Zestaw 9

Zeszyt 2

Jacek Stańdo
Kinga Gałązka

Rozwijanie myślenia matematycznego w kontekście edukacji geograficznej

- Kodowanie na siatce kartograficznej
- Geograficzna geometria nieeuklidesowa
- Wszystko płynie, czyli zadania czasowe

Analiza merytoryczna
Elżbieta Miterka

Recenzja
Jolanta Lazar

Redakcja językowa i korekta
Joanna Mueller

Projekt graficzny, projekt okładki
Wojciech Romerowicz, ORE

Skład i redakcja techniczna
Grzegorz Dębiński

Projekt motywu graficznego „Szkoły ćwiczeń"
Aneta Witecka

ISBN 978-83-65967-00-8 (Zestawy materiałów dla nauczycieli szkół ćwiczeń – matematyka)
ISBN 978-83-65967-36-7 (Zestaw 9. Korelacje treści nauczania z matematyki z zagadnieniami przedmiotów przyrodniczych)
ISBN 978-83-65967-36-7 (Zeszyt 2. Rozwijanie myślenia matematycznego w kontekście edukacji geograficznej)

Warszawa 2017
Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl

Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

Ośrodek Rozwoju Edukacji

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

Spis treści

Wstęp

„Wszystko jest powiązane ze wszystkim innym, ale w pobliżu rzeczy są bardziej powiązane niż odległe rzeczy”.

Waldo R. Tobler[1]

Matematyka przez wielu uważana jest za przedmiot trudny, którego zrozumienie wymaga zdolności do abstrahowania i formalizowania. Być może wynika to z przekonania, iż matematyka szkolna oderwana jest zupełnie od rzeczywistości, a umiejętności dokonywania obliczeń, które wykorzystujemy na co dzień, zdobywamy poza lekcjami. Zadania z elementami „otaczającej nas rzeczywistości” postrzegane są przez uczniów jako udziwnione twory czysto matematyczne, niemające przełożenia na ich praktyczne wykorzystanie. Dlatego próby wplatania treści z innych dziedzin wiedzy do zadań matematycznych też mogą skończyć się niepowodzeniem. Z tego powodu warto tak przygotowywać ćwiczenia interdyscyplinarne, aby wymuszać szukanie odpowiedzi na postawione pytania. I na tym polega między innymi mistrzostwo pedagogiczne – tak sformułować problem, aby zainteresować nim wszystkich.

Ciekawie przygotowany materiał, przekonanie uczniów, że nauczyciel chce w atrakcyjny sposób przekazać im swoją wiedzę, że poprowadzi ich przez ciernistе ścieżki edukacyjne, a zarazem doceni ich wysiłki, wpływa dodatnio na twórczy charakter zajęć. Stają się one dla uczniów oczekiwanym momentem dnia. Nauczyciel, planując niebanalną lekcję, czuje się jak reżyser teatralny, ale też jak aktor, którego zadaniem jest aktywne zaangażowanie widzów do spektaklu, co będzie miało kluczowy wpływ na powodzenie przedstawienia.

Niestety to, co sprawdza się w klasie X, może nie udać się w klasie Y. Dlatego perfekcja edukacyjna polega na uwzględnianiu różnych opcji, tak by w krytycznym momencie wyciągnąć, niczym królika z kapelusza, odpowiednie motywatory i stymulatory.

Przekonanie uczących się, że nauczyciel jest po to, aby przekazać im umiejętności potrzebne w życiu, a nie tylko ściśle teoretyczne fakty ubrane w eleganckie dowody, uaktywni uczniów i pozwoli im na zdobywanie wiedzy „mimo woli”. Przy okazji rozwiązywania niebanalnych problemów, dzięki wpleceniu do treści matematycznych elementów geograficznych, warto wykorzystać wiedzę uczniów, którzy często dużo podróżują, znają inne krajobrazy, zwyczaje panujące w różnych krajach, ich strukturę geograficzną i ekonomiczną. Odwołując się do ich doświadczeń, pozwalając na przygotowanie fragmentów zajęć, tworzymy sytuacje edukacyjne sprzyjające klimatowi wzajemnego uczenia się, dyskusji i wymiany obserwacji.

Gdy przygotowuje się lekcje matematyki z elementami geografii, trzeba mieć świadomość tego, po co to robimy i co chcemy osiągnąć. Na przykład wyświetlenie filmu o Mount Evereście nie może służyć tylko pokazaniu kilku ciekawostek dla rozładowania nudy

1 Waldo R. Tobler – amerykański geograf i kartograf, prekursor wykorzystania komputerów w badaniach geograficznych. Jego powiedzenie jest określane żartobliwie jako pierwsze prawo geografii.

lekcyjnej, ale powinno być przyczynkiem chociażby do rozważań na temat podobieństwa (jak zmierzono wysokość Mount Everestu bez wchodzenia na jego szczyt?).

Cel zajęć interdyscyplinarnych skupia się na wyposażeniu uczniów w narzędzia, które pozwolą im na posługiwanie się językiem matematyki i jej metodami w formułowaniu oraz nazywaniu problemów należących do innych dziedzin wiedzy, a także na wykorzystywaniu ich w życiu codziennym. Matematyczne ujęcie problemów geograficznych stwarza możliwości wykorzystania logicznego myślenia, wyciągania wniosków, stawiania i obalania hipotez, znajdowania analogii oraz dostrzegania sprzeczności.

Celem niniejszej publikacji jest zainspirowanie nauczycieli do tworzenia niebanalnych zajęć korelujących treści matematyki i geografii. W tak krótkiej pracy nie jest możliwe omówienie wszystkich aspektów z tym związanych. Zaprezentujemy więc tylko wybrane pomysły na to, w jaki sposób sprawić, aby uczniowie przekonali się o rzeczywistej przydatności wiedzy matematycznej (na przykład w czasie zagranicznych podróży), a zarazem rozwijali umiejętności matematyczne. Bank zadań to tylko przykładowe typy zadań geograficznych. Nauczyciel musi sam nadać im atrakcyjną formę, tak aby były przydatne na zajęcia danego rodzaju.

Geografia w matematyce i matematyka w geografii

Rozwój nauk matematycznych w dużej mierze był odpowiedzią na potrzeby nauk przyrodniczych. Wielu wybitnych matematyków przyczyniło się do wzbogacenia teorii geograficznych i dostarczyło narzędzi do rozwoju tej dziedziny wiedzy. I odwrotnie – naukowcy, których dzisiaj uważamy za geografów, byli twórcami teorii matematycznych. Wszechstronność dawnych uczonych oraz ich holistyczne spojrzenie na przyrodę pozwoliły

im na dostrzeganie harmonii praw rządzących światem, opisywanie jej i wykorzystywanie.

Współczesny aparat matematyczny jest tak wyabstrahowany, że tylko nieliczni są w stanie w pełni zrozumieć jego niuanse. Na szczęście w szkolnej edukacji matematyczno-geograficznej nie wykorzystuje się aż tak zaawansowanych struktur.

Niewielkie są też umiejętności matematyczno-geograficzne, które wykorzystujemy na co dzień. Potrzebna jest orientacja w kwestiach związanych z czasem, kalendarzem, odczytywaniem mapy (skalą, planem), szacowaniem wyników, interpretowaniem diagramów. Zaawansowana technologia multimedialna wyręcza nas w określaniu położenia obiektu na kuli ziemskiej czy obliczaniu długości drogi z A do B. Zatem oczywiste jest, że lekcje matematyki z elementami geografii muszą być ilustracją i środkiem do osiągnięcia zakładanych celów, a nie celem samym w sobie. Takie podejście do korelacji przedmiotowej, zaplanowanie ciekawej lekcji z właściwie dobranymi środkami dydaktycznymi, pomoże w kształtowaniu postawy badawczej, sprowokuje do poszukiwań, dostarczy okazji do pracy samodzielnej, ale też do dyskusji i wymiany doświadczeń.

Wielcy matematycy, którzy byli też geografami:

Eratostenes (276–194 p.n.e.) – oszacował średnicę Ziemi, podał sposób wyznaczania liczb pierwszych (sito Eratostenesa).

Tales z Miletu (ok. 620–540) – przewidywał zaćmienie Słońca, podał szereg twierdzeń dotyczących kątów w wielokątach.

Carl Gauss (1777–1855) – geodeta, twórca geometrii nieeuklidesowej.

Leonard Euler (1707–1783) – kartograf, twórca teorii grafów.

Obliczenia kartograficzne

Elementy kartografii na zajęciach matematycznych

Kartografia to, najprościej mówiąc, nauka o mapach, a także o przekazywaniu informacji dotyczących przestrzeni geograficznej zakodowanych w formie graficznej lub cyfrowej.

Z mapą i planem uczeń spotyka się już na lekcjach przyrody, wiadomości te są pogłębiane w późniejszych latach nauki. Młodzi ludzie chętnie uczestniczą w lekcjach poświęconych tej tematyce, gdyż widzą jej użyteczność w praktyce.

Najważniejsze zagadnienia, które obejmują treści geograficzno-matematyczno-kartograficzne, to:

- skala – rodzaje, obliczanie, przeliczanie skali, map i planów,
- obliczanie rzeczywistej odległości/rzeczywistego pola powierzchni na podstawie skali,
- obliczanie wysokości względnych i bezwzględnych przy wykorzystaniu rysunku poziomicowego,
- obliczanie przewyższenia profilu topograficznego,
- spadek terenu, spadek rzeki,
- odczytywanie informacji z map poziomicowych,
- azymut – obliczanie, wyznaczanie.

Wplatanie w tok zajęć matematycznych elementów kartograficznych daje uczniom możliwość poszerzania horyzontów myślowych poprzez wykorzystanie uzyskanych umiejętności w praktyce. Wielu młodych ludzi skarży się na złą pamięć, uważa, że nie potrafi zapamiętać najprostszych pojęć czy definicji. Rozwijanie pamięci wymaga ćwiczeń pobudzających odpowiednie powierzchnie mózgu, aktywizujących pamięć krótkotrwałą i długotrwałą. Na przechowywanie informacji w pamięci długotrwałej wpływa wiele czynników, a najbardziej uniwersalne to zainteresowanie, powtarzanie i wizualizacja. Doskonale przydaje się tu budowanie ćwiczeń na bazie treści kartograficznych. Dają one bowiem okazję do graficznej interpretacji problemów (na przykład dotyczących zamiany jednostek), dyskusji i aktywnego zaangażowania (choćby w przypadku zajęć opartych o ciekawostki czy symulujących podróże do niezwykłych miejsc).

W pamięci długotrwałej informacje przechowywane są przez długi czas, ale część z nich bywa pozornie utracona – uczeń nie może sobie ich przypomnieć. Trenowanie pamięci długotrwałej to przypominanie faktów i rozwiązań, które już były stosowane. Pomocne może okazać się tu rozpatrywanie problemów obliczeniowych, które były wcześniej omawiane na geografii. Oglądanie ich w nowym, matematycznym kontekście pozwoli na rozwinięcie nabytych umiejętności, a przykłady ich zastosowania rozwiną pamięć sytuacyjną.

Pomysł na… pracę z ekspertem

Kształtowanie umiejętności związanych z obliczeniami „mapowymi” (skala, rzeczywista odległość, wysokość, powierzchnia itp.) warto poprowadzić metodą pracy z ekspertem. Jak to może wyglądać w praktyce? Ustalamy tematykę problemów, nad którymi uczniowie będą pracować, i określamy, jakie powinny być efekty. Powołujemy ekspertów, którzy zajmą się daną tematyką (jeden temat to nie więcej niż dwóch ekspertów, którzy będą wspólnie pracować). Eksperci w domu „rozpracowują” dane zagadnienie, obudowują je w atrakcyjne ćwiczenia, wzbogacają o efekty wizualne (mapy, zdjęcia, prezentacje) bądź związane z wykorzystaniem multimediów (na przykład komputerów).

Eksperci mają tydzień lub dwa na opracowanie zagadnień – w tym czasie mogą kontaktować się z nauczycielem, który wspiera ich i monitoruje przebieg prac. W ustalonym dniu na lekcji matematyki (najlepiej zaplanować zajęcia dwugodzinne) uczniowie przekazują swoją wiedzę kolegom i koleżankom. Ich zadaniem jest zainteresować innych problemem i zapoznać klasę ze sposobami rozwiązywania danego typu zadań. Uczniowie mogą siedzieć przy stolikach w małych grupach – każdy ekspert pracuje po kolei z każdą grupą. Miarą efektywności wysiłków ekspertów może być test sprawdzający dla uczniów, jeżeli będzie to możliwe, z wykorzystaniem komputerów.

Taki sposób pracy bardzo dobrze sprawdza się w zespole szkół, gdzie są uczniowie ze szkoły podstawowej i ponadpodstawowej. Wtedy dla uczniów szkoły podstawowej ekspertami mogą być osoby ze starszych klas lub ze szkoły ponadpodstawowej.

Bank zadań

Poniżej przykłady typów zadań, nad którymi można pracować na lekcjach matematyki. Aby były atrakcyjne dla uczących się i odpowiednie dla danej grupy wiekowej, warto przemodelować ich treść i zaadaptować je do potrzeb danej grupy uczniów. Można wzbogacić zadania, dobierając liczby odzwierciedlające ciekawostki geograficzne.

W ten sposób uczący się mogą utrwalać umiejętności związane z zamianą jednostek, posługiwaniem się dużymi liczbami, notacją wykładniczą, wykonywaniem działań pisemnych i działań na potęgach, odczytywaniem i interpretowaniem informacji oraz graficznym przedstawianiem treści zadania.

Efektem tych działań może być zaplanowanie trasy wycieczki klasowej lub wirtualnej wycieczki po ciekawych obiektach na świecie, na przykład historycznych.

Zadanie 1

Korzystając z informacji przedstawionych na rysunku, określ, czy dane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe. W okienko wpisz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, natomiast F, jeśli jest fałszywe.

Rodzaje skal

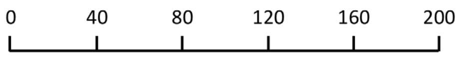
skala liczbowa

1 : 1 000 1 : 4 000 1 : 2 000 000

skala mianowana

1 cm – 100 cm 1 cm – 40 cm 1 cm – 20 km

skala liniowa



	P/F
Określając skalę liczbową, zamiast 1:70 000 można zapisać 1 = 70 000.	
Określając skalę liczbową, zamiast 1:20 000 można zapisać $\frac{1}{20000}$.	
Mapa wykonana w skali 1:500 000 jest bardziej szczegółowa od mapy wykonanej w skali 1:100 000.	
Na mapie wykonanej w skali 1:300 jednemu centymetrowi odpowiada 30 cm w rzeczywistości.	
Graficzny obraz skali wyrażony w postaci linii podzielonej na jednostki długości to skala liniowa.	
Po przekształceniu skali liczbowej 1:6000 na skalę mianowaną otrzymujemy 1 cm – 6000 cm.	

Zadanie 2

Park ma w przybliżeniu kształt prostokąta. Na planie wykonanym w skali 1:5000 długości boków tego prostokąta są równe 8 cm 6 mm i 12 cm. Oblicz rzeczywiste wymiary parku i jego rzeczywiste pole powierzchni. Wyniki podaj odpowiednio w m i ha.

Zadanie 3

Odległość mierzona na mapie między miejscowościami Stara Góra a Nowa Góra jest równa 5 cm. Rzeczywista odległość między tymi miejscowościami wynosi 100 km. Oblicz skalę mapy.

Zadanie 4

Oblicz rzeczywistą powierzchnię Jeziora Mroku, które na mapie wykonanej w skali 1:25 000 zajmuje powierzchnię 3 cm^2. Wynik podaj w km^2.

Zadanie 5

Określ przybliżoną odległość między stacją Łódź Widzew a stadionem RTS Widzew, mierzoną w linii prostej. Skorzystaj z zamieszczonej poniżej mapy.

Rozumowanie intuicyjne i formalne

Na lekcjach matematyki warto zachęcić uczniów do rozwiązywania zadań opartych na interpretowaniu graficznych rysunków rzeźby Ziemi. Jest to okazja do rozwijania zarówno rozumowania intuicyjnego, jak i formalnego uczących się.

Rozumowanie intuicyjne uczeń będzie mógł wykorzystać w połączeniu lub konfrontacji ze znanymi mu obrazami powierzchni Ziemi (na przykład pozyskanymi w czasie wakacyjnych wędrówek lub zaobserwowanymi w telewizyjnych programach popularnonaukowych). Rolą nauczyciela jest, aby przygotował taki materiał, który nakieruje uczącego się na posługiwanie się obrazami pojęć, które może rozważać niezależnie od ich formalnych definicji, i prowadzenie skrótowych rozumowań opartych na oczywistych przesłankach. Uczeń może wtedy formułować hipotezy oparte na dostrzeganych analogiach czy odwzorowaniach i uzasadniać je w oparciu o zminimalizowaną rekurencję.

Rozumowanie formalne będzie podsumowaniem działań intuicyjnych i kolejnym krokiem ku matematyce strukturalnej. Można postawić uczniom już trudniejsze zadania, bardziej zmatematyzowane, aby zdając sobie sprawę z przyjętej postawy dedukcyjnej, starali się każdy z kolejnych wniosków ustalić precyzyjnie, wywieść z uznanych twierdzeń i definicji. Poznaną terminologię będą stosowali poprawnie, ze zrozumieniem, że nowe terminy można wprowadzać do rozważań po dokładnym wyjaśnieniu ich znaczeń. Po rozwiązaniu zadania uczniowie sprawdzą, czy zostały spełnione założenia.

Bank zadań

Zadanie 1

Oblicz wysokość względną między położonym na wysokości 1,5 m n.p.m. lustrem wody Jeziora Żarnowieckiego a szczytem Góry Zamkowej, na której znajdują się punkt widokowy i grodzisko. Zapisz obliczenia.

Fragment mapy topograficznej Okolice Jeziora Żarnowieckiego w skali 1:50 000 załączonej do arkusza maturalnego z geografii w maju 2007. Źródło: CKE

Zadanie 2

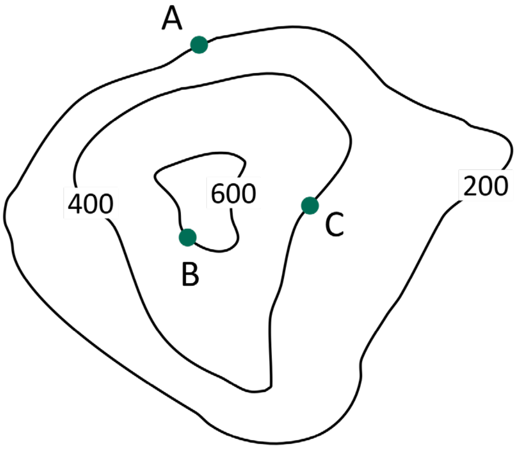
Różnica wysokości między dwoma punktami rzeki wynosi 2400 m, a odległość w terenie między tymi punktami to 600 km. Oblicz spadek rzeki.

Zadanie 3

Długość rzeki wynosi 200 km, a odległość w linii prostej od źródeł do ujścia jest równa 150 km. Oblicz rozwinięcie rzeki.

Zadanie 4

Na podstawie mapy poziomicowej określ, który z punktów – A, B czy C – leży najwyżej, a który najniżej.



Zadanie 5

Określ wysokość bezwzględną, na której rośnie drzewo.

Kodowanie na siatce kartograficznej

Lewopółkulowe myślenie matematyczne

W lewej półkuli mózgowej odbywa się porównywanie nowych informacji z danymi, które zostały wcześniej przyswojone. Dzięki niej możliwe jest przełożenie abstrakcyjnych symboli na kody opisujące rzeczywistość. Obie półkule mózgowe preferują odmienne strategie rozwiązywania problemów. Powszechnie uważa się, że to zdolności będące domeną lewej półkuli mózgu odpowiadają za sukcesy edukacyjne i zawodowe człowieka. Dlatego w szkole kładzie się zazwyczaj nacisk na rozwiązywanie konkretnych problemów. Aktywizacja lewej półkuli pozwala na sprawne rozwiązywanie zadań algebraicznych, budowanie schematów i instrukcji. Z tego powodu warto, aby nauczyciel dysponował strategiami, które będą stymulować aktywności wydobywające ukryte zasoby lewej półkuli mózgu. Zadania powinny być tak konstruowane, aby każdy uczeń poczuł satysfakcję z rozwiązania problemu.

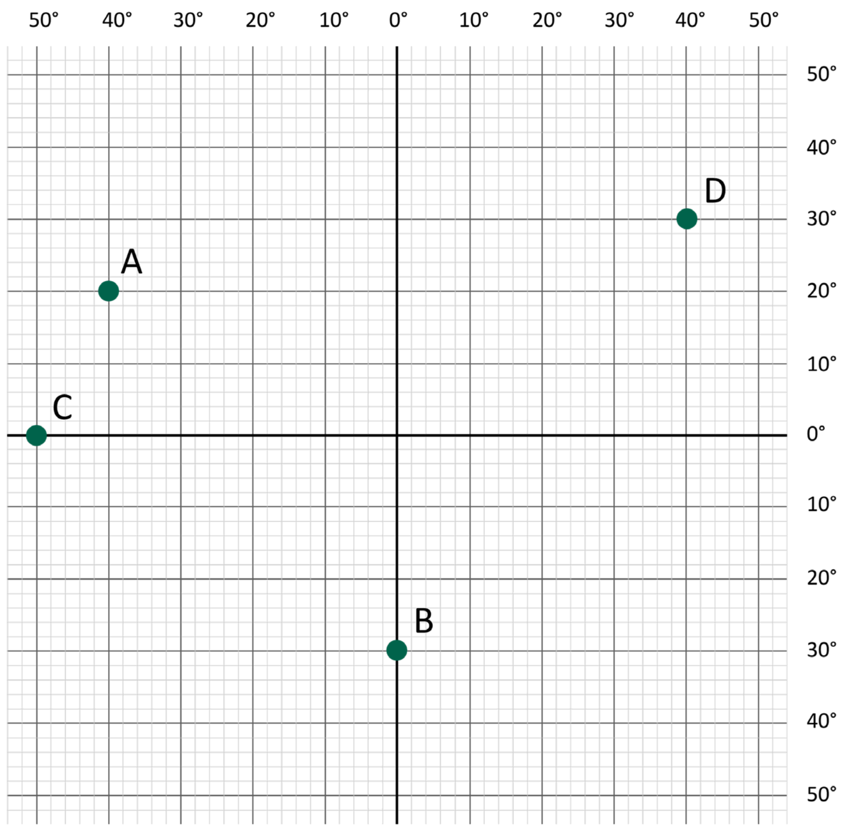
Dobrym pomysłem może być wykorzystanie analogii między układem współrzędnych kartezjańskich a siatką kartograficzną. Rozwiązywanie szerokiej gamy różnorodnych ćwiczeń pozwoli uczniom na szybkie i skutecznie stosowanie nowych kodów i strategii, w sytuacjach praktycznych dotyczących określania współrzędnych geograficznych obiektów. Uczniowie mają tendencję do poruszania się utartymi szlakami, zatem sprowokowanie ich do poszukiwania nowych wyzwań pozwoli na pobudzenie odpowiednich neuronów i uaktywnienie lewej półkuli mózgu. Ćwiczenia przygotowane do pracy samodzielnej spowodują, że jeśli nawet uczeń nie zgłębi do końca danego problemu, to odczuje radość i satysfakcję ze stosowania intelektualnych narzędzi poznania.

Bank zadań

Przykładowe zadania wprowadzające

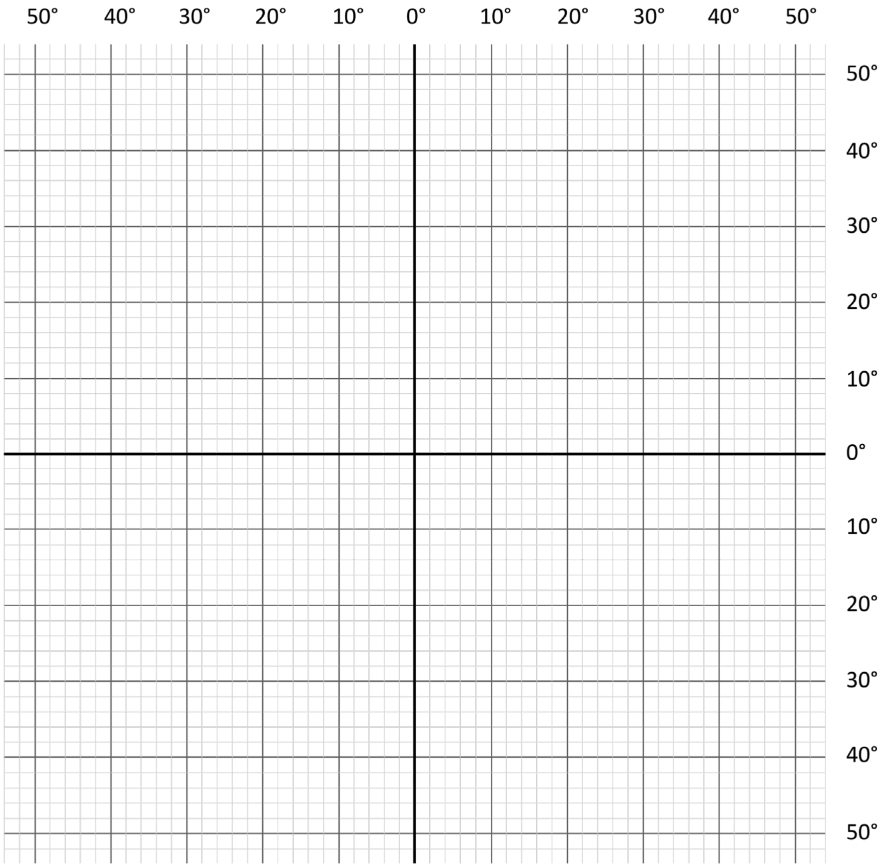
Zadanie 1

Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na siatce kartograficznej.



Zadanie 2

Zaznacz na siatce kartograficznej punkty:
A(10^0N, 20^0W), B(0^0, 40^0E), C(50^0S, 30^0W).

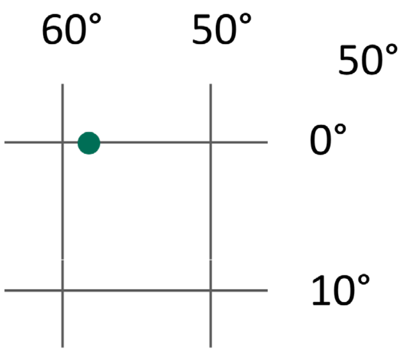


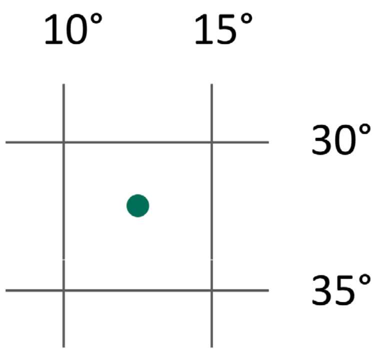
Zadanie 3

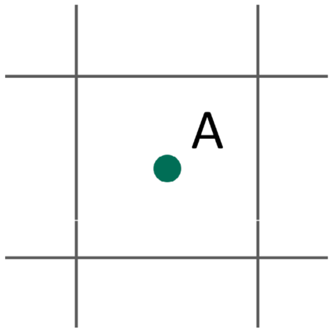
Zapisz przybliżone współrzędne punktów zaznaczonych na oczkach siatki kartograficznej.

Zadanie 4

Zaznacz południki i równoleżniki tak, aby współrzędne punktu A były równe (60^0N, 30^0W).







Zadanie 5

Oblicz rozciągłość południkową i równoleżnikową Polski

Czy wiesz, że…

W Japonii zaprojektowano mapę Ziemi składającą się z 96 trójkątów równobocznych, którą można samodzielnie zwinąć w papierowy glob.

Jak uaktywnić obie półkule mózgu

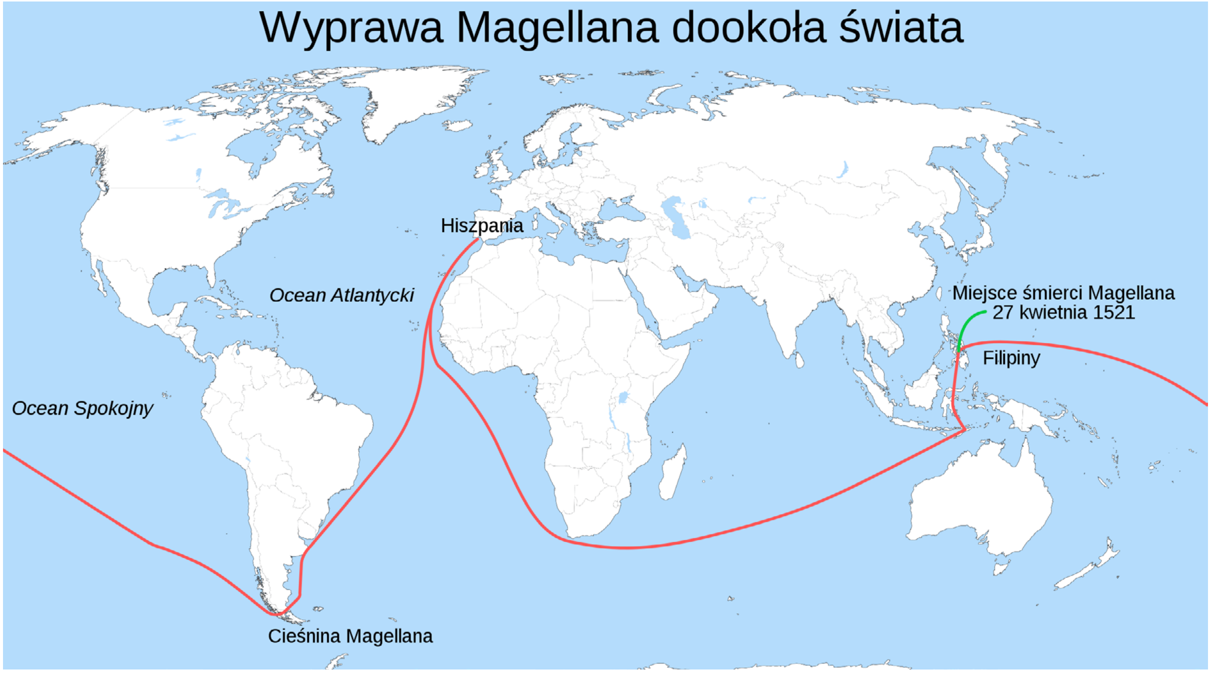
Proponując uczącym się zadania polegające na odczytaniu współrzędnych geograficznych danych punktów, wyobrażamy sobie, że nie sprawi to im większego kłopotu, gdyż z podobnymi ćwiczeniami zetknęli się, kodując położenie punktu w układzie współrzędnych na płaszczyźnie. Jednak może się okazać, że osoby wykorzystujące głównie prawą półkulę mózgową podejdą do problemu tak, jakby nigdy wcześniej nie zetknęły się z czymś podobnym. Natomiast uczniowie wyspecjalizowani w myśleniu lewopółkulowym będą proponować rozwiązania dla nich oczywiste, nie dostrzegając istotnych różnic między siatką kartograficzną a układem współrzędnych, którym posługują się na lekcjach matematyki. Taki sposób patrzenia na zadanie może spowodować „utknięcie” (efekt Einstellung), niedopuszczające innego sposobu myślenia.

Aby zajęcia przyniosły zamierzony efekt, warto zawrzeć w nich elementy przybliżające w sposób obrazowy omawiane zagadnienia. Możemy więc przynieść na lekcję kopie oryginalnych starych i nowych map nawigacyjnych. Przydadzą się także przenośne urządzenie GPS czy komputer, aby pokazać, w jaki sposób współcześnie można szybko wyznaczyć współrzędne geograficzne.

Pomysł na… wyprawę dookoła świata

Dobrym pomysłem będzie zaplanowanie zajęć jako wędrówki przez wieki – ukazanie, jak dawniej określano miejsce punktów na powierzchni Ziemi (np. obserwując położenie gwiazd na niebie).

Metodą stolików zadaniowych uczniowie mogą zapoznać się z definicją łukową i kątową szerokości i długości geograficznej, a także niech spróbują wyznaczać współrzędne geograficzne obiektów zaznaczonych na mapach w różnej skali.



Jedno z ćwiczeń może polegać na wytyczeniu na mapie i globusie trasy wyprawy Magellana dookoła świata na podstawie podanych współrzędnych punktów charakterystycznych.

Uczniowie mogą przy tym posługiwać się metodami stosowanymi w nawigacji, korzystając z cyrkla i trójkątów nawigacyjnych.

Jako podsumowanie zajęć można zaplanować określanie pozycji punktów za pomocą GPS lub komputerów i dyskusję na temat satelitarnych, globalnych metod określania położenia punktu.

Pomysł na... fałszywy dowód

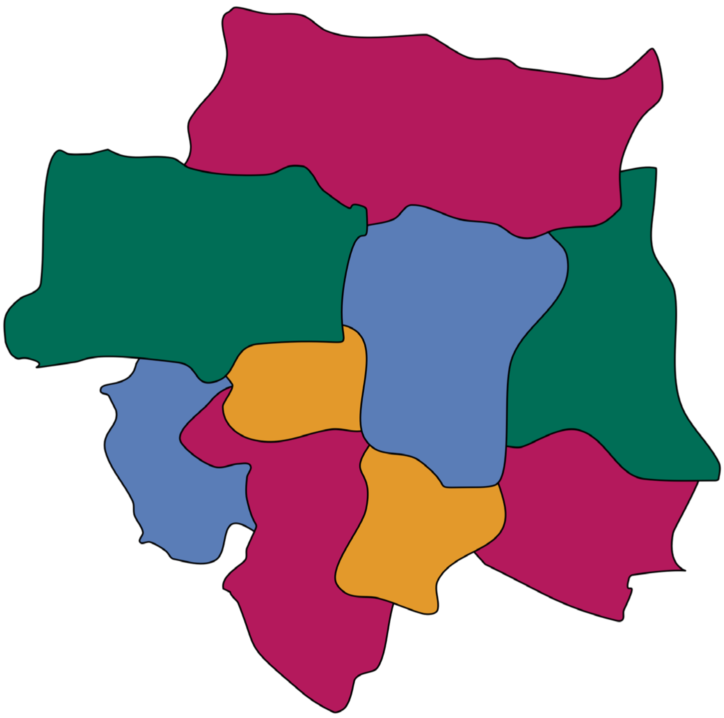
W 1850 roku botanik i matematyk Francis Guthrie, kolorując mapę Anglii, zauważył, że można ją pomalować tylko czterema kolorami, tak by każde dwa sąsiadujące hrabstwa różniły się barwą. Zaczął się więc zastanawiać, czy cztery barwy zawsze wystarczą do pokolorowania nawet bardzo skomplikowanej mapy.

Zanim przypuszczenie Guthriego stało się twierdzeniem (prawdziwość dowodu znalezionego za pomocą komputerów ostatecznie potwierdzono w 2004 roku), zmagało się z tą kwestią wielu znamienitych matematyków.

W 1879 roku Alfred Kempe, londyński prawnik, przedstawił rozumowanie, które miało potwierdzić hipotezę Guthriego. Niestety rozumowanie okazało się nieprawdziwe i dzisiaj uważa się je za jeden z najsłynniejszych fałszywych dowodów matematycznych. A przebiegało tak...

Przytoczona powyżej historia może być wstępem do rozmowy na temat dowodów matematycznych, celowości ich przeprowadzania, rodzajów dowodów itp.

Opowiadanie może dokończyć jeden z uczniów (wcześniej poproszony przez nauczyciela o to, by przygotował informację o historii odkrycia twierdzenia o czterech barwach i kolejnych krokach prowadzących do jego udowodnienia). Historię poszukiwania dowodu twierdzenia o czterech barwach można znaleźć na stronie Deltami.



Geograficzna geometria nieeuklidesowa

Geometria sferyczna

Geograficzna geometria nieeuklidesowa to oczywiście geometria sferyczna. Jej powstanie wiąże się z rozwojem astronomii i nawigacji. Metryką jest tu miara kąta o wierzchołku w środku sfery i ramionach przechodzących przez punkty, dla których liczona jest odległość.

Geometria sferyczna zredukowana jest w edukacji szkolnej do opisu podstawowych własności kuli. Powszechnie przyjmuje się, że Ziemia to w przybliżeniu kula, ale w rzeczywistości jej kształt jest zbliżony do elipsoidy obrotowej. Uczniom wdrożonym do myślenia kategoriami geometrii euklidesowej trudno zauważyć zależności zachodzące między obiektami położonymi nie na płaszczyźnie. Choć wydaje się, że powinno być odwrotnie – przecież chodzimy po powierzchni kuli i codziennie ją obserwujemy!

Myślenie przestrzenne

Badanie własności kuli wymaga dobrze rozwiniętego myślenia przestrzennego. Jest ono bardzo potrzebne przede wszystkim w życiu codziennym, choćby po to, by odnaleźć właściwy peron na dworcu kolejowym. Do treningu myślenia przestrzennego można zastosować zadania abstrakcyjne, czysto teoretyczne, albo te ciekawsze, „wciągające", jak określają je uczniowie, skompilowane z treściami geograficznymi. Dzięki tym ostatnim można zmniejszyć obawy młodych ludzi przed trudnościami w rozpoznawaniu własności brył, a zwłaszcza przed ich wykorzystywaniem. Aby osiągnąć dobry wynik treningu, zadania powinny dotyczyć zarówno przestrzennego wyobrażenia, jak i przyporządkowania.

Dążymy do tego, aby uczeń wytworzył sobie w wyobraźni trójwymiarowy ruchomy obraz danej bryły. Wtedy łatwiej mu będzie w wyobraźni ustawiać ją odpowiednio, by zauważyć pożądane własności. Wyeliminuje to próby zgadywania rozwiązań.

Na początek można zaproponować uczniom rozwiązanie typowego zadania utrwalającego umiejętności dotyczące notacji wykładniczej (można usunąć zapis o notacji wykładniczej i wtedy będzie to zadanie „na liczby wielocyfrowe").

Bank zadań

Zadanie 1

Uzupełnij tabelkę wymiarów Ziemi, liczby zapisz w notacji wykładniczej.

Średni promień Ziemi	km
Długość równika	km
Masa Ziemi	t
Powierzchnia lądów	km^2

Ale można też rozpocząć od powszechnie znanego zabawnego zadania:

Zadanie 2

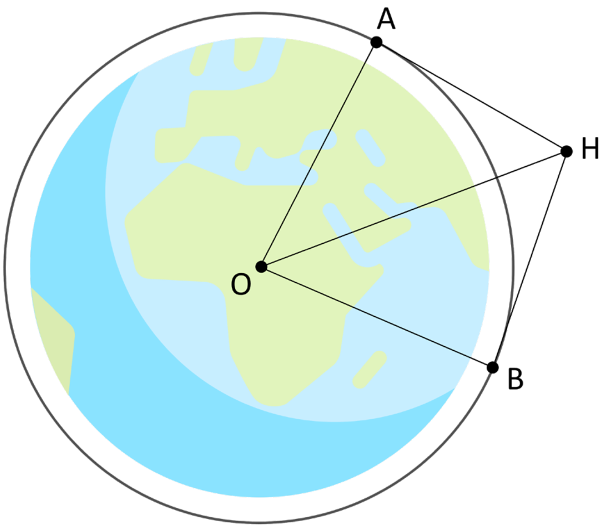
Wyszedłem z namiotu, poszedłem 1 km na południe, potem 1 kilometr na zachód. Idąc teraz stale na północ, wróciłem do punktu wyjścia i ku swojemu przerażeniu zauważyłem, że niedźwiedź wyjadł mi wszystkie zapasy żywności. Jakiego koloru był ten niedźwiedź?



Pomysł na… pracę w parach

Kiedy już uczniowie otrząsną się z szoku spowodowanego niespodziewanym rozwiązaniem, możemy rozdać im karty pracy z zapisanymi następnymi zadaniami. Odpowiedzi do nich przymocujmy na tablicy. Każda para uczniów po zakończonych obliczeniach może podejść do tablicy, sprawdzić ich poprawność i wystawić sobie punkty (w skali 1–5) za rozwiązanie. Zamieszczony poniżej zestaw przeznaczony jest dla uczniów dobrze radzących sobie z nietypowymi problemami matematycznymi, ale oczywiście można go odpowiednio przetworzyć i wykorzystać w pracy z przeciętną klasą. (oprac. na podst. Szurek M., Zadania z Ziemią w treści).

Kula ziemska widziana przymrużonym okiem	
Treść zadania	Liczba punktów
Zadanie 1 Wyobraź sobie, że Ziemia jest wzdłuż równika opasana szczelnie sznurkiem. Zwiększamy długość sznurka o 10 metrów. W jakiej odległości od powierzchni Ziemi będzie znajdował się teraz sznurek? 	
Dla chętnych – rozważ analogiczną sytuację dla Marsa i Saturna – co zauważasz?	

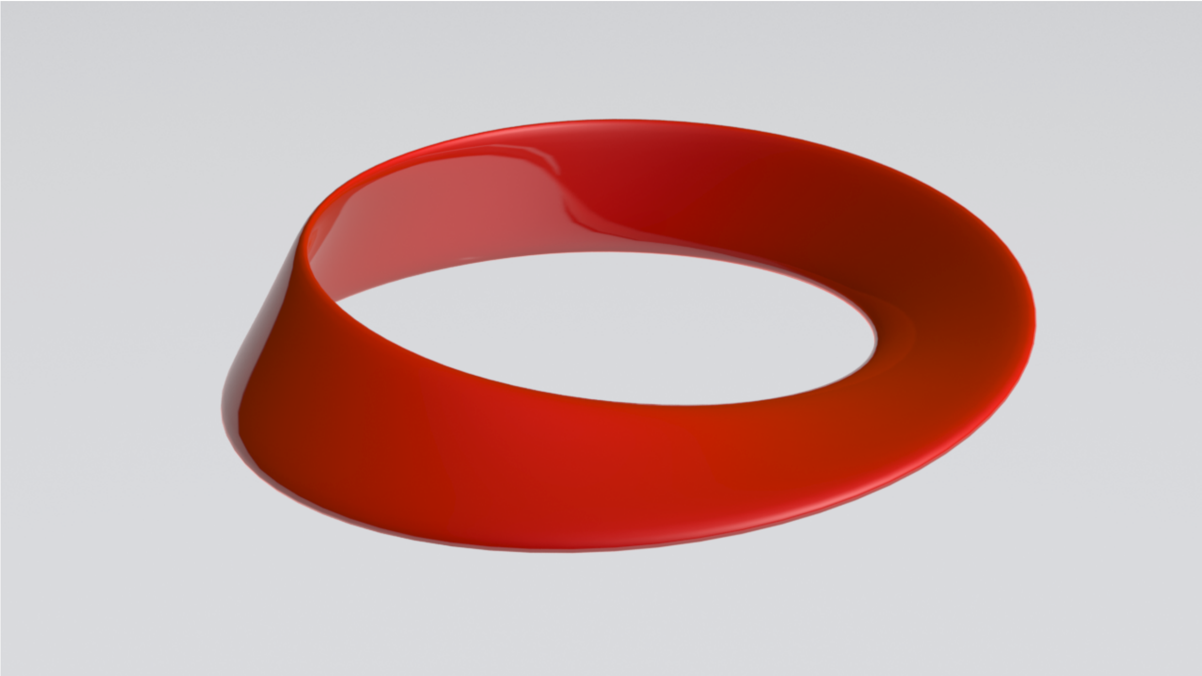
Zadanie 2 Kula ziemska opasana jest drutem miedzianym wzdłuż równika. Nastąpiło gwałtowne ochłodzenie i temperatura powietrza wszędzie spadła o 10°C. Drut się kurczy i wpija w powierzchnię planety. Na jaką głębokość? Przyjmij, że przy ochłodzeniu o 10°C drut kurczy się o 10 cm na kilometrze.	
Zadanie 3 Wyobraź sobie, że po opasaniu Ziemi sznurkiem dowiązaliśmy do niego jeszcze dwa metry i naciągnęliśmy go tak, by utworzył się daszek ABH (patrz rysunek). Jaka będzie wysokość daszka? Czy przejdzie pod nim mysz? 	
Zadanie 4 Oblicz, jaką powierzchnię miałaby kula ziemska, gdyby rzeczywiście była kulą o promieniu 6371 km. Porównaj otrzymany wynik z rzeczywistą powierzchnią Ziemi, równą 510,066 mln km^2.	
Zadanie 5 Oblicz, ile kilometrów dzieli cię w tej chwili od równika.	

Nietypowa mapa Ziemi

Odwzorowanie kartograficzne polega na przeniesieniu położenia punktów z powierzchni odniesienia (powierzchni Ziemi) na płaszczyznę mapy z zastosowaniem określonych reguł matematycznych. Istnieje wielka różnorodność odwzorowań kartograficznych, które mają zarówno pozytywne, jak i negatywne cechy, wynikające głównie z występowania zniekształceń kartograficznych. W żadnym ze znanych odwzorowań nie uzyskano wiernego przedstawienia odległości na całej mapie. (na podst. Odwzorowania).

Dla matematyka najciekawsza będzie tak zwana mapa Toblera, wykreślona na wstędze Möbiusa. Na takiej mapie antypodyczne punkty znajdują się na odwrotnej stronie wstęgi.

Dla uczniów świetnym ćwiczeniem topologiczno-geograficznym może być samodzielne wykonanie mapy Toblera.



Wstęga Möbiusa

Przyjemna geografia

Uczenie się dla przyjemności

Już uczniowie klas IV i VI na lekcjach przyrody spotykają się z problemami geograficznymi. Są one przyjemne, ciekawe, najczęściej badane doświadczalnie. Proponowane na lekcjach matematyki mają za zadanie nie tylko kształtować umiejętności arytmetyczne (na przykład dotyczące liczb całkowitych ujemnych czy odczytywania danych z wykresów), ale przede wszystkim rozwijać kreatywne myślenie. Kreatywność to zdolność do tworzenia nowych pomysłów, myśli i idei. Wśród uczniów można zaobserwować kreatywność twórczą i praktyczną. Aby pogodzić te dwie opcje, ważnym punktem w przygotowywanych ćwiczeniach powinna być część skłaniająca uczniów do wizualizacji i asocjacji. Bardzo istotne jest stosowanie takich bodźców, które wpłyną na pozytywne myślenie młodych ludzi, przekonają ich, że uda im się znakomicie rozwiązać problem i odnieść z tego wymierne korzyści (choćby takie jak satysfakcja z wykonanego zadania). Kreatywnemu myśleniu sprzyjają odpowiednio zaaranżowane otoczenie oraz postawienie na początku zajęć interesujących pytań kluczowych.

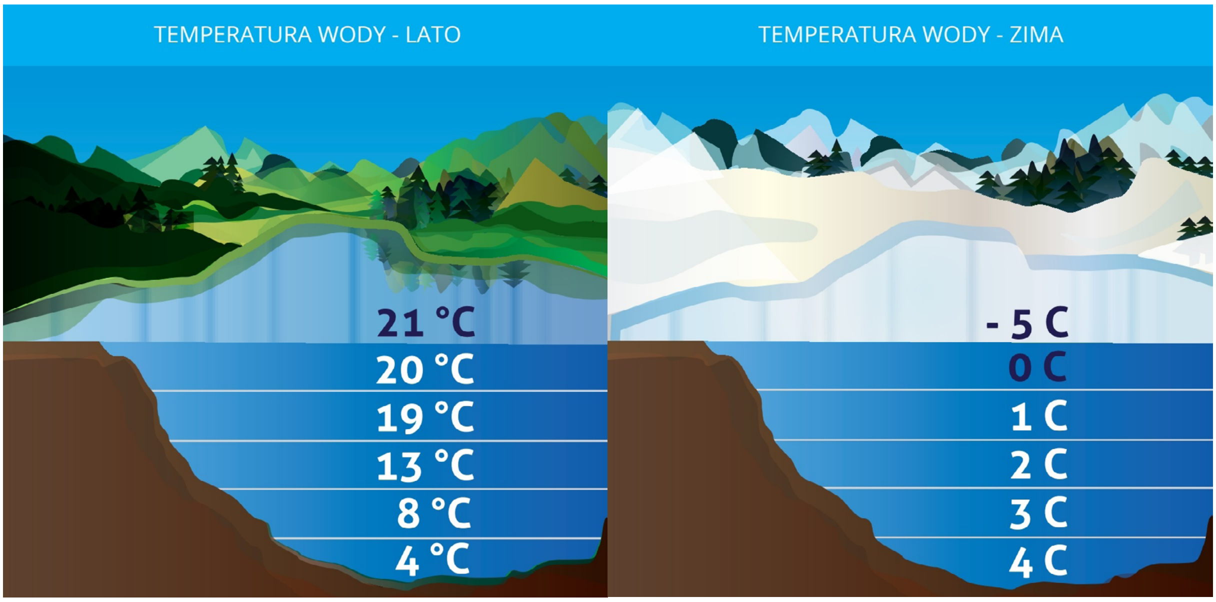
Rozwiązywanie nawet prostych matematycznie zadań, których treść nawiązuje do zjawisk czy obiektów geograficznych, wymaga omówienia i ustalenia prawdziwości hipotez postawionych przez młodzież. Dobrą metodą pracy jest tu skrzynka morfologiczna. Po podziale zagadnienia na małe części, które są pojedynczo rozpatrywane, łączymy je w rozwiązanie całego problemu.

Bank przyjemnych zadań

Blok 1 – liczby całkowite ujemne

Zadanie 1

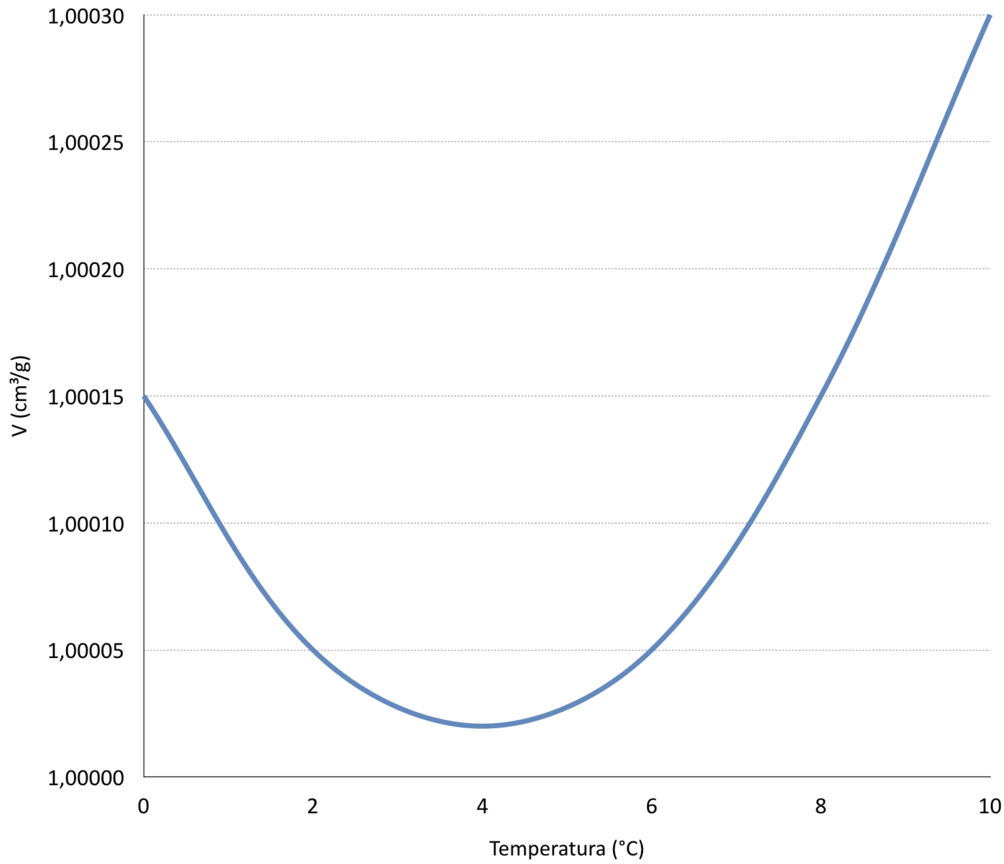
Rysunek przedstawia rozkład temperatury wody w pewnym jeziorze zanotowany 15 stycznia 2017 roku i 15 lipca 2017 roku



Przeanalizuj temperatury w poszczególnych warstwach wody. Określ w każdym przypadku temperaturę najwyższą i najniższą. Co zauważasz?

Zadanie 2

Wykres przedstawia zależność zmiany objętości wody od temperatury.



a) z wykresu objętość wody w temperaturze 2^{0}C oraz w temperaturze 8^{0}C. W którym przypadku objętość jest większa?
b) W jakiej temperaturze objętość wody jest najniższa? Co zauważasz?
c) Omów efekt anomalnej rozszerzalności cieplnej wody.
d) Omów rozkład temperatur w zbiorniku wodnym w zimie.

Zadanie 3

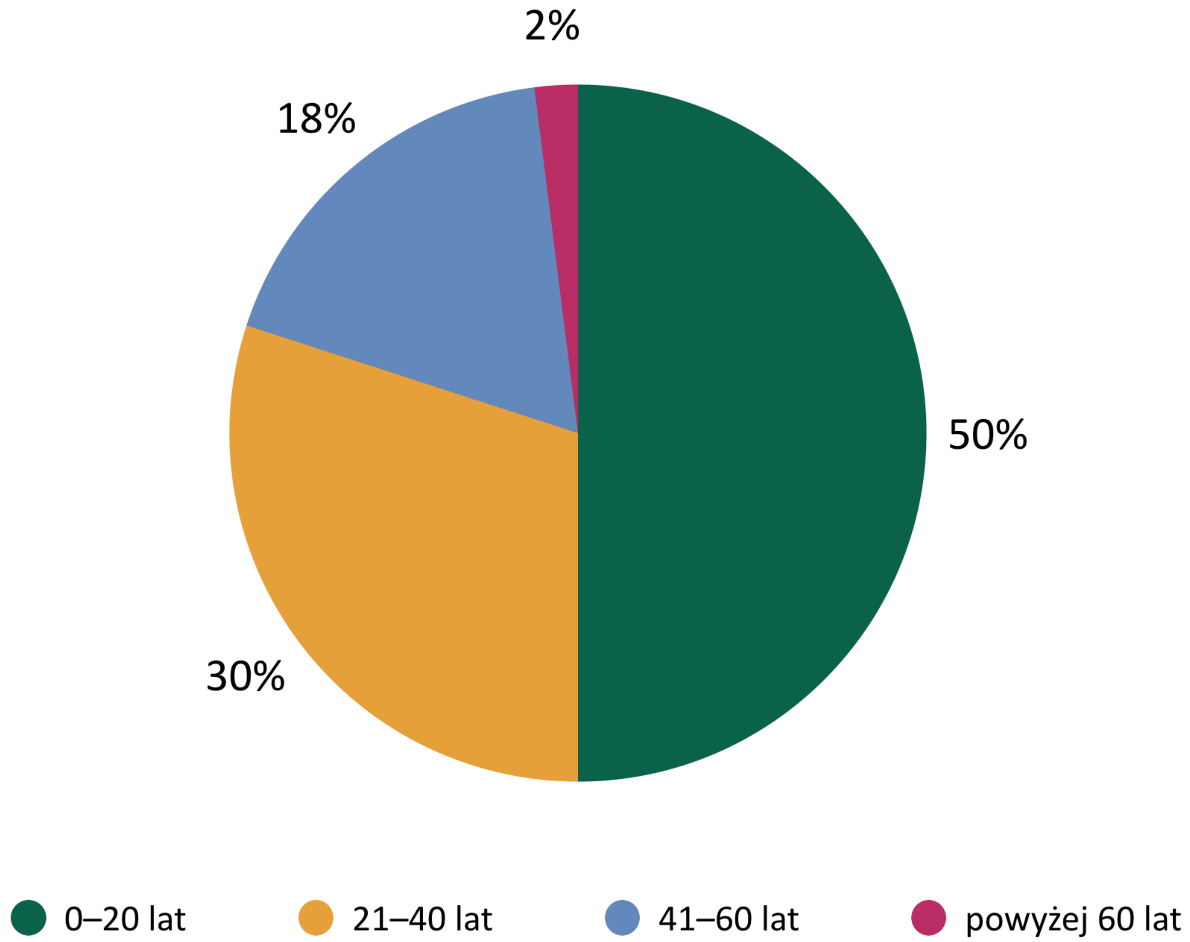
Rysunek przedstawia zmiany temperatury powietrza w Helsinkach w dniu 19 listopada 2017 roku.

- O której godzinie było w Helsinkach najcieplej? O której najzimniej?
- O której godzinie temperatura wynosiła 3^{0}C?
- O ile stopni wzrosła temperatura od godz. 8.00 do godz. 17.00?
- Notuj zmiany temperatury powietrza o godz. 16.00 w twojej miejscowości. Na podstawie zanotowanych danych sporządź odpowiedni wykres i opisz, jak zmieniała się temperatura. Oblicz średnią temperatur.

Blok 2 – procenty

Zadanie 4

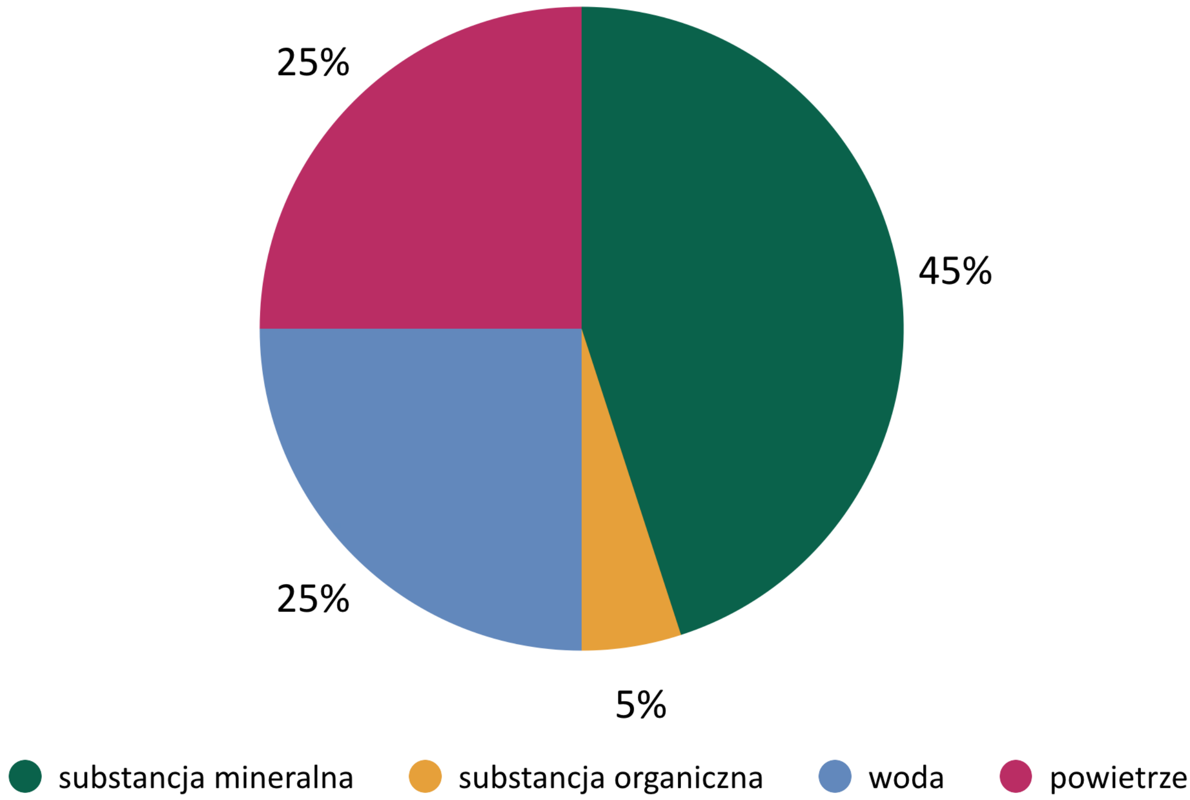
Diagram przedstawia procentową strukturę wieku mieszkańców miejscowości Stary Las.



- Ile co najmniej mieszkańców mieszka w tej miejscowości?
- Czy w tej miejscowości może mieszkać 531 osób?
- Wiedząc, że w Starym Lesie mieszka 1500 osób, sporządź diagram słupkowy opisujący strukturę wieku mieszkańców.
- W jakim wieku jest najwięcej osób mieszkających w Starym Lesie? A w jakim – najmniej? Co o tym sądzisz?

Zadanie 5

Diagram przedstawia udział poszczególnych składników w glebie.



Ułóż dwa zadania tekstowe, korzystając z danych przedstawionych na diagramie, i daj je do rozwiązania koledze/koleżance z ławki.

Interpretować graficznie

Aby poznać obiekty geograficzne, nie wystarczy zaznajomić się z ich nazwami i lokalizacją. Trzeba je sobie wyobrazić na podstawie znanych cech lub spróbować je zobaczyć, korzystając z kina, telewizji czy internetu. Nie ma więc sensu uczyć się na pamięć opisu danego zjawiska, gdy można zobaczyć, jak ono wygląda. Nie wszystkie jednak cechy są rozpoznawalne za pomocą zmysłów – poznanie niektórych wymaga stosowania odpowiednich przyrządów.

Do naukowego opisu służą narzędzia matematyki, co porządkuje nomenklaturę i pozwala na porównywanie klasyfikacyjne. Okazuje się, że dla matematyka równie korzystne jest opisywanie obiektów w sposób właściwy dla geografa. Na przykład uczniom, szczególnie klas młodszych, trudno sobie wyobrazić, dlaczego uważamy, że powierzchnia Polski licząca 312 979 km^2 jest mniejsza od powierzchni Europy liczącej 10 mln 180 tys. km^2. Przecież 312 to liczba większa od 10! Matematycznie problem ten można sformułować następująco: która z liczb – 312 979 czy 10 mln 180 tys. – jest większa i dlaczego. W wyobrażeniu sobie rozważanych wielkości może pomóc ich graficzna interpretacja na mapie. Widać z niej wyraźnie, że „Polska jest mniejsza od Europy".

Pomysł na…. pracę projektową „Rekordy Ziemi"

Jeśli chcemy połączyć wyobrażenia o wielkościach z wyobrażeniami o zjawiskach, możemy zaproponować uczniom udział w pracy projektowej „Rekordy Ziemi". Rekordy mają dotyczyć obszarów będących w gestii edukacji geograficznej, czyli na przykład najwyższych/najniższych szczytów górskich, najwyższej/najniższej temperatury powietrza, największej/najmniejszej pustyni itp. Mogą to być rekordy danego miasta, państwa, kontynentu itp. Uczniowie sami ustalają obszar terytorialny i zakres tematyczny. Praca będzie odbywać się w grupach.

Finałem pracy każdej z grup ma być krótka inscenizacja przedstawiająca rekordy, którymi dana grupa się zajmowała. Musi być jednak tak przygotowana, aby wymuszała uczestnictwo przynajmniej dwóch–trzech obserwatorów, których zadaniem będzie rozwiązanie, pod kierunkiem „aktorów", problemu/zagadki/szarady matematycznej, a to da informację o konkretnym rekordzie.

Wszystko płynie, czyli zadania czasowe

Panta rhei

Panta rhei – trudno nie zgodzić się z powiedzeniem Heraklita, gdy patrzy się na zegarek ze wskazówkami. Niestety, młodzi ludzie już nie noszą takich zegarków. – I jak tu rozmawiać o zmianach czasu, jeśli tego nie widać – powiedział niedawno jeden z moich uczniów. Zagadnienia związane z pomiarem czasu są więc dla młodzieży trudne, choć nadają się do kształtowania wielu umiejętności matematycznych – od najprostszych, polegających na odczytywaniu informacji lub wykonywaniu łatwych obliczeń, do tych najtrudniejszych, wymagających analizowania, przetwarzania danych i wyciągania wniosków z kilku informacji. Dobrze zaplanowane zajęcia pozwolą na rozwijanie różnorodnych zdolności poznawczych, na przykład tworzenia logicznych wypowiedzi, dostrzegania wzajemnych powiązań, syntetyzowania. Zadania wymagające znajomości terminów geograficznych dobrze jest różnicować, zaopatrywać we wskazówki lub całe rozwiązania, które uczeń może prześledzić po próbach dojścia do konsensusu.

Nawet przy wykonywaniu rutynowych zadań uczeń może trenować myślenie matematyczne, a dzięki umiejętnym wskazówkom nauczyciela – wykorzystywać maksymalnie swój potencjał.

W czasie zdawania egzaminów zewnętrznych wielką rolę odgrywa szybkość działania. Jest to szczególnie przydatne przy rozwiązywaniu zadań obliczeniowych, gdzie rachunki pamięciowe poprawiają efektywność. Ludzki mózg wykorzystuje wszystkie swoje obszary, gdy drąży dany problem. Nie ma więc sensu szufladkowanie zadań na typy czy rodzaje. Największą rolę odgrywa kreatywność, konsekwencja, ale też pamięć pomocna w odtwarzaniu potrzebnych schematów czy podobnych zadań i ich rozwiązań.

Aby zwiększyć zdolności i sprawności mózgu w danych obszarach, należy jednak wykonywać konkretne ćwiczenia. Do znalezienia skutecznej i najprostszej drogi rozwiązania problemu potrzebne jest myślenie logiczne i holistyczne. Nie można go stymulować tylko przez zadania teoretyczne, ale też praktyczne. W matematyce elementarnej za najistotniejsze dla dalszego rozwoju uważa się zadania, przy których z faktów trzeba wyciągnąć logiczne wnioski. Wszystkie te warunki spełniają zadania, w których trzeba dokonać obliczeń kalendarzowych związanych z określaniem czasu. Nie są one łatwe, wymagają bowiem dobrej znajomości faktów geograficznych, konstruowania analogii i posługiwania się nimi, stosowania języka symbolicznego oraz rozpoznawania struktur logicznych.
Interioryzacja czynności konkretnych umożliwia przejście do czynności wyobrażeniowych, które z kolei są podstawą czynności abstrakcyjnych w procesie kształtowania się pojęć. Matematyka jest nauką dedukcyjną, z przyjętych przesłanek i wcześniej wyprowadzonych definicji oraz twierdzeń wyciąga wnioski. Ale te twierdzenia trzeba znać i wiedzieć, w jakim kontekście je stosować. Niektóre z klasycznych zadań „czasowych" wydają się uczniom wydumane i mało przydatne (na przykład ustalanie momentu górowania Słońca w danym punkcie), niemniej jednak można je traktować jako ustanawiające pewne algorytmy obliczania wartości wyrażeń algebraicznych.

Kontekst geograficzny zadań

Obliczenia związane z konsekwencjami ruchu obrotowego i obiegowego Ziemi są podstawową umiejętnością geografa. Matematyk może czerpać z puli tematów dotyczących wyznaczania między innymi:

- czasu słonecznego (miejscowego) i strefowego określonego miejsca na Ziemi na podstawie podanych długości geograficznych,
- daty dla określonego miejsca na Ziemi w przypadku przekraczania linii zmiany daty,
- długości geograficznej miejsca na podstawie podanego czasu słonecznego na wybranych południkach geograficznych,
- wysokości Słońca w momencie górowania (inaczej: kąta padania promieni słonecznych) w dniach 21 III, 23 IX, 22 VI, 22 XII,
- odległości miedzy dwoma punktami leżącymi na tym samym południku geograficznym.

Bank zadań

Zadanie 1

W najkrótszym dniu 2017 roku, czyli 21 grudnia, Słońce wzeszło o godzinie 7.42, a zaszło o godzinie 15.24.

a) Ile godzin i minut upłynęło 21 grudnia 2017 roku od wschodu do zachodu Słońca?
b) O ile godzin i minut dzień był wtedy krótszy od najdłuższego dnia w 2017 roku?

Zadanie 2

Oblicz, która godzina czasu słonecznego jest w Petersburgu, gdy Słońce góruje w Londynie? Która godzina czasu słonecznego jest wtedy w Warszawie?

Zadanie 3

Oblicz, która godzina czasu słonecznego jest w Krakowie, gdy w Paryżu wieża Eiffla rzuca najkrótszy cień w roku.

Zadanie 4

Oblicz, która godzina czasu słonecznego była w Nowym Jorku, gdy w Łodzi 20 listopada 2017 roku była godzina 8.00 czasu urzędowego.

Zadanie 5

Pani Ewelina 13 marca o godzinie 16.30 wsiadła do samolotu w Warszawie i poleciała do Moskwy. Lot trwał 2 h 15 min. Na lotnisku w Moskwie czekała 3 h 45 min na przesiadkę na samolot lecący do Nowego Jorku. Lot trwał 9 h 50 min. O której godzinie i którego dnia pani Ewelina przyleciała do Nowego Jorku?

Zadanie 6

a) Oblicz, na jakiej długości geograficznej leży miejscowość, w której Słońce góruje o 2 h 20 min później niż w Krakowie.
b) Oblicz szerokość geograficzną miejsca, w którym Słońce góruje w dniu 22 grudnia na wysokości 30º.
c) Oblicz szerokość geograficzną miejscowości położonej na równoleżniku, na którym w dniu przesilenia letniego Słońce góruje po południowej stronie nieba na wysokości 50^0.

Zadanie 7

Oblicz wysokość górowania Słońca na równiku w dniu 22 czerwca.

Zadanie 8

Oblicz (w km) odległość między punktami P (10ºE, 30ºS) i M (10ºE, 60ºN) położonymi na kuli ziemskiej.

Zadanie 9

Określ, pod jakim kątem obserwują Gwiazdę Północną mieszkańcy Londynu.

Zdanie 10

1. Różnica czasu słonecznego między miejscowościami A i B wynosi 4 h 4 min. Oblicz różnicę długości geograficznej między tymi miejscowościami.

2. Różnica długości geograficznej między miejscowościami A i B wynosi 120°. Oblicz różnicę czasu słonecznego między tymi miejscowościami

Pomysł na… współczesną wyprawę dookoła świata

Tym razem pomysł na zaplanowanie współczesnej wyprawy dookoła świata. I to wcale nie wirtualnej!

- Do współpracy trzeba pozyskać kilka klas – a najlepiej wszystkie klasy w danej szkole.
- Należy wybrać reżysera przedsięwzięcia, który dobierze sobie współpracowników.
- Przedsięwzięcie będzie polegało na zaplanowaniu i symulacji wyprawy dookoła świata.
- Po ustaleniu trasy podróży i czasu – najlepiej, żeby był to jeden dzień, tak aby podróżnik przekraczał linie zmiany daty oraz strefy czasowe – trzeba dokładnie rozplanować, gdzie turysta będzie się zatrzymywał.
- Przystanki będą w salach szkolnych, mogą być też na korytarzu, w świetlicy, bibliotece. W miejscach tych należy przygotować odpowiednią scenerię – na przykład jeśli ma to być Paryż, to warto „wybudować” wieżę Eiffla. Trzeba też uwzględnić, czy podróżnik w danym miejscu wyląduje w nocy, czy w dzień, itp.
- Każdy przystanek powinien mieć gospodarza, który oprowadzi podróżnika po miejscach wartych obejrzenia.
- Do tak przygotowanej scenerii zapraszamy uczniów – podróżników. Ich przewodnikiem będzie reżyser wraz z asystentami.

Na lewo most, na prawo most

Zagadnienie mostów królewieckich

Matematykowi słowa popularnej niegdyś piosenki: „na lewo most, na prawo most” kojarzą się oczywiście z problemem, nad którym podobno łamali sobie głowy mieszkańcy Królewca: „czy można przejść kolejno przez wszystkie mosty znajdujące się na Pregole tak, żeby każdy przekroczyć tylko raz”. Problem ten rozwiązał jeden z najsłynniejszych matematyków świata Leonard Euler. Praca Eulera, opublikowana w 1741 roku i zawierająca opis rozwiązania zagadnienia, dała podwaliny pod teorię grafów, która odgrywa dzisiaj niebagatelną rolę w zagadnieniach geograficznych.

Najważniejsze osiągnięcia teorii grafów były rezultatem prób rozwiązania zadań praktycznych, na przykład wyznaczania najmniejszej odległości spośród wszystkich połączeń. Dzisiaj grafy stosuje się do przedstawiania prawie każdej sytuacji, w której występują obiekty dyskretne i relacje między nimi zachodzące. Powszechnie wykorzystywane są w urządzeniach typu GPS do znajdowania drogi z jednego punktu do drugiego, z uwzględnieniem ograniczeń po drodze (na przykład wynikających z przepisów ruchu drogowego, jak ruch jednostronny), z możliwością obliczenia całkowitej długości trasy oraz czasu przejazdu. Grafy można zaimplementować w postaci tablicy określającej rodzaj połączenia oraz jego etykietę lub dynamicznie skorzystać ze wskaźników[2].

Zagadnienie mostów królewieckich
Przez Królewiec przepływała rzeka Pregoła, na której znajdowały się dwie wyspy. Przez rzekę przerzucone były mosty, z których jeden łączył obie wyspy, a pozostałe mosty łączyły wyspy z brzegiem rzeki.
Powstał problem: czy można przejść kolejno przez wszystkie mosty tak, żeby każdy przekroczyć tylko raz.
Euler wykazał, że jest to niemożliwe, a decyduje o tym nieparzysta liczba wylotów mostów zarówno na każdą z wysp, jak i na oba brzegi rzeki.

Myślenie werbalne

W korelacji matematyczno-geograficznej grafy najczęściej wykorzystuje się do znalezienia najkrótszej drogi między dwoma punktami znajdującymi się na powierzchni Ziemi (przy czym wykorzystana metryka może być metryką miejską!), a co za tym idzie – do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zadania takie prowadzą najpierw do wytworzenia modelu matematycznego opisanej sytuacji, a następnie do ustalenia strategii rozwiązania. W zadaniach tekstowych najważniejsze jest ich uważne przeczytanie. Trzeba koniecznie zwracać uwagę na to, aby uczący się niczego sobie nie dopowiadali, lecz korzystali tylko z tego, co jest podane, i na tej podstawie wyciągali wnioski.

Zachęcajmy, aby problemy rozpatrywali z wielu stron i nie pozostawali przy jednym schemacie, nawet jeśli jest on wyjątkowo skuteczny. Prowokujmy dyskusję, która rozwinie myślenie werbalne, pomagające w przekładaniu zagadnień matematycznych na bliższe uczniom zagadnienia praktyczne.

I odwrotnie, gdy zauważamy, że uczenie koncentruje się na języku i konceptualizacji werbalnej, warto wizualizować problemy i odejść od ich formalnego opisu, co jest szczególnie ważne dla dyslektyków czy innych osób mających trudności w uczeniu się matematyki.

Myśleniu werbalnemu mogą towarzyszyć samodzielnie przez uczniów wykonane przyrządy pomiarowe – na przykład do pomiaru wysokości gwiazd czy wysokości Słońca (laska Jakuba, gnomon).

2 Na podstawie: http://docplayer.pl/15564156-Zastosowanie-teorii-grafow-w-geograficznych-systemach-informacyjnych.html.

Pomysł na… wykorzystanie teorii grafów w praktyce

- Dzielimy uczniów na sześć grup.
- Prosimy, aby każda z grup 1, 2, 3 wytypowała jedno miasto leżące nad rzeką, przez którą prowadzą co najmniej trzy mosty. Zadaniem uczniów jest rozwiązanie dla wybranego miasta (na przykład Krakowa, Wrocławia) problemu analogicznego do zagadnienia mostów królewieckich.
- Grupy 3, 4, 5 będą pracowały nad zadaniem zwanym problemem komiwojażera. Najpierw każda z grup sporządza tabelkę odległości drogowych między wybranymi czterema polskimi miastami (uczniowie mogą korzystać przy tym z różnych źródeł informacji). Ich zadaniem jest znaleźć najkrótszą trasę zaczynającą się w pierwszym z wybranych miast, prowadzącą przez wszystkie pozostałe miejscowości i powracającą do pierwszego miasta.
- Można zasugerować uczniom, że zadania, nad którymi pracują, są dobrze opracowane teoretycznie, zatem aby ułatwić sobie ustalenie odpowiedzi, można sięgnąć do dostępnych źródeł informacji (na przykład encyklopedii tradycyjnej czy multimedialnej).

Podsumowaniem zajęć powinna być graficzna prezentacja omawianych zagadnień, podbudowana częścią teoretyczną, która pozwoli młodzieży wykazać nabyte umiejętności geograficzne i matematyczne.

Zdumiewające zasady logarytmów[3]

Myślenie liczbowe

Myślenie liczbowe rozwijane jest na każdym etapie kształcenia. Okazuje się ono niezbędne do rozwiązywania mniej lub bardziej skomplikowanych problemów matematycznych, zarówno tych szkolnych, jak i tych z otaczającej nas rzeczywistości. Wiele osób uważa myślenie liczbowe za jeden z najistotniejszych czynników warunkujących powodzenie w przedmiotach szkolnych, szczególnie matematyczno-przyrodniczych. Kształtowanie umiejętności związanych z myśleniem liczbowym nie musi opierać się tylko na ćwiczeniach wykonywania operacji pamięciowych, lecz może być prowadzone w kontekście myślenia logiczno-liczbowego, pozwalającego na wykorzystanie kartki papieru, kalkulatora czy komputera. Dobrym pomysłem jest, aby skomplikowane działania wykonywać „cząstkami”, czyli porządkować je i dopiero scalać. Z kolei całościowe patrzenie na zadanie lub wykonanie odpowiedniego rysunku pomaga w znalezieniu logicznego „skrótu”, który oszczędza pracochłonnego liczenia.

Trudne zadanie liczbowo-tekstowe z elementami realistycznymi warto obudować ciekawą historyjką lub anegdotką. Zadania tego typu poddają treningowi sektor odpowiedzialny w mózgu za mowę, przekładają bowiem język matematyczny na potoczny i odwrotnie. Gdy

3 Napis inspirowany tytułem epokowego dzieła Napiera „Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio” [łac. opis zdumiewającej zasady logarytmów].

tworzy się „bank" takich zadań, warto sięgnąć po zadania matematyczno-geograficzne, o dużej różnorodności i stopniowanej trudności. Do tych trudniejszych można zaliczyć problemy, których rozwiązanie wymaga użycia logarytmów.

W podręcznikach szkolnych znajdziemy niewiele przykładów zastosowania logarytmów w obliczeniach geograficznych. Może dlatego nawet z pozoru prosty problem związany z logarytmami nie jest łatwy do zinterpretowania przez przeciętnego ucznia. Poniżej pomysł na zajęcia, które mogą być jednym z elementów sesji poświęconej zastosowaniom logarytmów w różnych dziedzinach wiedzy, a zarazem utrwalą umiejętności związane z wykorzystaniem definicji i twierdzeń związanych z logarytmami.

Pomysł na... zajęcia prowadzone metodą odwróconej lekcji

Krótki opis

- Porozmawiaj z uczniami o historii logarytmów, zwracając uwagę na niejako „wymuszony" proces ich powstania. (W związku z rozwojem astronomii, handlu i nawigacji zaczęto wykonywać działania na coraz większych liczbach. Mnożenie liczb wielocyfrowych wymagało żmudnych obliczeń, a wynik często obarczony był błędem. Dopiero odkrycie w XVI wieku logarytmów częściowo rozwiązało problem. Szkocki dyplomata John Napier zbudował tablice umożliwiające mnożenie liczb za pomocą dodawania innych liczb. Dzisiaj, dzięki rozwojowi elektronicznej techniki obliczeniowej, znaczenie logarytmów bardzo się zmniejszyło).

- Podziel uczniów na dwie grupy.

- Poproś, aby grupa pierwsza poszukała w domu odpowiedzi na pytanie: Co mają wspólnego logarytmy z trzęsieniami ziemi? Wręcz uczniom kopertę zawierającą zadania, których rozwiązanie powinno być punktem wyjścia do prezentacji dającej odpowiedź na postawione pytanie.

Zadania dla grupy 1

Zadanie 1[4]

5 maja 2014 roku w Tajlandii miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 6,2 w skali Richtera.

- Oblicz amplitudę trzęsienia ziemi w Tajlandii i rozstrzygnij, czy jest ona większa, czy mniejsza od 100 cm. Przyjmij $A_o = 10^{-4}$ cm.

- Dowiedz się, co to jest magnituda, i oblicz, jaka była magnituda trzęsienia ziemi w Tajlandii.

4 Na podstawie: Matura 2016, poziom podstawowy.

Zadanie 2

- Oblicz, o ile wzrośnie siła trzęsienia ziemi, jeżeli amplituda wzrośnie stukrotnie.
- Oblicz, o ile wzrośnie amplituda, jeżeli wartość skali Richtera wzrośnie o trzy jednostki.

Poproś, aby grupa druga poszukała w domu odpowiedzi na pytanie: Co mają wspólnego logarytmy z ciśnieniem atmosferycznym? Wręcz uczniom kopertę zawierającą zadania, których rozwiązanie powinno być punktem wyjścia do prezentacji dającej odpowiedź na postawione pytanie.

Zadania dla grupy 2

Zadanie 1

Oblicz przybliżoną wysokość szczytu górskiego, wiedząc, że u jego podnóża ciśnienie atmosferyczne wynosi 760 mm Hg, a na jego wierzchołku 740 mm Hg.

Zadanie 2

Oblicz przybliżoną wartość ciśnienia atmosferycznego panującego u podnóża szczytu górskiego, jeżeli wysokość góry wynosi 575 m, a ciśnienie atmosferyczne na jej wierzchołku 700 mm Hg.

Zadbaj o to, aby zajęcia podsumowujące samodzielną pracę uczniów okazały się atrakcyjne – mile widziane będą efekty dźwiękowe, ciekawostki dotyczące problematyki, którą zgłębiali uczniowie, fragmenty filmów itp.

Przygotuj pakiet zadań do rozwiązania w klasie. Zadaj pytania pogłębiające rozważaną problematykę: Czy trzęsienia ziemi zdarzają się na innych planetach? Czy ciśnienie atmosferyczne na innych planetach jest takie samo jak na Ziemi?

Materiał teoretyczny

Skalą logarytmiczną określającą wielkość trzęsienia ziemi na podstawie amplitudy drgań wstrząsów sejsmicznych jest skala Richtera:

$$R = \log \frac{A}{A_0}$$

A – amplituda fali uderzeniowej wstrząsów (w cm)

A_0 – stała zwana amplitudą wzorcową (cm).

Obecnie skalę Richtera zaczęła zastępować magnituda – liczbowa miara wielkości trzęsień ziemi oparta na wielkości momentu sejsmicznego.

Wysokość h szczytu górskiego (w m) można obliczyć ze wzoru:

$h = 18400(\log c_1 - \log c_2)$,

gdzie c_1, c_2 – ciśnienie atmosferyczne (w mm Hg) odpowiednio u podnóża i na wierzchołku.

Ciekawostka: już w XV wieku zaczęto porównywać kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego i geometrycznego. Zauważono, że iloczyn dwóch wyrazów ciągu geometrycznego odpowiada sumie odpowiednich wyrazów ciągu arytmetycznego, co w konsekwencji doprowadziło do odkrycia logarytmów.

Tabelka przedstawiająca wartości ciśnienia atmosferycznego na innych planetach[5]:

Ciało niebieskie	Ciśnienie atmosferyczne (hPa)
Wenus	93000
Ziemia	1013,25
Mars	7 – 9
Jowisz	70
Saturn	140
Tytan	1467
Uran	120 (poziom chmur)
Neptun	~ 10^{10} (powierzchnia)

Obiekty o niezwykłych wymiarach

„Geometria fraktalna sprawi, że inaczej spojrzysz na świat. Ostrzegam – zgłębianie tej wiedzy wiąże się z niebezpieczeństwem. Ryzykujesz utratę części wyobrażeń z dzieciństwa – szczególnie tych dotyczących chmur, lasów, kwiatów, galaktyk, liści, piór, skał, gór, potoków i wielu innych. Twoja interpretacja przyrody zmieni się całkowicie i na zawsze"[6].

Michael F. Barnsley, brytyjski matematyk

Struktury o budowie fraktalnej są powszechnie spotykane. Przykładem mogą być systemy wodne rzek, linie brzegowe, szczyty górskie, chmury, turbulencje.

5 Na podstawie Wikipedii: https://pl.wikipedia.org/wiki/Ci%C5%9Bnienie_atmosferyczne, [online: dostęp, dn. 10.11.2017].

6 Cytat na podstawie: http://mathspace.pl/matematyka/fraktalne-oblicze-natury-czyli-geometria-fraktalna-czesc-1/, [online: dostęp 20.11.2017].

Człowiek od zawsze próbował poznać i opisać otaczający go świat. Geografowie wykorzystywali w tym celu narzędzia matematyczne, a matematycy sięgali do pojęć przyrodniczych. Wiele zjawisk zachodzących w przyrodzie jest nadal niezrozumiałych i nie daje się ująć w formuły matematyczne. Być może to fraktale są kluczem do ich zrozumienia. Rozwój wiedzy o fraktalach i zastosowanie ich do opisu geometrycznego obiektów w naturze sprawiły, że pojawiło się wiele teorii związanych z samopodobieństwem i jego własnościami.

Czy wiesz, że…

Linia brzegowa Wielkiej Brytanii jest bardzo poszarpana, zbliżona w swym przebiegu do krzywej Kocha, której wymiar fraktalny wynosi 1,2618.

Polska linia brzegowa jest mało rozczłonkowana, jej wymiar fraktalny wynosi ok. 1,071.

W matematyczno-geograficzne meandry dobrze wpisuje się teoria chaosu, której przesłankami były badania nad modelami przewidywania pogody. Atraktor Lorenza czy zbiór Mandelbrota to atrakcyjne graficznie obiekty, które mogą stać się tematami prac projektowych, na przykład wykonywanych metodą WebQuest. Dynamiczne układy deterministyczne (takie jak błyskawica) są opisywane za pomocą układów nieliniowych. Z tego powodu w praktyce szkolnej ich wykorzystanie jest znikome.

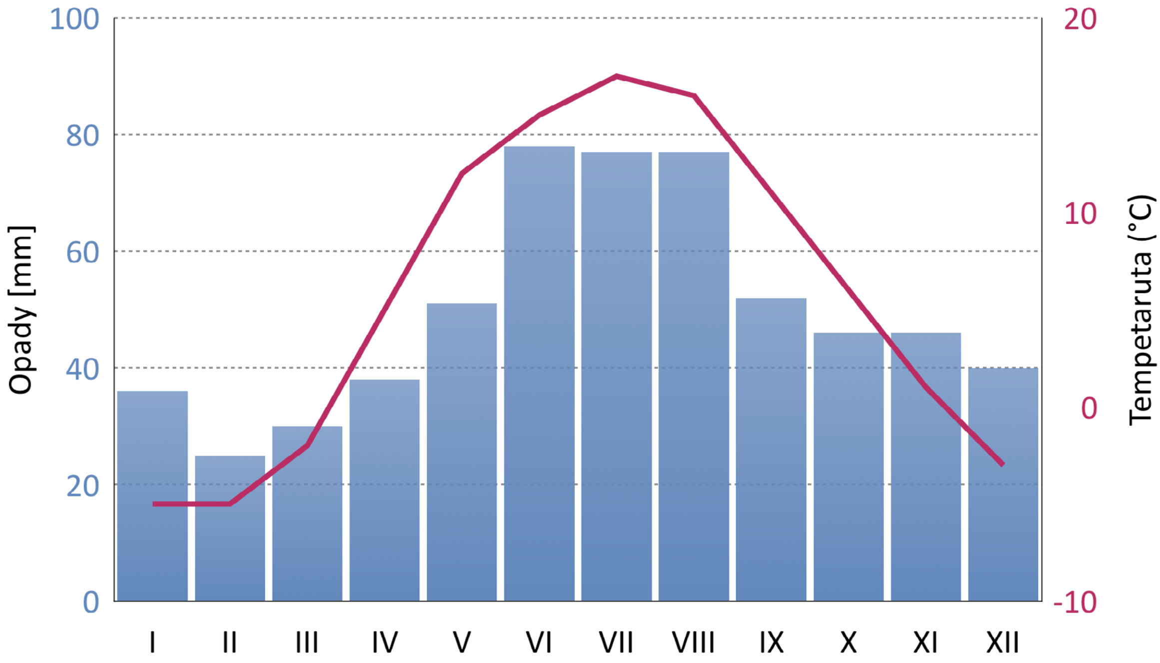
Matematyk może za to czerpać z bardziej „przyziemnych” treści geograficznych do:

- obliczania średnich (średnia roczna temperatura powietrza, średnia gęstość zaludnienia, średni wzrost gospodarczy itp.),
- obliczania wielkości mianowanych (amplitudy dobowej i rocznej powietrza, wartości temperatury po obu stronach pasma górskiego, wilgotności powietrza, ciśnienia atmosferycznego, wartości zasolenia morza, wysokości względnej i bezwzględnej),
- czytania map synoptycznych, rozpoznawania klimatu na podstawie tabel czy wykresów,
- obliczania bilansu wodnego,
- zaznaczania na osi liczbowej kolejnych wydarzeń geologicznych,
- odczytywania i interpretowania danych statystycznych związanych z demografią (przyrostem naturalnym, migracjami, liczbą ludności, gęstością zaludnienia, urbanizacją, obliczaniem zbiorów i plonów, zależnościami komunikacyjnymi, kwestiami dotyczącymi przemian gospodarczych i politycznych).

Bank zadań

Zadanie 1

Rysunek przedstawia klimatogram Suwałk. Na jego podstawie omów cechy klimatu w tej miejscowości[7].



Zadanie 2

Oblicz, jakie będzie ciśnienie atmosferyczne na Górze Sosen (1200 m n.p.m.), wiedząc, że na Przełęczy Brzóz (800 m n.p.m.) było równe 890 hPa, a na Przełęczy Róż (750 m n.p.m.) wynosiło 895 hPa.

Zadanie 3

Oblicz wilgotność względną powietrza (w %), wiedząc, że ciśnienie pary wodnej wynosi 25 hPa, a maksymalne ciśnienie przy panującej tam temperaturze jest równe 35 hPa.

Zadanie 4

W 4 kg wody morskiej jest rozpuszczone około 60 g soli. Oblicz zasolenie tego morza.

7 Na podstawie: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Klimatogram_SUWA%C5%81K_na_podstawie_danych_GUS_i_IMiGW.jpg.

Zadanie 5

W naszym mieście w tym roku urodziło się 900 dzieci, a zmarło 600 osób. Na koniec tego roku liczba ludności była równa 40 000 osób. Oblicz wskaźnik przyrostu naturalnego w naszym mieście.

Zadanie 6

Nasza miejscowość zajmuje 6 km^2 i mieszka w niej 1200 osób. Oblicz gęstość zaludnienia w naszym mieście.

Zadanie 7

W populacji 8000 osób znajduje się 4200 kobiet. Oblicz wskaźnik feminizacji.

Zadanie 8

W pewnej gminie w miastach mieszka 200 000, a na wsiach 60 000 osób. Oblicz wskaźnik urbanizacji w tej gminie.

Zadanie 9

Oblicz temperaturę panującą na głębokości 2000 km, znając średni stopień geotermiczny Ziemi.

Zdanie 10

Oblicz współczynnik aktywności zawodowej w miejscowości Nowe Wrota, wiedząc, że liczba ludności aktywnej zawodowo wynosi 20 000 osób i jest 1200 osób w wieku produkcyjnym.

Rozpoznanie

Rozwiązywanie zadań takich jak powyższe wymaga od uczniów rozpoznania sytuacji matematycznej, przypomnienia sobie potrzebnych twierdzeń, wzorów i pojęć, przegrupowania (połączenia nowych elementów ze znanymi) oraz wyizolowania danych i szukanych.

Nauczyciel – mentor zadaje uczniom pytania i udziela wskazówek, tak aby wywołać u nich odpowiednie czynności myślowe oraz sprowokować pożądane w danej sytuacji działania. W efekcie uzyskane umiejętności powinny wystarczyć młodzieży do samodzielnego rozwiązania podobnych zadań z wykorzystaniem poznanych strategii.

W zadaniach trudniejszych warto zwrócić uwagę na potrzebę ułożenia planu rozwiązania – rozpatrywania problemu z różnych stron, badania szczegółów, wiązania ich w różny sposób. Uczniowie uważają, że w pracy nad zadaniem najważniejsze jest jego rozwiązanie.

Nic bardziej błędnego – najistotniejsza jest refleksja: mająca odpowiednią strukturę oraz uwypuklająca najważniejsze (przełomowe) momenty w pracy nad szukaniem rozwiązania, czyli konkretyzację i uogólnienie.

Konkretyzacja w zadaniach czysto teoretycznych rozpoczyna się najczęściej od podania przykładów matematycznych, by lepiej zrozumieć pytanie oraz żeby przygotować i sprawdzić uogólnienie.

Podsumowanie

Za podsumowanie niech posłużą słowa osiemnastowiecznego angielskiego poety Williama Blake'a:

„Zobaczyć świat w ziarenku piasku,
Niebiosa w jednym kwiecie z lasu.
W ściśniętej dłoni zamknąć bezmiar,
W godzinie – nieskończoność czasu".

Bibliografia

Encyklopedia geografia, (2009), Wilson W. (red.), Kraków: Wydawnictwo GREG.

J. Mason, (2011), Matematyczne myślenie, Warszawa: WSIP.

B. Medyńska-Gulij, (2016), Kartografia, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Podstawa programowa kształcenia ogólnego.

J. Makowski, (2016), Geografia fizyczna świata, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

A. Bragdon, D. Gamon, (2008), Ćwicz swój umysł, Warszawa: Wyd. K.E. Liber.

http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_grafow/2011/05/16/Cztery_barwy_wystarcza/.

https://anitix.wordpress.com/2010/12/08/cztery-kolory-albo-nic/.

http://docplayer.pl/15564156-Zastosowanie-teorii-grafow-w-geograficznych-systemach-informacyjnych.html.

Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

Ośrodek
Rozwoju
Edukacji

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny