclui-se, portanto, que $\int_a^a f(t)\, dt = 0$,ou seja $F_a(a) = 0$.

Deste teorema resulta de forma imediata a seguinte propriedade, conhecida como fórmula de Barrow, que estabelece uma relação de utilidade prática, aquando do cálculo de integrais.

Fórmula de Barrow:

Seja f uma função contínua num determinado intervalo $[a; b]$, com $a < b$.

Então $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$, onde F é uma qualquer primitiva de f em $[a; b]$.

Notação: $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

<u>Demonstração:</u>

Seja f uma função nas condições referidas.

De acordo com o teorema fundamental do cálculo a função definida por $F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, é uma primitiva de f.

Considerando $x = b$ vem que: $F_a(b) = \int_a^b f(t)\, dt$.

Sendo F uma qualquer primitiva de f em $[a; b]$, existe um $k \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = F_a(x) + k$.

Assim sendo:

$F(b) - F(a) = F_a(b) + k - (F_a(a) + k\ ) = F_a(b) - F_a(a) = F_a(b) = \int_a^b f(t)\, dt.$

<u>Exercícios resolvidos:</u>

1.Determine $\int_0^2 x^2\, dx$

<u>Resolução</u>: $\int_0^2 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$

2.Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\, dx$.

<u>Resolução</u>:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\, dx = [sen(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$

3. Determine a área limitada pelos gráficos das funções f e g, definidas por:
$f(x) = -x^2 + 5$ e $g(x) = x + 3$.

<u>Resolução:</u>

Pretendemos determinar a área da região do plano delimitada pelos gráficos de f e g. Comecemos por averiguar para que valores de x se tem que $f(x) = g(x)$.
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 5 = x + 3 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$.

Conforme se pode observar na figura 7, o valor da área pretendia corresponde a:
$\int_{-2}^1 f(x)\, dx - \int_{-2}^1 g(x)\, dx = \int_{-2}^1 [f(x) - g(x)]\, dx.$

Ou seja, podemos facilmente calcular o valor da área delimitada por f e g determinando$\int_{-2}^1 [(-x^2 + 5) - (x + 3)]\, dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2)dx = \ [-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x]_{-2}^{1} = (-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) = \frac{9}{2}$.

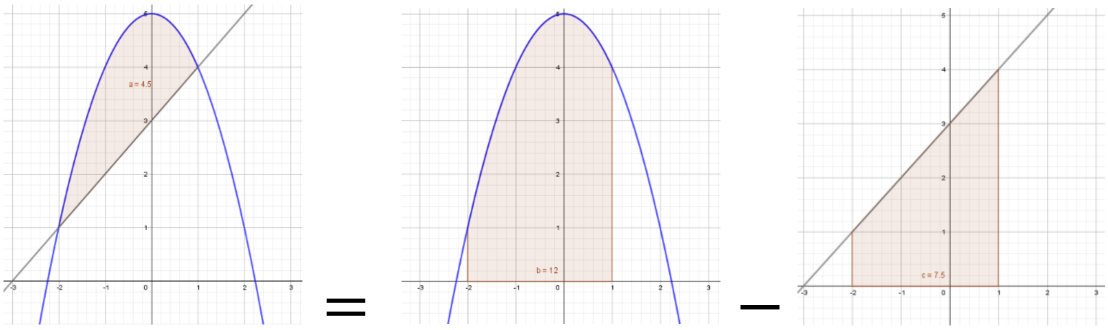

Figura 7

4. Calcule $\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx$

Seja $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, para $x \in [-5; 5]$. Calcular $\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx$ significa determinar a área da região do plano delimitada pelas retas $x = 5$, $x = -5$, por f e pelo eixo das abcissas.

Mas por observação do gráfico verificamos que se trata da área de um semicírculo de raio 5 (recorde-se que a condição $x^2 + y^2 \leq 25$ define um círculo centrado ma origem e de raio 5 unidades) . Ou seja, a área pretendida é $\frac{\pi.5^2}{2} = \frac{25}{2}\pi$.

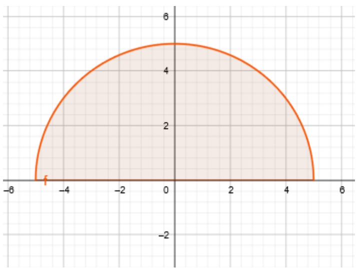

Figura 8

Naturalmente, o leitor poderá questionar, uma vez que a definição de integral que foi apresentada pressupõe que a função seja sempre positiva, se existirá integral e como tal se definirá, se a função não for positiva.

Quando f é contínua é negativa num intervalo $[a; b], (a \leq b)$, define-se $\int_a^b f(x)\, dx$ como o simétrico da medida da área da região do plano definida pelas retas de equação $x = a,\ x = b$, pelo eixo das abcissas e pelo gráfico de f.

Ou seja, se dada uma função f contínua em $[a, b]$ tal que $\forall x \in [a; b]\ f(x) \leq 0,$ tem-se que $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_a^b [-f(x)]\, dx$.

As propriedades enunciadas para o integral definido, bem como a fórmula de Barrow, são igualmente válidas no caso da função considerada ser negativa em todos os pontos do seu domínio.

Exemplos

1. $\int_0^2 -x\, dx = -\int_1^2 \frac{x^2}{2}\, dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -2$

2. $\int_{-1}^0 -x^2\, dx = -\int_{-1}^0 \frac{x^3}{3}\, dx = -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = -\left(0+\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$

<u>Integral de uma função onde pode ocorrer um número finito de mudanças de sinal:</u>

Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$.

Admitamos que existe uma sequência de números reais $c_0, c_1, c_2 \ldots\ldots c_{k+1}$ com

$a = c_0 < c_1 < c_2 \ldots . < c_{k+1}$, tal que, em cada intervalo $[c_j; c_{j+1}]$, a função f não muda de sinal. Definimos $\int_a^b f(x)\, dx$ como a seguinte soma:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{c_1} f(x)\, dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\, dx + \ldots\ldots\ldots + \int_{c_k}^{b} f(x)\, dx$$

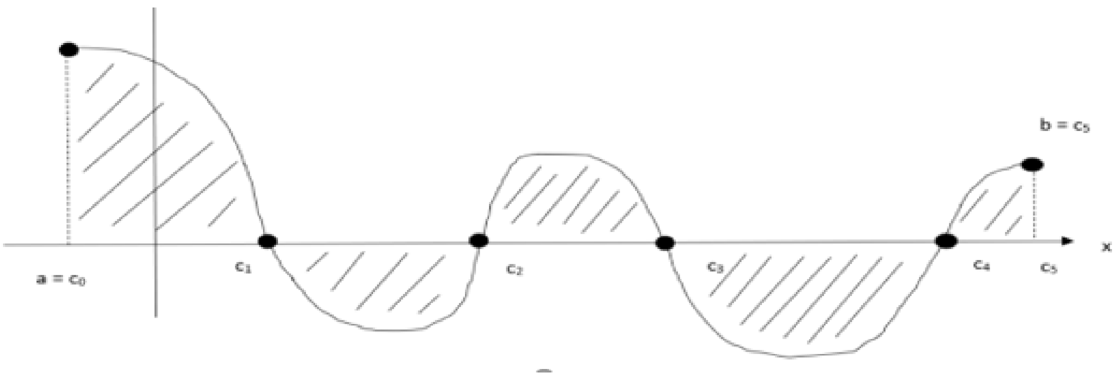

Figura 9

Pode mostrar-se que a fórmula de Barrow é igualmente válida para o cálculo de $\int_a^b f(x)\, dx$ nestas circunstâncias (quando existe um número finito de mudanças do sinal da função). Note-se que $\int_a^b f(x)\, dx$ corresponde a uma "área com sinal" da região entre o gráfico da função e o eixo Ox (as regiões que se localizam acima do eixo dos Ox "contam" com sinal positivo e abaixo do eixo Ox "contam" com sinal negativo).

Exemplo:

1. Determine $\int_{-2}^{4} 3x^2 + 2x - 16\, dx$, bem como a área delimitada pelo gráfico da função f definida por $f(x) = 3x^2 + 2x - 16$, o eixo das abcissas, e as retas de equação $x = -2$ e $x = 4$. Interprete os resultados obtidos.

Resolução:

Consideremos a função F, definida por $F(x) = x^3 + x^2 - 16x$, e cuja derivada é $f(x) = 3x^2 + 2x - 16$.

Então $\int_{-2}^{4} 3x^2 + 2x - 16\ dx = \int_{-2}^{4} f(t)dt = F(4) - F(2) = -12$.

Como podemos interpretar este valor?

Comecemos por analisar o gráfico de f, no intervalo referido:

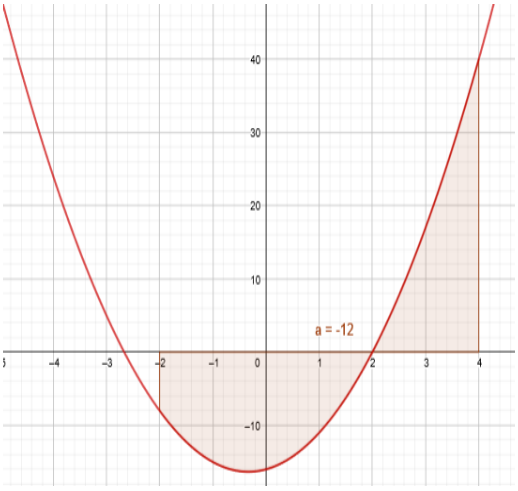

Figura 10

Observando o gráfico da figura 5 verificamos que, em $[-2; 2[$ a função assume sempre valores negativos e que, entre $]2; 4]$ assume sempre valores positivos, sendo 2 um zero de f.

Determinemos $\int_{-2}^{2} 3x^2 + 2x - 16\, dx$, $\int_{2}^{4} 3x^2 + 2x - 16\ dx\ e\ \int_{-2}^{4} 3x^2 + 2x - 16\ dx$.

- $\int_{-2}^{2} 3x^2 + 2x - 16\, dx = F(2) - F(-2) = -20 - 28 = -48$
- $\int_{2}^{4} 3x^2 + 2x - 16\, dx = F(4) - F(2) = 16 - (-20) = 36$
- $\int_{-2}^{4} 3x^2 + 2x - 16\ dx = F(4) - F(-2) = -12 = \int_{-2}^{2} 3x^2 + 2x - 16\, dx + \int_{2}^{4} 3x^2 + 2x - 16\, dx$

Aplicando a fórmula de Barrow aos dois intervalos acima referidos verificamos que o valor obtido é positivo se a função for sempre positiva, e negativo se for sempre negativa, o que está em conformidade com as definições e propriedades do integral definido que já foram referidas.

Constatamos ainda que, quando é aplicada a fórmula de Barrow considerando o intervalo $[-2;4]$, o valor que se obtém corresponde à soma dos valores obtidos aplicando a mesma a cada um destes dois intervalos $[-2;2]$ e $[2;4]$.

Este exercício alerta-nos para o facto de se mostrar necessário ter em consideração que a fórmula de Barrow nos fornece um valor para o cálculo do integral e não para a área em si.

Isto é, esta fórmula fornece-nos um cálculo da área “com sinal”, pelo que é necessário ter em consideração os pontos onde eventualmente ocorra mudança do sinal da função.

A área pretendida corresponde então a $\left|\int_{-2}^{2} 3x^2+2x-16\, dx\right| + \left|\int_{2}^{4} 3x^2+2x-16\, dx\right| = 84$ (na unidade considerada).

<u>Exercícios Propostos</u>

1. Determine a área da região do plano delimitada pela curva $y = cos(x)$ e pelas retas $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = 0$.

2. Calcule:

a) $\int_{-5}^{0} 4x + 4 \ dx$

b) $\int_{1}^{4} \frac{1}{2\sqrt{x}} \ dx$

c) $\int_{0}^{\pi} x + \sin(x) \, dx$

d) $\int_{0}^{e} \frac{1}{x+1} \ dx$

e) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cos^2(2t)} \ dx$

f) $\int_{-3}^{3} |3x+6| \, dx$

g) $\int_{1}^{4} \frac{x-5}{x^2} \ dx$

3. Determine a área da região do plano definida pelas curvas de equações: $y = x^2 - 36$ e $y = -x^2 + 36$.

4. Dada uma função contínua em $[a;b]$ $(a < b)$, define-se média de f em $[a;b]$ por

$$m(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

Determine a média de f, definida em $[0,\pi]$ por $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

5. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 - 5x + 2$. Determine a área da região do plano definida por f, e as retas de equação $y = 2$ e $y = 8$.

6. Sejam f e g funções contínuas e não negativas num determinado intervalo $[a, b]$. Sabendo que $\int_a^b f(x)\, dx = 6$ e que $g(x) = \frac{f(x)}{2}$, determine a área da região do plano definida por f, g e as retas de equação $x = a$ e $x = b$.

7. A velocidade de um projétil, durante o sexto segundo após o seu lançamento é dada, em metros por segundo, por $v(t) = 3e^{0,5t}$. Determine a distância que o mesmo percorreu, durante este intervalo de tempo.

Capítulo II – Parte Científica

Nesta secção serão abordados com um pouco mais de profundidade dois assuntos distintos (embora ligados entre si) associados ao estudo do cálculo integral.

Começaremos por apresentar um critério (que na verdade é uma condição necessária e suficiente) que nos permite decidir se uma determinada função é integrável num intervalo fechado e que é um pouco mais abrangente por comparação com os que são tipicamente abordados num curso introdutório de cálculo.

De seguida, procuraremos apresentar uma função bastante especial (função de Volterra), em virtude de ser primitivável num determinado intervalo, mas não ser integrável nesse mesmo intervalo. Para mostrar que esta função não é integrável recorrer-se-á ao primeiro resultado (teorema de Lebesgue).

1.Critério de integrabilidade de funções reais de variável real (Lebesgue)

O propósito do capítulo que se segue será o de apresentar uma condição que nos garanta que uma determinada função é integrável num intervalo fechado do seu domínio, e que seja tão abrangente quanto possível (ou pelo menos um pouco mais abrangente do que aqueles que frequentemente se apresentam em cursos introdutórios de cálculo).

Habitualmente, quando inicia um estudo de cálculo integral, são fornecidas condições que nos asseguram que uma determinada função seja integrável (por exemplo, é frequente referir-se que se uma função é contínua num intervalo fechado e limitado, então é integrável nesse mesmo intervalo).

Normalmente, estas condições são suficientes, mas não necessárias. Isto é, existem funções que são integráveis, mas que não verificam as condições impostas nestes critérios (por exemplo, funções descontínuas num número finito de pontos também são integráveis, pelo que não é necessário que uma função seja contínua para ser integrável).

No texto que se segue abordar-se-á um critério mais conclusivo, na medida em que se trata de uma condição necessária e suficiente, isto é, se a função for integrável, então verifica as condições deste critério, e vice-versa.

Este critério relaciona a integrabilidade de uma função com a medida do conjunto dos seus pontos de descontinuidade e refere que, se o conjunto que contem estes pontos tiver medida nula, então a função é integrável (isto é, o conjunto destes pontos é insignificante, quando analisamos a integrabilidade da função).

No decorrer de todo o texto, apesar de não se referir explicitamente, estamos sempre a supor que a função em questão é limitada (caso contrário não seria integrável).

Contudo, antes de enunciar e demonstrar o teorema em questão, abordaremos uma série de definições e resultados importantes para a compreensão da sua demonstração. Assim sendo, listar-se-ão de seguida um conjunto de definições e notações utilizadas, com o propósito de facilitar ao leitor a compreensão do texto que se apresenta:

- $D(I)$ - Diâmetro do intervalo I ;
- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$;
- $P[a;b]$- Conjunto de todas as partições do intervalo fechado $[a;b]$;

- $S(P,f)$ -Soma superior de uma função f relativamente a uma partição $P = \{t_0, t_1 \dots \dots t_n\}$;
  $S(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$, sendo $M_i = \sup\{f(x): t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$;
- $I(P,f)$-Soma inferior de uma função f relativamente a uma partição $P = \{t_0, t_1 \dots \dots t_n\}$;
  $I(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$, sendo $m_i = \inf\{f(x): t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$;
- Diz-se que uma determinada função f é contínua num ponto x_0 pertencente ao domínio se :
  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;
- Uma função limitada é integrável (segundo Riemann) em $[a;b]$ se:
  $\sup\{I(P,f): P$ é uma partição de $[a;b]\} = inf\{S(P,f): P$ é uma partição de $[a,b]\}$.
  Esta condição é equivalente a: $\forall \varepsilon > 0 , \exists P \in P[a;b] : S(P,f) - I(P,f) < \varepsilon$;
- Oscilação de uma função num subconjunto I do seu domínio:
  $\omega_f(I) = \sup\{\ |f(s) - f(t)|, \{s,t\} \in I\ \}$;
- Oscilação de uma função num ponto do seu domínio:
  $\omega_f(x_0) = \inf\{\omega_f([x_0 - \delta; x_0 + \delta]), \delta > 0\}$;

Conjuntos de medida nula

Seja Z um determinado subconjunto de $\mathbb{R}$.
Dizemos que Z tem medida nula (ou medida Lebesgue zero) se: $\forall \varepsilon > 0$ existe uma sequência $(\{I_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos abertos tais que : $Z \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} D(I_n) < \varepsilon$.

Obs.: Note-se que, naturalmente, um conjunto unitário terá medida nula.
Isto é, seja $Z = \{x_0\}$. Podemos então considerar o intervalo aberto $]\, x_0 - \frac{\varepsilon}{2};\ x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\,[$.
Z está contido neste intervalo, cujo diâmetro é inferior a ε (qualquer que seja ε).

Teorema 1
Se $Y \subset Z$ e Z tem medida nula, então Y tem medida nula.

Demonstração:
Dado $\epsilon > 0$, seja $(\{I_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de intervalos abertos tais que $Z \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} D(I_n) < \varepsilon$.
Como $Y \subset Z$, Y$\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} D(I_n) < \varepsilon$, portanto, Y tem medida nula.

Teorema 2

A reunião numerável de conjuntos com medida nula é um conjunto com medida nula.

Demonstração:

Seja $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$, sendo Z_n conjuntos de medida nula.

Então, para cada n, podemos escolher uma sequência de conjuntos de medida nula I_m^n tais que que cada $Z_n \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} I_m^n$, e $\sum_{m=1}^{\infty} D(I_m^n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

$$Z_1 \subseteq I_1^1 \cup I_2^1 \cup I_3^1 \dots \dots$$
$$Z_2 \subseteq I_1^2 \cup I_2^2 \cup I_3^2 \dots \dots$$
$$Z_3 \subseteq I_1^3 \cup I_2^3 \cup I_3^3 \dots \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Z_n \subseteq I_1^n \cup I_2^n \cup I_3^n \dots \dots$$

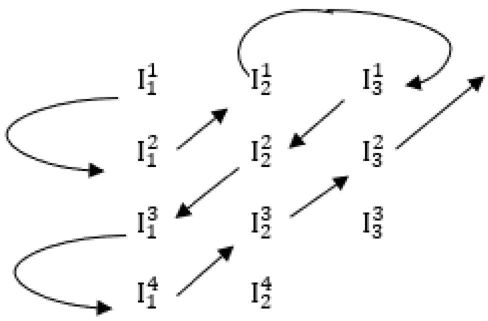

Figura 11

Seja $J_n = I_1^1 \cup I_1^2 \cup I_2^1 \cup I_3^1 \cup I_2^2 \dots \dots \cup I_m^l$, conforme indicado na figura, onde l e m são escolhidos de maneira que J_n seja uma reunião de n intervalos.

Mas então, $\sum_{n=1}^{+\infty} D(J_n) = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} D(I_k^p) < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$.

Como $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$, então E tem medida nula.

Corolário1:

Todo o conjunto numerável tem medida nula.

Demonstração:

Seja M um conjunto numerável. Então $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$.

Mas então, pelo resultado anterior (e porque um conjunto constituído por um ponto tem medida nula), M terá medida nula.

Corolário 2:

Seja $X \subset [a; b]$ um conjunto fechado e de medida zero.

Então, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe uma partição P de $[a; b]$ tal que a soma dos comprimentos dos intervalos de P que intersetam X é menor do que ε.

Demonstração:

O conjunto X está contido num conjunto limitado, pelo que concluímos que também é limitado. Assim sendo, X é compacto, uma vez que é fechado e limitado.

Sabemos que X tem medida nula pelo que qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe uma sequência $(\{I_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos abertos cuja reunião contém X e tais que $\sum_{n=1}^{\infty} D(I_n) < \varepsilon$.

Mas como X é compacto, então $(\{I_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma subcobertura finita.[1]

Representemos um intervalo genérico desta cobertura por $I_i =]a_i;\ b_i[$.

Consideremos agora o conjunto $J = \{j_1, j_2 \dots \dots . j_k\} = \{a_1, \dots \dots \dots a_n, b_1 \dots \dots . b_n, a, b\}$.

Consideremos $j_1, j_2 \dots \dots . j_k$ ordenados de forma crescente.

J é de facto uma partição de $[a, b]$ nas condições pretendidas uma vez que:

$$\sum_{i=1}^{k-1} j_{i+1} - j_i \leq \sum_{i=1}^{n} D(I_i) < \varepsilon$$

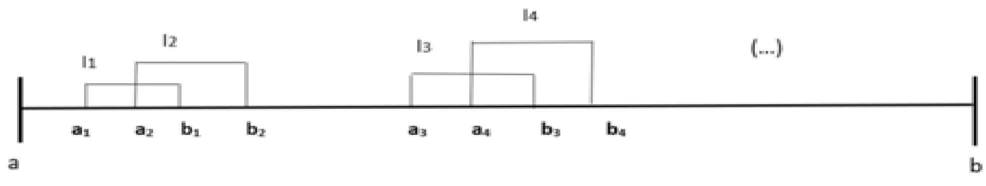

Figura 12

[1] Estamos aqui a admitir um resultado referente a conjuntos compactos, que não iremos provar no presente texto, que refere que qualquer cobertura aberta de um determinado conjunto compacto admite uma subcobertura finita.

O teorema seguinte faz uso da definição de **oscilação de uma função**.

Esta definição assumirá particular importância, no sentido de ser bastante prática quando pretendemos analisar a continuidade/descontinuidade de uma função.

Sendo $\omega_f(I) = \sup\{\,|f(s) - f(t)|, s, t \in I\,\}$, a oscilação constitui uma medida para aferir o quanto a função varia, isto é, a oscilação será tanto maior quanto maior for a amplitude de variação da função (é portanto natural pensarmos que, se uma função é contínua num ponto, essa amplitude de variação em intervalos muito pequenos centrados nesse ponto, será muito próxima de zero).

<u>Teorema 3:</u>

Seja x_0 um ponto do domínio de uma função f. A função f é contínua em x_0 se e só se $\omega_f(x_0) = 0$.

<u>Demonstração:</u>

Se f é contínua em x_0, então:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Mas então, seja $\varepsilon > 0$:

$\exists \delta > 0$ tal que se $s, t \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ então: $|f(s) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mas$|\,f(s) - \,f(t)\,| = \left|f(s) - f(x_0) - \big(\,f(t) - f(x_0)\big)\right| \le \left|f(s) - f(x_0)\right| + |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Portanto, quando $s, t \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ então $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ ou ainda,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : sup\{|f(s) - f(t)|\} \le \varepsilon$, ou seja:

$\forall \varepsilon > 0\,, \exists \delta > 0 : \omega_f([x_0 - \delta; x_0 + \delta]) \le \varepsilon$ (donde se conclui que $\omega_f(x_0) = 0$).

Suponhamos agora que $\omega_f(x_0) = 0$. Então, por definição de $\omega_f(x_0)$:

$\omega_f(x_0) = \inf\left\{\omega_f([x_0 - \delta;\ x_0 + \delta]), \delta > 0\right\} = 0$, ou seja:

$\forall \varepsilon > 0\,, \exists \delta > 0 :\ 0 \le \omega_f([x_0 - \delta; x_0 + \delta]) < \varepsilon$, ou ainda:

$s, t \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \Longrightarrow \sup\{|f(s) - f(t)|\} < \varepsilon$ e, portanto

$\forall \varepsilon > 0\,, \exists \delta > 0 : s, t \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \Longrightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon$, logo

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Logo, f é contínua em x_0.

<u>Teorema 4</u>

Se $\alpha\ \in \mathbb{R}^+$, então fixada uma função f (com domínio D), o conjunto: $\{x \in D | \omega(x) < \alpha\}$ é um aberto em $\mathbb{R}$.

Demonstração

Fixado $\alpha \epsilon \mathbb{R}^+$, se $p \in \{x \in D | \omega_f(x) < \alpha\}$ então $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $\omega_f(]p-\delta;\ p+\delta[) < \alpha$.

Se $x \in]p-\delta; p+\delta[$,então $\omega_f(x) < \alpha$.

Como x é arbitrário,$]p-\delta;\ p+\delta[\subset \{x \in D |\ \omega_f(x) < \alpha\}$.

Assim, p é um ponto interior. Como p é um ponto arbitrário, $\{x \in D | \omega_f(x) < \alpha\}$ é aberto.

<u>Corolário 3</u>:

Seja $f: [a;b] \to \mathbb{R}$, fixado $\alpha \in \mathbb{R}^+$ então $S = \{x \in [a;b] | \omega_f(x) \geq \alpha\}$ é fechado e limitado.

<u>Demonstração</u>: Pelo resultado do teorema anterior, $\{x \in [a;b] | \omega_f(x) < \alpha\}$ é aberto em $\mathbb{R}$, assim, o seu complementar em relação a $\mathbb{R}$, $\{x \in [a;b] | \omega_f(x)\alpha \geq \alpha\ \}$, é fechado, por definição.

Então $\{x \in [a;b] | \omega_f(x) \geq \alpha\} = \{x \in D | \omega_f(x) \geq \alpha\} \cap [a,b]$ é a interseção de dois conjuntos fechados e, portanto, um conjunto fechado. Como $\{x \in D | \omega_f(x) \geq \alpha\} \subset [a;b]$, então $\{x \in [a;b] | \omega_f(x) \geq \alpha\}$ também é limitado.

<u>Teorema 5 (Critério de Lebesgue)</u>:

Seja f uma função limitada num determinado intervalo $I = [a;b]$ do seu domínio. A função f é integrável segundo Riemann se e só se o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula.

<u>Demonstração:</u>

Suponhamos que $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável segundo Riemann.

Seja $S_n = \left\{x \in [a;b]: \omega_f(x) > \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$.

O conjunto dos pontos de descontinuidade de f corresponderá a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

Ora se concluirmos que cada S_n tem medida nula, então também $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ terá medida nula (pelo Teorema 2).

Vamos mostrar que S_n tem medida nula.

Seja $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe uma partição $P_1 = \{x_1, x_2 \ldots\ldots x_m\}$ de $[a;b]$ tal que, para quaisquer $\{s_i, t_i\} \subset [x_i\,; x_{i+1}]$ se tem :

$\sum_{i=1}^{m-1} |f(s_i) - f(t_i)|\, \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2n}$, porque f é integrável em $[a;b]$.

Se existir $y_i \in S_n \cap]x_i; x_{i+1}[$, então $\omega_f(y_i) > \frac{1}{n}$ e , portanto $\omega_f(y_i). \Delta x_i > \frac{1}{n}\, \Delta x_i$

Mas então:

$$\frac{\varepsilon}{2n} > \sum_{i=1}^{m} (M_i - m_i). \Delta x_i \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i:\, S_n \cap]x_i; x_{i+1}[\neq \emptyset}}^{m} (M_i - m_i). \Delta x_i \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i:\, S_n \cap]x_i; x_{i+1}[\neq \emptyset}}^{m} \omega_f(y_i). \Delta x_i$$

$$> \sum_{\substack{i=1 \\ i:\, S_n \cap]x_i; x_{i+1}[\neq \emptyset}}^{m} \frac{1}{n}\, \Delta x_i$$

E, portanto:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i:\, S_n \cap]x_i; x_{i+1}[\neq \emptyset}}^{m} \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

Concluímos, portanto, que é possível considerar, para cada ε, uma reunião de intervalos abertos $]x_{i1}; x_{j1}[\cup]x_{i2}; x_{j2}[\ldots\ldots[]x_{ik}; x_{jk}[$, que contém todos os pontos de S_n à exceção dos que sejam elementos da partição P_1. Designemos por A a soma dos diâmetros destes intervalos.

Das desigualdades acima apresentadas sabemos que $A < \frac{\varepsilon}{2}$.

Uma vez que $P_1 = \{x_1, x_2 \ldots\ldots x_m\}$ podemos considerar o conjunto: $B_i = \bigcup_{i=1}^{m}]\, x_i - \frac{\varepsilon}{4m}; x_i + \frac{\varepsilon}{4m}[$ que contém todos os pontos da partição (e, portanto, todos os pontos da partição que também sejam pontos de descontinuidade de f) e que sabemos que verifica $\sum_{i=1}^{m} D(B_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mas então $S_n \subseteq$ $(\,]x_{i1}; x_{j1}[\cup]x_{i2}; x_{j2}[\ldots]x_{ik}; x_{jk}[\cup]\, x_1 - \frac{\varepsilon}{4m}; x_1 + \frac{\varepsilon}{4m}[\ldots\ldots..]\, x_m - \frac{\varepsilon}{4m}; x_m + \frac{\varepsilon}{4m}[\,)$, cuja soma dos respetivos diâmetros é inferior a $\sum_{i=1}^{m} D(B_i) + A = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Ou seja, $(]x_{i1}; x_{j1}[\cup]x_{i2}; x_{j2}[\ldots]x_{ik}; x_{jk}[\cup]\, x_1 - \frac{\varepsilon}{4m}; x_1 + \frac{\varepsilon}{4m}[\cup \ldots\ldots.. \cup]\, x_m - \frac{\varepsilon}{4m}; x_m + \frac{\varepsilon}{4m}[$ é uma reunião de intervalos abertos cuja soma dos diâmetros é inferior a ε (qualquer que seja ε) e que contém S_n . Logo, S_n tem medida nula.

Suponhamos agora que o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida nula.

Fixemos $\varepsilon_1 > 0$. O conjunto $S = \{x \epsilon [a; b] | \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$ (onde $\varepsilon = \min\{\frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{\varepsilon_1}{2(b-a)}\}$) está contido no conjunto dos pontos de descontinuidade de f e, pelo corolário 3, é um conjunto fechado.

Sendo S fechado e de medida nula, o corolário 2 garante a existência de uma partição de I cujos soma dos diâmetros dos intervalos que contêm os elementos de S é arbitrariamente pequena.

Sendo $I = [a; b]$, tomemos uma partição P de $[a; b]$ tal que a soma dos diâmetros dos intervalos que contêm algum elemento de S é inferior a $\frac{\varepsilon}{2||f||}$ (sendo $||f|| = \{sup\,\{f(x), x\,\epsilon[a; b]\ \} - \ inf\,\{f(x), x\,\epsilon[a; b]\ \})$.

Então

$$S(P, f) - I(P, f) =$$
$$S(P', f) - I(P', f) + S(P'', f) - I(P'', f),$$

Onde P' representa os intervalos da partição P que contêm pontos de S_n e P'' os intervalos da partição P que não contêm pontos de S_n e em que $M_i = sup\,\{f(x), x \in [x_{i-1}; x_i]\}\ \ e\ \ m_i = \ inf\,\{f(x), x\ \in [x_{i-1}; x_i]\}$.

Uma vez que cada intervalo tem diâmetro menor que $\frac{\varepsilon}{2||f||}$ (e portanto $\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2||f||}$) e que $M_i - m_i$ é menor ou igual a $\{sup\,\{f(x), x\,\epsilon[a; b]\ \} - \ inf\,\{f(x), x\,\epsilon[a; b]\}$, tem-se que:

$$S(P'', f) - I(P'', f) < \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i). \Delta x_i < \ ||f|| \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\ <\ \varepsilon\ \ \leq \frac{\varepsilon_1}{2}$$

Considerando os intervalos de P' e tendo em conta que a oscilação é inferior a ε vem que:

$$S(P', f) - I(P', f) < \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i). \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i < \varepsilon\ (b - a) \leq \frac{\varepsilon_1}{2}$$

Logo $S(P, f) - I(P, f) < \ \varepsilon_1$ e, portanto, f é integrável em $[a; b]$.

2.Função de Volterra

Quando se efetua um estudo relacionado com cálculo integral, ainda que este seja introdutório, apresentam-se habitualmente determinadas condições ou critérios que permitam determinar se uma função é ou não integrável num determinado intervalo. Posteriormente, é também frequente enunciar a relação que existe entre uma primitiva de uma função e o processo de cálculo que nos permita determinar a área delimitada pela mesma (o que decorre naturalmente da aplicação do teorema fundamental do cálculo).

Fica geralmente bastante claro que uma função pode ser integrável sem ser necessariamente primitivável, conforme ilustra o seguinte exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ \ se\ x \ \in [0;2]\backslash\{1\} \\ \\ 2 \qquad\quad se\ \ x = 1 \end{cases}$$

A função f não satisfaz a condição dos valores intermédios para as derivadas (teorema de Darboux), ou seja, não pode ser a derivada de uma determinada função (e, portanto, não é primitivável).

O caso de a função poder ser primitivável em todo um intervalo, mas não ser integrável nesse mesmo intervalo, normalmente não é abordado por pressupor a construção de funções que apresentam uma complexidade relativamente elevada.

Esta secção é dedicada à construção de uma função desse tipo, a função de Volterra.

<u>Conjunto de Cantor “gordo” ou conjunto de Smith-Volterra-Cantor</u>

Para efetuar a construção da função de Volterra que iremos apresentar, recorrer-se-á ao conjunto de Smith-Volterra-Cantor.

Deste modo, apresentaremos de seguida o processo que nos permite obter este conjunto e mencionaremos algumas das propriedades que o mesmo apresenta.

Este conjunto pode obter-se por um processo similar ao utilizado na construção do conjunto de Cantor, eliminando determinados intervalos ao intervalo $[0;1]$.

Numa primeira etapa, ao intervalo [0;1] elimina-se um intervalo central de amplitude $\frac{1}{4}$ obtendo-se $\left[0;\frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8};1\right]$.

Em cada uma das etapas seguintes repete-se um processo similar, removendo-se a cada um dos 2^{n-1} intervalos, um intervalo de amplitude $\frac{1}{2^{2n}}$. Por exemplo, no final da segunda etapa obteremos o conjunto $\left[0;\frac{5}{32}\right] \cup \left[\frac{7}{32};\frac{3}{8}\right] \cup [\frac{5}{8};\frac{25}{32}] \cup [\frac{27}{32};1]$.

Aplicando este processo indefinidamente, o conjunto de Smith-Volterra-Cantor corresponderá ao conjunto dos pontos que não foram eliminados em nenhuma etapa.

Pela forma como foi construído, pode-se demonstrar que não contém nenhum intervalo sendo que, a medida dos intervalos removidos corresponde a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n.\frac{1}{2^{2n+2}} = \frac{1}{2}$$

Ou seja, tanto o que "resta" como o que foi retirado possui medida positiva (o que será de assinalar uma vez que este aspeto será relevante na construção da função de Volterra).

De notar ainda que se pode provar que este conjunto, apesar de ter medida positiva, é um conjunto fechado de interior vazio (alguns autores referem que é um conjunto perfeito, também por vezes denominado conjunto de Harnack).

PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DA FUNÇÃO DE VOLTERRA

Comecemos por considerar a seguinte função:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \, sin\left(\frac{1}{x}\right) se\ x \neq 0 \\ 0 \qquad se\ x = 0 \end{cases}$$

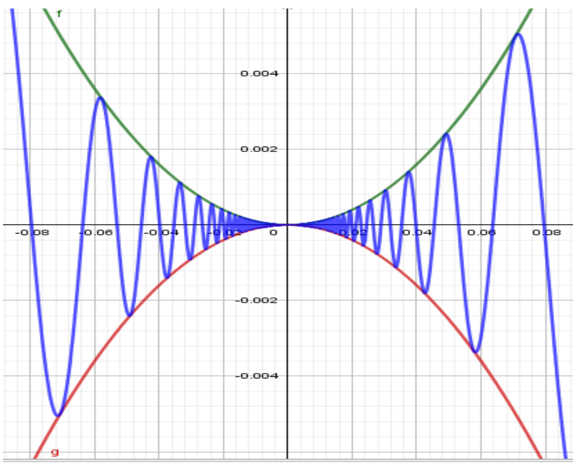

Figura 13

É bastante simples verificar que $F'(x) = 2xsin\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right)$ se $x \neq 0$, por aplicação imediata das regras de derivação e de que $F'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(h)-F(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = 0$.

$$F'(x) = \begin{cases} 2xsin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$$

A função F é, portanto, derivável em todos os pontos.

Note-se, contudo, que sua função derivada não é uma função contínua em 0, uma vez que não existe $\lim_{x\to 0} F'(x)$.

Note-se ainda que $F'(x)$ é limitada em $[0;1]$.

Vejamos:

Se $x \in]0;1]$

$0 < x \leq 1 \Longrightarrow$

$0 < 2x \leq 2 \Longrightarrow$

$-2 \leq 2xsin(1/x) \leq 2 \Longrightarrow$

$-3 \leq 2xsin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 3 \Longrightarrow -3 \leq F'(x) \leq 3.$

Como $F'(0) = 0$, então, $\forall x \in [0;1], -3 \leq F'(x) \leq 3$.

Consideremos agora a função F restrita ao intervalo $[0;\frac{1}{8}]$ e designemos por x_0 o maior valor de x para o qual $F'(x) = 0$.

Construamos agora uma nova função, obtida a partir desta restrição, que será igual à mesma em $[0;x_0]$ e será constante e igual a $F(x_0)$ para $x \in]x_0\,;\frac{1}{8}]$.

De seguida prolonguemos a função ao intervalo $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ de tal forma que o seu gráfico, no intervalo $\left[\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right]$, seja o simétrico relativamente à reta $x = \frac{1}{8}$, do gráfico da função que tínhamos construído em $\left[0;\frac{1}{8}\right]$.

No final desta fase iremos obter uma função cujo gráfico será similar ao da figura 14.

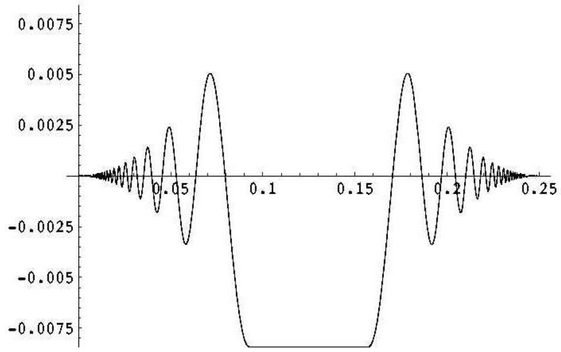

Figura 14

Denominemos esta função por f_1 e notemos que f_1 é contínua, mas a sua derivada não é contínua nem 0 nem em $\frac{1}{4}$.

O passo seguinte consistirá em construir uma nova função "transladando" todo o gráfico da função f_1 para o intervalo $\left[\frac{3}{8}; \frac{5}{8}\right]$,e considerando a função constante e igual a zero nos restantes pontos do intervalo $[0; 1]$. Obter-se-á um gráfico similar ao apresentado na figura 15.

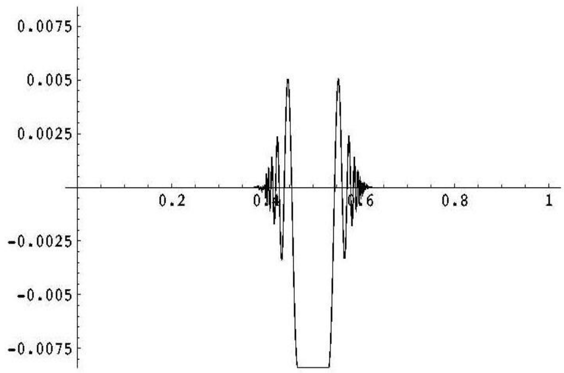

Figura 15

Efetuando um processo similar ao anterior, construamos uma função f_2, utilizando-se para este o efeito o intervalo $[0; \frac{1}{16}]$, e transladando a função obtida na última etapa para os dois intervalos removidos na segunda etapa do processo de construção do conjunto de Smith-Volterra-Cantor (fazendo "cópias" do que se obtém para estes intervalos) e fazendo f_2 coincidir com f_1 nos restantes pontos do intervalo $[0; 1]$.

Aplicando este processo indefinidamente, obteremos uma sequência de funções $f_n(\mathrm{x})$ tais que, essa sequência de funções converge para uma função V que está definida em

$[0;1]$, é derivável em $[0;1]$, mas a sua derivada não é contínua no conjunto de Smith-Volterra-Cantor.

Como este conjunto tem medida positiva, então, por aplicação do teorema de Lebesgue, V' não poderá ser integrável.

Contudo, a função V, cuja construção se apresentou, é uma função primitiva de V'. Obtivemos deste modo uma função primitivável em $[0;1]$ mas que não é integrável neste intervalo.

A título ilustrativo apresentamos de seguida uma representação gráfica da função de Volterra, considerando as três primeiras etapas da sua construção.

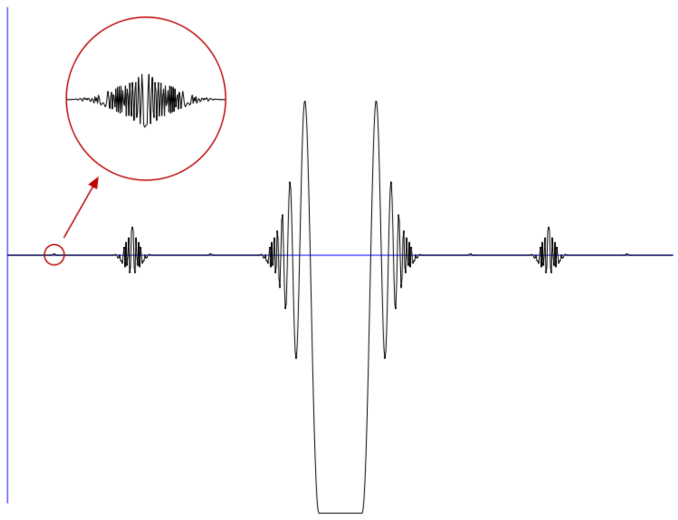

Figura 16

Referências bibliográficas

Apostol, T. (1996). *Análisis Matemático*. Editorial Riverté.

Bressoud, D. (2003). *Wrestling with the Fundamental Theorem of Calculus.* Macalester College, St. Paul, Minnesota. Disponível em: https://www.macalester.edu/~bressoud/talks/AlleghenyCollege/Wrestling.pdf

Costa, B., & Rodrigues, E. (2017). *Novo Espaço, Matemática A, 12º ano, Parte 2*. Porto Editora.

Gomes, J., & Cardona, F. (n.d). *Uma condição necessária e suficiente para integrabilidade de uma função real.* Disponível em: https://www.ime.usp.br/~jgomes/finalsimposio.pdf

Guzmán, M., & Colera, J. (1989). *Matematicas II*. Ediciones Anaya.

Las matemáticas (n.d.). *Teorema fundamental del cálculo*. Consultado em 15 de março de 2020. Disponível em: https://lasmatematicas.eu/2017/09/06/el-teorema-fundamental-del-calculo/

Negra, C., Martinho, E., & Martins, H. (2017). *Dimensões, volume 2*. Editora Santillana.

Neves, M., & Brito, M. (.1997). *Matemática. Livro de Texto, 1º Volume, 12º Ano de Escolaridade*. Porto Editora.

Spivak, M. (1970). *Calculus - Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté.